G. G. Kasparov, The operator K-functor and extensions of C^*-algebras, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 1980, Volume 44, Issue 3, 571–636

СЕРИЯ
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
Том 44, № 3, 1980

УДК 517.98

Г. Г. КАСПАРОВ

ОПЕРАТОРНЫЙ K-ФУНКТОР И РАСШИРЕНИЯ C^*-АЛГЕБР

Введение

Изучение операторных алгебр методами, заимствованными из гомотопической топологии, началось сравнительно недавно. Как и в каждой алгебраической науке, в теории C^*-алгебр встает вопрос классификации. При этом, как обычно, выделяется класс более простых объектов, из которых с помощью некоторых известных операций получаются более сложные. Одной из таких операций является операция расширения. Исследование простейших расширений вида $0 \to \mathcal{K} \to D \to C(X) \to 0$, где $\mathcal{K}$ — алгебра компактных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве, а $C(X)$ — алгебра непрерывных функций на компакте X, проведенное в работе Брауна, Дагласа и Филлмора ([9]), привело к важному результату (который в последние годы был в центре внимания специалистов по теории C^*-алгебр). Оказалось, что группа, построенная из расширений указанного вида, изоморфна хорошо известному в топологии гомологическому K-функтору $K_{-1}(X)$. При некоторых дополнительных предположениях исходное расширение (а следовательно, и алгебра D) определяется элементом этой группы однозначно с точностью до изоморфизма. Это позволило, в частности, полностью описать C^*-алгебры некоторых разрешимых групп Ли, указав соответствующие им пространства X и элементы в группах $K_{-1}(X)$ (см. ([23]), ([25])).

В настоящей работе результаты Брауна, Дагласа, Филлмора ([9]) распространяются на случай самых общих расширений вида

$$0 \to B \to D \to A \to 0. \tag{1}$$

В работе построен общий операторный K-функтор $K_*K^*(A, B)$, частными случаями которого являются как обычный когомологический K-функтор $K^*(B)$, так и гомологический K-функтор $K_*(A)$ (определенный в работе ([15])). Этот новый K-функтор обладает рядом простых свойств (гомотопическая инвариантность, периодичность Ботта, точные последовательности и т. д.), которые позволяют эффективно вычислять его в конкретных примерах. Все основные результаты, относящиеся к K-функтору $K_*K^*(A, B)$ (кроме точных последовательностей), получены в предположении, что алгебра A сепарабельна, а B имеет счетную аппроксимативную единицу.

Чтобы описать связь K-функтора с расширениями, удобно перейти от расширений вида (1) к расширениям вида

$$0 \to \mathcal{K} \otimes B \to D \to A \to 0. \qquad (2)$$

Каждому расширению вида (1) однозначно соответствует некоторое расширение вида (2) (см. замечание 2 § 7). При условии, что алгебра A *ядерна*, каждое расширение вида (2) определяет элемент группы $K_{-1}K(A, B) = KK^1(A, B)$. Расщепимым расширениям (т. е. расширениям, допускающим гомоморфизм-сечение $A \to D$) соответствует нулевой элемент указанной группы. Обратно, каждому элементу группы $KK^1(A, B)$ однозначно (с точностью до унитарной эквивалентности) соответствует некоторое, так называемое *поглощающее* расширение вида (2). Таким образом, классы унитарной эквивалентности поглощающих расширений находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами группы $KK^1(A, B)$ (по аналогии с ([9])). Произвольное же расширение (вида (1) или (2)) становится поглощающим после прибавления к нему (однозначно определенного) расщепимого поглощающего расширения. (По поводу сложения расширений см. § 7.) Тем самым элемент группы $KK^1(A, B)$ определяет, так сказать, «стабильный тип» расширения.

Отметим, что, кроме теории расширений, операторный K-функтор, зависящий от пары аргументов, может быть полезен и в других вопросах. Так, например, семейство эллиптических операторов на замкнутом многообразии X, параметризованное точками компакта Y, определяет элемент группы $KK^0(C(X), C(Y))$, а не только элемент группы $K^0(Y)$, как в ([7]). Группы $K_*K^*(C(X), C(Y))$ допускают также хорошее гомотопическое определение (см. § 6).

Все результаты настоящей работы относятся одновременно к трем категориям C^*-алгебр: комплексных, вещественных и «вещественных» алгебр (см. § 1). При этом рассматриваются C^*-алгебры с действием фиксированной компактной группы G (эквивариантная K-теория и теория расширений). Оказалось также, что K-функтор $KK(A, B)$ более естественно определяется на категории $\mathbf{Z}_2$-градуированных C^*-алгебр (см. § 2). Обычные C^*-алгебры при этом рассматриваются как тривиально градуированные: $B^{(0)} = B$, $B^{(1)} = 0$. Полагая затем $K_{p-q}K(A, B) = KK^{q-p}(A, B) = KK(A \hat{\otimes} C_{p,q}, B) = KK(A, B \hat{\otimes} C_{q,p})$, где $C_{p,q}$ — алгебра Клиффорда, получаем градуированный K-функтор $K_*K^*(A, B)$.

Основные результаты работы анонсированы в заметке ([16]). Содержание работы следующее. В § 1 приведен список обозначений и основных фактов, используемых в дальнейшем. § 2 содержит сведения, касающиеся градуированных алгебр и алгебр Клиффорда. Определение K-функтора дано в § 4. Отметим, что это определение фактически включает в себя гомотопическую инвариантность. Основную часть § 4 и весь § 3 занимает наиболее сложная техническая конструкция работы — *произведение-пересечение*, которая одновременно объединяет в себе (и существенно обобщает) как конструкцию внешнего произведения для гомологического или когомологического K-функтора, так и конструкцию индекса пересе-

чения между этими K-функторами. Непосредственным следствием из существования произведения-пересечения является теорема 6 § 4, которую можно рассматривать как наиболее общую теорему периодичности для K-функтора. Из этой теоремы в § 5 получены: теорема о формальной периодичности (Клиффорда), теорема о периодичности Ботта и теорема об изоморфизме Тома.

Стоит сказать, что при определении градуированного K-функтора (см. § 5) встает вопрос о выборе знаков. Например, изоморфизм $C_{p,q}\hat{\otimes}C_{1,1}\simeq C_{p+1,q+1}$ можно определить многими различными способами, что приводит к различным (отличающимся знаком) отождествлениям $KK(A\hat{\otimes}C_{p,q}, B)$ с $KK(A\hat{\otimes}C_{p+1,q+1}, B)$. Наиболее удачного, «канонического» выбора всех используемых изоморфизмов алгебр Клиффорда, по-видимому, не существует. Однако некоторый согласованный выбор возможен, и он сделан в § 2. При этом оказалось полезным введенное в § 2 понятие *ориентации* алгебры Клиффорда.

В § 6 рассмотрены частные случаи операторного K-функтора $K_*K^*(A, B)$, когда одна из двух алгебр A или B совпадает с полем скаляров C. В случае $B=C$ это дает гомологический K-функтор $K_*(A)$ (см. ([15])), а в случае $A=C$ — обычный (когомологический) K-функтор $K^*(B)$. При этом $K^*(B)$ реализуется при помощи фредгольмовых операторов над C^*-алгеброй B, антикоммутирующих с представлением алгебры Клиффорда. (Впервые такая интерпретация $K^*(B)$ была дана в работе ([15]), § 8). Оставшаяся часть § 6 посвящена гомотопическому описанию $K_*K^*(C(X), C(Y))$ в случае, когда X и Y — конечные клеточные комплексы.

Следует особо отметить теорему 1 § 6. Вместе с леммой 1 § 6 она используется в § 7 для отождествления полугруппы $\mathrm{Ext}(A, B)$, построенной из расширений вида (2), с $KK^1(A, B)$. В этом смысле можно рассматривать теорему 1 § 6 как теорему о гомотопической инвариантности для $\mathrm{Ext}\,(A, B)$. Кроме того, из этой теоремы вытекает совпадение двух определений $K_*(A)$: определения работы ([15]) и определения заметки ([14]). Доказательство теоремы 1 § 6 полностью основано на использовании конструкции произведения-пересечения. (Ср. также теорему 1 § 5 в ([15]).)

Кроме изоморфизма $\mathrm{Ext}\,(A, B)\simeq KK^1(A, B)$, который устанавливается обычными методами (([3]), ([4])) с применением обобщенной теоремы Стайнспринга, § 7 содержит теоремы о точных последовательностях для K-функтора (теоремы 2 и 3). Граничные гомоморфизмы в этих точных последовательностях удалось описать как индексы пересечения. В конце § 7 рассмотрены расширения градуированных алгебр.

В § 7 впервые появляется дополнительное ограничение на первый аргумент K-функтора $K_*K^*(A, B)$ — условие *ядерности.* (Относительно понятия ядерности см., например, ([4]).) В приложениях условие ядерности, видимо, не является слишком стеснительным ограничением. Напомним, что, например, все C^*-алгебры типа I, все C^*-алгебры связных локально компактных групп, а также C^*-алгебры дискретных аменабельных групп ядерны. Класс ядерных алгебр замкнут как относительно рас-

ширений, так и относительно перехода к идеалу, факторалгебре и индуктивному пределу (см. ([19]), ([21]), ([22])). Впрочем, стоит отметить, что в § 7 ядерность алгебры A используется не непосредственно. В действительности нам необходимы только два технических результата, в формулировки которых входит условие ядерности: теорема Чоя — Эффроса о существовании вполне положительных сечений ([11]) и обобщенная теорема Войкулеску (см. ([17]) и п. 16 § 1). Вместо ядерности A можно было бы использовать любое другое условие на A и B, обеспечивающее справедливость этих двух теорем.

Во второй части работы будет разобрана целая серия примеров расширений, связанных с C^*-алгебрами групп Ли. Конструкция произведения-пересечения позволяет полностью вычислить K-функтор (как гомологический, так и когомологический) для широкого класса групповых C^*-алгебр. В частности, если Γ — односвязная разрешимая группа Ли, то $K_i(C^*(\Gamma))\simeq K_{i+\dim\Gamma}(C)$, $K^i(C^*(\Gamma))\simeq K^{i+\dim\Gamma}(C)$. С использованием точных последовательностей и некоторых простых геометрических соображений это часто дает полную информацию о классе расширения типа

$$0\to B\to C^*(\Gamma)\to C^*(\Gamma/\Gamma_1)=A\to 0$$

в группе $KK^1(A, B)$, а нерасщепимость расширений такого типа обычно получается просто из рассмотрения точных последовательностей. (Простейший пример — группа Гейзенберга — был приведен в заметке ([16]).) К сожалению, расширения, связанные с групповыми C^*-алгебрами, как правило, поглощающими не являются, поэтому соответствующие групповые C^*-алгебры нельзя «вычислить» с точностью до изоморфизма, используя только K-функтор.

В заключение автор приносит благодарность профессору А. А. Кириллову за постановку задачи о «вычислении» C^*-алгебры группы Гейзенберга. Эта задача стимулировала предлагаемое исследование. Автор благодарен также Л. Г. Брауну, Р. Г. Дагласу и П. А. Филлмору за препринт их работы ([9]).

§ 1. Обозначения и вводные замечания

1. Далее под алгеброй всегда понимается C^*-алгебра, под гомоморфизмом — $*$-гомоморфизм, под идеалом — двусторонний замкнутый идеал. Все результаты относятся одновременно к категории вещественных, категории комплексных и категории «вещественных» алгебр. «*Вещественной*» алгеброй называется комплексная алгебра, снабженная антилинейной инволюцией $b\to\bar b$ со свойствами: $\overline{b_1b_2}=\bar b_1\cdot\bar b_2$, $\overline{(b^*)}=(\bar b)^*$. Гомоморфизмы таких алгебр должны сохранять «вещественную» инволюцию. Кроме того, мы будем считать, что фиксированная компактная группа G, удовлетворяющая второй аксиоме счетности, действует как группа автоморфизмов на всех рассматриваемых алгебрах, и все гомоморфизмы эквивариантны. Действие G на алгебре B называется *непрерывным*, если отображение $G\times B\to B$: $(g, b)\to g(b)$ непрерывно по нор-

ме. Группа G, действующая на «вещественной» алгебре, должна быть снабжена («вещественной») инволюцией $g \to \bar{g}$ и должно быть выполнено условие $\overline{g(b)} = \bar{g}(\bar{b})$. Элемент $x \in B$ назовем *инвариантным*, если $\bar{x} = x$; $g(x) = x$ $\forall g = G$. Если B — алгебра с 1, и 1 — инвариантный элемент, то алгебра B называется *унитальной*.

2. Через C обозначается поле скаляров, т. е. алгебра $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$. «Вещественная» инволюция — комплексное сопряжение, действие G тривиально.

3. Все тензорные произведения алгебр рассматриваются с минимальной C^*-нормой. «Вещественная» инволюция и действие G на тензорном произведении алгебр однозначно определяются условиями:

$$\overline{b_1 \otimes b_2} = \bar{b}_1 \otimes \bar{b}_2, \quad g(b_1 \otimes b_2) = g(b_1) \otimes g(b_2) \quad \forall g \in G.$$

4. M_n — алгебра матриц $n \times n$ над C, «вещественная» инволюция — поэлементное комплексное сопряжение, действие G определяется некоторым унитарным («вещественным») представлением G в пространстве C^n.

5. Если B — алгебра, а X — локально компактное пространство, то $B(X)$ — алгебра непрерывных функций на X со значениями в B, стремящихся к 0 на ∞. ***Гомотопией гомоморфизмов*** $\varphi_t : A \to B$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, называется гомоморфизм $\{\varphi_t\} : A \to B[\alpha, \beta]$.

6. Через $\tilde{B}$ обозначается алгебра B с присоединенной 1 (причем $\bar{1} = 1$, $g(1) = 1$ $\forall g \in G$). Всякий гомоморфизм $\varphi : A \to B$ однозначно продолжается до унитального гомоморфизма $\tilde{\varphi} : \tilde{A} \to \tilde{B}$. Если алгебра B сама унитальна, то $\tilde{B} \simeq B \oplus C$, поэтому любой гомоморфизм $A \to B$ продолжается до унитального гомоморфизма $\tilde{A} \to \tilde{B} \xrightarrow{p} B$, где p — проекция.

7. Напомним, что алгебра со счетной аппроксимативной единицей обладает строго положительным элементом, а наличие строго положительного элемента k влечет за собой наличие счетной *возрастающей абелевой* аппроксимативной единицы, которая может быть определена, например, по формуле $u_i = k^{1/i}$ или $u_i = k(k + \frac{1}{i})^{-1}$, $i = 1, 2, \ldots$ (см. ([1])). Если элемент k инвариантен (что для алгебр с непрерывным действием G легко достигается усреднением), то все u_i инвариантны.

Критерий строгой положительности. *Элемент $k \in B$ строго положителен в том и только в том случае, когда $\forall$ эрмитова $b \in B$, $\forall$ числа $\varepsilon > 0$ $\exists$ такое число $c > 0$, что в алгебре $\tilde{B}$ $b \leqslant ck + \varepsilon$.*

Доказательство. Необходимость. Поскольку $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ такое i, что

$$\left[\left(\frac{1}{i}\right)\left(k + \frac{1}{i}\right)^{-1}\right] \cdot b \cdot \left[\left(\frac{1}{i}\right)\left(k + \frac{1}{i}\right)^{-1}\right] \leqslant \varepsilon,$$

то $b \leqslant \varepsilon(ik+1)^2 \leqslant ck + \varepsilon$.

Достаточность. Если f — положительный функционал на B, $\tilde{f}$ — его каноническое продолжение на $\tilde{B}$, то $\forall b \in B$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ такое $c > 0$, что $f(b^*b) \leqslant \tilde{f}(ck + \varepsilon) = c \cdot f(k) + \varepsilon \cdot \|f\|$. Поэтому из $f(k) = 0$ следует, что $f(b^*b) = 0$, откуда $f(b) = 0$. ■

Следствие 1. *Из наличия строго положительных элементов в идеале $J \subset B$ и факторалгебре B/J вытекает наличие строго положительного элемента в B.* ■

Следствие 2. *Если подалгебры A и $B \subset D$ имеют строго положительные элементы, то минимальная подалгебра, содержащая A и B, также имеет строго положительный элемент. Если A унитальна и сепарабельна, а B имеет строго положительный элемент, то минимальная подалгебра, содержащая $A \cdot B$, имеет строго положительный элемент.* ■

8. $\mathscr{M}(B)$ — алгебра мультипликаторов (двойных централизаторов) алгебры B. Напомним (см. ([10])), что пара отображений $T_{(1)}, T_{(2)}: B \to B$ называется *мультипликатором*, если $\forall x, y \in B$ $x \cdot T_{(1)}(y) = T_{(2)}(x) \cdot y$.

Строгая топология на $\mathscr{M}(B)$ порождена семейством полунорм

$$\{\|T\|_b = \|T_{(1)}(b)\| + \|T_{(2)}(b)\| \mid b \in B\},$$

где $T = (T_{(1)}, T_{(2)}) \in \mathscr{M}(B)$. Непрерывное действие G на B определяет действие G на $\mathscr{M}(B)$: $g(T_{(i)})(b) = g(T_{(i)}g^{-1}(b))$, $i = 1, 2$. В общем случае это действие G непрерывно в строгой топологии (но не по норме). «Вещественная» инволюция на $\mathscr{M}(B)$ определяется по формуле: $\bar{T}_{(i)}(b) = \overline{T_{(i)}(\bar{b})}$, $i = 1, 2$. Алгебра B вкладывается в $\mathscr{M}(B)$ как идеал. Факторалгебра $\mathscr{M}(B)/B$ обозначается через $\mathscr{O}(B)$. Если J — идеал в B, то определен гомоморфизм *ограничения* $\mathscr{M}(B) \to \mathscr{M}(J)$, тождественный на J.

9. Напомним, что алгебра $\mathscr{M}(B(X))$ изоморфна алгебре непрерывных в строгой топологии и ограниченных по норме функций на X со значениями в $\mathscr{M}(B)$ (см. ([2])).

10. Пусть B — алгебра с непрерывным действием G. Напомним определение гильбертова B-модуля (см. ([18]) и ([17])). Рассмотрим линейное пространство E над полем C, одновременно являющееся правым B-модулем, причем $\forall x \in E$, $\forall b \in B$, $\forall \lambda \in C$ $\lambda(xb) = (\lambda x)b = x(\lambda b)$. Пространство E называется *предгильбертовым* B-модулем, если определено скалярное произведение $E \times E \to B$, удовлетворяющее $\forall x, y, z \in E$, $\forall b \in B$, $\forall \lambda \in C$ условиям:

1°. $(x, y+z) = (x, y) + (x, z)$; $(x, \lambda y) = \lambda(x, y)$.

2°. $(x, yb) = (x, y)b$.

3°. $(y, x) = (x, y)^*$.

4°. $(x, x) \geqslant 0$, причем если $(x, x) = 0$, то $x = 0$.

Кроме того, на E должны быть определены линейное, непрерывное по норме действие G и (в «вещественном» случае) антилинейная инволюция $x \to \bar{x}$, удовлетворяющие $\forall g \in G$, кроме обычного условия $\overline{g(x)} = \bar{g}(\bar{x})$, также следующим:

5°. $g(xb) = g(x)g(b)$; $\overline{xb} = \bar{x}\bar{b}$.

6°. $(g(x), g(y)) = g((x, y))$; $(\bar{x}, \bar{y}) = \overline{(x, y)}$.

Элемент $x \in E$ называется *инвариантным*, если $\bar{x} = x$; $g(x) = x$ $\forall g \in G$. Полагая $\|x\| = \|(x, x)\|^{1/2}$, получим норму на E. Если пространство E полно по этой норме, оно называется *гильбертовым* B-модулем. Гильбертовой прямой суммой $\bigoplus_{i \in I} E_i$ называется пополнение соответствующей алгебраиче-

ской прямой суммы по норме, определенной скалярным произведением: $(\bigoplus_i x_i, \bigoplus_i y_i) = \sum_{i\in I} (x_i, y_i)$.

11. Гильбертово пространство над B определяется как гильбертова прямая сумма $\mathscr{H}_B = \bigoplus_{i=1}^{\infty} (V_i \otimes_C B)$, где $\{V_i\}$ — счетный набор конечномерных евклидовых пространств, в которых реализуются (с точностью до изоморфизма) все неприводимые унитарные представления группы G (в «вещественном» случае рассматриваются «вещественные» представления). Каждое из V_i должно повторяться в рассматриваемом наборе бесконечное число раз. Скалярное произведение на V_i считается антилинейным по первому аргументу. Скалярное произведение на $V_i \otimes B$ определяется по формуле:

$$(x_1 \otimes b_1, x_2 \otimes b_2) = (x_1, x_2) b_1^* b_2.$$

В случае $B = C$ получается обычное гильбертово пространство $\mathscr{H}$. (Скалярные произведения на протяжении всей статьи считаются линейными по второму и антилинейными по первому аргументу.)

12. Системой образующих гильбертова B-модуля E называется такое множество элементов $\{x_i\}_{i\in I} \subset E$, что конечные суммы $\{\sum_k x_{i_k} b_k \mid b_k \in B\}$ плотны в E. Если B имеет счетную аппроксимативную единицу, то $\mathscr{H}_B$ имеет счетную систему образующих.

ТЕОРЕМА СТАБИЛИЗАЦИИ (см. ([17])). *Пусть B — алгебра с непрерывным действием G, а гильбертов B-модуль E имеет счетную систему образующих. Тогда $E \oplus \mathscr{H}_B \simeq \mathscr{H}_B$.*

13. Если E — гильбертов B-модуль, то через $\mathscr{L}(E)$ обозначается множество отображений $T: E \to E$, для которых существует $T^*: E \to E$, удовлетворяющее условию: $(T(x), y) = (x, T^*(y))$ $\forall x, y \in E$. Действие G и «вещественная» инволюция определяются на $\mathscr{L}(E)$ по формулам: $\overline{T}(x) = \overline{T(\overline{x})}$; $g(T)(x) = g(Tg^{-1}(x))$, $g \in G$, $x \in E$. Всякий элемент $T \in \mathscr{L}(E)$ является ограниченным, линейным, B-модульным отображением (см. ([18]) и ([17])). С нормой, индуцированной из пространства ограниченных линейных операторов на E, $\mathscr{L}(E)$ является C^*-алгеброй.

14. Положим при $x, y, z \in E$ $\theta_{x,y}(z) = x \cdot (y, z)$. Тогда $\theta_{x,y} \in \mathscr{L}(E)$. Замыкание в $\mathscr{L}(E)$ линейного подпространства, порожденного операторами $\theta_{x,y}$, является идеалом в алгебре $\mathscr{L}(E)$. Обозначим его через $\mathscr{K}(E)$. Положим $\mathscr{K} = \mathscr{K}(\mathscr{H})$, $\mathscr{K}_B = \mathscr{K}(\mathscr{H}_B)$. Нетрудно проверить, что $\mathscr{K}(B) \simeq B$, $\mathscr{K}_B \simeq \mathscr{K} \otimes B$.

ТЕОРЕМА (см. ([17])). *Для любого гильбертова B-модуля E соответствие $T \in \mathscr{L}(E) \to (T_{(1)}, T_{(2)}) \in \mathscr{M}(\mathscr{K}(E))$, где $T_{(1)}(\theta_{x,y}) = \theta_{T(x),y}$, $T_{(2)}(\theta_{x,y}) = \theta_{x,T^*(y)}$ $(x, y \in E)$, определяет изоморфизм $\mathscr{L}(E)$ на $\mathscr{M}(\mathscr{K}(E))$.*

Следствие. $\mathscr{L}(\mathscr{H}_B) \simeq \mathscr{M}(\mathscr{K} \otimes B)$.

15. ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРЕМА СТАЙНСПРИНГА (см. ([17])). *Пусть A — сепарабельная унитальная алгебра, B имеет счетную аппроксима-*

тивную единицу, действие G на A и B непрерывно, φ: $A \to \mathcal{M}(\mathcal{K} \otimes B)$ *унитально, вполне положительно, эквивариантно и «вещественно». Существует такой унитальный гомоморфизм* ρ: $A \to \mathcal{M}(M_2 \otimes \mathcal{K} \otimes B) = \mathcal{L}(\mathcal{H}_B \oplus \mathcal{H}_B)$, *что* $\forall a \in A$ $\varphi(a) \oplus 0 = q\rho(a) q$, *где* $q \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_B \oplus \mathcal{H}_B)$ *— проектор на первое прямое слагаемое.*

16. Пусть E_1 и E_2 — гильбертовы B-модули. Отображения $\varphi_1 : A \to \mathcal{L}(E_1)$ и $\varphi_2 : A \to \mathcal{L}(E_2)$ называются *аппроксимативно эквивалентными*, если существует такая последовательность G-эквивариантных («вещественных») изометрий $u_n : E_2 \to E_1$, что $\forall a \in A$, $\forall n$

$$u_n^* \varphi_1(a) u_n - \varphi_2(a) \in \mathcal{K}(E_2) \quad \text{и} \quad \lim_{k \to \infty} \| u_k^* \varphi_1(a) u_k - \varphi_2(a) \| = 0.$$

Обозначим через A_{inv} и $\mathcal{H}_{\text{inv}}$ соответственно G-инвариантные элементы в алгебре A и гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Всякий гомоморфизм $\pi : A \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ определяет путем ограничения гомоморфизм $\pi_{\text{inv}} : A_{\text{inv}} \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\text{inv}})$. Вложение $\pi : A \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ назовем G-вложением, если $(1 \oplus \pi)_{\text{inv}} : (\mathcal{L}(C^n) \otimes A)_{\text{inv}} \to \mathcal{L}((C^n \otimes \mathcal{H})_{\text{inv}})$ является вложением для любого n и любого унитарного действия G на C^n. Если A сепарабельна, то (унитальные) G-вложения всегда существуют (см. [17]). G-вложение $A \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ назовем *правильным*, если его унитальное продолжение $\tilde{A} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ является G-вложением и $1 \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ не содержится в $A + \mathcal{K}$. Если π — G-вложение, то $\pi \oplus 0 : A \to \mathcal{L}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ — правильное G-вложение.

ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРЕМА ВОЙКУЛЕСКУ. *Пусть алгебра A сепарабельна, B имеет счетную аппроксимативную единицу, действие G на A и B непрерывно, $A \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ — правильное G-вложение. Предположим, что $\forall n$ всякое вполне положительное отображение $\tilde{A}/(A \cap \mathcal{K}) \to M_n \otimes B$ ядерно (например, достаточно, чтобы хотя бы одна из двух алгебр A или B была ядерной). Алгебру $\mathcal{L}(\mathcal{H}) = \mathcal{M}(\mathcal{K}) \otimes C$ будем рассматривать как подалгебру скалярных операторов в $\mathcal{L}(\mathcal{H}_B) = \mathcal{M}(\mathcal{K} \otimes B)$ и обозначим композицию $A \subset \mathcal{L}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ через π. Тогда если $\varphi : A/(A \cap \mathcal{K}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ — произвольный гомоморфизм, то $\varphi \oplus \pi : A \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_B \oplus \mathcal{H}_B)$ аппроксимативно эквивалентен π.*

Доказательство получается из унитального случая (см. [17], теорема 6) заменой A, φ и π на $\tilde{A}$, $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\pi}$. ■

Отметим, что если $\psi : A \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ — произвольное вложение, то $\psi' = \bigoplus_{1}^{\infty} \psi$ обладает тем свойством, что $\psi'(A) \cap \mathcal{K} = 0$.

17. *Если u — унитарный элемент в $\mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$, то существует такая унитарная гомотопия $\{u_t\}_{t \in [0,1]} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{B[0,1]})$, что $u_0 = 1$, $u_1 = u$. Если элемент u инвариантен, то $\{u_t\}$ — тоже.*

Доказательство. В пространстве $L^2[0, 1]$ определим при $t \in (0, 1]$ унитарный оператор U_t по формуле: $(U_t f)(x) = \sqrt{t} f(tx)$, $f \in L^2[0, 1]$. Реализуем $\mathcal{H}$ как $L^2[0, 1] \otimes \mathcal{H}$ и положим $R_t = U_t \otimes 1$. Семейства $\{R_t\}_{t \in (0,1]}$ и $\{R_t^*\}_{t \in (0,1]}$ непрерывны в сильной операторной топологии; при $t \to 0$ $R_t \to 0$ сильно; $R_t R_t^* = 1$; $R_1 = 1$ (см. [12], 10.8.1). Рассматривая $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ как про-

странство скалярных операторов в $\mathscr{L}(\mathscr{H}_B)$, получим семейство $\{R_t\}_{t\in(0,1]}$ в $\mathscr{L}(\mathscr{H}_B)$. Пусть при $t>0$ $u_t=R_t^*uR_t+(1-R_t^*R_t)$; $u_0=1$. Нетрудно проверить, что $\{u_t\}_{t\in[0,1]}\in\mathscr{L}(\mathscr{H}_{B[0,1]})$ — искомый элемент. ■

18. Пусть A, B, D — алгебры, $\varphi: A\to D$, $\psi: B\to D$ — гомоморфизмы. Подалгебра $A\oplus_D B=\{(a, b)\in A\oplus B\,|\,\varphi(a)=\psi(b)\}\subset A\oplus B$ называется *расслоенной суммой* A и B над D с проекциями φ и ψ. В частности, при $\alpha=0$ и $\alpha=1$ определим α-цилиндр $Z_\alpha(A, D, \varphi)$ гомоморфизма $\varphi: A\to D$ как расслоенную сумму $A\oplus_D D[0, 1]$ с проекциями $\varphi: A\to D$ и $D[0, 1]\to D[\alpha]=D$. Если φ — вложение или проекция на факторалгебру, то будем сокращенно обозначать α-цилиндр через $Z_\alpha(A, D)$. Конус $S(A, D, \varphi)$ гомоморфизма $\varphi: A\to D$ определяется как расслоенная сумма $A\oplus_D D[0, 1)$ с проекциями $\varphi: A\to D$ и $D[0, 1)\to D[0]$. Сокращенное обозначение: $S(A, D)$. Используя следствие 1 п. 7, нетрудно проверить, что из наличия строго положительных элементов в алгебре B и идеале $J\subset B$ вытекает наличие строго положительных элементов в $Z_\alpha(J, B)$, $Z_\alpha(B, B/J)$, $S(J, B)$, $S(B, B/J)$. Для сепарабельности или ядерности этих алгебр достаточно, чтобы такими свойствами обладала алгебра B (см. ([21]), следствие 4).

19. Пусть B — идеал в алгебре D, причем B и D имеют счетные аппроксимативные единицы и действие G на B и D непрерывно. Зафиксируем изоморфизм $u: \mathscr{H}_D\oplus\mathscr{H}_D\simeq\mathscr{H}_B\oplus\mathscr{H}_D$ (см. п. 12). *Существует такой гомоморфизм* $\{\varphi_t\}_{t\in[0,1]}: \mathscr{L}(\mathscr{H}_D\oplus\mathscr{H}_D)\to\mathscr{L}(\mathscr{H}_{D[0,1]}\oplus\mathscr{H}_{D[0,1]})$, *что* $\varphi_1=1$, *а* $u\varphi_0u^{-1}: \mathscr{L}(\mathscr{H}_D\oplus\mathscr{H}_D)\to\mathscr{L}(\mathscr{H}_B\oplus\mathscr{H}_D)$ *совпадает с гомоморфизмом ограничения. При этом*

$$\{\varphi_t\}(M_2\otimes\mathscr{K}_D)\subset M_2\otimes\mathscr{K}_{D[0,1]},\qquad \{\varphi_t\}(M_2\otimes\mathscr{K}_B)\subset M_2\otimes\mathscr{K}_{B[0,1]}$$

(*здесь* $\mathscr{K}_B$ *рассматривается как идеал в* $\mathscr{K}_D$).

Доказательство. По теореме стабилизации (п. 12) имеется изоморфизм

$$\{v_t\}: \mathscr{H}_{D[0,1]}\oplus\mathscr{H}_{D[0,1]}\simeq\mathscr{H}_{Z_0(B,D)}\oplus\mathscr{H}_{D[0,1]}.$$

Ввиду п. 17 можно считать, что его ограничение над точкой $0\in[0, 1]$ совпадает с u, а над точкой $1\in[0, 1]$ — с тождественным отображением. Гомоморфизм ограничения

$$\mathscr{L}(\mathscr{H}_{D[0,1]}\oplus\mathscr{H}_{D[0,1]})\to\mathscr{L}(\mathscr{H}_{Z_0(B,D)}\oplus\mathscr{H}_{D[0,1]})$$

обозначим через $\{\psi_t\}$. Положим $\{\varphi_t\}=\{v_t\}^{-1}\cdot\{\psi_t\}\cdot\{v_t\}$. ■

20. Пусть A — идеал в алгебре D, причем A и D имеют счетные аппроксимативные единицы и действие G на A и D непрерывно. Отождествим $A\oplus\mathscr{H}_D$ с $D\oplus\mathscr{H}_D$ (см. п. 12) и обозначим естественные гомоморфизмы

$$D=D\oplus 0\hookrightarrow\mathscr{L}(D\oplus\mathscr{H}_D),\qquad D=D\oplus 0\to\mathscr{L}(A\oplus\mathscr{H}_D)$$

через φ и ψ соответственно. *Существует такой гомоморфизм*

$$\{\varphi_t\}: D\to\mathscr{L}(D[0, 1]\oplus\mathscr{H}_{D[0,1]}),$$

что $\varphi_0=\varphi$, $\varphi_1=\psi$. *При этом* $\{\varphi_t\}(D)\subset\mathscr{K}(D[0, 1]\oplus\mathscr{H}_{D[0,1]})$, $\{\varphi_t\}(A)\subset$ $\subset\mathscr{K}(A[0, 1]\oplus\mathscr{K}_{A[0,1]})$.

Доказательство получается из наличия изоморфизма

$$Z_1(A, D)\oplus\mathscr{H}_{D[0,1]}\simeq D[0, 1]\oplus\mathscr{H}_{D[0,1]}$$

тем же способом, что и в предыдущем пункте. ■

§ 2. Градуированные алгебры и алгебры Клиффорда

Операторный K-функтор наиболее естественно определяется на категории $\mathbf{Z}_2$-градуированных алгебр. В этом параграфе перечислены основные факты о градуированных алгебрах, необходимые для дальнейшего.

1. C^*-алгебра B называется ($\mathbf{Z}_2$-)*градуированной*, если имеет место разложение $B=B^{(0)}\oplus B^{(1)}$, в котором $B^{(0)}$ и $B^{(1)}$ — такие замкнутые самосопряженные линейные подпространства, что $B^{(i)}\cdot B^{(j)}\subset B^{(i+j)}$ при $i, j\in\mathbf{Z}_2$. Действие G и «вещественная» инволюция сохраняют это разложение. Гомоморфизм $f: B_1\to B_2$ называется градуированным (степени 0), если $f(B_1^{(i)})\subset B_2^{(i)}$ $(i\in\mathbf{Z}_2)$. Градуировка алгебры B называется *тривиальной*, если $B^{(1)}=0$. Любую алгебру B можно рассматривать как тривиально градуированную, полагая $B^{(0)}=B$, $B^{(1)}=0$. В частности, алгебру скаляров C будем считать тривиально градуированной. Для *унитальной* алгебры B должно быть выполнено условие: $1\in B^{(0)}$.

Равенство $\deg x=i$ означает, что $x\in B^{(i)}$.

Градуированный коммутатор $[x, y]$ определяется на однородных элементах $x, y\in B$ по формуле:

$$[x, y] = xy-(-1)^{\deg x\cdot\deg y}yx.$$

Это определение по линейности продолжается на все $x, y\in B$.

2. *Градуированным* называется гильбертов B-модуль E, допускающий разложение в прямую сумму замкнутых подпространств $E=E^{(0)}\oplus E^{(1)}$, причем $\forall i, j\in\mathbf{Z}_2$ $E^{(i)}\cdot B^{(j)}\subset E^{(i+j)}$ (действие B), $(E^{(i)}, E^{(j)})\subset B^{(i+j)}$ (скалярное произведение). Действие G и «вещественная» инволюция сохраняют это разложение. Градуировка E определяет градуировку алгебр $\mathscr{L}(E)$ и $\mathscr{K}(E)$ следующим образом: $\deg T=j$, если $T(E^{(i)})\subset E^{(i+j)}$ $(i, j\in\mathbf{Z}_2)$. Поскольку $\mathscr{M}(B)\simeq\mathscr{L}(B)$ (см. § 1, п. 14), алгебра $\mathscr{M}(B)$ также получает градуировку. Нетрудно проверить, что изоморфизм $\mathscr{L}(E)\simeq\mathscr{M}(\mathscr{K}(E))$ является градуированным. *Противоположная* градуировка гильбертова модуля E получается путем замены $E^{(0)}$ на $E^{(1)}$, а $E^{(1)}$ на $E^{(0)}$. Очевидно, что градуировка $\mathscr{L}(E)$ сохраняется при замене градуировки E на противоположную. Более того, если известно, что градуировка $\mathscr{K}(E)$ индуцирована градуировкой E, то восстановить градуировку E по градуировке $\mathscr{K}(E)$ можно в точности двумя способами: поскольку $\forall x, y\in E$ $\deg x-\deg y=\deg\theta_{x,y}$, достаточно задать $\deg x$ для одного элемента $x\in E$.

Заметим, что если B имеет тривиальную градуировку, то $E^{(0)}$ и $E^{(1)}$ — ортогональные B-подмодули и определен *градуировочный оператор* $\varepsilon\in\mathscr{L}(E)$: $\varepsilon=1$ на $E^{(0)}$, $\varepsilon=-1$ на $E^{(1)}$.

3. *Канонически градуированное* гильбертово пространство $\mathscr{H}_B$ определяется как прямая сумма $\mathscr{H}_B\oplus\mathscr{H}_B$, причем градуировки этих двух сла-

гаемых противоположны, а градуировка первого $\mathscr{H}_B = \bigoplus_{j=1}^{\infty} V_j \otimes B$ определяется тем, что $\forall j$, $\forall x \in V_j$, $\forall b \in B$ $\deg(x \otimes b) = \deg b$. Теорема стабилизации (п. 12 § 1) дословно обобщается на градуированный случай (в доказательстве надо рассматривать однородную систему образующих).

Если $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_B)$ — унитарный элемент степени 0, то существует гомотопия $\{u_t\} \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_{B[0,1]})$ *степени* 0, стягивающая u к 1 (см. п. 17 § 1).

4. Если в алгебре B есть строго положительный элемент h, то имеется также строго положительный элемент k степени 0. В самом деле, пусть $h = h_0 + h_1$, $\deg h_i = i$. Тогда $h^2 \leqslant 2(h_0^2 + h_1^2) = k \in B^{(0)}$.

5. Градуированное вложение $\pi : A \hookrightarrow \mathscr{L}(\mathscr{H})$ называется градуированным G-вложением, если

$$(1 \otimes \pi)^{(0)}_{\mathrm{inv}} : (\mathscr{L}(C^n) \otimes A)^{(0)}_{\mathrm{inv}} \to \mathscr{L}((C^n \otimes \mathscr{H})^{(0)}_{\mathrm{inv}})$$

является вложением для любого n, любой градуировки C^n и любого унитарного действия G на C^n (ср. п. 16 § 1). Если A сепарабельна, то (унитарные) градуированные G-вложения всегда существуют (доказательство сохраняется).

6. Заметим, что тензорное произведение $A \otimes B$ градуированных алгебр A и B имеет естественную градуировку: $\deg(a \otimes b) = \deg a + \deg b$. Определим теперь *кососоммутативное* тензорное произведение $A \hat{\otimes} B$. Обозначим через $A \hat{\odot} B$ алгебраическое тензорное произведение A и B как линейных пространств с той же градуировкой, что и для $A \otimes B$. Определим произведение и инволюцию по формулам:

$$(a_1 \hat{\odot} b_1)(a_2 \hat{\odot} b_2) = (-1)^{\deg b_1 \cdot \deg a_2} (a_1 a_2 \hat{\odot} b_1 b_2),$$
$$(a \hat{\odot} b)^* = (-1)^{\deg a \cdot \deg b} (a^* \hat{\odot} b^*),$$

а C^*-норму — по обычной формуле ([19]):

$$\left\| \sum_{i=1}^m a_i \hat{\odot} b_i \right\|^2 = \sup \frac{(\rho \hat{\odot} \lambda)\left[\left(\sum_{j=1}^n x_j \hat{\odot} y_j\right)^* \left(\sum_{i=1}^m a_i \hat{\odot} b_i\right)^* \left(\sum_{i=1}^m a_i \hat{\odot} b_i\right)\left(\sum_{j=1}^n x_j \hat{\odot} y_j\right)\right]}{(\rho \hat{\odot} \lambda)\left[\left(\sum_{j=1}^n x_j \hat{\odot} y_j\right)^* \left(\sum_{j=1}^n x_j \hat{\odot} y_j\right)\right]}$$

где sup берется по всем ненулевым элементам $\sum_{j=1}^n x_j \hat{\odot} y_j \in A \hat{\odot} B$ и по всем *градуированным* состояниям ρ и λ (т. е. по всем состояниям $\rho = 0$ на $A^{(1)}$ и по всем состояниям $\lambda = 0$ на $B^{(1)}$). Пополнение $A \hat{\odot} B$ по этой норме обозначим через $A \hat{\otimes} B$.

Если в A (или $\mathscr{M}(A)$) есть такой инвариантный эрмитов элемент (*градуировочный оператор*) ε, что $\varepsilon^2 = 1$ и градуировка A определяется по формуле $a\varepsilon = (-1)^{\deg a} \varepsilon a$ (для однородных элементов a), то $A \hat{\odot} B \simeq A \odot B : a \hat{\odot} b \leftrightarrow a\varepsilon^{\deg b} \odot b$. Этот градуированный изоморфизм продолжается до изоморфизма $A \hat{\otimes} B \simeq A \otimes B$. (Аналогично, если ε — градуировоч-

ный оператор в B или $\mathcal{M}(B)$, то соответствие $a\hat{\otimes}b\longleftrightarrow a\otimes\varepsilon^{\deg a}b$ тоже определяет изоморфизм $A\hat{\otimes}B$ на $A\otimes B$). В частности, $\mathcal{K}\hat{\otimes}B\simeq\mathcal{K}\otimes B$.

7. Для $A\otimes B$ имеется изоморфизм перестановки сомножителей $A\otimes B\simeq B\otimes A$. В кососкоммутативном случае аналогичный изоморфизм определяется по формуле:

$$a\hat{\otimes}b\to(-1)^{\deg a\cdot\deg b}b\hat{\otimes}a.$$

8. (Ср. ([24])). Пусть E_1 и E_2 — гильбертовы модули над B_1 и B_2 соответственно, $\varphi:B_1\to\mathcal{L}(E_2)$ — градуированный гомоморфизм. Алгебраическое тензорное произведение $E_1\odot E_2$ является правым B_2-модулем с градуировкой $\deg(x_1\odot x_2)=\deg x_1+\deg x_2$ и скалярным произведением $(x_1\odot x_2,\ y_1\odot y_2)=(x_2,\ \varphi((x_1,\ y_1))y_2)$. Факторизуя $E_1\odot E_2$ по B_2-подмодулю $N=\{z\in E_1\odot E_2\,|\,(z,\,z)=0\}$, а затем пополняя по норме $\|z\|=\|(z,\ z)\|^{1/2}$, получим гильбертов B_2-модуль, который будет обозначаться $E_1\otimes_{B_1}E_2$ либо $E_1\hat{\otimes}_{B_1}E_2$. Соответствие $F\to F\otimes 1$ определяет гомоморфизм $\varphi_*:\mathcal{L}(E_1)\to\mathcal{L}(E_1\otimes_{B_1}E_2)$. Если φ — вложение, то φ_* — тоже вложение. В частности, каждое точное представление $B_1\to\mathcal{L}(H)$ индуцирует точное представление $\mathcal{L}(E_1)\to\mathcal{L}(E_1\otimes_{B_1}H)$.

В случае $E_2=B_2$ и $\varphi:B_1\to B_2\hookrightarrow\mathcal{L}(B_2)$ имеем: $\varphi_*(\mathcal{K}(E_1))\subset\mathcal{K}(E_1\otimes_{B_1}B_2)$. В самом деле,

$$\theta_{x,y}\otimes 1=\lim_{\alpha\to+0}\theta_{x\otimes u_\alpha,\,y\otimes u_\alpha},$$

где $u_\alpha=\varphi((y,\,y)\cdot[(y,\,y)+\alpha]^{-1})$.

Для унитальных B_1 и φ имеют место изоморфизмы:

$$E_1\otimes_{B_1}E_2\simeq E_2\ \text{при}\ E_1=B_1,$$

$$E_1\otimes_{B_1}E_2\simeq\mathcal{H}_{B_2}\ \text{при}\ E_1=\mathcal{H}_{B_1},\quad E_2=B_2\ \text{или}\ \mathcal{H}_{B_2}.$$

Описанное тензорное произведение обладает также следующим свойством ассоциативности: $(E_1\otimes_{B_1}E_2)\otimes_{B_2}E_3\simeq E_1\otimes_{B_1}(E_2\otimes_{B_2}E_3)$, где $E_1\otimes_{B_1}E_2$ и $E_2\otimes_{B_2}E_3$ построены по гомоморфизмам $\varphi_1:B_1\to\mathcal{L}(E_2)$ и $\varphi_2:B_2\to\mathcal{L}(E_3)$ соответственно, а $E_1\otimes_{B_1}(E_2\otimes_{B_2}E_3)$ — по гомоморфизму $B_1\to\mathcal{L}(E_2)\to\to\mathcal{L}(E_2\otimes_{B_2}E_3)$. В частности, для $\varphi_1:B_1\to B_2$ и унитального $\varphi_2:B_2\to\mathcal{L}(E_3)$ определена операция замены алгебр:

$$E_1\otimes_{B_1}E_3\simeq E_1\otimes_{B_1}(B_2\otimes_{B_2}E_3)\simeq(E_1\otimes_{B_1}B_2)\otimes_{B_2}E_3.$$

9. Если E_1 и E_2 — гильбертовы модули над B_1 и B_2 соответственно, то алгебраическое тензорное произведение $E_1\hat{\odot}E_2$ является $B_1\hat{\odot}B_2$-модулем:

$$(x_1\hat{\odot}x_2)(b_1\hat{\odot}b_2)=(-1)^{\deg x_2\cdot\deg b_1}(x_1b_1\hat{\odot}x_2b_2),$$

со скалярным произведением

$$(x_1\hat{\odot}x_2,\ y_1\hat{\odot}y_2)=(-1)^{\deg x_2\cdot(\deg x_1+\deg y_1)}(x_1,\ y_1)\hat{\odot}(x_2,\ y_2)$$

и градуировкой $\deg(x_1\hat{\odot}x_2)=\deg x_1+\deg x_2$. (При проверке положительности этого скалярного произведения можно считать, что E_1 и E_2 *конечно* порождены и, пользуясь теоремой стабилизации, вложить E_1

в $\mathscr{H}_{B_1}$, а E_2 — в $\mathscr{H}_{B_2}$. После этого все сводится к случаю $E_1=B_1$, $E_2=B_2$.) Пополнение $E_1\hat{\odot}E_2$ по норме $\|z\|=\|(z, z)\|^{1/2}$, является гильбертовым $B_1\hat{\otimes}B_2$-модулем $E_1\hat{\otimes}E_2$. Нетрудно проверить, что $B_1\hat{\otimes}\mathscr{H}_{B_2}\simeq\mathscr{H}_{B_1}\hat{\otimes}B_2\simeq\simeq\mathscr{H}_{B_1}\hat{\otimes}\mathscr{H}_{B_2}\simeq\mathscr{H}_{B_1\hat{\otimes}B_2}$.

Если $\varphi_i: B_i\to\mathscr{L}(H_i)$ $(i=1, 2)$ — точные представления, то согласно п. 8 определено точное представление

$$\mathscr{L}(E_1\hat{\otimes}E_2)\to\mathscr{L}((E_1\hat{\otimes}E_2)\hat{\otimes}_{B_1\hat{\otimes}B_2}(H_1\hat{\otimes}H_2))\simeq\mathscr{L}((E_1\hat{\otimes}_{B_1}H_1)\hat{\otimes}(E_2\hat{\otimes}_{B_2}H_2)).$$

Пользуясь этим, нетрудно проверить, что естественный гомоморфизм

$$\mathscr{L}(E_1)\hat{\otimes}\mathscr{L}(E_2)\to\mathscr{L}(E_1\hat{\otimes}E_2)\colon (F_1\hat{\otimes}F_2)(x_1\hat{\otimes}x_2)=$$
$$=(-1)^{\deg F_2\cdot\deg x_1}(F_1(x_1)\hat{\otimes}F_2(x_2))$$

является вложением. Его ограничение $\mathscr{K}(E_1)\hat{\otimes}\mathscr{K}(E_2)\to\mathscr{K}(E_1\hat{\otimes}E_2)$ является изоморфизмом.

Нам понадобится также следующее общее соотношение для гильбертовых B_i-модулей E_i $(i=1, 2, 3, 4)$ и гомоморфизмов $\varphi: B_1\to\mathscr{L}(E_3)$, $\psi: B_2\to\mathscr{L}(E_4)$:

$$(E_1\hat{\otimes}E_2)\hat{\otimes}_{B_1\hat{\otimes}B_2}(E_3\hat{\otimes}E_4)\simeq(E_1\hat{\otimes}_{B_1}E_3)\hat{\otimes}(E_2\hat{\otimes}_{B_2}E_4),$$

где

$$(e_1\hat{\odot}e_2)\hat{\odot}(e_3\hat{\odot}e_4)\to(-1)^{\deg e_2\cdot\deg e_3}(e_1\hat{\odot}e_3)\hat{\odot}(e_2\hat{\odot}e_4).$$

10. Обобщенные теоремы Стайнспринга и Войкулеску (см. п. 15 и 16 § 1) переносятся на градуированный случай следующим образом. В теореме Стайнспринга отображение φ и гомоморфизм ρ следует считать градуированными; доказательство дословно сохраняется. В определении аппроксимативной эквивалентности все u_n должны иметь степень 0. В теореме Войкулеску вложение $A\subset\mathscr{L}(\mathscr{H})$ должно быть градуированным правильным G-вложением, а гомоморфизм φ — градуированным. В доказательство следует внести некоторое количество очевидных уточнений (например, все рассматриваемые отображения должны быть градуированными, в лемме Глимма рассматривается последовательность векторов степени 0, элементы аппроксимативной единицы имеют степень 0 и т. п.). Отдельного упоминания заслуживает только следующий аналог леммы 7 статьи ([17]).

ЛЕММА. *Если $\varphi: A\to B$ — ядерное градуированное отображение, то φ принадлежит замыканию в топологии поточечной сходимости по норме множества отображений вида $A\xrightarrow{\sigma}M_n\otimes M_2\xrightarrow{\tau}B$, где σ, τ вполне положительны и градуированы (градуировка $M_n\otimes M_2$ определяется градуировочным оператором $\varepsilon_0=1\otimes\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$).*

Доказательство. Пусть $\sigma_0: A\to M_n$ и $\tau_0: M_n\to B$ подобраны так, что $\|\varphi(a)-\tau_0\sigma_0(a)\|\leqslant\delta$ при всех a из некоторого компактного подмно-

жества $X\subset A$. Определим $\sigma: A\to M_n\otimes M_2$, $\tau_1: M_n\otimes M_2\to B$ по формулам:

$$\sigma(a)=\sigma_0(a)\otimes\varepsilon_1^{\deg a},\qquad \tau_1\left(\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\otimes e_{ij}\right)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2}\tau_0(a_{ij}),$$

где $\{e_{ij}\}$ — стандартная система матричных единиц в M_2, $\varepsilon_1=e_{12}+e_{21}$. Отображения σ и τ_1 вполне положительны, σ градуировано и $\tau_1\sigma=\tau_0\sigma_0$. Обозначим через $p^{(i)}$ проектор на $B^{(i)}$ в B и положим $\tau(a)=p^{(\deg a)}(\tau_1(a))$. Если градуировка B определяется градуировочным оператором ε, то

$$\tau(a)=\frac{1}{2}(\tau_1(a)+(-1)^{\deg a}\varepsilon\tau_1(a)\varepsilon),$$

откуда легко получается, что τ вполне положительно. В общем случае полная положительность τ вытекает из наличия вложения $B\subsetneq\mathscr{L}(H)$. Поскольку φ было градуированным, то $\|\varphi(a)-\tau\sigma(a)\|\leqslant\delta$ при $a\in X$. ■

11. Назовем линейным $*$-пространством конечномерное линейное пространство V над C, снабженное положительно определенным скалярным произведением (линейным по второму аргументу) и изометрической антилинейной инволюцией $x\to x^*$. Через $(-V)$ будем обозначать то же пространство с инволюцией $x\to -x^*$. Определим квадратичную форму Q по формуле: $Q(x)=(x^*, x)$. Алгебру Клиффорда Cliff (V, Q) (см. ([5])) будем обозначать через C_V. Полагая $(x_1\ldots x_n)^*=x_n^*\ldots x_1^*$ при $x_1,\ldots,x_n\in\in V$, получим антилинейную инволюцию на C_V. Для введения C^*-нормы поступим так. Обозначим через λ_x оператор внешнего умножения на $x\in V$ во внешней алгебре $\bigwedge^*(V)$ (слово «алгебра» здесь не означает C^*-алгебру). Отображение $\mu: V\oplus(-V)\to\mathscr{L}(\bigwedge^*(V))$ определим по формуле: $\mu(x\oplus y)=\lambda_{x+y}+\lambda^*_{x^*-y^*}$, где λ_x^* — оператор, сопряженный к λ_x относительно скалярного произведения, индуцированного из V. Поскольку $(\mu(x\oplus\oplus y))^2=(x^*-y^*, x+y)=Q(x)-Q(y)$, отображение μ однозначно продолжается до $*$-гомоморфизма $C_{V\oplus(-V)}\to\mathscr{L}(\bigwedge^*(V))$. Это изоморфизм. В частности, $C_V\subsetneq\mathscr{L}(\bigwedge^*(V))$, что дает C^*-норму на C_V.

Изометрическое действие G на V, коммутирующее с инволюцией $*$, однозначно продолжается до непрерывного действия G на алгебре C_V: $g(x_1\ldots x_n)=g(x_1)\ldots g(x_n)$. Если $x\to\bar{x}$ — другая изометрическая антилинейная инволюция на V («вещественная» структура), коммутирующая с инволюцией $*$, то, полагая $\overline{(x_1\ldots x_n)}=\bar{x}_1\ldots\bar{x}_n$, получим «вещественную» структуру на C_V (действие G на V должно быть «вещественным»: $\overline{g(x)}=\bar{g}(\bar{x})$).

Мы будем отождествлять $C_V\hat{\otimes}C_W$ с $C_{V\oplus W}$ посредством изоморфизма, переводящего $v\hat{\otimes}1$ в $v\oplus 0$, $1\hat{\otimes}w$ — в $0\oplus w$, где $v\in V$, $w\in W$. Зафиксированный выше изоморфизм μ: $C_{V\oplus(-V)}\xrightarrow{\sim}\mathscr{L}(\bigwedge^*(V))$ позволяет отождествить $C_V\hat{\otimes}C_{-V}$ с $\mathscr{L}(\bigwedge^*(V))$.

12. Пусть ξ — векторное расслоение над локально компактным пространством X, снабженное эрмитовой метрикой и изометрической, послойно антилинейной инволюцией $x\to x^*$. Такое расслоение будем называть векторным $*$-расслоением. Через $(-\xi)$ будем обозначать то же рас-

слоение с инволюцией $x \to -x^*$. Рассмотрим клиффордово расслоение Cliff (ξ, Q), ассоциированное с квадратичной формой $Q(x)=(x^*, x)$ на ξ. Пространство непрерывных сечений этого расслоения, стремящихся к 0 на ∞, обозначим через $C_\xi(X)$. Та же конструкция, что и в предыдущем пункте, позволяет ввести C^*-норму на $C_\xi(X)$ и получить изоморфизм $C_{\xi\oplus(-\xi)}(X) \simeq \mathscr{K}(\Gamma(\bigwedge^*(\xi)))$, где $\Gamma(\bigwedge^*(\xi))$ — гильбертов $C(X)$-модуль непрерывных сечений расслоения $\bigwedge^*(\xi)$, стремящихся к 0 на ∞. Действие группы G и антилинейная инволюция $x \to \bar{x}$ на ξ так же, как и выше, индуцируют действие G и «вещественную» инволюцию на $C_\xi(X)$.

13. Алгебра $C_{p,q}$. Пусть $V=V_{p,q}=C^p \oplus C^q$. Обозначим через τ покоординатное комплексное сопряжение на V. Положим $x^*=\tau(x)$ при $x \in C^p$; $x^*=-\tau(x)$ при $x \in C^q$; $\bar{x}=\tau(x)$; действие G на V тривиально. Алгебра Клиффорда $C_{V_{p,q}}$ будет обозначаться через $C_{p,q}$. Ее образующие: $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p, e_1, \ldots, e_q$ (координатный базис в $V_{p,q}$), $\varepsilon_i^2=1$, $\varepsilon_i^*=\varepsilon_i$, $\bar{\varepsilon}_i=\varepsilon_i$ $(i \leqslant p)$; $e_j^2=-1$, $e_j^*=-e_j$, $\bar{e}_j=e_j$ $(j \leqslant q)$. (Заметим, что это обозначение отличается от обозначения $C_{p,q}$ в статье ([15]) перестановкой p и q.)

14. *Ориентацией* алгебры Клиффорда C_V назовем такой однородный элемент $\omega \in C_V$, что

1) $\omega^*=\pm\omega$; $\omega^*\omega=1$; $\bar{\omega}=\omega$ (в «вещественном» случае).

2) $\forall x \in C_V \quad x\omega=(-1)^{\deg x(\deg \omega+1)}\omega x$.

ЛЕММА. *Ориентация существует и определена однозначно с точностью до умножения на ± 1 в вещественном и «вещественном» случаях и с точностью до умножения на ± 1 или $\pm i$ в комплексном случае.*

Доказательство. Если $f_1, \ldots, f_n$ — такой ортонормированный базис в V, что $f_k^*=\pm f_k$, $\bar{f}_k=f_k$, то $\omega=f_1 \ldots f_n$ — ориентация. С другой стороны, произвольный элемент $\omega \in C_V$ однозначно записывается в виде линейной комбинации мономов вида $f_{i_1} \ldots f_{i_k}$, где $i_1 < \ldots < i_k$. Пусть $\omega=a+f_1 b$, где многочлены a и $b \in C_V$ не содержат f_1. Тогда

$$f_1\omega = f_1 a + f_1^2 b, \quad \omega f_1 = (-1)^{\deg\omega} f_1 a + (-1)^{\deg\omega-1} f_1^2 b.$$

Сопоставление с пунктом 2) показывает, что $f_1 a=0$, откуда $a=\pm f_1(f_1 a)=0$, т. е. $\omega=f_1 b$. Аналогичное рассуждение с другими f_j приводит к соотношению $\omega=\alpha f_1 \ldots f_n$, где $\alpha \in C$. Из первых двух соотношений пункта 1) следует, что $\bar{\alpha}=\pm\alpha$, $\bar{\alpha}\cdot\alpha=1$, откуда $\alpha=\pm 1$ или $\pm i$. В вещественном и «вещественном» случаях $\bar{\alpha}=\alpha$, т. е. $\alpha=\pm 1$. ■

15. Алгебру C_V с фиксированной ориентацией ω_V назовем *ориентированной* алгеброй Клиффорда. Если φ — градуированный автоморфизм алгебры C_V, то $\varphi(\omega_V)=\pm\omega_V$. В самом деле, ω_V и $\varphi(\omega_V)$ — ориентации C_V, причем либо оба эти элемента эрмитовы, либо оба косоэрмитовы, поэтому утверждение вытекает из предыдущей леммы. Будем говорить, что изоморфизм $\varphi: C_V \to C_W$ сохраняет ориентацию, если $\varphi(\omega_V)=\omega_W$.

Если C_V и C_W ориентированы, то ориентацией $C_V \hat{\otimes} C_W \simeq C_{V\oplus W}$ будем считать элемент $\omega_V \hat{\otimes} \omega_W$. Ориентацией алгебры $\mathscr{L}(\bigwedge^*(V))$ будем считать элемент ε_V, который равен $(-1)^k$ на $\bigwedge^k(V)$. Если фиксирована ориентация $\omega_V \in C_V$, определим $\omega_{-V} \in C_{-V}$ как такую (единственную) ориента-

цию, что $\omega_V \hat{\otimes} \omega_{-V} = \varepsilon_V$ при изоморфизме п. 11. Нетрудно проверить, что если $\omega_V = f_1 \cdots f_n$, как в п. 14, причем среди элементов $f_1, \ldots, f_n$ ровно q косоэрмитовых, то $\omega_{-V} = (-1)^q f_n \cdots f_1$. (Вообще говоря, $\omega_{-(-V)} \neq \omega_V$.)

16. Стандартную ориентацию на $C_{p,q}$ определим по формуле: $\omega_{p,q} = (-i)^q \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_p e_1 \cdots e_q$ в комплексном случае и по формуле $\omega_{p,q} = \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_p e_1 \cdots e_q$ — в вещественном и «вещественном» случаях. Нетрудно проверить, что при тривиальном действии G на V алгебра C_V изоморфна с сохранением ориентации одной из алгебр $C_{p,q}$. В частности, $C_{p,q} \hat{\otimes} C_{p',q'} \simeq C_{p+p',q+q'}$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i \hat{\otimes} 1 &\to \varepsilon_i, & i &\leqslant p, \\ e_j \hat{\otimes} 1 &\to e_j, & j &\leqslant q, \\ 1 \hat{\otimes} \varepsilon_i &\to (-1)^q \varepsilon_{i+p}, & i &\leqslant p', \\ 1 \hat{\otimes} e_j &\to e_{j+q}, & j &\leqslant q'. \end{aligned}$$

Кроме того, $C_{-(p,q)} = C_{-V_{p,q}} \simeq C_{q,p}$. Сохраняющий ориентацию изоморфизм определим по формулам:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &\to (-1)^{i-1} e_i, & i &\leqslant p, \\ e_j &\to (-1)^j \varepsilon_j, & j &\leqslant q. \end{aligned}$$

17. Зафиксируем для дальнейшего сохраняющие ориентацию градуированные изоморфизмы: $f: C_{p,q+1} \to C_{p+1,q}$ в комплексном случае и $g: C_{p,q+4} \to C_{p+4,q}$ — в общем случае. Положим

$$f(\varepsilon_k) = \varepsilon_k \quad (k \leqslant p); \quad f(e_1) = i\varepsilon_{p+1}; \quad f(e_j) = e_{j-1} \quad (2 \leqslant j \leqslant q+1).$$

Гомоморфизм g определим по формулам:

$$g(\varepsilon_k) = \varepsilon_k \quad (k \leqslant p); \quad g(e_j) = \varepsilon_{p+1} \cdots \hat{\varepsilon}_{p+j} \cdots \varepsilon_{p+4} \quad (j \leqslant 4);$$
$$g(e_j) = e_{j-4} \quad (j \geqslant 5).$$

18. Пусть $V = C^n = C^{p+q}$, а $\mathbf{R}^n \subset C^n$ — координатное вещественное подпространство. Обозначим через τ покоординатное комплексное сопряжение в V. Положим $x^* = \tau(x)$; $\bar{x} = \tau(x)$ при $x \in C^p$; $\bar{x} = -\tau(x)$ при $x \in C^q$. Группа $\mathrm{Spin}(V)$ определяется как подгруппа группы обратимых элементов $\{g\}$ степени 0 в алгебре C_V, удовлетворяющих условиям:

1) $g^* g = 1$,

2) $gxg^{-1} \in \mathbf{R}^n$ при $x \in \mathbf{R}^n$.

«Вещественная» структура на $\mathrm{Spin}(V)$ индуцирована из C_V. При замене инволюции $*$ на обратную: $x^* = -\tau(x)$ получается группа $\mathrm{Spin}(-V)$, изоморфная $\mathrm{Spin}(V)$. В самом деле, полагая $\mu_V(x) = \lambda_x + \lambda^*_{x^*}$, $\mu_{-V}(x) = \lambda_x - \lambda^*_{x^*}$ при $x \in V$ (ср. п. 11) и $\varepsilon_V = (-1)^k$, $u = (-1)^{k(k-1)/2}$ на $\Lambda^k(V)$, будем иметь: $u\mu_V(x)u^{-1} = \mu_{-V}(x) \cdot \varepsilon_V$ при $x \in V$. Продолжая μ_V и μ_{-V} на C_V и C_{-V} соответственно, получим:

$$u\mu_V(\mathrm{Spin}(V))u^{-1} = \mu_{-V}(\mathrm{Spin}(-V)).$$

Группы $\mathrm{Spin}(V)$ и $\mathrm{Spin}(-V)$ действуют на $\mathbf{R}^n$ по формуле: $g(x) = gxg^{-1}$, $x \in \mathbf{R}^n$. Нетрудно проверить, что при нашем отождествлении

действия Spin (V) и Spin $(-V)$ на $\mathbf{R}^n$ совпадают. Кроме того, группы Spin (V) и Spin $(-V)$ действуют на $\mathscr{L}(\wedge^*(V))$ по формуле:

$$g(a)=\mu_{\pm V}(g)\cdot a\cdot\mu_{\pm V}(g^{-1}),\quad a\in\mathscr{L}(\wedge^*(V)).$$

Поскольку операторы $\mu_V(\mathrm{Spin}(V))$ *коммутируют* с $\mu_{-V}(\mathrm{Spin}(-V))$ (равно как и со всеми $\mu_{-V}(x)$ $\forall x\in V$), определено *диагональное* действие Spin (V) на $\mathscr{L}(\wedge^*(V))$:

$$\delta(g)(a)=\mu_V(g)\mu_{-V}(g)\cdot a\cdot\mu_V(g^{-1})\mu_{-V}(g^{-1})\ \text{ при } a\in\mathscr{L}(\wedge^*(V)).$$

Это действие Spin (V) *на* $\mathscr{L}(\wedge^*(V))$ *индуцировано действием* Spin (V) *на* V. Для доказательства достаточно рассмотреть элементы a вида $\lambda_x\pm\lambda^*_{x^*}$, $x\in V$.

§ 3. Произведение-пересечение (техническая часть)

Теоремы 4 и 5 этого параграфа обеспечивают техническую базу для конструкции произведения-пересечения в K-функторе, которая будет рассмотрена в § 4. Мы будем работать в категории градуированных алгебр. Напомним, что $[a, b]$ означает градуированный коммутатор: $ab-(-1)^{\deg a\cdot\deg b}ba$ (см. п. 1 § 2).

ЛЕММА 1. *Пусть A — алгебра, a, b, $d\in A$. Тогда*

$$a^*db+b^*d^*a\leqslant\|d\|\cdot(a^*a+b^*b).$$

Доказательство. Вложим A в алгебру операторов в некотором гильбертовом пространстве H. Тогда $\forall\xi\in H$

$$((a^*db+b^*d^*a)\xi,\xi)=(db\xi,a\xi)+(d^*a\xi,b\xi)\leqslant$$
$$\leqslant 2\|d\|\cdot\|a\xi\|\cdot\|b\xi\|\leqslant\|d\|\cdot(\|a\xi\|^2+\|b\xi\|^2)=\|d\|\cdot((a^*a+b^*b)\xi,\xi).\ \blacksquare$$

ТЕОРЕМА 1. *Пусть A — унитальная алгебра, B — подалгебра с непрерывным действием G, имеющая строго положительный элемент. Предположим, что семейство элементов $\{F_x\}_{x\in X}\subset A$ в совокупности ограничено по норме; $\forall x\in X$, $\forall b\in B$ $[F_x, b]\in B$ и $\forall b\in B$ замыкание множества $\{[F_x, b]\mid x\in X\}$ компактно в B. Тогда $\forall$ числа $m\geqslant 0$ в алгебре B существует такой строго положительный инвариантный элемент h степени* 0 *и $\exists$ такое число $c>0$, что $\forall x\in X$*

$$[h, F_x]\cdot[h, F_x]^*+[h, F_x]^*\cdot[h, F_x]\leqslant ch^m. \tag{1}$$

Доказательство. Можно считать, что $\forall x\in X$ $\|F_x\|\leqslant 1$. Обозначим через $\{u_i\}$ счетную возрастающую абелеву аппроксимативную единицу в B, состоящую из инвариантных элементов степени 0. Построим возрастающую последовательность целых чисел $\{k_i\}$ следующим образом. Пусть $k_1\geqslant 1$. Если $k_1,\ldots,k_r$ уже построены, то k_{r+1} выберем так, чтобы $\forall x\in X$

$$\|(1-u_{k_{r+1}})^{1/4}\cdot u_{k_r}^{1/4}\|\leqslant 2^{-(2r+2)}, \tag{2}$$
$$\|(1-u_{k_{r+1}})^{1/4}\cdot F_x\cdot u_{k_r}^{1/4}\|\leqslant 2^{-(2r+2)}, \tag{3}$$
$$\|(1-u_{k_{r+1}})^{1/4}\cdot F_x^*\cdot u_{k_r}^{1/4}\|\leqslant 2^{-(2r+2)}. \tag{4}$$

Это возможно благодаря компактности множеств $\{F_x u_{k_r}^{1/4} - u_{k_r}^{1/4} F_x\}$ и $\{F_x^* u_{k_r}^{1/4} - u_{k_r}^{1/4} F_x^*\}$. Введем обозначения: $b_1 = u_{k_1}$, $b_i = u_{k_i} - u_{k_{i-1}}$ при $i \geqslant 2$; $\varepsilon_{p,q} = 2^{-p-q}$ при $|p-q| \geqslant 2$, $\varepsilon_{p,q} = 1$ при $|p-q| \leqslant 1$. Тогда

$$\forall b \in B \quad \sum_{i=1}^{\infty} b_i b = \sum_{i=1}^{\infty} b b_i = b, \tag{5}$$

$$\forall p, q \quad \| b_p^{1/4} b_q^{1/4} \| \leqslant \varepsilon_{p,q}, \tag{6}$$

$$\forall x \in X, \ \forall p, q \quad \| b_p^{1/4} F_x b_q^{1/4} \| \leqslant \varepsilon_{p,q}. \tag{7}$$

В самом деле, если, например, $p \geqslant q+2$, то при $p=i+2$ получим:

$$q \leqslant i, \quad b_p^{1/2} \leqslant (1 - u_{k_{i+1}})^{1/2}, \quad b_q^{1/2} \leqslant u_{k_i}^{1/2},$$

$$\| b_p^{1/4} F_x b_q^{1/4} \|^2 = \| b_p^{1/4} F_x b_q^{1/2} F_x^* b_p^{1/4} \| \leqslant \| b_p^{1/4} F_x u_{k_i}^{1/2} F_x^* b_p^{1/4} \| = \| b_p^{1/4} F_x u_{k_i}^{1/4} \|^2 =$$
$$= \| u_{k_i}^{1/4} F_x^* b_p^{1/2} F_x u_{k_i}^{1/4} \| \leqslant \| u_{k_i}^{1/4} F_x^* (1 - u_{k_{i+1}})^{1/2} F_x u_{k_i}^{1/4} \| = \| (1 - u_{k_{i+1}})^{1/4} F_x u_{k_i}^{1/4} \|^2 \leqslant 2^{-(2i+2)\cdot 2}.$$

Пусть n — целое число $\geqslant \max(1, (m-2)/2)$. Положим $\lambda_i = (1/i)^{1/n}$, $\mu_i = \lambda_i - \lambda_{i+1}$ $(i \geqslant 1)$. Искомый строго положительный элемент h определим по формуле: $h = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i u_{k_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i b_i$. Мы докажем требуемую оценку для первого слагаемого левой части неравенства (1). Оценка второго слагаемого получается точно так же. Пользуясь соотношениями (5), имеем:

$$(hF_x - F_x h)(hF_x - F_x h)^* = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_{2n+3} \\ j_1, \ldots, j_{2n+3}}} (\lambda_{i_2} - \lambda_{i_1})(\lambda_{j_2} - \lambda_{j_1})(R + R^*),$$

где

$$R = b_{i_{2n+3}} b_{i_{2n+2}} \cdots b_{i_2} F_x b_{i_1} b_{j_1} F_x^* b_{j_2} \cdots b_{j_{2n+2}} b_{j_{2n+3}} =$$
$$= b_{i_{2n+3}}^{1/2} \cdots b_{i_2}^{1/2} (b_{i_{2n+3}}^{1/2} b_{i_{2n+2}}^{1/4})(b_{i_{2n+2}}^{1/4} b_{i_{2n+1}}^{1/4}) \cdots (b_{i_3}^{1/4} b_{i_2}^{1/4})(b_{i_2}^{1/4} F_x b_{i_1}^{1/2}) \times$$
$$\times (b_{i_1}^{1/2} b_{j_1}^{1/2})(b_{j_1}^{1/2} F_x^* b_{j_2}^{1/4})(b_{j_2}^{1/4} b_{j_3}^{1/4}) \cdots (b_{j_{2n+1}}^{1/4} b_{j_{2n+2}}^{1/4})(b_{j_{2n+2}}^{1/4} b_{j_{2n+3}}^{1/2}) b_{j_2}^{1/2} \cdots b_{j_{2n+3}}^{1/2}.$$

Из соотношений (6), (7) и леммы 1 вытекает оценка:

$$R + R^* \leqslant \varepsilon_{i_{2n+3}, i_{2n+2}} \cdots \varepsilon_{i_2, i_1} \varepsilon_{i_1, j_1} \varepsilon_{j_1, j_2} \cdots \varepsilon_{j_{2n+2}, j_{2n+3}} [b_{i_{2n+3}} \cdots b_{i_2} + b_{j_2} \cdots b_{j_{2n+3}}].$$

Выражение в квадратных скобках не превосходит

$$\frac{1}{2n+2} [b_{i_2}^{2n+2} + \cdots + b_{i_{2n+3}}^{2n+2} + b_{j_2}^{2n+2} + \cdots + b_{j_{2n+3}}^{2n+2}],$$

поэтому

$$(hF_x - F_x h)(hF_x - F_x h)^* \leqslant \frac{1}{4n+4} \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_{2n+3} \\ j_1, \ldots, j_{2n+3}}} |\lambda_{i_2} - \lambda_{i_1}| \cdot |\lambda_{j_2} - \lambda_{j_1}| \times$$
$$\times \varepsilon_{i_{2n+3}, i_{2n+2}} \cdots \varepsilon_{i_1, j_1} \cdots \varepsilon_{j_{2n+2}, j_{2n+3}} [b_{i_2}^{2n+2} + \cdots + b_{i_{2n+3}}^{2n+2} + b_{j_2}^{2n+2} + \cdots + b_{j_{2n+3}}^{2n+2}].$$

Введем новое обозначение: $\varepsilon_{p,q}^{(k)} = 2^{-p-q} (\lambda_p \lambda_q)^{-k}$ при $|p-q| \geqslant 2$, $\varepsilon_{p,q}^{(k)} = 1$ при $|p-q| \leqslant 1$. Нетрудно проверить, что

$$\forall p,\, q \quad |\lambda_p - \lambda_q| \cdot \varepsilon_{p,q} \leqslant 2\lambda_p^{n+1} \cdot \varepsilon_{p,q}^{(n+1)},$$
$$\forall p,\, q,\, k,\, l \quad \lambda_p^k \cdot \varepsilon_{p,q}^{(l)} \leqslant 2\lambda_q^k \cdot \varepsilon_{p,q}^{(k+l)}.$$

Используя эти неравенства, перепишем нашу оценку в виде:

$$(hF_x - F_xh)(hF_x - F_xh)^* \leqslant \mathrm{const} \cdot \sum_{\substack{i_1,\dots,i_{2n+3} \\ j_1,\dots,j_{2n+3}}} \varepsilon_{i_{2n+3},i_{2n+2}}^{(3n+3)} \cdots \varepsilon_{j_{2n+2},j_{2n+3}}^{(3n+3)} \times$$
$$\times [(\lambda_{i_2}b_{i_2})^{2n+2} + \dots + (\lambda_{i_{2n+3}}b_{i_{2n+3}})^{2n+2} + (\lambda_{j_2}b_{j_2})^{2n+2} + \dots + (\lambda_{j_{2n+3}}b_{j_{2n+3}})^{2n+2}].$$

Правая часть не превосходит $c \cdot h^{2n+2} \leqslant c \cdot h^m$. ■

ЛЕММА 2. *Пусть A — алгебра, B_1 и B_2 — такие подалгебры, что $B_1 \cdot B_2 \subset B_1$. Тогда $B_1 + B_2$ — подалгебра в A, а B_1 — идеал в $B_1 + B_2$. (B частности, если подалгебры B_1 и B_2 удовлетворяют условиям: $B_1 \cdot B_2 = B_1 \cap B_2 = B$, то $B_1 + B_2$ — подалгебра в A, а B, B_1 и B_2 — идеалы в $B_1 + B_2$.)*

Если элементы h и k строго положительны в B_1 и B_2 соответственно, то $h + k$ строго положителен в $B_1 + B_2$.

Доказательство. Замыкание $E = \overline{B_1 + B_2}$ является подалгеброй в A, причем B_1 — идеал в E: $B_1 \cdot E \subset \overline{B_1 \cdot (B_1 + B_2)} \subset \overline{B}_1 \subset E$. Поскольку сумма идеала и подалгебры в E замкнута (см. ([12]), 1.8.4), $B_1 + B_2 = E$. Строгая положительность $h + k$ вытекает из критерия п. 7 § 1. ■

Напомним (см. ([8])), что функции $f(x) = \dfrac{x}{x+\alpha}$ при $\alpha \geqslant 0$ и $f(x) = x^\alpha$ при $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ являются *монотонными операторными функциями* в интервале $0 \leqslant x < \infty$, т. е. в любой алгебре для любых эрмитовых элементов y, z, спектр которых лежит в указанном интервале, из неравенства $y \leqslant z$ вытекает, что $f(y) \leqslant f(z)$. Монотонность $\dfrac{x}{x+\alpha}$ легко проверяется непосредственно, а монотонность x^α проще всего получить, например, из такого интегрального представления:

$$x^\alpha = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^\infty \frac{x}{x+t} \cdot \frac{dt}{t^{1-\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

учитывая, что все $\dfrac{x}{x+t}$ монотонны.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть A — унитальная алгебра, B_1, B_2 — такие подалгебры с непрерывным действием G, что $B_1 \cdot B_2 = B_1 \cap B_2$, причем B_1 и B_2 имеют строго положительные элементы. Предположим, что семейство элементов $\{F_x\}_{x \in X} \subset A$ в совокупности ограничено по норме; $\forall b \in B_i$, $\forall x \in X$ $[F_x, b] \in B_i$ $(i = 1, 2)$ и $\forall b \in B_1 + B_2$ замыкание множества $\{[F_x, b] \mid x \in X\}$ компактно в $B_1 + B_2$. Тогда существуют инвариантные элементы степени 0: строго положительный элемент $h \in B_1$, положительный элемент $k \in B_2$, строго положительный элемент $l \in B_1 + B_2$ и такая константа $c > 0$, что $\forall x \in X$*

1) $h^2 + k^2 = l^2$,

2) $h^4 \leqslant l^4$, $k^4 \leqslant 4l^4$,

3) $[h, F_x]\cdot[h, F_x]^*+[h, F_x]^*\cdot[h, F_x]\leqslant ch^4$,

4) $[l, F_x]\cdot[l, F_x]^*+[l, F_x]^*\cdot[l, F_x]\leqslant cl^4$.

Доказательство. Пусть элементы степени 0 h_0 и k_0 инвариантны и строго положительны в B_1 и B_2 соответственно. Тогда $\{u_i = h_0^{1/i}\}$ и $\{v_i = (h_0 + k_0)^{1/i}\}$ — инвариантные абелевы возрастающие аппроксимативные единицы в B_1 и $B_1 + B_2$ соответственно. Выберем возрастающую последовательность целых чисел $\{n_i\}$ так, чтобы выполнялись условия (2) — (4) для $\{u_{n_i}\}$ и одновременно аналогичные условия для $\{v_{n_i}\}$. При этом можно считать, что все $n_i \geqslant 4$. Положим $h = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu_i u_{n_i}$, $l = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu_i v_{n_i}$, где $\mu_i = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$.
Как показано в доказательстве теоремы 1, условия 3) и 4) будут выполнены. Далее, $\forall i$ $v_{n_i} - u_{n_i} \in B_2$, откуда $l^2 - h^2 \in B_2$. Поскольку все $n_i \geqslant 4$, из операторной монотонности x^α при $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ следует, что $h^2 \leqslant l^2$, $h^4 \leqslant l^4$. Положим $k = (l^2 - h^2)^{1/2}$. Тогда $k^4 \leqslant 2l^4 + 2h^4 \leqslant 4l^4$. ■

ЛЕММА 3. *Пусть A — алгебра с 1, $x, y \in A$, $x \geqslant 0$. Существование предела $\lim\limits_{\alpha\to+0} (x+\alpha)^{-1}y$ эквивалентно условию*:

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists c>0 \quad yy^* \leqslant cx^4+\varepsilon x^2. \tag{8}$$

Доказательство. По критерию Коши наличие предела эквивалентно тому, что $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ при $0<\alpha, \beta\leqslant\delta$

$$[(x+\alpha)^{-1}-(x+\beta)^{-1}]yy^*[(x+\alpha)^{-1}-(x+\beta)^{-1}]\leqslant\varepsilon.$$

Это условие легко получается из (8). Обратно, из этого условия вытекает, что

$$yy^* \leqslant \varepsilon \left(\frac{(x+\alpha)(x+\beta)}{\beta-\alpha}\right)^2 \text{ при } \alpha, \beta \leqslant \delta.$$

Переходя к пределу при $\beta\to 0$, приходим к (8). ■

ТЕОРЕМА 3. *Пусть B_1 и B_2 — такие подалгебры с непрерывным действием G в алгебре $\mathcal{M}(D)$, что $B_1\cdot B_2=B_1\cap B_2=B$, $D\subset B_1+B_2$ и алгебры B_1 и B_2 имеют строго положительные элементы. Предположим, что X — компакт и $X\to\mathcal{M}(D)$: $x\to F_x$ — такое отображение, что нормы $\{\|F_x\|\}_{x\in X}$ ограничены в совокупности; $\forall b\in B_i$, $\forall x\in X$ $[F_x, b]\in B_i$ и $\forall b\in B_i$ отображение $x\to[F_x, b]$ непрерывно по норме на X $(i=1, 2)$. Тогда в алгебре $\mathcal{M}(D)$ существует пара инвариантных элементов M, N степени 0, удовлетворяющая условиям*:

1) $M+N=1$, $M\geqslant 0$, $N\geqslant 0$.

2) $M\cdot B_1\subset B$, $N\cdot B_2\subset B$; $M\cdot B_2\subset B_2$, $N\cdot B_1\subset B_1$.

3) $\forall x\in X$ $[M, F_x]\in B$, $[N, F_x]\in B$, *причем эти коммутаторы непрерывны по норме как функции от $x\in X$*.

Доказательство. Применим теорему 2, положив $A=\mathcal{M}(D)$. Пусть при $\alpha>0$ $M_\alpha=(l+\alpha)^{-1}k^2(l+\alpha)^{-1}$, $N_\alpha=(l+\alpha)^{-1}h^2(l+\alpha)^{-1}$. Покажем, что $\forall b\in B_1+B_2$ $\exists$ пределы при $\alpha\to+0$ от выражений $M_\alpha b$, bM_α,

$N_\alpha b$, bN_α. Согласно лемме 3 и п. 2) теоремы 2 существуют пределы $\lim\limits_{\alpha\to+0}(l+\alpha)^{-1}k^2$ и $\lim\limits_{\alpha\to+0}(l+\alpha)^{-1}l^2$, поэтому существует предел

$$\lim_{\alpha\to+0}(l+\alpha)^{-1}k^2(l+\alpha)^{-1}l^2=\lim_{\alpha\to+0}M_\alpha l^2.$$

Согласно критерию п. 7 § 1 $\forall\varepsilon>0$ $\exists$ такое $c>0$, что $bb^*\leqslant cl^4+\varepsilon$, откуда $\forall\alpha,\beta>0$

$$\|(M_\alpha-M_\beta)\,bb^*(M_\alpha-M_\beta)\|\leqslant c\|(M_\alpha-M_\beta)\,l^4(M_\alpha-M_\beta)\|+4\varepsilon.$$

Теперь существование предела $\lim\limits_{\alpha\to+0}M_\alpha b$ получается из критерия Коши. Аналогично доказывается существование остальных пределов.

Положим $M=\lim\limits_{\alpha\to+0}M_\alpha$, $N=\lim\limits_{\alpha\to+0}N_\alpha$, где пределы понимаются в смысле строгой сходимости. Пункт 1), очевидно, выполнен. Соотношения п. 2) следуют из того, что $M_\alpha\in B_2$, $N_\alpha\in B_1$. Сейчас мы покажем, что при $\alpha\to+0$ выражения

$$(M_\alpha+N_\alpha)F_x-F_x(M_\alpha+N_\alpha)\ \text{и}\ N_\alpha F_x-F_xN_\alpha$$

сходятся по норме равномерно по $x\in X$. Из этого будет следовать, что $M_\alpha F_x-F_xM_\alpha$ также сходится, а поскольку $N_\alpha F_x-F_xN_\alpha\in B_1$, $M_\alpha F_x-F_xM_\alpha\in B_2$, то $NF_x-F_xN=-(MF_x-F_xM)\in B_1\cap B_2=B$.

Согласно лемме 3 и п. 4) теоремы 2 существует предел

$$\lim_{\alpha\to+0}(l+\alpha)^{-1}(lF_x-F_xl)$$

(равномерно по $x\in X$), поэтому

$$\lim_{\alpha\to+0}\left\|\frac{l}{l+\alpha}F_x-F_x\frac{l}{l+\alpha}\right\|=\lim_{\alpha\to+0}\left\|(l+\alpha)^{-1}(lF_x-F_xl)\frac{\alpha}{l+\alpha}\right\|=0,$$

откуда

$$\lim_{\alpha\to+0}\|(M_\alpha+N_\alpha)F_x-F_x(M_\alpha+N_\alpha)\|=0.$$

Для доказательства сходимости выражения $F_xN_\alpha-N_\alpha F_x$ перепишем его в виде:

$$[(l+\alpha)^{-1}(lF_x-F_xl)]\cdot N_\alpha+N_\alpha\cdot[(lF_x-F_xl)(l+\alpha)^{-1}]+$$
$$+[(l+\alpha)^{-1}(F_xh-hF_x)]\,h(l+\alpha)^{-1}+(l+\alpha)^{-1}h\,[(F_xh-hF_x)(l+\alpha)^{-1}].$$

На основании теоремы 2 и леммы 3 все выражения в квадратных скобках сходятся при $\alpha\to+0$ (равномерно по x). Поскольку $\forall b\in B_1+B_2$ $b\cdot N_\alpha$ и $N_\alpha\cdot b$ сходятся и N_α ограничено по α, то первые два слагаемых сходятся. Обозначим $\lim\limits_{\alpha\to+0}(l+\alpha)^{-1}(F_xh-hF_x)$ через a. Очевидно, $a\in B_1$. Согласно критерию п. 7 § 1 $\forall\varepsilon>0$ $\exists c>0$ $a^*a\leqslant ch^2+\varepsilon$, откуда $ha^*ah\leqslant\leqslant ch^4+\varepsilon h^2\leqslant cl^4+\varepsilon l^2$. По лемме 3 существует предел $\lim\limits_{\alpha\to+0}ah(l+\alpha)^{-1}$. Так как $h(l+\alpha)^{-1}$ ограничено по α, то третье слагаемое сходится. Аналогично получается сходимость четвертого слагаемого. ■

ТЕОРЕМА 4. *Пусть* E_1, E_2 *и* E — *подалгебры с непрерывным действием* G *в* $\mathcal{M}(D)$, *причем* E — *идеал в* E_1, $E_1\cdot E_2\subset E$, $D\subset E_1+E_2$, E_1 *и* E *имеют строго положительные элементы, а* E_2 *сепарабельна. Предположим, что* $\mathfrak{F}$ — *инвариантное относительно действия* G *и «вещественной» инволюции градуированное (т. е.* $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}^{(0)}+\mathfrak{F}^{(1)}$) *сепарабельное линейное подпространство в* $\mathcal{M}(D)$, *причем* G *непрерывно действует на* $\mathfrak{F}$, *и* $\forall f\in\mathfrak{F}$, $\forall b\in E$, $\forall b_1\in E_1$ $[f, b]\in E$, $[f, b_1]\in E_1$. *Тогда в алгебре* $\mathcal{M}(D)$ *существует пара инвариантных элементов* M, N *степени* 0, *удовлетворяющая условиям*:

1) $M+N=1, M\geqslant 0, N\geqslant 0$.

2) $M\cdot E_1\subset E, N\cdot E_2\subset E, N\cdot E_1\subset E_1$.

3) $\forall f\in\mathfrak{F}$ $[f, M]\in E, [f, N]\in E$.

Доказательство. Заменяя $\mathfrak{F}$ на $\mathfrak{F}+\mathfrak{F}^*$, можно считать, что $\mathfrak{F}$ — самосопряженное линейное подпространство. Обозначим через $E_{2,i}$ множество, состоящее из элементов вида $[f_1, [f_2, \ldots, [f_i, b]\ldots]$, где $b\in E_2$, $f_1, \ldots, f_i\in\mathfrak{F}$. Пусть E_2'— минимальная подалгебра в $\mathcal{M}(D)$, содержащая E_2 и все $E_{2,i}$ при $i\geqslant 1$. Ясно, что E_2' сепарабельна и $[\mathfrak{F}, E_2']\subset E_2'$. По индукции нетрудно проверить, что $E_1\cdot E_{2,i}\subset E$, поэтому $E_1\cdot E_2'\subset E$. Согласно лемме 2, $E_2''=E_2'+E$ — подалгебра в $\mathcal{M}(D)$. Пусть $\{f_i\}$ — счетное всюду плотное подмножество в $\mathfrak{F}$. Обозначим компакт $\{0\}\cup\left\{\frac{f_i}{i\cdot\|f_i\|}\right\}$ через X. Подалгебры E_1, E_2'' и тождественное вложение $X\to\mathcal{M}(D)$ удовлетворяют условиям теоремы 3. Построенная там пара M, N является искомой. ■

Определение 1. Подалгебры $\mathfrak{B}_0\supset\mathfrak{B}_1\supset\ldots\supset\mathfrak{B}_n\supset D$ в алгебре $\mathcal{M}(D)$ образуют n-цепочку, если все $\mathfrak{B}_i$ имеют строго положительные элементы, G действует на каждой $\mathfrak{B}_i$ непрерывно и $\mathfrak{B}_j$ — идеал в $\mathfrak{B}_i$ при $i\leqslant j$. Кроме того, требуется, чтобы существовало такое инвариантное относительно действия G и «вещественной» инволюции градуированное сепарабельное линейное подпространство $L\subset\mathfrak{B}_0$, что $\mathfrak{B}_n+L=\mathfrak{B}_0$.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть* $\mathfrak{B}_0\supset\mathfrak{B}_1\supset\ldots\supset\mathfrak{B}_n$ — n-*цепочка в* $\mathcal{M}(D)$, *а* $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ — *сепарабельные подалгебры с непрерывным действием* G *в* $\mathcal{M}(D)$. *Кроме того, пусть* $F_1, \ldots, F_n\in\mathcal{M}(D)$ — *инвариантные элементы степени* 1, *а* $Q_1, \ldots, Q_n\subset\mathcal{M}(D)$ — *конечные или счетные множества, состоящие из инвариантных элементов степени* 0. *Предположим, что выполнены условия:*

1° $\mathfrak{A}_1\subset\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_i\cdot\mathfrak{A}_{i+1}\subset\mathfrak{B}_{i+1}$ *при* $1\leqslant i\leqslant n-1$.

2° $F_i\cdot\mathfrak{B}_j\subset\mathfrak{B}_j$, $\mathfrak{B}_j\cdot F_i\subset\mathfrak{B}_j$ *при* $1\leqslant i\leqslant j\leqslant n$.

3° $\forall b_i\in\mathfrak{B}_i$ $[b_i, F_{i+1}]\in\mathfrak{B}_{i+1}$ *при* $0\leqslant i\leqslant n-1$.

4° $\forall b_j\in\mathfrak{B}_j$, $\forall q_i\in Q_i$ $[b_j, q_i]\in\mathfrak{B}_j$ *при* $0\leqslant j\leqslant n$, $1\leqslant i\leqslant n$.

5° $\forall b_j\in\mathfrak{B}_j$, $\forall q_i\in Q_i$ $[b_j, q_iF_i]\in\mathfrak{B}_j$ *при* $0\leqslant j\leqslant n$, $1\leqslant i\leqslant n$.

6° $\forall q_i\in Q_i$ $\mathfrak{B}_j\cdot[q_i, F_{j+1}]\subset\mathfrak{B}_{j+1}$, $[q_i, F_{j+1}]\cdot\mathfrak{B}_j\subset\mathfrak{B}_{j+1}$ *при* $1\leqslant i\leqslant j\leqslant n-1$.

Тогда в алгебре $\mathcal{M}(D)$ *существуют инвариантные элементы* $M_1, \ldots, M_n$ *степени* 0, *удовлетворяющие условиям*:

1) $M_i\geqslant 0$ *при* $1\leqslant i\leqslant n$; $\sum_{i=1}^{n} M_i=1$.

2) $M_i\cdot\mathfrak{A}_i\subset\mathfrak{B}_n$, $M_i\cdot\mathfrak{B}_n\subset\mathfrak{B}_n$ *при* $1\leqslant i\leqslant n$.

3) $[M_j, F_i] \in \mathfrak{B}_n$ *при* $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$;

$M_i[M_j, F_i] \in \mathfrak{B}_n$ *при* $1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n$;

$[M_i, M_j] \in \mathfrak{B}_n$ *при* $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

4) $\forall q_j \in Q_j$ *при* $1 \leqslant i, j \leqslant n$;

$[M_i, q_j] \in \mathfrak{B}_n, \quad [M_i, q_j F_j] \in \mathfrak{B}_n$;

$M_i[q_j, F_i] \in \mathfrak{B}_n$ *при* $i > j$.

5) $\forall b \in \mathfrak{B}_0 \quad [b, M_i] \in \mathfrak{B}_n$ *при* $1 \leqslant i \leqslant n$.

6) $\forall b \in \mathfrak{B}_0 \quad M_i[b, F_i] \in \mathfrak{B}_n$ *при* $1 \leqslant i \leqslant n$.

7) $\mathfrak{B}_{j-1} \cdot [M_i, F_j] \subset \mathfrak{B}_n$, $[M_i, F_j] \cdot \mathfrak{B}_{j-1} \subset \mathfrak{B}_n$ *при* $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$.

Такой набор операторов с точностью до гомотопии определен однозначно, т. е. любые 2 *набора операторов* $(M_1', \ldots, M_n')$ *и* $(M_1''), \ldots, M_n''$ *удовлетворяющие условиям* 1)—7), *связаны между собой непрерывной по норме гомотопией* $(M_1(t), \ldots, M_n(t))$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, *удовлетворяющей при всех* t *условиям* 1)—7).

Доказательство. Построение требуемых операторов $M_1, \ldots, M_n$ проведем по индукции. Индуктивное предположение номер k: существуют операторы $M_1, \ldots, M_k$, удовлетворяющие условиям 1)—3) и 5)—7) с заменой n на k, а также условию 4) с заменой $\mathfrak{B}_n$ на $\mathfrak{B}_k$ при $1 \leqslant i \leqslant k$, $1 \leqslant j \leqslant n$ (вместо $1 \leqslant i, j \leqslant n$). При $k=1$ можно взять $M_1 = 1$. Предположим, что операторы $M_1', \ldots, M_k'$ удовлетворяют индуктивному предположению номер k. Пусть $\mathfrak{A}_{k+1}'$—минимальная подалгебра в $\mathscr{M}(D)$, содержащая $\mathfrak{A}_{k+1}$; $[M_j', F_{k+1}]$ при всех $j \leqslant k$; $[q_j, F_{k+1}]$ при всех $q_j \in Q_j$, $j \leqslant k$; $[b, F_{k+1}]$ при всех $b \in L$ (см. определение 1). Из условий 1°—3°, 6° и $M_i' \cdot \mathfrak{B}_k \subset \mathfrak{B}_k$ нетрудно получить, что $\mathfrak{B}_k \cdot \mathfrak{A}_{k+1}' \subset \mathfrak{B}_{k+1}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ — линейное подпространство в $\mathscr{M}(D)$, натянутое на $M_1', \ldots, M_k'$; $F_1, \ldots, F_{k+1}$; $Q_1, \ldots, Q_n$; $Q_1 F_1, \ldots, Q_n F_n$; L. Положим $E_1 = \mathfrak{B}_k$, $E_2 = \mathfrak{A}_{k+1}'$, $E = \mathfrak{B}_{k+1}$. Теорема 4 дает пару элементов $M, N \in \mathscr{M}(D)$. Операторы $M_i = \sqrt{M} M_i' \sqrt{M}$ при $i \leqslant k$, $M_{k+1} = N$ удовлетворяют индуктивному предположению номер $(k+1)$. Проверка не представляет затруднений.

Утверждение о существовании гомотопии доказывается следующим образом. Пусть $Q_i' = Q_i \cup \{M_i'\} \cup \{M_i''\}$. Применяя уже доказанную часть теоремы к n-цепочке $\mathfrak{B}_0 \supset \ldots \supset \mathfrak{B}_n$, подалгебрам $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$, операторам $F_1, \ldots, F_n$ и множествам $Q_1', \ldots, Q_n'$, получим набор $M_1, \ldots, M_n$. Искомая гомотопия задается при $0 \leqslant t \leqslant 1/2$ по формуле: $M_i(t) = 2tM_i + (1-2t)M_i'$, а при $1/2 \leqslant t \leqslant 1$ по формуле: $M_i(t) = (2-2t)M_i + (2t-1)M_i''$. Выполнение всех условий 1) — 7) очевидно, за исключением второго и третьего соотношений п. 3). Эти 2 соотношения вытекают из п. 3) для наборов $(M_1', \ldots, M_n')$, $(M_1'', \ldots, M_n'')$ и $(M_1, \ldots, M_n)$ и п. 4) для набора $(M_1, \ldots, M_n)$. ∎

§ 4. Операторный K-функтор. Произведение-пересечение

В этом параграфе определяется операторный гомологическо-когомологический K-функтор $KK(A, B)$. Все рассматриваемые алгебры, подалгебры, гомоморфизмы считаются градуированными. (Напомним, что $[x, y]$ означает градуированный коммутатор $xy-(-1)^{\deg x \cdot \deg y} yx$.) Обозначения $KU^G K(A, B)$, $KO^G K(A, B)$ и $KR^G K(A, B)$ относятся к K-функтору на категориях комплексных, вещественных и «вещественных» алгебр соответственно. Буквы U, O, R, G мы обычно будем опускать. Действие G на всех алгебрах, рассматриваемых как аргументы K-функтора, считается непрерывным.

Определение 1. Пусть A и B — алгебры с непрерывным действием G. Обозначим через $\mathscr{E}(A, B)$ множество троек $(\varepsilon, \varphi, F)$, где ε — градуировка пространства $\mathscr{H}_B$ (см. п. 3 § 2), $\varphi: A \to \mathscr{L}(\mathscr{H}_B)$ — гомоморфизм, $F \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_B)$ — инвариантный оператор степени 1, причем $\forall a \in A$ элементы

$$[\varphi(a), F], \quad (F^2-1)\varphi(a), \quad (F-F^*)\varphi(a) \tag{1}$$

принадлежат $\mathscr{K}_B = \mathscr{K}(\mathscr{H}_B)$. Через $\mathscr{D}(A, B)$ обозначим множество вырожденных троек, т. е. таких, для которых все элементы (1) равны 0.

Определение 2.

1° Тройки $(\varepsilon_1, \varphi_1, F_1)$ и $(\varepsilon_2, \varphi_2, F_2) \in \mathscr{E}(A, B)$ называются *унитарно эквивалентными*, если существует такой инвариантный унитарный элемент $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_B)$, который переводит $(\varepsilon_1, \varphi_1, F_1)$ в $(\varepsilon_2, \varphi_2, F_2)$, т. е. $\forall z \in \mathscr{H}_B$ $\deg_2(u(z)) = \deg_1(z)$; $\forall a \in A$ $\varphi_2(a) = u\varphi_1(a)u^{-1}$ и $F_2 = uF_1u^{-1}$.

2° *Гомотопией*, соединяющей тройки $x_\alpha = (\varepsilon_\alpha, \varphi_\alpha, F_\alpha)$ и $x_\beta = (\varepsilon_\beta, \varphi_\beta, F_\beta) \in \mathscr{E}(A, B)$, называется тройка

$$\{x_t\} = (\{\varepsilon_t\}, \{\varphi_t\}, \{F_t\})_{t \in [\alpha, \beta]} \in \mathscr{E}(A, B[\alpha, \beta]),$$

ограничения которой на концы отрезка $[\alpha, \beta]$ (т. е. образы при ограничениях $\mathscr{H}_{B[\alpha,\beta]} \to \mathscr{H}_{B[t_0]} \simeq \mathscr{H}_{B[\alpha,\beta]} \otimes_{B[\alpha,\beta]} B[t_0]$ и $\mathscr{L}(\mathscr{H}_{B[\alpha,\beta]}) \to \mathscr{L}(\mathscr{H}_{B[t_0]})$, где $t_0 = \alpha$ или β) совпадают с исходными тройками x_α и x_β.

3° *Операторной гомотопией* называется такая гомотопия, что $\forall t \in [\alpha, \beta]$ $\varepsilon_t = \varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta$, $\varphi_t = \varphi_\alpha = \varphi_\beta$, а функция $t \to F_t$ непрерывна по норме.

Определение 3. Пусть $\overline{\mathscr{E}}(A, B)$ — множество классов гомотопных троек, а $\overline{\mathscr{D}}(A, B)$ — образ $\mathscr{D}(A, B)$ в $\overline{\mathscr{E}}(A, B)$. Отождествим $\mathscr{H}_B \oplus \mathscr{H}_B$ с $\mathscr{H}_B$ при помощи инвариантной изометрии степени 0 (любые две различные изометрии гомотопны — см. § 1, п. 17, и § 2, п. 3) и введем сложение на $\overline{\mathscr{E}}(A, B)$: $(\varepsilon_1, \varphi_1, F_1) \oplus (\varepsilon_2, \varphi_2, F_2) = (\varepsilon_1 \oplus \varepsilon_2, \varphi_1 \oplus \varphi_2, F_1 \oplus F_2)$. Факторполугруппу $\overline{\mathscr{E}}(A, B)/\overline{\mathscr{D}}(A, B)$ обозначим через $KK(A, B)$.

Замечание 1. Если гильбертов B-модуль E имеет счетную систему образующих, то любая тройка (ε — градуировка E, $\varphi: A \to \mathscr{L}(E)$, $F \in \mathscr{L}(E)$), удовлетворяющая условиям определения 1 (с заменой $\mathscr{K}_B$

на $\mathcal{K}(E)$), может рассматриваться как элемент $KK(A, B)$. Стабилизация

$$E \Rightarrow E \oplus \mathcal{H}_B, \quad (\varepsilon, \varphi, F) \Rightarrow (\varepsilon, \varphi, F) \oplus (\varepsilon_0, \varphi_0, F_0),$$

где $(\varepsilon_0, \varphi_0, F_0) \in \mathcal{D}(A, B)$, переводит $(\varepsilon, \varphi, F)$ в элемент $\mathcal{E}(A, B)$.

Как следует, например, из той же теоремы стабилизации (см. п. 3 § 2 и п. 12 § 1), любые две канонические градуировки $\mathcal{H}_B$ отличаются на изометрию. Поэтому можно было бы зафиксировать одну градуировку ε для всех троек $(\varepsilon, \varphi, F)$. Однако удобнее не фиксировать ε.

ТЕОРЕМА 1. *$KK(A, B)$ — группа.*

Доказательство. Пусть $(\varepsilon, \varphi, F) \in \mathcal{E}(A, B)$. Обозначим через $(-\varepsilon)$ противоположную к ε градуировку на $\mathcal{H}_B$, а через $(-\varphi)\colon A \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ — гомоморфизм, определяемый по формуле $(-\varphi)(a) = (-1)^{\deg a}\varphi(a)$. Тогда элемент $(-\varepsilon, -\varphi, -F)$ является обратным к $(\varepsilon, \varphi, F)$. В самом деле, операторная гомотопия

$$\left(\varepsilon \oplus (-\varepsilon), \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & -\varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} F\cos t & \sin t \\ \sin t & -F\cos t \end{pmatrix}\right)$$

при $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$ сводит $(\varepsilon, \varphi, F) \oplus (-\varepsilon, -\varphi, -F)$ к $\left(\varepsilon \oplus (-\varepsilon), \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & -\varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \in \mathcal{D}(A, B)$. ■

Замечание 2. Если алгебра A унитальна, а B имеет счетную аппроксимативную единицу, то в определении 1 можно дополнительно потребовать, чтобы гомоморфизм φ был унитален. От этого группа $KK(A, B)$ не изменится. Действительно, во-первых, множество троек $(\varepsilon, \varphi, F)$, в которых φ унитален, непусто: если $\psi\colon A \hat{\otimes} C_{1,0} \to \mathcal{L}(\mathcal{H}) \subsetneq \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ — унитальное представление (см. п. 5 § 2), то, полагая $\varphi_0 = \psi|_{A \hat{\otimes} C}$, $F_0 = \psi(1 \hat{\otimes} \varepsilon_1)$, получим элемент $(\varepsilon_0, \varphi_0, F_0) \in \mathcal{D}(A, B)$. Далее если $(\varepsilon, \varphi, F) \in \mathcal{E}(A, B)$, то $P = \varphi(1)$ — эрмитов проектор степени 0 в $\mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$. Относительно разложения $\mathcal{H}_B = \operatorname{Im} P \oplus \operatorname{Im}(1-P)$ тройка $(\varepsilon, \varphi, F)$ операторно гомотопна $(\varepsilon', \varphi, PFP) \oplus (\varepsilon'', 0, 0)$. Применяя замечание 1 при $E = \operatorname{Im} P$, получим требуемое.

Отметим, что для троек $(\varepsilon, \varphi, F) \in \mathcal{E}(A, B)$, в которых φ унитален, $F^2 - 1 \in \mathcal{K}_B$ и $F - F^* \in \mathcal{K}_B$. В случае $A = C$ мы обычно будем считать, что φ унитален, и будем опускать φ в обозначении элемента $(\varepsilon, \varphi, F) \in \mathcal{E}(C, B)$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть A — идеал в A_1, B — идеал в B_1, причем A, B, A_1 и B_1 — алгебры со счетными аппроксимативными единицами и действие G на A, B, A_1 и B_1 непрерывно.*

1° *Группа $KK(A, B)$ не изменится, если в определениях 1—3 всюду заменить $\mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ на $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{B_1})$, сохранив в определении 1 условие принадлежности элементов (1) идеалу $\mathcal{K}_B$ (заметим, что $\mathcal{K}_B \subset \mathcal{K}_{B_1} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H}_{B_1})$).*

2° *Группа $KK(A, B)$ не изменится, если в определениях 1—3 потребовать, чтобы гомоморфизм φ продолжался на A_1 (т. е. вместо $\mathcal{E}(A, B)$*

рассматривается множество троек $(\varepsilon,\ \varphi: A_1 \to \mathscr{L}(\mathscr{H}_B),\ F)$. *В список* (1) *входят те же элементы, что и прежде, при* $a \in A$, *а в п.* 1° *определения* 2 $a \in A_1$).

Допустимы также оба эти изменения одновременно.

Доказательство. 1°. Обозначим новую группу через $KK'(A, B)$. Гомоморфизм $r: KK'(A, B) \to KK(A, B)$ получается путем ограничения $\mathscr{L}(\mathscr{H}_{B_1}) \to \mathscr{L}(\mathscr{H}_B)$. Гомоморфизм $s: KK(A, B) \to KK'(A, B)$ получается при помощи стабилизации (ср. замечание 1): рассматривая $\mathscr{H}_B$ как гильбертов B_1-модуль и используя изоморфизм $\mathscr{H}_B \oplus \mathscr{H}_{B_1} \simeq \mathscr{H}_{B_1}$, добавляем к $(\varepsilon, \varphi, F)$ вырожденную тройку $(\varepsilon_0, \varphi_0, F_0)$ и получаем элемент $KK'(A, B)$. Сквозной гомоморфизм $r \cdot s$ тождествен по очевидным причинам, а $s \cdot r$ тождествен ввиду того, что гомоморфизм ограничения $\mathscr{L}(\mathscr{H}_{B_1} \oplus \mathscr{H}_{B_1}) \to \mathscr{L}(\mathscr{H}_B \oplus \mathscr{H}_{B_1})$ гомотопен тождественному автоморфизму (см. § 1, п. 19).

2°. Новую группу обозначим через $K'K(A, B)$. Гомоморфизм $K'K(A, B) \to KK(A, B)$ получается очевидным образом. Для построения обратного гомоморфизма рассмотрим тройку $(\varepsilon, \varphi, F) \in \mathscr{E}(A, B)$. Продолжим φ до $\tilde{\varphi}: \tilde{A} \to \mathscr{L}(\mathscr{H}_B)$ и обозначим через ψ гомоморфизм $\mathscr{L}(\tilde{A} \oplus \mathscr{H}_{\tilde{A}}) \to \mathscr{L}(\mathscr{H}_B \oplus (\mathscr{H} \otimes \mathscr{H}_B))$, индуцированный гомоморфизмом $\tilde{\varphi}$, через Φ — оператор $F \oplus (1 \otimes F) \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_B \oplus (\mathscr{H} \otimes \mathscr{H}_B))$, а через $\bar{\varepsilon}$ — градуировку $\varepsilon \oplus (\varepsilon' \otimes \varepsilon)$ пространства $\mathscr{H}_B \oplus (\mathscr{H} \otimes \mathscr{H}_B)$.

Пусть $\xi: A = A \oplus 0 \subset \mathscr{L}(\tilde{A} \oplus \mathscr{H}_{\tilde{A}})$ и $\eta: A = A \oplus 0 \subset \mathscr{L}(A \oplus \mathscr{H}_{\tilde{A}})$ — естественные вложения. Очевидно, что $(\bar{\varepsilon}, \psi, \Phi)$ можно рассматривать как элемент $\mathscr{E}(\mathscr{K}(A \oplus \mathscr{H}_A), B)$ и $(\varepsilon, \varphi, F) = (\bar{\varepsilon}, \psi \cdot \xi, \Phi)$ в группе $KK(A, B)$. Отождествим $\mathscr{L}(A \oplus \mathscr{H}_{\tilde{A}})$ с $\mathscr{L}(\tilde{A} \oplus \mathscr{H}_{\tilde{A}})$ посредством изоморфизма $A \oplus \mathscr{H}_{\tilde{A}} \simeq \tilde{A} \oplus \mathscr{H}_{\tilde{A}}$. Согласно п. 20 § 1 тройки $(\bar{\varepsilon}, \psi \cdot \xi, \Phi)$ и $(\bar{\varepsilon}, \psi \cdot \eta, \Phi)$ гомотопны. Гомоморфизм $\psi \cdot \eta$, очевидно, продолжается на $\mathscr{L}(A) = \mathscr{M}(A)$, а следовательно, и на A_1. Поэтому можно определить гомоморфизм $KK(A, B) \to K'K(A, B)$, считая что $(\varepsilon, \varphi, F)$ переходит в $(\bar{\varepsilon}, \psi \cdot \eta, \Phi)$. Взаимная обратность построенных гомоморфизмов вытекает из п. 20 § 1. ■

Следствие 1. 1) $KK(A, B_1 \oplus B_2) \simeq KK(A, B_1) \oplus KK(A, B_2)$.

2) *Если алгебры* A_1, A_2, B *имеют счетные аппроксимативные единицы, то* $KK(A_1 \oplus A_2, B) \simeq KK(A_1, B) \oplus KK(A_2, B)$.

Доказательство. 1) Очевидно ввиду того, что $\mathscr{L}(\mathscr{H}_{B_1 \oplus B_2}) \simeq \mathscr{L}(\mathscr{H}_{B_1}) \oplus \mathscr{L}(\mathscr{H}_{B_2})$.

2) Если $(\varepsilon_i, \varphi_i, F_i) \in \mathscr{E}(A_i, B)$ при $i = 1, 2$, то $(\varepsilon_1 \oplus \varepsilon_2, \varphi_1 \oplus \varphi_2, F_1 \oplus F_2) \in \mathscr{E}(A_1 \oplus A_2, B)$.

Обратно, пусть $(\varepsilon, \varphi, F) \in \mathscr{E}(A_1 \oplus A_2, B)$. Пользуясь теоремой 2, можно считать, что φ продолжается на $\tilde{A}_1 \oplus \tilde{A}_2$. Пусть $P = \varphi(1 \oplus 0)$, $E_1 = \operatorname{Im} P$, $E_2 = \operatorname{Im}(1 - P)$, ε_i — градуировка E_i. Нетрудно проверить, что тройки $(\varepsilon_1, \varphi|_{A_1 \oplus 0}, PFP)$ и $(\varepsilon_2, \varphi|_{0 \oplus A_2}, (1-P)F(1-P))$ удовлетворяют условиям замечания 1 и, следовательно, определяют элементы из $KK(A_1, B)$ и $KK(A_2, B)$ соответственно. ■

Определение 4 (функториальные свойства). Гомоморфизм $f: A_2 \to A_1$ индуцирует гомоморфизм групп $f^*: KK(A_1, B) \to KK(A_2, B)$ по формуле: $f^*(\varepsilon, \varphi, F) = (\varepsilon, \varphi \cdot f, F)$. Пусть алгебры B_1 и B_2 имеют счетные аппроксимативные единицы. Гомоморфизм $g: B_1 \to B_2$, согласно п. 8 § 2, порождает $g_*: \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\widetilde{B}_1}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\widetilde{B}_1} \otimes_{\widetilde{B}_1} \widetilde{B}_2)$ и индуцирует гомоморфизм групп $g_*: KK(A, B_1) \to KK(A, B_2)$ по формуле: $g_*(\varepsilon, \varphi, F) = (\bar{\varepsilon}, g_* \cdot \varphi, g_*(F))$, где $\bar{\varepsilon}$ — соответствующая ε градуировка $\mathcal{H}_{\widetilde{B}_1} \otimes_{\widetilde{B}_1} \widetilde{B}_2$.

Для любой алгебры D гомоморфизм $\tau_D: KK(A, B) \to KK(A \hat{\otimes} D, B \hat{\otimes} D)$ определяется по формуле $\tau_D(\varepsilon, \varphi, F) = (\bar{\varepsilon}, \varphi \hat{\otimes} 1, F \hat{\otimes} 1)$, где $\bar{\varepsilon}$ — соответствующая ε градуировка $\mathcal{H}_B \hat{\otimes} D$.

ТЕОРЕМА 3 (гомотопическая инвариантность). *Если гомоморфизмы f_0 и $f_1: A_2 \to A_1$ гомотопны, то f_0^* и $f_1^*: KK(A_1, B) \to KK(A_2, B)$ совпадают. Если гомоморфизмы g_0 и $g_1: B_1 \to B_2$ гомотопны, то $(g_0)_*$ и $(g_1)_*$: $KK(A, B_1) \to KK(A, B_2)$ совпадают.* ■

ТЕОРЕМА 4. *Пусть алгебры A_1 и A_2 сепарабельны, а D, B_1 и B_2 имеют строго положительные элементы, причем действие G на всех этих алгебрах непрерывно. Определено билинейное (дистрибутивное) спаривание (произведение-пересечение):*

$$KK(A_1, B_1 \hat{\otimes} D) \otimes_D KK(D \hat{\otimes} A_2, B_2) \to KK(A_1 \hat{\otimes} A_2, B_1 \hat{\otimes} B_2). \qquad (2)$$

Это спаривание контравариантно по A_1 и A_2, ковариантно по B_1 и B_2, и для любого гомоморфизма $f: D \to D_1$ имеет место соотношение:

$$f_*(x) \otimes_{D_1} y = x \otimes_D f^*(y).$$

Далее, спаривание (2) ассоциативно, т. е. $(x_1 \otimes_{D_1} x_2) \otimes_{D_2} x_3 = x_1 \otimes_{D_1} (x_2 \otimes \otimes_{D_2} x_3)$ при $x_1 \in KK(A_1, B_1 \hat{\otimes} D_1)$, $x_2 \in KK(D_1 \hat{\otimes} A_2, B_2 \hat{\otimes} D_2)$, $x_3 \in KK(D_2 \hat{\otimes} \hat{\otimes} A_3, B_3)$ (здесь алгебры A_1, A_2, A_3, D_1 должны быть сепарабельны, а остальные должны иметь строго положительные элементы). Кроме того, это спаривание коммутирует с гомоморфизмом τ из определения 4, т. е.:

1) $\tau_{D_2}(x_1) \otimes_{D_1 \hat{\otimes} D \hat{\otimes} D_2} \tau_{D_1}(x_2) = x_1 \otimes_D x_2$ *при* $x_1 \in KK(A_1, B_1 \hat{\otimes} D_1 \hat{\otimes} D)$, $x_2 \in KK(D \hat{\otimes} D_2 \hat{\otimes} A_2, B_2)$ *(здесь алгебры A_1, A_2, D_2 должны быть сепарабельны, а остальные должны иметь строго положительные элементы)*;

2) $\tau_{D_1}(x_1 \otimes_D x_2) = \tau_{D_1}(x_1) \otimes_{D \hat{\otimes} D_1} \tau_{D_1}(x_2)$ *при* $x_1 \in KK(A_1, B_1 \hat{\otimes} D)$, $x_2 \in \in KK(D \hat{\otimes} A_2, B_2)$ *(здесь алгебры A_1, A_2, D_1 должны быть сепарабельны, а остальные должны иметь строго положительные элементы).*

Доказательство. Зафиксируем элементы $x_1 = (\varepsilon_1, \varphi_1, F_1) \in \mathcal{E}(A_1, B_1 \hat{\otimes} D)$, $x_2 = (\varepsilon_2, \varphi_2, F_2) \in \mathcal{E}(D \hat{\otimes} A_2, B_2)$. Пользуясь теоремой 2, можно считать, что $\varphi_1: \widetilde{A}_1 \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\widetilde{B}_1 \hat{\otimes} \widetilde{D}})$, $F_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\widetilde{B}_1 \hat{\otimes} \widetilde{D}})$, $\varphi_2: \widetilde{D} \hat{\otimes} \widetilde{A}_2 \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\widetilde{B}_2})$, $F_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\widetilde{B}_2})$, причем гомоморфизмы φ_1 и φ_2 унитальны. Отождествив $(\mathcal{H}_{\widetilde{B}_1 \hat{\otimes} \widetilde{D}} \hat{\otimes} \widetilde{A}_2) \hat{\otimes}_{\widetilde{B}_1 \hat{\otimes} \widetilde{D} \hat{\otimes} \widetilde{A}_2} (\widetilde{B}_1 \hat{\otimes} \mathcal{H}_{\widetilde{B}_2})$ с $\mathcal{H}_{\widetilde{B}_1 \hat{\otimes} \widetilde{B}_2}$ (см. § 2, п. п. 8 и 9), получаем

градуировку $\varepsilon_1 \otimes_D \varepsilon_2$ на $\mathcal{H}_{\widetilde{B}_1 \hat{\otimes} \widetilde{B}_2}$ и гомоморфизм

$$\mathcal{L}(\mathcal{H}_{\widetilde{B}_1 \otimes \widetilde{D}}) \hat{\otimes} \widetilde{A}_2 \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\widetilde{B}_1 \hat{\otimes} \widetilde{B}_2})$$

(см. § 2, п. 8). Композиция с ограничением $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{\widetilde{B}_1 \hat{\otimes} \widetilde{B}_2}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_{B_1 \hat{\otimes} B_2})$ дает:

$$\Phi_2 : \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\widetilde{B}_1 \hat{\otimes} \widetilde{D}}) \hat{\otimes} \widetilde{A}_2 \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_{B_1 \hat{\otimes} B_2}).$$

Этот же гомоморфизм получается в результате композиции:

$$\Phi_2 : \mathcal{M}(\mathcal{K} \hat{\otimes} \widetilde{B}_1 \hat{\otimes} \widetilde{D}) \hat{\otimes} \widetilde{A}_2 \to \mathcal{M}(\mathcal{K} \hat{\otimes} \widetilde{B}_1 \hat{\otimes} \widetilde{D} \hat{\otimes} \widetilde{A}_2) \to$$
$$\xrightarrow{(1 \hat{\otimes} \varphi_2)_*} \mathcal{M}(\mathcal{K} \hat{\otimes} B_1 \hat{\otimes} \mathcal{M}(\mathcal{K} \hat{\otimes} B_2)) \to \mathcal{M}(\mathcal{K} \hat{\otimes} B_1 \hat{\otimes} \mathcal{K} \hat{\otimes} B_2) \simeq \mathcal{M}(\mathcal{K}_{B_1} \hat{\otimes} \mathcal{K}_{B_2}).$$

Положим

$$\varphi_1 \otimes_D \varphi_2 = \Phi_2 \cdot (\varphi_1 \hat{\otimes} 1) : A_1 \hat{\otimes} A_2 \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_{B_1 \hat{\otimes} B_2}) \simeq \mathcal{M}(\mathcal{K}_{B_1 \hat{\otimes} B_2}).$$

Для построения оператора $F_1 \#_D F_2$ введем следующие обозначения.

Определение 5. Пусть $\mathfrak{A}_1$ — минимальная подалгебра в $\mathcal{M}(\mathcal{K}_{B_1} \hat{\otimes} \mathcal{K}_{B_2})$, содержащая при всех $a \in A_1 \hat{\otimes} A_2$ элементы:

$$\Phi_2((F_1 - F_1^*) \hat{\otimes} 1) \cdot (\varphi_1 \otimes_D \varphi_2)(a),$$
$$\Phi_2((F_1^2 - 1) \hat{\otimes} 1) \cdot (\varphi_1 \otimes_D \varphi_2)(a),$$
$$[\Phi_2(F_1 \hat{\otimes} 1), (\varphi_1 \otimes_D \varphi_2)(a)].$$

Пусть $\mathfrak{A}_2$ — минимальная подалгебра в $\mathcal{M}(\mathcal{K}_{B_1} \hat{\otimes} \mathcal{K}_{B_2})$, содержащая при всех $a \in A_1 \hat{\otimes} A_2$ элементы:

$$1 \hat{\otimes} (F_2 - F_2^*); \quad 1 \hat{\otimes} (F_2^2 - 1);$$
$$[(1 \hat{\otimes} F_2), (\varphi_1 \otimes_D \varphi_2)(a)];$$
$$[\Phi_2(F_1 \hat{\otimes} 1), 1 \hat{\otimes} F_2].$$

Обозначим через $S(x_1, x_2)$ множество пар инвариантных элементов $M_1, M_2 \in \mathcal{M}(\mathcal{K}_{B_1} \hat{\otimes} \mathcal{K}_{B_2})$ степени 0, удовлетворяющих условиям:

1) $M_1 \geqslant 0, M_2 \geqslant 0, M_1 + M_2 = 1.$

2) $M_i \cdot \mathfrak{A}_i \subset \mathcal{K}_{B_1} \hat{\otimes} \mathcal{K}_{B_2}$.

3) M_1 и M_2 коммутируют по модулю $\mathcal{K}_{B_1} \hat{\otimes} \mathcal{K}_{B_2}$ с $\Phi_2(F_1 \hat{\otimes} 1)$, $1 \hat{\otimes} F_2$, $(\varphi_1 \otimes_D \varphi_2)(A_1 \hat{\otimes} A_2)$.

При $(M_1, M_2) \in S(x_1, x_2)$ положим $F_1 \#_D F_2 = \sqrt{M_1} \cdot \Phi_2(F_1 \hat{\otimes} 1) + \sqrt{M_2} \cdot (1 \hat{\otimes} F_2)$. Используя то, что $\sqrt{M_i}$ приближается по норме многочленами от M_i с нулевым свободным членом, нетрудно проверить, что $x_1 \otimes_D x_2 = (\varepsilon_1 \otimes_D \varepsilon_2, \varphi_1 \otimes_D \varphi_2, F_1 \#_D F_2) \in \mathcal{E}(A_1 \hat{\otimes} A_2, B_1 \hat{\otimes} B_2)$. Если (M_1', M_2') — другой элемент из $S(x_1, x_2)$, то $\forall t \in [0, 1]$ $(tM_1' + (1-t) M_1, tM_2' + (1-t) M_2) \in S(x_1, x_2)$, поэтому с точностью до операторной гомотопии $(\varepsilon_1 \otimes_D \varepsilon_2, \varphi_1 \otimes_D \varphi_2, F_1 \#_D F_2)$ не зависит от выбора $(M_1, M_2) \in S(x_1, x_2)$.

Покажем, что множество $S(x_1, x_2)$ не пусто. Обозначим через $\mathfrak{F}_1$ минимальную подалгебру в $\mathcal{M}(\mathcal{K}_{B_1} \hat{\otimes} \mathcal{K}_{B_2})$, содержащую 1, $\Phi_2(F_1 \hat{\otimes} 1)$,

$(\varphi_1 \otimes_D \varphi_2)(A_1 \hat{\otimes} A_2)$. Пусть $\mathfrak{B}_1'$ — минимальная подалгебра в $\mathcal{M}(\mathcal{K}_{B_1} \hat{\otimes} \mathcal{K}_{B_2})$, содержащая $\mathfrak{F}_1 \cdot \mathfrak{A}_1$. Ясно, что $\mathfrak{B}_1' \subset \Phi_2(\mathcal{K}_{B_1 \hat{\otimes} D} \hat{\otimes} A_2)$, откуда легко вытекает, что $\mathfrak{B}_1' \cdot \mathfrak{A}_2 \subset \mathcal{K}_{B_1} \hat{\otimes} \mathcal{K}_{B_2}$. Положим $\mathfrak{B}_2 = \mathcal{K}_{B_1} \hat{\otimes} \mathcal{K}_{B_2}$, $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_1' + \mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_0 = (\varphi_1 \otimes_D \varphi_2)(A_1 \hat{\otimes} A_2) + \mathfrak{B}_1$. Тогда $\mathfrak{B}_0 \supset \mathfrak{B}_1 \supset \mathfrak{B}_2$ — 2-цепочка (см. определение 1 § 3 и лемму 2 § 3). Подалгебры $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ и элементы $\Phi_2(F_1 \hat{\otimes} 1)$, $1 \hat{\otimes} F_2$ в $\mathcal{M}(\mathcal{K}_{B_1} \hat{\otimes} \mathcal{K}_{B_2})$ удовлетворяют условиям теоремы 5 § 3 (при $Q_1 = Q_2 = \{0\}$). Эта теорема и дает искомую пару $(M_1, M_2) \in S(x_1, x_2)$.

Если $x_1^{(t)} = (\varepsilon_1^{(t)}, \varphi_1^{(t)}, F_1^{(t)}) \in \mathscr{E}(A_1, B_1[0, 1] \hat{\otimes} D)$ — гомотопия тройки x_1, то $x_1^{(t)} \otimes_D x_2$ — гомотопия $x_1 \otimes_D x_2$. Аналогично для гомотопии x_2. Наконец, если x_1 вырождена, то, полагая $M_1 = 1$, $M_2 = 0$, получим вырожденную $x_1 \otimes_D x_2$. Если x_2 вырождена, то можно взять $M_1 = 0$, $M_2 = 1$. Тем самым спаривание (2) корректно определено.

Билинейность построенного спаривания очевидна. Функториальность по A_1 также очевидна, а функториальность по A_2 и D вытекает из соотношений п.п. 8 и 9 § 2. Аналогично, для любых гомоморфизмов $B_1 \to B_1'$, $B_2 \to B_2'$ получаем (замена алгебр):

$$[(\mathcal{H}_{\tilde{B}_1 \hat{\otimes} \tilde{D}} \hat{\otimes} \tilde{A}_2) \hat{\otimes}_{\tilde{B}_1 \hat{\otimes} \tilde{D} \hat{\otimes} \tilde{A}_2} (\tilde{B}_1 \hat{\otimes} \mathcal{H}_{\tilde{B}_2})] \hat{\otimes}_{\tilde{B}_1 \hat{\otimes} \tilde{B}_2} (\tilde{B}_1' \hat{\otimes} \tilde{B}_2') \simeq$$
$$\simeq (\mathcal{H}_{\tilde{B}_1' \hat{\otimes} \tilde{D}} \hat{\otimes} \tilde{A}_2) \hat{\otimes}_{\tilde{B}_1' \hat{\otimes} \tilde{D} \hat{\otimes} \tilde{A}_2} (\tilde{B}_1' \hat{\otimes} \mathcal{H}_{\tilde{B}_2'}).$$

Если бы оператор $F_1 \#_D F_2$ был построен в $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{\tilde{B}_1 \hat{\otimes} \tilde{B}_2})$, а не в $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{B_1 \hat{\otimes} B_2})$, то отсюда немедленно вытекала бы функториальность по B_1 и B_2. Чтобы устранить это затруднение, воспользуемся стабилизацией: $\mathcal{H}_{B_i} \Rightarrow \mathcal{H}_{B_i} \oplus \mathcal{H}_{\tilde{B}_i}$, $x_i = (\varepsilon_i, \varphi_i, F_i) \Rightarrow y_i = (\varepsilon_i, \varphi_i, F_i) \oplus (\varepsilon_i', 0, 0)$, $i = 1, 2$. Произведение операторов $(F_1 \oplus 0) \#_D (F_2 \oplus 0)$ записывается в виде:

$$[\sqrt{M_1} \cdot \Phi_2(F_1 \hat{\otimes} 1) + \sqrt{M_2} \cdot (1 \hat{\otimes} F_2)] \oplus [0 \cdot \Phi_2(F_1 \hat{\otimes} 1) + 1 \cdot 0] \oplus$$
$$\oplus [1 \cdot 0 + 0 \cdot (1 \hat{\otimes} F_2)] \oplus [1 \cdot 0 + 0 \cdot 0] \in$$
$$\in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{B_1 \hat{\otimes} B_2} \oplus \mathcal{H}_{B_1 \hat{\otimes} \tilde{B}_2} \oplus \mathcal{H}_{\tilde{B}_1 \hat{\otimes} B_2} \oplus \mathcal{H}_{\tilde{B}_1 \hat{\otimes} \tilde{B}_2}) \simeq \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\tilde{B}_1 \hat{\otimes} \tilde{B}_2}).$$

Операторы $M_1' = M_1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1$, $M_2' = M_2 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\tilde{B}_1 \hat{\otimes} \tilde{B}_2})$ удовлетворяют по отношению к $F_1' = F_1 \oplus 0$ и $F_2' = F_2 \oplus 0$ условиям 1) — 3) определения 5. Тем самым произведение $F_1' \#_D F_2'$ определено в $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{\tilde{B}_1 \hat{\otimes} \tilde{B}_2})$, откуда и следует функториальность по B_1 и B_2.

Для проверки коммутирования спаривания (2) с τ надо снова воспользоваться заменой алгебр: $\widetilde{B_1 \hat{\otimes} D_1}$ на $\tilde{B}_1 \hat{\otimes} \tilde{D}_1$, $\widetilde{(D_2 \hat{\otimes} A_2)}$ на $\tilde{D}_2 \hat{\otimes} \tilde{A}_2$, $\widetilde{(D_1 \hat{\otimes} D \hat{\otimes} D_2)}$ на $\tilde{D}_1 \hat{\otimes} \tilde{D} \hat{\otimes} \tilde{D}_2$. Аналогично получается и второе соотношение коммутирования с τ.

Осталось доказать ассоциативность. Поскольку спаривание (2) коммутирует с τ, мы можем переписать искомую формулу в виде:

$$(\tau_{A_2 \hat{\otimes} A_3}(x_1) \otimes_{D_1 \hat{\otimes} A_2 \hat{\otimes} A_3} \tau_{A_3}(x_2)) \otimes_{D_2 \hat{\otimes} A_3} x_3 = \tau_{A_2 \hat{\otimes} A_3}(x_1) \otimes_{D_1 \hat{\otimes} A_2 \hat{\otimes} A_3} (\tau_{A_3}(x_2) \otimes_{D_2 \hat{\otimes} A_3} x_3).$$

После переобозначения $A_1\hat{\otimes}A_2\hat{\otimes}A_3$ через A, $D_1\hat{\otimes}A_2\hat{\otimes}A_3$ — через D_1, $D_2\hat{\otimes}A_3$ — через D_2, $\tau_{A_2\hat{\otimes}A_3}(x_1)$ — через x_1, $\tau_{A_3}(x_2)$ — через x_2 все сведется к доказательству соотношения

$$(x_1\otimes_{D_1}x_2)\otimes_{D_2}x_3=x_1\otimes_{D_1}(x_2\otimes_{D_2}x_3),$$

где $x_1\in KK(A, B_1\hat{\otimes}D_1)$, $x_2\in KK(D_1, B_2\hat{\otimes}D_2)$, $x_3\in KK(D_2, B_3)$, причем алгебры A и D_1 сепарабельны, а остальные имеют строго положительные элементы.

Мы будем считать, что $x_i=[(\varepsilon_i, \varphi_i, F_i)$, $i=1, 2, 3$, где

$$\varphi_1:\tilde{A}\to\mathscr{L}(\mathscr{H}_{\tilde{B}_1\hat{\otimes}\tilde{D}_1}),\qquad F_1\in\mathscr{L}(\mathscr{H}_{\tilde{B}_1\hat{\otimes}\tilde{D}_1});$$
$$\varphi_2:\tilde{D}_1\to\mathscr{L}(\mathscr{H}_{\tilde{B}_2\hat{\otimes}\tilde{D}_2}),\qquad F_2\in\mathscr{L}(\mathscr{H}_{\tilde{B}_2\hat{\otimes}\tilde{D}_2});$$
$$\varphi_3:\tilde{D}_2\to\mathscr{L}(\mathscr{H}_{\tilde{B}_3}),\qquad F_3\in\mathscr{L}(\mathscr{H}_{\tilde{B}_3}).$$

Заметим сразу, что градуировка $\varepsilon_1\otimes_{D_1}\varepsilon_2\otimes_{D_2}\varepsilon_3$ на $\mathscr{H}_{\tilde{B}_1\hat{\otimes}\tilde{B}_2\hat{\otimes}\tilde{B}_3}$ не зависит от расстановки скобок в нашем произведении. Это вытекает из соотношений п.п. 8 и 9 § 2. По аналогии с предыдущим рассмотрим гомоморфизмы:

$$\Phi_2=(1\hat{\otimes}\varphi_2)_*:\mathscr{M}(\mathscr{K}_{B_1\hat{\otimes}\tilde{D}_1})\to\mathscr{M}(\mathscr{K}_{B_1\hat{\otimes}B_2\hat{\otimes}\tilde{D}_2}),$$
$$\Phi_3'=(1\hat{\otimes}\varphi_3)_*:\mathscr{M}(\mathscr{K}_{B_2\hat{\otimes}\tilde{D}_2})\to\mathscr{M}(\mathscr{K}_{B_2\hat{\otimes}B_3}),$$
$$\Phi_3=1\hat{\otimes}\Phi_3':\mathscr{M}(\mathscr{K}_{B_1\hat{\otimes}B_2\hat{\otimes}\tilde{D}_2})\to\mathscr{M}(\mathscr{K}_{B_1\hat{\otimes}B_2\hat{\otimes}B_3}).$$

Очевидно,

$$(\varphi_1\otimes_{D_1}\varphi_2)\otimes_{D_2}\varphi_3=\Phi_3\cdot\Phi_2\cdot\varphi_1=\varphi_1\otimes_{D_1}(\varphi_2\otimes_{D_2}\varphi_3),$$

поэтому остается проверить, что операторы $(F_1\#_{D_1}F_2)\#_{D_2}F_3$ и $F_1\#_{D_1}(F_2\#_{D_2}F_3)$ гомотопны.

Обозначим $\Phi_3\cdot\Phi_2(F_1)$ через $\tilde{F}_1$, $\Phi_3(1\hat{\otimes}F_2)$ — через $\tilde{F}_2$, $1\hat{\otimes}1\hat{\otimes}F_3$ — через $\tilde{F}_3$, $\Phi_3\cdot\Phi_2\cdot\varphi_1(A)$ — через A'. Подалгебры $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3\subset\mathscr{M}(\mathscr{K}_{B_1\hat{\otimes}B_2\hat{\otimes}B_3})$ определим следующим образом. $\mathfrak{A}_1$ — минимальная подалгебра, содержащая при всех $a\in A'$ элементы:

$$(\tilde{F}_1^2-1)a,\quad(\tilde{F}_1-\tilde{F}_1^*)a,\quad[\tilde{F}_1, a].$$

При $i=2$, 3 $\mathfrak{A}_i$ — минимальная подалгебра, содержащая $\forall a\in A'$ элементы:

$$(\tilde{F}_i^2-1),\quad(\tilde{F}_i-\tilde{F}_i^*),\quad[\tilde{F}_i, a],$$
$$[\tilde{F}_i, \tilde{F}_j]\ \text{при всех}\ j<i.$$

Далее, при $i=1, 2$ обозначим через $\mathfrak{F}_i$ минимальную подалгебру в $\mathscr{M}(\mathscr{K}_{B_1\hat{\otimes}B_2\hat{\otimes}B_3})$, содержащую $1, \tilde{F}_1, \tilde{F}_i, A'$. Пусть теперь $\mathfrak{B}_1'$ — минимальная подалгебра в $\mathscr{M}(\mathscr{K}_{B_1\hat{\otimes}B_2\hat{\otimes}B_3})$, содержащая $\mathfrak{F}_1\cdot\mathfrak{A}_1$; $\mathfrak{B}_2''$ — минимальная подалгебра, содержащая $\mathfrak{B}_1'\cdot\mathfrak{A}_2$ и $[b, \tilde{F}_2]$ при всех $b\in\mathfrak{B}_1'$; $\mathfrak{B}_2'$ — минимальная подалгебра, содержащая $\mathfrak{F}_2\cdot\mathfrak{B}_2''$. Ясно, что $\mathfrak{A}_1\subset\mathfrak{B}_1'\subset\Phi_3\cdot\Phi_2(\mathscr{K}_{B_1\hat{\otimes}D_1})$; $\mathfrak{B}_2'\subset$ $\subset\Phi_3(\mathscr{K}_{B_1\hat{\otimes}B_2\hat{\otimes}D_2})$. Наконец, положим $\mathfrak{B}_3=\mathscr{K}_{B_1\hat{\otimes}B_2\hat{\otimes}B_3}$, $\mathfrak{B}_2=\mathfrak{B}_2'+\mathfrak{B}_3$, $\mathfrak{B}_1=$

$=\mathfrak{B}_1'+\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_0=A'+\mathfrak{B}_1$. Нетрудно, проверить, что $\mathfrak{B}_0\supset\mathfrak{B}_1\supset\mathfrak{B}_2\supset\mathfrak{B}_3$ — 3-цепочка, а подалгебры $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ и элементы $\widetilde{F}_1$, $\widetilde{F}_2$, $\widetilde{F}_3$ удовлетворяют условиям 1°—3° теоремы 5 § 3. Сейчас мы представим каждый из двух операторов $(F_1 \#_{D_1} F_2)\#_{D_2} F_3$ и $F_1\#_{D_1}(F_2\#_{D_2}F_3)$ в виде $\sqrt{N_1}\widetilde{F}_1+\sqrt{N_2}\widetilde{F}_2+ +\sqrt{N_3}\widetilde{F}_3$, где N_1, N_2, N_3 удовлетворяют условиям 1) — 3) и 5) — 7) теоремы 5 § 3. На основании этой теоремы наши операторы будут гомотопны. (Легко проверить, что условий 1) — 3), 5) — 7) достаточно для того, чтобы

$$(\varepsilon_1\otimes_{D_1}\varepsilon_2\otimes_{D_2}\varepsilon_3,\ \varphi_1\otimes_{D_1}\varphi_2\otimes_{D_2}\varphi_3,\ \sqrt{N_1}\widetilde{F}_1+\sqrt{N_2}\widetilde{F}_2+\sqrt{N_3}\widetilde{F}_3)\in$$
$$\in\mathscr{E}(A,\ B_1\hat{\otimes}B_2\hat{\otimes}B_3)).$$

Начнем с оператора $(F_1\#_{D_1}F_2)\#_{D_2}F_3$. Применяя тот же прием, что и при доказательстве функториальности, можно считать, что

$$F_1\#_{D_1}F_2=\sqrt{M_1}\cdot\Phi_2(F_1)+\sqrt{M_2}\cdot(1\hat{\otimes}F_2)\in\mathscr{M}(\mathscr{K}_{B_1\hat{\otimes}B_2\hat{\otimes}\widetilde{D}_2}),$$

где M_1, $M_2\in\mathscr{M}(\mathscr{K}_{B_1\hat{\otimes}B_2\hat{\otimes}\widetilde{D}_2})$ удовлетворяют условиям 1) — 3) определения 5 (с заменой B_2 на $B_2\hat{\otimes}D_2$). Пусть $M_i'=\Phi_3(M_i)$, $i=1, 2$. Обозначим через $\mathfrak{A}_3'$ минимальную подалгебру в $\mathscr{M}(\mathscr{K}_{B_1\hat{\otimes}B_2\hat{\otimes}B_3})$, содержащую $\mathfrak{A}_3$; $[M_i',\ \widetilde{F}_3]$ при $i=1, 2$; $[b,\ \widetilde{F}_3]$ при всех $b\in A'+\mathfrak{B}_1'+\mathfrak{B}_2'$. Кроме того, пусть $\mathfrak{F}$ — линейное подпространство, натянутое на M_1', M_2', $\widetilde{F}_1$, $\widetilde{F}_2$, $\widetilde{F}_3$, A'. Положим $E_1=\Phi_3(\mathscr{K}_{B_1\hat{\otimes}B_2\hat{\otimes}D_2})+\mathscr{K}_{B_1\hat{\otimes}B_2\hat{\otimes}B_3}$, $E_2=\mathfrak{A}_3'$, $E=\mathscr{K}_{B_1\hat{\otimes}B_2\hat{\otimes}B_3}$. Теорема 4 § 3 дает пару элементов M, $N\in\mathscr{M}(\mathscr{K}_{B_1\hat{\otimes}B_2\hat{\otimes}B_3})$. Нетрудно проверить, что эти элементы удовлетворяют по отношению к операторам $F_1\#_{D_1}F_2$ и F_3 условиям, аналогичным пунктам 1) — 3) определения 5, и, кроме того, операторы $N_1=\sqrt{M}M_1'\sqrt{M}$, $N_2=\sqrt{M}M_2'\sqrt{M}$, $N_3=N$ удовлетворяют условиям 1) — 3), 5) — 7) теоремы 5 § 3. Поэтому $(F_1\#_{D_1}F_2)\#_{D_2}F_3$ с точностью до элемента из $\mathscr{K}_{B_1\hat{\otimes}B_2\hat{\otimes}B_3}$ записывается в требуемом виде $\sqrt{N_1}\widetilde{F}_1+\sqrt{N_2}\widetilde{F}_2+ + \sqrt{N_3}\widetilde{F}_3$.

Рассмотрим теперь оператор $F_1\#_{D_1}(F_2\#_{D_2}F_3)$. Пусть

$$F_2\#_{D_2}F_3=\sqrt{M_2}\cdot\Phi_3'(F_2)+\sqrt{M_3}(1\hat{\otimes}F_3),$$

где M_2 и $M_3\in\mathscr{M}(\mathscr{K}_{B_2\hat{\otimes}B_3})$ удовлетворяют по отношению к операторам $\Phi_3'(F_2)$, $1\hat{\otimes}F_3$ и алгебре D_1 (вместо $A_1\hat{\otimes}A_2$) условиям 1) — 3) определения 5. Дополнительное условие, которое мы хотим наложить на M_2 и M_3, состоит в том, что они должны переводить в себя подалгебру $E_1'=\Phi_3'(\mathscr{K}_{B_2\hat{\otimes}D_2})+ +\mathscr{K}_{B_2\hat{\otimes}B_3}\subset\mathscr{M}(\mathscr{K}_{B_2\hat{\otimes}B_3})$. Для построения таких M_2 и M_3 обозначим через E_2' минимальную подалгебру в $\mathscr{M}(\mathscr{K}_{B_2\hat{\otimes}B_3})$, содержащую элементы $1\hat{\otimes}(F_3^2- -1)$; $1\hat{\otimes}(F_3-F_3^*)$; $[1\hat{\otimes}F_3,\ \Phi_3'\cdot\varphi_2(d)]$ при всех $d\in D_1$; $[\Phi_3'(F_2),\ 1\hat{\otimes}F_3]$. Применяя к подалгебрам E_1', E_2', $E'=\mathscr{K}_{B_2\hat{\otimes}B_3}$ и линейному подпространству $\mathfrak{F}$, натянутому на $\Phi_3'(F_2)$, $1\hat{\otimes}F_3$, $\Phi_3\cdot\varphi_2(D_1)$, теорему 4 § 3, получим искомую пару M_2, M_3.

В алгебре $\mathcal{M}(\mathcal{K}_{B_1\hat{\otimes}B_2\hat{\otimes}B_3})$ рассмотрим подалгебры $E_1=\Phi_3\cdot\Phi_2(\mathcal{K}_{B_1\hat{\otimes}D_1})+$ $+\Phi_3(\mathcal{K}_{B_1\hat{\otimes}B_2\hat{\otimes}D_2})+\mathcal{K}_{B_1\hat{\otimes}B_2\hat{\otimes}B_3}$ и $E=\mathcal{K}_{B_1\hat{\otimes}B_2\hat{\otimes}B_3}$, а также элементы $M_i'=$ $=1\hat{\otimes}M_i$, $i=2, 3$. Из построения M_2 и M_3 следует, что $\forall x\in\Phi_3\cdot$ $\cdot\Phi_2(\mathcal{K}_{B_1\hat{\otimes}D_1})$ $[M_i', x]\in E$, $i=2, 3$. Кроме того, $M_2'\cdot\Phi_3(\mathcal{K}_{B_1\hat{\otimes}B_2\hat{\otimes}D_2})\subset E$. Следовательно (поскольку $M_3'=1-M_2'$), соотношение $[M_i', x]\in E$ выполняется также и при $x\in\Phi_3(\mathcal{K}_{B_1\hat{\otimes}B_2\hat{\otimes}D_2})$, $i=2, 3$. Поэтому, это соотношение справедливо $\forall x\in E_1$. Аналогично проверяется, что $\forall x\in E_1$ $[M_i'\widetilde{F}_i, x]\in E$, $i=2, 3$. (Здесь дополнительно используется тот факт, что при $x\in$ $\in\Phi_3(\mathcal{K}_{B_1\hat{\otimes}B_2\hat{\otimes}D_2})$ $[\widetilde{F}_3, x]\in E$.)

Обозначим через E_2 минимальную подалгебру в $\mathcal{M}(E)$, содержащую при $i=2, 3$, $j=1, 2, 3$ и при всех $a\in A'$ элементы:

$$M_i'(\widetilde{F}_i^2-1),\quad M_i'(\widetilde{F}_i-\widetilde{F}_i^*),\quad M_3'[\widetilde{F}_2, \widetilde{F}_3],\quad [M_i', \widetilde{F}_j],$$
$$[M_i', a],\quad [M_i'\widetilde{F}_i, a],\quad [M_i'\widetilde{F}_i, \widetilde{F}_1].$$

Учитывая сказанное относительно M_2' и M_3', нетрудно проверить, что $E_1\cdot E_2\subset E$.

Применим теорему 4 § 3 к подалгебрам E_1, E_2, E и линейному подпространству $\mathfrak{F}$, натянутому на $\widetilde{F}_1$, $\widetilde{F}_2$, M_2', M_3', $M_3'\widetilde{F}_3$, A'. Получим пару элементов M, $N\in\mathcal{M}(E)$. Эти элементы удовлетворяют по отношению к операторам F_1 и $F_2 \#_{D_2} F_3$ условиям, аналогичным пунктам 1)—3) определения 5, и, кроме того, операторы $N_1=M$, $N_2=\sqrt{N}M_2'\sqrt{N}$, $N_3=$ $=\sqrt{N}M_3'\sqrt{N}$ удовлетворяют условиям 1)—3), 5)—7) теоремы 5 § 3. Проверка условий 1)—3) теоремы 5 § 3 не вызывает затруднений. Пункт 5) вытекает из того, что любой элемент $b\in A'+\mathfrak{B}_1'+\mathfrak{B}_2'$ приближается по норме суммами произведений элементов $a\in A'$, $\widetilde{F}_1$, $\widetilde{F}_1^*$, $\widetilde{F}_2$ и $\widetilde{F}_2^*$. Пункт 6) получается так. При $b\in A'$ $[b, \widetilde{F}_i]\in\mathfrak{A}_i$, поэтому $N_i[b, \widetilde{F}_i]\in E$. Поскольку $\mathfrak{B}_1\subset E_1$, то при $b\in\mathfrak{B}_1$ $N_1\cdot[b, \widetilde{F}_1]\in E$. При $b\in\mathfrak{B}_2$ $[b, \widetilde{F}_2]\in$ $\in\Phi_3(K_{B_1\hat{\otimes}B_2\hat{\otimes}D_2})+E$, поэтому $N_2\cdot[b, \widetilde{F}_2]\in E$. Соотношения $N_2[b, \widetilde{F}_2]\in$ $\in E$ при $b\in\mathfrak{B}_1'$ и $N_3[b, \widetilde{F}_3]\in E$ при $b\in\mathfrak{B}_1'+\mathfrak{B}_2'$ получаются из тех же соображений, что и пункт 5). Например, при $j<i$

$$N_i[\widetilde{F}_j^*, \widetilde{F}_i]=([\widetilde{F}_i^*, \widetilde{F}_j]N_i)^*\in([\widetilde{F}_i, \widetilde{F}_j]\cdot N_i)^*+E\subset N_i\cdot\mathfrak{A}_i+E\subset E.$$

Пункт 7) при $j=3$ следует из того, что все N_i переводят в себя подалгебру $\Phi_3(\mathcal{K}_{B_1\hat{\otimes}B_2\hat{\otimes}D_2})+E$, которая содержит $\mathfrak{B}_2$. В результате $F_1\#_{D_1}(F_2\#_{D_2}F_3)$ с точностью до элемента из $\mathcal{K}_{B_1\hat{\otimes}B_2\hat{\otimes}B_3}$ также записывается в виде $\sqrt{N_1}\widetilde{F}_1+$ $+\sqrt{N_2}\widetilde{F}_2+\sqrt{N_3}\widetilde{F}_3$. ■

Замечание 3. В следующих двух случаях можно определить спаривание (2) без использования техники § 3:

а) $A_1=C$, $A_2=C$.

б) $A_1=C$, $D=C$.

Для этого сначала заметим, что если $x_1=(\varepsilon_1, F_1)\in\mathcal{E}(C, B_1\hat{\otimes}D)$, то можно с помощью операторной гомотопии сначала заменить F_1 на $F_1'=$

$=\frac{1}{2}(F_1+F_1^*)$, а затем F_1' на такой $\widetilde{F}_1$, что $\widetilde{F}_1^*=\widetilde{F}_1$, $\widetilde{F}_1^2\leqslant 1$. Будем считать, что исходный оператор F_1 уже удовлетворяет этим условиям. Пусть $x_2=(\varepsilon_2, \varphi_2, F_2)\in\mathscr{E}(D\hat{\otimes}A_2, B_2)$. Оператор $F_1 \# _D F_2$ определим по формуле: $\Phi_2(F_1\hat{\otimes}1)+\Phi_2(\sqrt{1-F_1^2}\hat{\otimes}1)\cdot(1\hat{\otimes}F_2)$. Это новое определение, конечно, эквивалентно старому, а именно, имеется гомотопия:

$$\sqrt{M_1(t)}\cdot\Phi_2(F_1\hat{\otimes}1)+\sqrt{M_2(t)}\cdot(1\hat{\otimes}F_2),\quad 0\leqslant t\leqslant 1,$$

где $M_1(t)=tM_1+(1-t)$, $M_2(t)=tM_2+(1-t)\cdot\Phi_2((1-F_1^2)\hat{\otimes}1)$, $(M_1, M_2)\in S(x_1, x_2)$.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть $T_1:\mathscr{H}^{(0)}\to\mathscr{H}^{(1)}$ — инвариантный фредгольмов оператор, причем $1-T_1T_1^*\in\mathscr{K}(\mathscr{H}^{(1)})$, $1-T_1^*T_1\in\mathscr{K}(\mathscr{H}^{(0)})$, а индекс T_1 как элемент $R(G)$ (соответственно $RU(G)$, $RO(G)$ или $RR(G)$) равен 1. В градуированном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}=\mathscr{H}^{(0)}\oplus\mathscr{H}^{(1)}$ рассмотрим оператор $T=\begin{pmatrix}0 & T_1^*\\ T_1 & 0\end{pmatrix}$ и обозначим через c_1 элемент $(\varepsilon_1, T)\in KK(C, C)$, где ε_1 — градуировка $\mathscr{H}$. Этот элемент является единицей относительно операции произведения-пересечения, т. е. $\forall x\in KK(A, B)$ $x\otimes_C c_1=x$, $c_1\otimes_C x=x$.*

Доказательство. Изменив T_1 на компактный оператор, можно считать, что $T_1T_1^*=1$, $T_1^*T_1=1-p_1$, где p_1 — проектор на одномерное подпространство $E^0\subset\mathscr{H}^{(0)}$, все элементы которого инвариантны. Действительно, так как индекс T_1 равен 1, то существует инвариантный эпиморфизм $t:\operatorname{Ker}T_1\to\operatorname{Ker}T_1^*$. Продолжим t нулем на $(\operatorname{Ker}T_1)^\perp$ и заменим T_1 на T_1+t. Оператор $T_1T_1^*$ станет обратимым. Искомый оператор равен $(T_1T_1^*)^{-1/2}\cdot T_1$.

Пусть $x=(\varepsilon, \varphi, F)$. Согласно замечанию 3, $c_1\otimes_C x$ можно представить в виде $(\varepsilon_1\otimes\varepsilon, 1\hat{\otimes}\varphi, R=T\hat{\otimes}1+\sqrt{1-T^2}\hat{\otimes}F)$. Разложение

$$\mathscr{H}\hat{\otimes}\mathscr{H}_B=(E^0\hat{\otimes}\mathscr{H}_B)\oplus((E^0)^\perp\oplus\mathscr{H}^{(1)})\hat{\otimes}\mathscr{H}_B$$

приводит оператор R. На первом прямом слагаемом он равен F, а на втором прямом слагаемом после отождествления $(E^0)^\perp$ с $\mathscr{H}^{(1)}$ посредством T_1 оператор R будет равен $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\hat{\otimes}1$. Тем самым $c_1\otimes_C x=x\oplus$ (элемент из $\mathscr{D}(A, B)$).■

ТЕОРЕМА 6. *Пусть алгебра A сепарабельна, а B, D и E имеют строго положительные элементы.*

1) *Предположим, что существуют такие элементы $\alpha\in KK(D, E)$, $\beta\in KK(E, D)$, что*

$$\alpha\otimes_E\beta=\pm\tau_D(c_1)\in KK(D, D),\quad \beta\otimes_D\alpha=\pm\tau_E(c_1)\in KK(E, E).$$

Тогда гомоморфизмы

$$\otimes_D\alpha: KK(A, B\hat{\otimes}D)\to KK(A, B\hat{\otimes}E),$$
$$\otimes_E\beta: KK(A, B\hat{\otimes}E)\to KK(A, B\hat{\otimes}D)$$

являются изоморфизмами. Если D и E сепарабельны, то

$$\beta\otimes_D : KK(A\hat{\otimes} D, B)\to KK(A\hat{\otimes} E, B),$$
$$\alpha\otimes_E : KK(A\hat{\otimes} E, B)\to KK(A\hat{\otimes} D, B)$$

— тоже изоморфизмы.

2) *Предположим, что алгебры D и E сепарабельны и существуют такие элементы $\alpha\in KK(D\hat{\otimes}E, C)$, $\beta\in KK(C, D\hat{\otimes}E)$, что*

$$\beta\otimes_D\alpha=\pm\tau_E(c_1)\in KK(E, E),\quad \beta\otimes_E\alpha=\pm\tau_D(c_1)\in KK(D, D).$$

Тогда гомоморфизмы

$$\beta\otimes_D : KK(A\hat{\otimes} D, B)\to KK(A, B\hat{\otimes} E),$$
$$\beta\otimes_E : KK(A\hat{\otimes} E, B)\to KK(A, B\hat{\otimes} D),$$
$$\otimes_D\alpha : KK(A, B\hat{\otimes} D)\to KK(A\hat{\otimes} E\ B),$$
$$\otimes_E\alpha : KK(A, B\hat{\otimes} E)\to KK(A\hat{\otimes} D, B)$$

являются изоморфизмами.

Доказательство сразу получается из теорем 4 и 5.■

§ 5. Периодичность. Изоморфизм Тома

В этом параграфе определяются группы $K_iK(A, B)$ и устанавливается формальная периодичность (Клиффорда) и периодичность Ботта. В качестве топологического следствия будет получен изоморфизм Тома. Мы продолжаем работать в категории градуированных алгебр. Далее всюду предполагается, что A — сепарабельная алгебра, а B имеет счетную аппроксимативную единицу, причем действие G на A и B непрерывно.

Определение 1. Положим

$$K_{p,q}K^{p',q'}(A, B)=KK(A\hat{\otimes} C_{p,q}, B\hat{\otimes} C_{p',q'}).$$

Вообще, если V и W — линейные $*$-пространства, то

$$K_VK^W(A, B)=KK(A\hat{\otimes} C_V, B\hat{\otimes} C_W).$$

(В случае $V=\{0\}$ обозначение $K_{\{0\}}K^W$ сокращается до K_0K^W или KK^W. Аналогично для $W=\{0\}$.) Гомологический и когомологический K-функтор определим по формулам: $K_V(A)=K_VK(A, C)$, $K^W(B)=KK^W(C, B)$. Приведенный K-функтор для унитальной алгебры A и произвольной B определяется следующим образом:

$$\tilde{K}_VK^W(A, B)=\operatorname{Ker}[f^*: K_VK^W(A, B)\to K_VK^W(C, B)],$$
$$K_V\tilde{K}^W(A, \tilde{B})=\operatorname{Ker}[g_*: K_VK^W(A, \tilde{B})\to K_VK^W(A, C)],$$
$$\tilde{K}_V\tilde{K}^W(A, \tilde{B})=\operatorname{Ker} f^*\cap \operatorname{Ker} g_*,$$

где $f: C\to A$, $f(1)=1$; $g:\tilde{B}\to C$, $g(1)=1$.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство (возможно конечномерное) с действием G и «вещественной» инволю-*

цией. Алгебру $\mathscr{K}(H)$ будем рассматривать как градуированную посредством некоторого разложения $H=H^{(0)}\oplus H^{(1)}$ (причем возможно, что $H^{(0)}$ или $H^{(1)}=\{0\}$). Существуют канонические образующие $\alpha\in\in K_0(\mathscr{K}(H))$, $\beta\in K^0(\mathscr{K}(H))$, произведение-пересечение с которыми индуцирует изоморфизмы:

$$KK(A\hat{\otimes}\mathscr{K}(H), B)\simeq KK(A, B),$$
$$KK(A, B\hat{\otimes}\mathscr{K}(H))\simeq KK(A, B).$$

Доказательство. Обозначим указанную градуировку $\mathscr{K}(H)$ через ε. Пусть $T\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$ — оператор из теоремы 5 § 4. Положим

$$\alpha=(\varepsilon_1\otimes\varepsilon,\ 1\hat{\otimes}\mathrm{id}:\mathscr{K}(H)\to\mathscr{L}(\mathscr{H}\hat{\otimes}H),T\hat{\otimes}1).$$

Обозначим через $T_2\in\mathscr{L}(\mathscr{H}\hat{\otimes}H)=\mathscr{M}(\mathscr{K}\hat{\otimes}\mathscr{K}(H))$ оператор, соответствующий T при произвольном изоморфизме $\mathscr{H}\hat{\otimes}H\simeq\mathscr{H}$. Положим $\beta==(\varepsilon_1\otimes\varepsilon,\ T_2)$. Соотношение $\beta\otimes_{\mathscr{K}(H)}\alpha=c_1\in KK(C, C)$ получается непосредственно из определений. Соотношение $\beta\otimes_C\alpha=\tau_{\mathscr{K}(H)}(c_1)$ получается с помощью очевидной гомотопии оператора $T_2\#_C(T\hat{\otimes}1)$ к виду $T_3\hat{\otimes}1$, где $T_3\in\mathscr{L}((\mathscr{H}\hat{\otimes}H)\hat{\otimes}\mathscr{H})$ — оператор, соответствующий T при изоморфизме $\mathscr{H}\hat{\otimes}H\hat{\otimes}\mathscr{H}\simeq\mathscr{H}$. Применяя теорему 6 § 4, получим искомые изоморфизмы. ■

ТЕОРЕМА 2.

$$K_{V\oplus(-V)}K(A, B)\simeq KK(A, B),$$
$$K_VK^V(A, B)\simeq KK(A, B),$$
$$K_VK(A, B)\simeq KK^{-V}(A, B).$$

Доказательство. Поскольку $C_V\hat{\otimes}C_{-V}\simeq\mathscr{K}(\Lambda^*(V))$, первое соотношение вытекает из теоремы 1. Второе соотношение получается из того, что композиции

$$KK(A, B)\xrightarrow{\tau_{C_V}}K_VK^V(A, B)\xrightarrow{\tau_{C_{-V}}}K_{V\oplus(-V)}K^{V\oplus(-V)}(A, B)\simeq KK(A, B),$$
$$K_VK^V(A, B)\xrightarrow{\tau_{C_{-V}}}K_{V\oplus(-V)}K^{V\oplus(-V)}(A, B)\simeq KK(A, B)\xrightarrow{\tau_{C_V}}K_VK^V(A, B)$$

тождественны. Третье соотношение следует из первых двух:

$$K_VK(A, B)\simeq K_{V\oplus(-V)}K^{-V}(A, B)\simeq KK^{-V}(A, B).\ ■$$

ТЕОРЕМА 3. *Пусть действие G на V тривиально и $\eta: C_V\to C_V$ — градуированный автоморфизм. Если η сохраняет ориентацию* (см. § 2, п. 15), *то* $\forall x\in K_VK(A, B)$ $(1\hat{\otimes}\eta)^*(x)=x$, *а если η меняет ориентацию, то $(1\hat{\otimes}\eta)^*(x)=-x$. Аналогичное утверждение справедливо для $KK^V(A, B)$.*

Доказательство. Пусть сначала η сохраняет ориентацию. Пользуясь теоремой 2, перейдем от $K_VK(A, B)$ и автоморфизма $\eta: C_V\to C_V$ к $K_{V\oplus[(-V)\oplus V]}K(A, B)$ и автоморфизму $\eta\hat{\otimes}1\hat{\otimes}1$. Обозначим через ζ автоморфизм $\eta\hat{\otimes}1$ алгебры $C_V\hat{\otimes}C_{-V}\simeq\mathscr{L}(\Lambda^*(V))$. Одной из ориентаций ал-

гебры $\mathscr{L}(\bigwedge^*(V))$ является оператор градуировки $\varepsilon_V=(-1)^k$ на $\bigwedge^k(V)$. Как известно, любой автоморфизм ζ алгебры $\mathscr{L}(\bigwedge^*(V))$ записывается в виде $\zeta(a)=uau^{-1}$, где $u\in\mathscr{L}(\bigwedge^*(V))$ — унитарный элемент («вещественный» — в «вещественном» случае). Поскольку $\zeta(\varepsilon_V)=\varepsilon_V$, элемент u коммутирует с ε_V, откуда $\deg u=0$. Пусть $x=(\varepsilon, \varphi, F)\in KK(A\hat{\otimes}\hat{\otimes}\mathscr{L}(\bigwedge^*(V))\hat{\otimes}C_V, B)$. Считая, что φ продолжается на $\tilde{A}\hat{\otimes}\mathscr{L}(\bigwedge^*(V))\hat{\otimes}\hat{\otimes}C_V$ (теорема 2 § 4), обозначим $\varphi(1\hat{\otimes}u\hat{\otimes}1)$ через U. Тройка $(\varepsilon, \varphi\cdot(1\hat{\otimes}\hat{\otimes}\zeta\hat{\otimes}1), F)=\varepsilon$, $U\varphi U^{-1}$, $F)$ унитарно эквивалентна (а следовательно, ввиду п. 3 § 2 и п. 17 § 1, гомотопна) тройке $(\varepsilon, \varphi, U^{-1}FU)$, которая в свою очередь операторно гомотопна $(\varepsilon, \varphi, F)$, так как $\forall a\in\in A\hat{\otimes}\mathscr{L}(\bigwedge^*(V))\hat{\otimes}C_V$ $\varphi(a)(U^{-1}FU-F)\in\mathscr{K}_B$.

Рассмотрим теперь случай, когда η меняет ориентацию. Обозначим через ξ автоморфизм C_V, порожденный переменной знака у одной из образующих, скажем, у $f\in V$. Поскольку ξ меняет ориентацию C_V, $\xi\cdot\eta$ сохраняет ориентацию. Доказанная часть теоремы сводит наше утверждение к проверке того, что $(\varepsilon, \varphi\circ(1\hat{\otimes}\xi), F)=-(\varepsilon, \varphi, F)$ в группе $K_VK(A, B)$. Это вытекает из соотношения:

$$(U\varepsilon U^{-1},\ U(\varphi\circ(1\hat{\otimes}\xi))U^{-1},\ UFU^{-1})=(-\varepsilon, -\varphi, -F)\in K_VK(A, B),$$

где $U=\varphi(1\hat{\otimes}f)$. ■

З а м е ч а н и е 1. Если действие G на V тривиально, то $C_V\simeq C_{p,q}$ при некоторых p и q (см. § 2, п. 16), поэтому $K_VK(A, B)\simeq K_{p,q}K(A, B)$. Согласно теореме 3, для того чтобы зафиксировать такой изоморфизм K-функтора, достаточно задать ориентацию алгебры C_V.

ТЕОРЕМА 4. *При фиксированной разности* $(p-q)-(p'-q')$ *все группы* $K_{p,q}K^{p',q'}(A, B)$ *канонически изоморфны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 2

$$KK(A\hat{\otimes}C_{p,q},\ B\hat{\otimes}C_{p',q'})\simeq KK(A\hat{\otimes}C_{p,q}\hat{\otimes}C_{-(p',q')},\ B)\simeq$$
$$\simeq KK(A\hat{\otimes}C_{p+q',\,q+p'},\ B).$$

Все изоморфизмы алгебр Клиффорда, использованные здесь,— это сохраняющие ориентацию изоморфизмы п.п. 15 и 16 § 2. (Конкретный вид их не имеет значения ввиду теоремы 3.) Поскольку при $k\geqslant l$

$$C_{k,l}\simeq C_{k-l,0}\hat{\otimes}(C_{l,0}\hat{\otimes}C_{-(l,0)}),$$

а при $k\leqslant l$

$$C_{k,l}\simeq C_{0,l-k}\hat{\otimes}(C_{k,0}\hat{\otimes}C_{-(k,0)}),$$

то, снова применяя теорему 2, получим требуемое. ■

О п р е д е л е н и е 2. При любых целых p и q положим

$$K_{p-q}K(A, B)=K_pK^q(A, B)=KK^{q-p}(A, B)=$$
$$=\begin{cases}K_{p-q,0}K(A, B), & \text{если } p\geqslant q,\\ K_{0,q-p}K(A, B), & \text{если } p\leqslant q.\end{cases}$$

ТЕОРЕМА 5 (формальная периодичность). *Группы $K_nK(A,B)$ периодичны по n с периодом 8, а в частном случае $KU_nK(A, B)$ — с периодом 2.*

Доказательство. Изоморфизмы алгебр Клиффорда, зафиксированные в п. 17 §2, индуцируют изоморфизмы $KK^{p,q+4}(A, B) \to KK^{p+4,q}\cdot(A, B)$ и $KUK^{p,q+1}(A, B) \to KUK^{p+1,q}(A, B)$. Вследствие теоремы 3 эти изоморфизмы согласованы между собой и с изоморфизмами теоремы 4. ■

ТЕОРЕМА 6. *Спаривание* (2) § 4 *индуцирует спаривание*

$$K_iK(A_1, B_1 \hat{\otimes} D) \otimes_D K_jK(D \hat{\otimes} A_2, B_2) \to K_{i+j}K(A_1 \hat{\otimes} A_2, B_1 \hat{\otimes} B_2), \quad (1)$$

которое коммутирует с изоморфизмом периодичности, а при $D = C$ (случай произведения) является косокоммутативным:

$$x_2 \otimes_D x_1 = (-1)^{ij} x_1 \otimes_D x_2.$$

Доказательство. Искомое спаривание получится, если подставить в спаривание (2) § 4 $A_1 \hat{\otimes} C_{p,q}$ вместо A_1 и $A_2 \hat{\otimes} C_{p',q'}$ вместо A_2 при $p - q = i$, $p' - q' = j$, а затем отождествить $C_{p,q} \hat{\otimes} C_{p',q'}$ с $C_{p+p',q+q'}$ (см. п. 16 § 2). Коммутирование с изоморфизмами теорем 4 и 5 получается из теоремы 3. Для проверки косокоммутативности отождествим $(A_1 \hat{\otimes} C_{p,q}) \hat{\otimes} (A_2 \hat{\otimes} C_{p',q'})$ с $(A_2 \hat{\otimes} C_{p',q'}) \hat{\otimes} (A_1 \hat{\otimes} C_{p,q})$ и $\mathcal{H}_{B_1} \hat{\otimes} \mathcal{H}_{B_2}$ с $\mathcal{H}_{B_2} \hat{\otimes} \mathcal{H}_{B_1}$ посредством изоморфизма п. 7 § 2. Легко проверить, что автоморфизм

$$C_{p+p',q+q'} \simeq C_{p,q} \hat{\otimes} C_{p',q'} \simeq C_{p',q'} \hat{\otimes} C_{p,q} \simeq C_{p+p',q+q'}$$

умножает ориентацию в точности на $(-1)^{(p+q)(p'+q')} = (-1)^{ij}$. ■

Замечание 2. Если $D = C(X)$, где X — локально компактное пространство, то можно определить спаривание (1) со значениями в группе $K_{i+j}K(A_1 \hat{\otimes} D \hat{\otimes} A_2, B_1 \hat{\otimes} B_2)$. Для этого надо воспользоваться наличием диагонального отображения $\Delta: X \to X \times X$, индуцирующего $(\Delta^*)^*: K_jK \cdot (D \hat{\otimes} A_2, B_2) \to K_jK(D \hat{\otimes} D \hat{\otimes} A_2, B_2)$, после чего применить спаривание (1). Более того, если I, J — идеалы в $D = C(X)$, то умножение $\Delta^*: D \otimes D \to D$ переводит $I \otimes J$ в $I \cap J$. Поэтому из спаривания

$$K_iK(A_1, B_1 \hat{\otimes} I) \otimes_I K_jK(I \hat{\otimes} J \hat{\otimes} A_2, B_2) \to K_{i+j}K(A_1 \hat{\otimes} J \hat{\otimes} A_2, B_1 \hat{\otimes} B_2)$$

получается спаривание

$$K_iK(A_1, B_1 \hat{\otimes} I) \otimes_I K_jK((I \cap J) \hat{\otimes} A_2, B_2) \to K_{i+j}K(A_1 \hat{\otimes} J \hat{\otimes} A_2, B_1 \hat{\otimes} B_2). \quad (2)$$

В частности, если Y и Z замкнуты в X, то определено спаривание

$$K^i(C(X \setminus Y)) \otimes_{C(X \setminus Y)} K_j(C(X \setminus (Y \cup Z))) \to K_{j-i}(C(X \setminus Z)). \quad (3)$$

Определение 3. Пусть X — локально компактное пространство. Положим $K_\nu(X) = K_\nu(C(X))$, $K^\nu(X) = K^\nu(C(X))$.

Канонические образующие в $K^n(\mathbf{R}^n)$ и $K_n(\mathbf{R}^n)$.

I. Мы построим элементы $\beta_n \in KU^n_{\mathrm{Spin}(V)}(\mathbf{R}^n)$, $\beta_n' \in KO^n_{\mathrm{Spin}(V)}(\mathbf{R}^n)$, $\beta_{p,q} \in \in KR^{p-q}_{\mathrm{Spin}(V)}(\mathbf{R}^{p,q})$. (Группа $\mathrm{Spin}(V)$ определена в п. 18 § 2; $\mathbf{R}^{p,q}$ — это координатное пространство $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^p \oplus \mathbf{R}^q$ с «вещественной» инволюцией: $\bar{x} = x$ при $x \in \mathbf{R}^p$, $\bar{x} = -x$ при $x \in \mathbf{R}^q$.)

Рассмотрим для определенности «вещественный» случай. Нетрудно проверить, что линейное $*$-пространство V, определенное в п. 18 § 2, изоморфно $V_{p,q}$. Пользуясь замечанием 1, достаточно зафиксировать ориентацию $\omega_V = i^q\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{p+q}$ в алгебре C_V (здесь $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{p+q}$ — координатный базис в $V = \mathbf{R}^{p,q} \otimes \mathbf{C}$), а затем построить элемент $\beta_{p,q} \in \in KR^V_{\mathrm{Spin}(V)}(\mathbf{R}^{p,q})$.

ЛЕММА 1. *Пусть $G = \mathrm{Spin}(V)$, $V_G = V$. Будем считать, что G действует на V тривиально, а на V_G действие G индуцировано действием G на $\mathbf{R}^{p,q}$. Тогда*

$$KK^V(A, B) \simeq KK^{V_G}(A, B), \quad K_V K(A, B) \simeq K_{V_G}K\ (A, B).$$

Доказательство. По теореме 2

$$KK^{V_G}(A, B) \simeq K_{-V}K^{V_G \oplus (-V)}(A, B).$$

Отождествим $C_{V_G \oplus (-V)}$ с $\mathscr{L}(\wedge^*(V))$ посредством изоморфизма μ (см. п. 11 § 2). Действие G на $C_{V_G \oplus (-V)}$ соответствует унитарному представлению μ_V группы G в пространстве $\wedge^*(V)$ (см. п. 18 § 2). По теоремам 1 и 2

$$K_{-V}K^{V_G \oplus (-V)}(A, B) \simeq K_{-V}K(A, B) \simeq K_{-V}K^{V \oplus (-V)}(A, B) \simeq KK^V(A, B). \blacksquare$$

Лемма 1 сводит построение элемента $\beta_{p,q}$ к построению элемента $\beta_V \in KR^{V_G}_G(\mathbf{R}^{p,q})$. Ввиду наличия гомоморфизма $\mathrm{Spin}(V) \to O(p+q)$, где $O(p+q)$ — ортогональная группа пространства $\mathbf{R}^{p,q}$ (с «вещественной» структурой, индуцированной из $\mathbf{R}^{p,q}$), мы можем дальше считать, что $G = O(p+q)$. Обозначим через D алгебру $C(\mathbf{R}^{p,q}) \otimes C_V$. Очевидно, $\mathscr{M}(D) = \mathscr{L}(D)$ можно рассматривать как алгебру ограниченных непрерывных функций на $\mathbf{R}^{p,q}$ со значениями в C_V. Инвариантный элемент $F \in \mathscr{M}(D)$ степени 1 определим как функцию $F(x) = x(1 + \|x\|^2)^{-1/2}$. Поскольку $\forall x \in \mathbf{R}^{p,q}$ $x^* = x$, $x^2 = \|x\|^2$, то $F^* = F$, $1 - F^2 = (1 + \|x\|^2)^{-1/2} \in \in \mathscr{K}(D) = D$. Если ε — обычная градуировка D, то $\beta_V = (\varepsilon, F)$ согласно замечанию 1 § 4 можно рассматривать как элемент $KR^{V_G}_G(\mathbf{R}^{p,q})$.

Построенное семейство образующих мультипликативно:

$$\beta_{V_1} \otimes_C \beta_{V_2} = \beta_{V_1 \oplus V_2} \in KR^{V_{G_1} \oplus V_{G_2}}_{G_1 \times G_2}(R^{p_1,q_1} \times R^{p_2,q_2})$$

(группа $O((p_1+p_2) + (q_1+q_2))$ ограничивается до $G_1 \times G_2 = O(p_1+q_1) \times \times O(p_2+q_2)$). Аналогичное свойство справедливо для элементов $\beta_{p,q}$.

В случае $p = q$ $\mathbf{R}^{p,q}$ совпадает с $\mathbf{C}^p$ и имеется другая каноническая образующая в $KR^0_{U(p)}(\mathbf{C}^p)$:

$$\widetilde{F}(x) = (\lambda_x + \lambda_x^*)(1 + \|x\|^2)^{-1/2} \in \mathscr{M}(C(\mathbf{C}^p) \otimes \mathscr{L}(\wedge^*(\mathbf{C}^p))).$$

Отождествляя C_V с $\mathscr{L}(\bigwedge^*(\mathbf{C}^p))$ посредством отображения $x \to \lambda_x + \lambda_x^*$ и используя известное вложение $U(p) \subset \mathrm{Spin}(V)$, нетрудно проверить, что обе эти образующие $KR^0_{U(p)}(\mathbf{C}^p)$ с точностью до знака $(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}$ совпадают. Знак обусловлен нашим выбором ориентаций в алгебрах Клиффорда.

II. Построим теперь элементы $\alpha_n \in KU_n^{\mathrm{Spin}(V)}(\mathbf{R}^n)$, $\alpha_n \in KO_n^{\mathrm{Spin}(V)}(\mathbf{R}^n)$, $\alpha_{p,q} \in KR_{p-q}^{\mathrm{Spin}(V)}(\mathbf{R}^{p,q})$. Снова ограничимся «вещественным» случаем. Пусть $\Omega^*(\mathbf{R}^{p,q}) = C^\infty(\bigwedge^*_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^{p,q}))$ — пространство комплекснозначных C^∞-форм на $\mathbf{R}^{p,q}$, d и δ — оператор внешнего дифференцирования и сопряженный к нему в смысле римановой метрики, $\Delta = d\delta + \delta d$ — оператор Лапласа. Обозначим через H гильбертово пространство L^2-форм $L^2(\bigwedge^*_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^{p,q}))$, градуированное посредством обычного разложения $\bigwedge^* = \bigwedge^{\mathrm{ev}} \oplus \bigwedge^{\mathrm{od}}$ (формы четной и нечетной размерности).

Градуировку обозначим через ε'. С помощью преобразования Фурье легко определяется (псевдодифференциальный) оператор $Q = (d+\delta) \cdot (1+\Delta)^{-1/2} \in \mathscr{L}(H)$. Это инвариантный эрмитов элемент степени 1. Умножение на функции из $C(\mathbf{R}^{p,q})$ и действие C_V посредством представления μ_V (см. пп. 11 и 18 § 2) дают представление $\varphi : C(\mathbf{R}^{p,q}) \otimes C_V \to \mathscr{L}(H)$. Нетрудно проверить, что тройка $\alpha_V = (\varepsilon', \varphi, Q)$ является элементом группы $KR^G_{V_G}(\mathbf{R}^{p,q})$, где $G = O(p+q)$. В силу леммы 1 это дает требуемый элемент $\alpha_{p,q} \in KR_{p-q}^{\mathrm{Spin}(V)}(\mathbf{R}^{p,q})$.

Построенное семейство образующих мультипликативно:

$$\alpha_{V_1} \otimes_C \alpha_{V_2} = \alpha_{V_1 \oplus V_2} \in KR^{G_1 \times G_2}_{V_{G_1} \oplus V_{G_2}}(\mathbf{R}^{p_1,q_1} \times \mathbf{R}^{p_2,q_2})$$

(группа $O((p_1+p_2)+(q_1+q_2))$ ограничивается до $G_1 \times G_2 = O(p_1+q_1) \times O(p_2+q_2)$). Аналогичное свойство справедливо для элементов $\alpha_{p,q}$.

При $p=q$ в группе $KR_0^{U(p)}(\mathbf{C}^p)$ имеется еще одна каноническая образующая (см. пример 7 § 2 работы ([15])). Пусть $\bar\partial : \Omega^{0,*}(\mathbf{C}^p) \to \Omega^{0,*}(\mathbf{C}^p)$ — оператор антиголоморфного дифференцирования, $\tilde\Delta = \bar\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial$, $H = L^2(\bigwedge^{0,*}(\mathbf{C}^p))$. Если через ε' обозначить градуировку H посредством разложения $\bigwedge^{0,*} = \bigwedge^{0,\mathrm{ev}} \oplus \bigwedge^{0,\mathrm{od}}$, через $\varphi : C(\mathbf{C}^p) \to \mathscr{L}(H)$ — умножение на функции, через $\tilde Q$ — оператор $(\bar\partial + \bar\partial^*)(1+\tilde\Delta)^{-1/2} \in \mathscr{L}(H)$, то $(\varepsilon', \varphi, \tilde Q) \in KR_0^{U(p)}(\mathbf{C}^p)$. Изоморфизм теорема 1 с точностью до знака отождествляет эти две образующие.

ТЕОРЕМА 7 (периодичность Ботта). *Если группа G действует на $\mathbf{R}^n$ (соответственно $\mathbf{R}^{p,q}$) посредством спинорного представления, то произведение-пересечение с построенными элементами α_n и β_n (соответственно $\alpha_{p,q}$ и $\beta_{p,q}$) определяет в комплексном и вещественном случае изоморфизмы*

$$K_{i+n}K(A(\mathbf{R}^n), B) \simeq K_iK(A, B) \simeq K_{i-n}K(A, B(\mathbf{R}^n)),$$

а в «вещественном» случае изоморфизмы

$$K_{i+p-q}K(A(\mathbf{R}^{p,q}), B) \simeq K_iK(A, B) \simeq K_{i-p+q}K(A, B(\mathbf{R}^{p,q})).$$

Доказательство. Вследствие теоремы 6 § 4 достаточно проверить соотношения:

$$\text{а) } \beta_V \otimes_{C(\mathbf{R}^{p,q})\otimes C_V} \alpha_V = c_1; \quad \text{б) } \beta_V \otimes_C \alpha_V = \tau_{C(\mathbf{R}^{p,q})\otimes C_V}(c_1). \tag{4}$$

а) Пользуясь замечанием 3 § 4, представим оператор $F \#_{C(\mathbf{R}^{p,q})\otimes C_V} Q$ в виде

$$(\lambda_x + \lambda_x^*)(1+\|x\|^2)^{-1/2} + (1+\|x\|^2)^{-1/2}\cdot(d+\delta)(1+\Delta)^{-1/2}.$$

Известно, что его «вещественный» $O(p+q)$-индекс как оператора $L^2(\bigwedge_{\mathbf{C}}^{\mathrm{ev}}(\mathbf{R}^{p,q})) \to L^2(\bigwedge_{\mathbf{C}}^{\mathrm{od}}(\mathbf{R}^{p,q}))$ равен 1 (см. ([6]) или ([15]), § 4, теорема 5). Это доказывает первое соотношение.

б) Переходя к доказательству второго соотношения, обозначим алгебру $C(\mathbf{R}^{p,q})\otimes C_V$ через D и отождествим $D\hat{\otimes}D$ с $C(\mathbf{R}^{p,q}\oplus\mathbf{R}^{p,q})\otimes C_{V\oplus V}$. Поворот

$$\mathbf{R}^{p,q}\oplus\mathbf{R}^{p,q} \to \mathbf{R}^{p,q}\oplus\mathbf{R}^{p,q}: (x, y) \to (\cos t\cdot x - \sin t\cdot y,\ \sin t\cdot x + \cos t\cdot y),$$

$0\leqslant t\leqslant \pi/2$, индуцирует непрерывное семейство автоморфизмов алгебр $C(\mathbf{R}^{p,q}\oplus\mathbf{R}^{p,q})$ и $C_{V\oplus V}$ (напомним, что $V\oplus V = (\mathbf{R}^{p,q}\oplus\mathbf{R}^{p,q})\otimes\mathbf{C}$). В результате получается гомотопия автоморфизмов алгебр $D\hat{\otimes}D$ и $\mathscr{M}(D\hat{\otimes}D)$, которую мы обозначим через $\{\gamma_t\}: \mathscr{M}(D\hat{\otimes}D) \to \mathscr{M}(D\hat{\otimes}D\hat{\otimes}C[0, \pi/2])$. Обозначим временно через $\mathscr{K}$ алгебру $\mathscr{K}(L^2(\bigwedge_{\mathbf{C}}^*(\mathbf{R}^{p,q})))$. Естественный гомоморфизм $1\hat{\otimes}\varphi: D \to \mathscr{M}(D\hat{\otimes}\mathscr{K})$ продолжается до $\Phi = (\mathrm{id}\hat{\otimes}\varphi)_*: \mathscr{M}(D\hat{\otimes}D) \to \mathscr{M}(D\hat{\otimes}\mathscr{K})$. Пусть $\Phi_t = \Phi\cdot\gamma_t$, $\varphi_t = \Phi_t\cdot(1\hat{\otimes}\mathrm{id})$. Ориентацию $C_{V\oplus V}$ обозначим через ω, соответствующий ей элемент в $\mathscr{M}(D\hat{\otimes}D)$ — через u, а $\Phi(u)$ — через U.

Мы построим сейчас такую пару $\{M_t\}$, $\{N_t\}\in\mathscr{M}(D\hat{\otimes}\mathscr{K}\hat{\otimes}C[0, \pi/2])$, что тройка $\{(\beta_V\otimes\alpha_V)_t\} = (\varepsilon\otimes\varepsilon', \{\varphi_t\}, \{\sqrt{M_t}\cdot\Phi_t(F\hat{\otimes}1) + \sqrt{N_t}(1\hat{\otimes}Q)\})$ будет элементом $\mathscr{E}(D, D[0, \pi/2])$, причем при $t=0$ $(\beta_V\otimes\alpha_V)_t = \beta_V\otimes_C\alpha_V$, а при $t=\pi/2$ $(\beta_V\otimes\alpha_V)_t = U\tau_D(\beta_V\otimes_D\alpha_V)U^{-1}$. Это завершит доказательство.

В алгебре $\mathscr{M}(D\hat{\otimes}\mathscr{K}\hat{\otimes}C[0, \pi/2])$ рассмотрим подалгебры $E = D\hat{\otimes}\mathscr{K}\hat{\otimes}\hat{\otimes}C[0, \pi/2]$ и $E_1 = (\Phi(D\hat{\otimes}D)\hat{\otimes}1) + E$. Кроме того, пусть E_2 — минимальная подалгебра, содержащая элементы $1\hat{\otimes}(Q^2-1)\hat{\otimes}1$; $[\{\Phi_t(F\hat{\otimes}1)\}, 1\hat{\otimes}Q\hat{\otimes}1]$; $[\{\varphi_t\}(d), 1\hat{\otimes}Q\hat{\otimes}1]$ при всех $d\in D$. Обозначим через $\mathfrak{F}$ линейное пространство, натянутое на $\{\Phi_t(F\hat{\otimes}1)\}$, $1\hat{\otimes}Q\hat{\otimes}1$ и $\{\varphi_t\}(D)$. Применяя теорему 4 § 3, получим требуемую пару $\{M_t\}$, $\{N_t\}$. ■

Переходим теперь к вопросам, связанным с изоморфизмом Тома.

Определение 4. Пусть ξ и η — векторные $*$-расслоения (см. п. 12 § 2) над локально компактными пространствами X и Y соответственно. Группу $KK(C_\xi(X), B)$ будем обозначать через $K_\xi K(X, B)$, группу $KK(A, C_\eta(Y))$ — через $KK^\eta(A, Y)$, а группу $KK(C_\xi(X), C_\eta(Y))$ — через $K_\xi K^\eta(X, Y)$.

Рассмотрим следующую ситуацию. Пусть $\pi: P \to X$ — главное G_1-расслоение, Z — пространство с действием G_1, причем пространства X и Z локально компактны, группа G_1 компактна и X, Z, G_1 удовлетворяют второй аксиоме счетности. Кроме того, пусть ξ — векторное $*$-расслоение над X, а η — векторное $*$-расслоение с действием G_1 над Z. Обозначим пространство $Z \times_{G_1} P$ через Y, проекцию $Y \to X$ — через ρ, а векторные $*$-расслоения $\rho^*(\xi)$ и $\eta \times_{G_1} P$ над Y — соответственно через $\widetilde{\xi}$ и $\widetilde{\eta}$. Мы будем считать, что на P, X, Y, Z, ξ и η определено действие группы G, коммутирующее с действием G_1 на P, Z, η, а в «вещественном» случае также определена «вещественная» структура (причем группы G и G_1 «вещественны»).

ЛЕММА 2. *Имеют место естественные гомоморфизмы*:

$$j_Z: K_\eta^{G \times G_1}(Z) \to K^G_{\widetilde{\eta} \oplus \widetilde{\xi}} K^\xi(Y, X),$$

$$j^Z: K^\eta_{G \times G_1}(Z) \to K^G_\xi K^{\widetilde{\eta} \oplus \widetilde{\xi}}(X, Y),$$

$$j^Z_Z: K_\eta^{G \times G_1} K^\eta(Z, Z) \to K^G_{\widetilde{\eta} \oplus \widetilde{\xi}} K^{\widetilde{\eta} \oplus \widetilde{\xi}}(Y, Y),$$

удовлетворяющие условиям:

1) $j_Z(a) \otimes_{C_\xi(X)} j^Z(b) = j^Z_Z(a \otimes_C b)$,

2) $j^Z(b) \otimes_{C_{\widetilde{\eta} \oplus \widetilde{\xi}}(Y)} j_Z(a) = \tau_{C_\xi(X)}(b \otimes_{C_\eta(Z)} a)$,

3) $j^Z_Z(\tau_{C_\eta(Z)}(c_1)) = \tau_{C_{\widetilde{\eta} \oplus \widetilde{\xi}}(Y)}(c_1)$.

Доказательство. Введем обозначение $\mathrm{Sect}_T(\zeta)$ для пространства непрерывных, стремящихся к 0 на ∞ сечений векторного расслоения ζ над локально компактным пространством T. Наше основное гильбертово пространство $\mathscr{H}$ мы будем считать наделенным действием группы $G \times G_1$ в том смысле, как это определено в п. 11 § 1. Очевидно, что $\mathrm{Sect}_X(C_\eta(Z) \times_{G_1} P) \simeq C_{\widetilde{\eta}}(Y)$. Пространство $E = \mathrm{Sect}_X(\mathscr{H} \times_{G_1} P)$ является гильбертовым $C(X)$-модулем, а $E_Z = \mathrm{Sect}_X(\mathscr{H}_{C_\eta(Z)} \times_{G_1} P)$ — гильбертовым $C_{\widetilde{\eta}}(Y)$-модулем. Алгебру $C_{\widetilde{\eta} \oplus \widetilde{\xi}}(Y)$ можно рассматривать как косокоммутативное алгебраическое тензорное произведение над $C(X)$: $C_{\widetilde{\eta}}(Y) \widehat{\otimes}_{C(X)} C_\xi(X)$. Введем на алгебраических тензорных произведениях $E \widehat{\otimes}_{C(X)} C_\xi(X)$ и $E_Z \widehat{\otimes}_{C(X)} C_\xi(X)$ скалярное произведение:

$$(u_1 \widehat{\otimes} v_1, u_2 \widehat{\otimes} v_2) = (-1)^{\deg v_1 \cdot (\deg u_1 + \deg u_2)} (u_1, u_2) \widehat{\otimes} v_1^* v_2$$

со значениями в $C(X) \widehat{\otimes}_{C(X)} C_\xi(X) = C_\xi(X)$ и $C_{\widetilde{\eta}}(Y) \widehat{\otimes}_{C(X)} C_\xi(X) = C_{\widetilde{\eta} \oplus \widetilde{\xi}}(Y)$ соответственно. Кроме того, на $E_Z \widehat{\otimes}_{C(X)} C_\xi(X)$ можно определить правое действие алгебры

$$C_{\widetilde{\eta} \oplus \widetilde{\xi}}(Y) = C_{\widetilde{\eta}}(Y) \widehat{\otimes}_{C(X)} C_\xi(X): (u \widehat{\otimes} v)(a \widehat{\otimes} b) = (-1)^{\deg v \cdot \deg a}(ua \widehat{\otimes} vb).$$

Нетрудно проверить, что мы получим гильбертовы модули: $E \widehat{\otimes}_{C(X)} C_\xi(X)$ над $C_\xi(X)$ и $E_Z \widehat{\otimes}_{C(X)} C_\xi(X)$ над $C_{\widetilde{\eta} \oplus \widetilde{\xi}}(Y)$.

Пусть теперь $(\varepsilon, \varphi, F) \in \mathscr{E}(C_\eta(Z), C)$. Гомоморфизм φ естественно продолжается до

$$\varphi \hat{\otimes} \mathrm{id}\colon\ C_{\tilde{\eta}\oplus\tilde{\xi}}(Y) = \mathrm{Sect}_X(C_{\tilde{\eta}}(Z) \times_{G_1} P) \hat{\otimes}_{C(X)} C_\xi(X) \to \mathscr{L}(E \hat{\otimes}_{C(X)} C_\xi(X)).$$

Поскольку оператор F коммутирует с действием G_1 на $\mathscr{H}$, существует $F \hat{\otimes} 1 \in \mathscr{L}(E \hat{\otimes}_{C(X)} C_\xi(X))$. Полагаем

$$j_Z(\varepsilon, \varphi, F) = (\varepsilon \otimes \varepsilon', \varphi \hat{\otimes} \mathrm{id}, F \hat{\otimes} 1),$$

где ε' — градуировка $C_\xi(X)$. Если $(\varepsilon, F) \in \mathscr{E}(C, C_\eta(Z))$, то существует $F \hat{\otimes} 1 \in \mathscr{L}(E_Z \hat{\otimes}_{C(X)} C_\xi(X))$. Полагаем

$$j^Z(\varepsilon, F) = (\varepsilon \otimes \varepsilon', 1 \hat{\otimes} \mathrm{id}, F \hat{\otimes} 1).$$

Аналогично определяется j_Z^Z:

$$j_Z^Z(\varepsilon, \varphi, F) = (\varepsilon \otimes \varepsilon' \ \varphi \hat{\otimes} \mathrm{id}, F \hat{\otimes} 1).$$

Соотношения 1)—3) легко проверяются. ■

Всякое n-мерное вещественное расслоение η над X можно рассматривать как расслоение $\mathbf{R}^n \times_{G_1} P \to X$, где $G_1 = O(n)$, а $P \to X$ — расслоение ортонормированных n-реперов, ассоциированное с η. (Действие G на η, очевидно, определяет действие G на P, коммутирующее с действием G_1.) В «вещественном» случае будем считать, что на η определена «вещественная» структура, т. е. линейная инволюция, согласованная с «вещественной» инволюцией на X. Пусть p и q — соответственно размерности положительного и отрицательного подпространства этой инволюции. Тогда $\eta = \mathbf{R}^{p,q} \times_{O(p+q)} P$. Обозначим через Y_η пространство расслоения η, через $\tilde{\eta}_0$ — поднятие η на Y_η. Положим $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}_0$ в вещественном случае и $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}_0 \times \mathbf{C}$ — в комплексном и «вещественном» случаях. Определим на $\tilde{\eta}$ инволюцию $*$ и вещественную структуру как антилинейные продолжения соответственно тождественного отображения и «вещественной» инволюции на η.

ТЕОРЕМА 8 (изоморфизм Тома). *Пусть ξ — произвольное $*$-расслоение на X, $\tilde{\xi}$ — его поднятие на Y_η. Тогда*

$$K_\xi(X) \simeq K_{\tilde{\eta}\oplus\tilde{\xi}}(Y_\eta), \qquad K^\xi(X) \simeq K^{\tilde{\eta}\oplus\tilde{\xi}}(Y_\eta).$$

Если η — спинорное расслоение, то в комплексном и вещественном случаях

$$K_i(X) \simeq K_{i+n}(Y_\eta), \qquad K^i(X) \simeq K^{i+n}(Y_\eta),$$

а в «вещественном» случае

$$K_i(X) \simeq K_{i+p-q}(Y_\eta), \qquad K^i(X) \simeq K^{i+p-q}(Y_\eta).$$

Доказательство. Ограничимся «вещественным» случаем. Пусть $Z = \mathbf{R}^{p,q}$, действие G на Z тривиально; $G_1 = O(p+q)$; $V = \mathbf{R}^{p,q} \otimes \mathbf{C}$. Очевидно, $\tilde{\eta} = V \times_{G_1} P$, $Y_\eta = \mathbf{R}^{p,q} \times_{G_1} P$. Положим $\alpha = j_Z(\alpha_V)$, $\beta = j^Z(\beta_V)$, где

$\alpha_V \in K^{G_1}_{V_{G_1}}(Z)$, $\beta_V \in K^{V_{G_1}}_{G_1}(Z)$ — построенные выше образующие. Из леммы 2 и соотношений (4) следует, что

$$\alpha \otimes_{C_\xi(X)} \beta = \tau_{C_{\widetilde{\eta}\oplus\widetilde{\xi}}(Y)}(c_1), \quad \beta \otimes_{C_{\widetilde{\eta}\oplus\widetilde{\xi}}(Y)} \alpha = \tau_{C_\xi(X)}(c_1).$$

На основании теоремы 6 § 4 гомоморфизмы

$$K_\xi(X) \to K_{\widetilde{\eta}\oplus\widetilde{\xi}}(Y_\eta): a \to \alpha \otimes_{C_\xi(X)} a,$$
$$K^\xi(X) \to K^{\widetilde{\eta}\oplus\widetilde{\xi}}(Y_\eta): b \to b \otimes_{C_\xi(X)} \beta$$

являются изоморфизмами.

В спинорном случае заменим G_1 на $\mathrm{Spin}(V)$, а элементы α_V и β_V — на $\alpha_{p,q} \in K_V^{\mathrm{Spin}(V)}(Z)$ и $\beta_{p,q} \in K^V_{\mathrm{Spin}(V)}(Z)$, где действие $\mathrm{Spin}(V)$ на V тривиально. Предыдущее рассуждение дословно повторяется с заменой расслоения $\widetilde{\eta}$ на $\widetilde{\zeta} = V \times_{\mathrm{Spin}(V)} P$, которое тривиально ввиду тривиальности действия $\mathrm{Spin}(V)$ на V. ■

§ 6. Другие определения K-функтора

В этом параграфе устанавливается, что для тривиально градуированных унитальных алгебр A и B определение гомологического K-функтора $K_i(A)$ эквивалентно определению, данному в статье ([15]), а группа $K^0(B)$ изоморфна обычной группе Гротендика проективных модулей над B. В заключение для конечных клеточных комплексов X и Y мы даем два гомотопических определения группы $K_iK(X, Y)$. В этом параграфе снова предполагается, что алгебра A сепарабельна, а B имеет счетную аппроксимативную единицу. Действие G на A и B непрерывно.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть A и B — градуированные алгебры. Группа $KK(A, B)$ не изменится, если в определении 3 § 4 заменить гомотопическую эквивалентность троек на совокупность унитарной эквивалентности и операторной гомотопии. Более точно: если тройки $x_0 = (\varepsilon_0, \varphi_0, F_0)$ и $x_1 = (\varepsilon_1, \varphi_1, F_1)$ связаны гомотопией $\{x_t\} = (\{\varepsilon_t\}, \{\varphi_t\}, \{F_t\})$, то существуют такие x_0', $x_1' \in \mathscr{D}(A, B)$, что $x_0 \oplus x_0'$ операторно гомотопна $x_1 \oplus x_1'$. (При этом если $\{\varphi_t\}$ продолжается на алгебру $A_1 \supset A$, в которой A является идеалом,— см. теорему 2 § 4, то это же имеет место для x_0' и x_1'. Если $\{\varphi_t\}$ унитален, то же самое выполняется для x_0', x_1'.) Обратно, унитарно эквивалентные тройки гомотопны.*

Доказательство. Нам удобно будет считать, что гомотопия $\{x_t\}$ параметризована точками отрезка $[0, 2\pi]$, а не $[0, 1]$, т. е. $\{x_t\} \in \mathscr{E}(A, B[0, 2\pi])$. Кроме того, мы предположим, что при $0 \leqslant t \leqslant 2\pi/3$ и при $4\pi/3 \leqslant t \leqslant 2\pi$ гомотопия постоянна по t, т. е. $x_t = x_0$ при $t \leqslant 2\pi/3$, $x_t = x_{2\pi}$ при $t \geqslant 4\pi/3$. Напомним некоторые обозначения из § 2 работы ([15]). Оператор $d: L^2[0, 2\pi] \to L^2[0, 2\pi]$ определяется в базисе $(1), \ldots, (\cos nx), \ldots, (\sin nx), \ldots$ по формулам:

$$d(1) = 0, \quad d(\cos nx) = -(\sin nx), \quad d(\sin nx) = (\cos nx).$$

Оператор d косоэрмитов, $d^2+1\in\mathscr{K}(L^2[0, 2\pi])$, d коммутирует по модулю компактных операторов с умножением на функции из $C(0, 2\pi)$. Пусть $f\in C[0, 2\pi]$ — непрерывная вещественная функция, удовлетворяющая условиям: $|f(x)|\leqslant 1$, $f(0)=1$, $f(2\pi)=-1$. Положим $T_1(f)=$ $=f-\sqrt{1-f^2}\cdot d\in\mathscr{L}(L^2[0, 2\pi])$, где через f обозначен оператор умножения на f. Оператор $T_1(f)$ фредгольмов, индекса 1, причем $1-T_1(f)\cdot T_1(f)^*$ и $1-T_1(f)^*\cdot T_1(f)$ компактны. Кроме того, $T_1(f)$ коммутирует по модулю компактных операторов с умножением на функции из $C[0, 2\pi]$. Ясно, что любые 2 оператора вида $T_1(f)$ (при разных f) соединяет непрерывная по норме гомотопия, состоящая из операторов того же вида.

Пусть $H^{(0)}=H^{(1)}=L^2[0, 2\pi]$, $H=H^{(0)}\oplus H^{(1)}$ — градуированное гильбертово пространство (действие G тривиально). Тройка $c_1(f)=$ $=(\varepsilon, \mathrm{id}, T(f))$, где ε — градуировка H, $\mathrm{id}: C[0, 2\pi]\to\mathscr{L}(H)$ — естественное представление, $T(f)=\begin{pmatrix} 0 & T_1(f)^* \\ T_1(f) & 0\end{pmatrix}$, определяет элемент из $KK(C[0, 2\pi], C)$. Пересечение $\{x_t\}\otimes_{C[0, 2\pi]}c_1(f)\in KK(A, B)$ записывается в виде:

$$(\varepsilon_t\otimes\varepsilon, \mathrm{id}_*\circ\{\varphi_t\}: A\to\mathscr{M}(\mathscr{K}\hat{\otimes}B\hat{\otimes}C[0, 2\pi])\xrightarrow{\mathrm{id}_*}$$
$$\to\mathscr{M}(\mathscr{K}\hat{\otimes}B\hat{\otimes}\mathscr{K}(H)),\quad F(f)=\sqrt{M}\cdot\mathrm{id}_*(\{F_t\})+\sqrt{N}(1\hat{\otimes}T(f))).$$

При этом можно считать, что пара $(M, N)\in S(\{x_t\}, c_1(f))$ не зависит от f и коммутирует по модулю $\mathscr{K}\hat{\otimes}B\hat{\otimes}\mathscr{K}(H)$ с $1\hat{\otimes}C[0, 2\pi]$. Для построения таких M и N достаточно воспользоваться теоремой 4 § 3 в случае, когда

$$E_1=\mathrm{id}_*(\mathscr{K}\hat{\otimes}B\hat{\otimes}C[0, 2\pi])+\mathscr{K}\hat{\otimes}B\hat{\otimes}\mathscr{K}(H);\qquad E=\mathscr{K}\hat{\otimes}B\hat{\otimes}\mathscr{K}(H);$$

E_2 — минимальная подалгебра в $\mathscr{M}(\mathscr{K}\hat{\otimes}B\hat{\otimes}\mathscr{K}(H))$, содержащая $1\hat{\otimes}$ $\hat{\otimes}\mathscr{K}(H)$; $[\mathrm{id}_*\circ\{\varphi_t\}(a), 1\hat{\otimes}T(f)]$ $\forall a\in A$, $\forall f\in C[0, 2\pi]$; $[\mathrm{id}_*(\{F_t\}), 1\hat{\otimes}$ $\hat{\otimes}T(f)]$ $\forall f\in C[0, 2\pi]$;

$\mathfrak{F}$ — линейное пространство, натянутое на $\mathrm{id}_*(\{F_t\})$; $1\hat{\otimes}f$ и $1\hat{\otimes}T(f)$ $\forall f\in C[0, 2\pi]$; $(\mathrm{id}_*\circ\{\varphi_t\})(A)$.

Положим теперь

$$f=\begin{cases}\cos 3t, & 0\leqslant t\leqslant\dfrac{\pi}{3},\\[2mm] -1, & \dfrac{\pi}{3}\leqslant t\leqslant 2\pi.\end{cases}$$

Оператор $T_1(f)$ коммутирует с проектором P на $L^2\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$, причем $P\cdot T_1(f)$ — оператор индекса 1 на $L^2\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$, а $(1-P)T_1(f)=-1$ на $L^2\left[\frac{2\pi}{3}, 2\pi\right]$. Выберем $\alpha(t)\in C[0, 2\pi]$ так, что $0\leqslant\alpha(t)\leqslant 1$; $\alpha(t)=0$ при $t\leqslant\frac{\pi}{3}$; $\alpha(t)=1$ при $t\geqslant\frac{2\pi}{3}$. При помощи непрерывной по норме гомотопии можно

заменить M и N на

$$\widetilde{M}=\sqrt{1\hat{\otimes}(1-\alpha)}\cdot M\cdot\sqrt{1\hat{\otimes}(1-\alpha)},$$
$$\widetilde{N}=1\hat{\otimes}\alpha+\sqrt{1\hat{\otimes}(1-\alpha)}\cdot N\cdot\sqrt{1\hat{\otimes}(1-\alpha)}.$$

Новый оператор $F(f)$ коммутирует с $1\hat{\otimes}(P\oplus P)$ и относительно разложения $H=\operatorname{Im}(P\oplus P)\oplus\operatorname{Im}(1-P\oplus P)$ получаем:

$$\{x_t\}\otimes_{C[0,\,2\pi]}c_1(f)=(x_0\otimes_C c_1)\oplus(\text{элемент из } \mathscr{D}(A, B)).$$

(Здесь c_1 — единица по умножению — см. теорему 5 § 4. Напомним, что при $t\leqslant 2\pi/3$ $x_t=x_0$.)

Если теперь положить

$$f=\begin{cases}1, & 0\leqslant t\leqslant\dfrac{5\pi}{3},\\ -\cos 3t, & \dfrac{5\pi}{3}\leqslant t\leqslant 2\pi,\end{cases}$$

то аналогичным образом можно будет показать, что $\{x_t\}\otimes_{C[0,\,2\pi]}c_1(f)$ операторно гомотопна $(x_{2\pi}\otimes_C c_1)\oplus(\text{элемент из } \mathscr{D}(A, B))$. Остается применить теорему 5 § 4. Обратное утверждение следует из п. 17 § 1 и п. 3 § 2. ■

Определение 1. Пусть алгебры A, B и $\mathscr{K}$ имеют тривиальную градуировку. Обозначим через $\mathscr{E}_{p,q}(A, B)$ множество пар (φ, F), где $\varphi: A\otimes C_{p+1,q}\to\mathscr{M}(\mathscr{K}\otimes B)$ — гомоморфизм (не градуированный), F — инвариантный элемент в $\mathscr{M}(\mathscr{K}\otimes B)$, причем $\forall a\in A$, $\forall b\in C_{p+1,q}$ элементы

$$\varphi(a\otimes b)\cdot F-(-1)^{\deg b}F\cdot\varphi(a\otimes b),\quad (F^2-1)\varphi(a\otimes b),\quad (F-F^*)\varphi(a\otimes b)$$

принадлежат $\mathscr{K}\otimes B$. Пусть $\mathscr{D}_{p,q}(A, B)$ — множество (вырожденных) пар, для которых указанные элементы равны 0. Кроме того, через $\mathscr{E}'_{p,q}(A, B)$ и $\mathscr{D}'_{p,q}(A, B)$ обозначим множества пар $(\varphi:\widetilde{A}\otimes C_{p+1,q}\to\mathscr{M}(\mathscr{K}\otimes B), F)$, удовлетворяющих тем же условиям (при $a\in A$). Гомотопия и операторная гомотопия определяются так же, как в § 4 (для $\mathscr{E}'_{p,q}(A, B)$ и $\mathscr{D}'_{p,q}(A, B)$ гомотопия считается определенной на $\widetilde{A}\otimes C_{p+1,q}$). Пары (φ, F) и (φ_1, F_1) унитарно эквивалентны, если существует такой инвариантный унитарный элемент $u\in\mathscr{M}(\mathscr{K}\otimes B)$, что

$$\forall a\in A\otimes C_{p+1,q}\quad \varphi_1(a)=u\varphi(a)u^{-1},\quad F_1=uFu^{-1}$$

(для $\mathscr{E}'_{p,q}(A, B)$ — соответственно $a\in\widetilde{A}\otimes C_{p+1,q}$).

Обозначим через $\overline{\mathscr{E}}_{p,q}(A, B)$ множество классов эквивалентности $\mathscr{E}_{p,q}(A, B)$ по модулю гомотопии, через $\overline{\mathscr{D}}_{p,q}(A, B)$ — образ $\mathscr{D}_{p,q}(A, B)$ в $\overline{\mathscr{E}}_{p,q}(A, B)$. Аналогично определим $\overline{\mathscr{E}}'_{p,q}(A, B)$ и $\overline{\mathscr{D}}'_{p,q}(A, B)$. Кроме того, пусть $\widetilde{\mathscr{E}}'_{p,q}(A, B)$ — множество классов эквивалентности $\mathscr{E}'_{p,q}(A, B)$ по модулю унитарной эквивалентности и операторной гомотопии, $\widetilde{\mathscr{D}}'_{p,q}(A, B)$ — образ $\mathscr{D}'_{p,q}(A, B)$ в $\widetilde{\mathscr{E}}'_{p,q}(A, B)$. Прямая сумма (см. определение 3 § 4) превращает эти множества классов эквивалентности в полугруппы.

ТЕОРЕМА 2. *Для тривиально градуированных A и B*

$$\overline{\mathscr{E}}_{p,q}(A, B)/\overline{\mathscr{D}}_{p,q}(A, B) \simeq \overline{\mathscr{E}}'_{p,q}(A, B)/\overline{\mathscr{D}}'_{p,q}(A, B) \simeq$$

$$\simeq K_{p,q}K(A, B) \simeq \widetilde{\mathscr{E}}'_{p,q}(A, B)/\widetilde{\mathscr{D}}'_{p,q}(A, B).$$

Доказательство. Первый изоморфизм получается так же, как в доказательстве теоремы 2 § 4. Второй и третий изоморфизмы получаются следующим образом. Пусть $\mathscr{H}=\mathscr{H}^{(0)}\oplus\mathscr{H}^{(1)}$ и ε — градуировочный оператор $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. Очевидно, $\mathscr{K}(\mathscr{H})\hat{\otimes} B = \mathscr{K}(\mathscr{H})\otimes B$, $A\hat{\otimes} C_{p,q} = A\otimes C_{p,q}$.

Тройке $(\varepsilon, \varphi, F)\in \mathscr{E}(A\otimes C_{p,q}, B)$, где φ продолжается на $\widetilde{A}\otimes C_{p,q}$, поставим в соответствие пару $(\varphi', F)\in \mathscr{E}'_{p,q}(A, B)$, где $\varphi'|_{\widetilde{A}\otimes C_{p,q}}=\varphi$, $\varphi'(a\otimes\varepsilon_{p+1})= =\varphi(a\otimes 1)\cdot\varepsilon$. Обратное отображение $(\varphi', F)\to(\varepsilon, \varphi, F)$ получится, если положить $\varepsilon=\varphi'(1\otimes\varepsilon_{p+1})$. Разложение $\mathscr{H}_B = \operatorname{Im}\left(\frac{1+\varepsilon}{2}\right)\oplus\operatorname{Im}\left(\frac{1-\varepsilon}{2}\right)$ дает градуировку $\mathscr{H}_B$. Операторная гомотопия позволяет заменить оператор F на $\frac{1}{2}(F-\varepsilon F\varepsilon)$, который имеет степень 1 относительно градуировки ε. (В случае третьего изоморфизма надо еще применить теорему 1.) ■

Следствие 1. *Для тривиально градуированной унитальной алгебры A определение $K_{p,q}(A)$ эквивалентно определению* 1 § 1 работы ([15]).

Доказательство. Заметим, что для унитальной алгебры A в формулировке теоремы 2 не обязательно требовать, чтобы гомоморфизм $\varphi: A\otimes C_{p+1,q}\to\mathscr{M}(\mathscr{K}\otimes B)$ продолжался на $\widetilde{A}\otimes C_{p+1,q}$ (доказательство сохраняется). Изоморфизм алгебр Клиффорда

$$C_{q+1,p}\rightleftarrows C_{p+1,q}: \varepsilon_i\to e_i\varepsilon_{p+1}, \quad i\leqslant q;$$

$$e_j\to\varepsilon_j\varepsilon_{p+1}, \quad j\leqslant p; \quad \varepsilon_{q+1}\to\varepsilon_{p+1}$$

с одновременной заменой оператора F на $F_1=F\cdot\varphi(1\otimes\varepsilon_{p+1})$ переводит пару $(\varphi: A\otimes C_{p+1,q}\to\mathscr{M}(\mathscr{K}\otimes B), F)$ в пару $(\varphi_1: A\otimes C_{q+1,p}\to\mathscr{M}(\mathscr{K}\otimes B), F_1)$, которая удовлетворяет условиям: $\forall a\in A\otimes C_{q+1,p}$

$$F_1\cdot\varphi(a)-(-1)^{\deg a}\varphi(a)F_1\in\mathscr{K}_B, \quad (F_1^2+1)\varphi(a)\in\mathscr{K}_B,$$

$$(F_1+F_1^*)\varphi(a)\in\mathscr{K}_B.$$

Поскольку $1\in A$, последние два условия заменяются на $F_1^2+1\in\mathscr{K}_B$, $F_1+ +F_1^*\in\mathscr{K}_B$. (В работе ([15]) $B=C$.) ■

ЛЕММА 1. *Пусть A и B — градуированные алгебры и $(\varepsilon, \varphi, \{F_t\})\in \in\mathscr{E}(A, B[0, 1])$ — операторная гомотопия. Существует непрерывная по норме функция $[0, 1]\to\mathscr{L}(\mathscr{H}_B)$: $t\to u_t$, удовлетворяющая* $\forall t\in[0, 1]$ *условиям:*

1) *u_t — инвариантный унитарный элемент степени* 0; $u_0=1$.
2) $\forall a\in A \quad u_t\varphi(a)-\varphi(a)u_t\in\mathscr{K}_B$.
3) $\forall a\in A \quad (F_tu_t-u_tF_0)\varphi(a)\in\mathscr{K}_B$.

Доказательство. Пусть $\delta>0$ таково, что при $|s-t|\leqslant\delta$ оператор $(2-F_s^2+F_tF_s)$ обратим. Покроем отрезок $[0, 1]$ отрезками $\{[t_i, t_{i+1}]\}$ дли-

ны $\leqslant\delta$. Сначала построим по индукции обратимую (а не унитарную) функцию v: $[0, 1]\to\mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$, удовлетворяющую тем же условиям. Положим $v_0=1$. Если при $t\in[0, t_i]$ v_t уже построена, то при $t\in[t_i, t_{i+1}]$ положим $v_t=\frac{1}{2}(2-F_{t_i}^2+F_tF_{t_i})\cdot v_{t_i}$. Условия 2) и 3) легко проверяются. Остается заменить функцию v_t на $u_t=v_t(\overset{*}{v_t}v_t)^{-1/2}$, которая унитарна. ■

Определение 2. Пусть B — тривиально градуированная унитальная алгебра. Рассмотрим категорию конечнопорожденных проективных правых B-модулей с левым действием группы G, совместимым с действием G на B. (B-модули — комплексные, вещественные или «вещественные», в зависимости от того, какая категория алгебр B рассматривается.) Группу Гротендика этой категории относительно операции прямой суммы модулей обозначим через $\mathfrak{G}^0(B)$. Для неунитальной алгебры B положим $\mathfrak{G}^0(B)=\widetilde{\mathfrak{G}}^0(\tilde{B})=\mathrm{Ker}[g_*:\mathfrak{G}^0(\tilde{B})\to\mathfrak{G}^0(C)]$, где $g:\tilde{B}\to C$, $g(1)=1$.

ТЕОРЕМА 3. $K^0(B)\simeq\mathfrak{G}^0(B)$.

Доказательство использует несколько лемм.

Определение 3. Пусть B — тривиально градуированная алгебра. Обозначим через $\mathscr{E}^0(B)$ множество инвариантных элементов $F\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$, удовлетворяющих условию: $1-FF^*$, $1-F^*F\in\mathcal{K}_B$, а через $\mathscr{D}^0(B)$ — множество инвариантных унитарных элементов в $\mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$. Назовем элементы F_1 и $F_2\in\mathscr{E}^0(B)$ эквивалентными, если существуют такие инвариантные унитарные элементы u, $v\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$, что $uF_1v-F_2\in\mathcal{K}_B$. Обозначим через $\overline{\mathscr{E}}^0(B)$ множество классов эквивалентности в $\mathscr{E}^0(B)$, а через $\overline{\mathscr{D}}^0(B)$ — образ $\mathscr{D}^0(B)$ в $\overline{\mathscr{E}}^0(B)$. Введем в $\overline{\mathscr{E}}^0(B)$ сложение — прямую сумму.

ЛЕММА 2. *$\overline{\mathscr{E}}^0(B)/\overline{\mathscr{D}}^0(B)\simeq K^0(B)$. Элемент $F^*\in\mathscr{E}^0(B)$ является обратным к $F\in\mathscr{E}^0(B)$ в группе $K^0(B)$. Сумма $F_1\oplus F_2$ равна F_1F_2.*

Доказательство. В алгебре $\mathcal{L}(\mathcal{H}_B^{(0)}\oplus\mathcal{H}_B^{(1)})$ всякий элемент F степени 1 имеет вид $\begin{pmatrix}0 & F_2\\ F_1 & 0\end{pmatrix}$. Из условий $F^2-1\in\mathcal{K}_B$, $F^*-F\in\mathcal{K}_B$ следует, что $F_2-F_1^*$, $1-F_1F_1^*$, $1-F_1^*F_1\in\mathcal{K}_B$. Соответствие $F\to F_1$ определяет отображение $\mathscr{E}(C, B)$ в $\mathscr{E}^0(B)$. Обратное отображение определяется по формуле:

$$F_1\to F=\begin{pmatrix}0 & F_1^*\\ F_1 & 0\end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что унитарная эквивалентность элементов F и T в $\mathscr{E}(C, B)$ соответствует наличию инвариантных унитарных u, $v\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$, удовлетворяющих условию $uF_1v=T_1$. Если F и $T\in\mathscr{E}(C, B)$ операторно гомотопны, то по лемме 1 существует такой инвариантный унитарный элемент $u\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ степени 0, что $T-uFu^{-1}\in\mathcal{K}_B$. Обратно, если элементы F_1, $T_1\in\mathscr{E}^0(B)$ связаны соотношением $F_1-T_1\in\mathcal{K}_B$, то соответствующие им элементы F, $T\in\mathscr{E}(C, B)$ операторно гомотопны: $tF+(1-t)T$, $0\leqslant t\leqslant 1$.

По теореме 1 § 4 обратным к $F=\begin{pmatrix}0 & F_1^*\\ F_1 & 0\end{pmatrix}$ является элемент $\begin{pmatrix}0 & -F_1\\ -F_1^* & 0\end{pmatrix}\in\mathscr{L}(\mathscr{H}_B^{(1)}\oplus\mathscr{H}_B^{(0)})$ (градуировка $\mathscr{H}_B$ меняется на противоположную). Поэтому элемент $(-F_1^*)=(-1)\cdot F_1^*$, а также F_1^* будет обратным к $F_1\in\mathscr{E}^0(B)$. Элементы $F_1\oplus F_2$ и $F_1F_2\oplus 1\in\mathscr{E}^0(B)$ связаны гомотопией:

$$\begin{pmatrix}F_1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & F_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix},\quad 0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2},$$

поэтому соответствующие им элементы $\mathscr{E}(C, B)$ операторно гомотопны. ■

ЛЕММА 3. *Пусть алгебра B унитальна. В определении $\mathfrak{G}^0(B)$ можно вместо конечнопорожденных проективных B-модулей рассматривать конечнопорожденные проективные гильбертовы B-модули.*

Доказательство. Если $V\oplus W\simeq B^n$ и $p: B^n\to B^n$ — инвариантный проектор на V, то, заменив p на $p_1=[(2p^*-1)(2p-1)+1]^{1/2}\cdot p\cdot[(2p^*-1)\cdot\cdot(2p-1)+1]^{-1/2}$, получим эрмитов проектор в $\mathscr{L}(B^n)$ с образом, изоморфным V. Изоморфизм $\operatorname{Im}p_1$ на V определяет структуру гильбертова B-модуля на V. Если $u: V_1\to V_2$ — изоморфизм (не изометрический) двух гильбертовых B-модулей, то $u_0=u(u^*u)^{-1/2}$ — изометрический (т. е. сохраняющий скалярное произведение) изоморфизм. ■

ЛЕММА 4. *Если p и q — инвариантные эрмитовы проекторы в алгебре D, причем $\|p-q\|<1$, то существует такой инвариантный унитарный элемент $u\in D$, что $upu^{-1}=q$.*

Доказательство. Положим $v=(2q-1)(2p-1)+1$. Тогда

$$\|2-v\|=\|(2p-1)^2-(2q-1)(2p-1)\|\leqslant 2\|p-q\|<2.$$

Значит, v обратим. Легко проверить, что $v(2p-1)v^{-1}=2q-1$, откуда $vpv^{-1}=q$. Остается положить $u=v(v^*v)^{-1/2}$. ■

ЛЕММА 5. *Пусть алгебра B унитальна. Для того чтобы образ эрмитова проектора $p\in\mathscr{L}(\mathscr{H}_B)$ был конечнопорожденным проективным B-модулем, необходимо и достаточно, чтобы $p\in\mathscr{K}_B$.*

Доказательство. Если $\operatorname{Im}p$ конечнопорожден и проективен, то существует такой B-модуль W, что $\operatorname{Im}p\oplus W\simeq B^n$. Как видно из доказательства леммы 3, можно считать, что W — также гильбертов B-модуль и изоморфизм сохраняет скалярное произведение. По теореме стабилизации (п. 12 § 1) $W\oplus\mathscr{H}_B\simeq\mathscr{H}_B$, поэтому в $\mathscr{H}_B$ существует эрмитов проектор q с образом, изометрически изоморфным W. Рассмотрим в $\mathscr{H}_B\oplus\mathscr{H}_B$ проектор $p\oplus q$. Его образ изометрически изоморфен B^n. Если $x_1, \ldots, x_n$ — ортонормированный базис в $\operatorname{Im}(p\oplus q)$, то $p\oplus q=\sum_{i=1}^{n}\theta_{x_i, x_i}$. Поэтому $p\oplus q\in\mathscr{K}(\mathscr{H}_B\oplus\mathscr{H}_B)$, откуда следует, что $p\in\mathscr{K}(\mathscr{H}_B)$.

Обратно, пусть $p\in\mathscr{K}(\mathscr{H}_B)$. Обозначим через $p_n\in\mathscr{K}(\mathscr{H}_B)$ проектор на первые n координат в $\mathscr{H}_B$. Существует такое n, что p_n инвариантен и $\|(1-p_n)p\|<1/8$ (последнее вытекает из легко проверяемого соотноше-

ния: $\forall k \in \mathcal{K}_B \lim\limits_{n\to\infty} \|(1-p_n)k\|=0)$, откуда $\|p-p_npp_n\|<1/4$. Положим $q=$ $=p_n\cdot f(p_npp_n)\cdot p_n$, где $f(x)$ — вещественная функция:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\leqslant\frac{1}{4},\\ 2x-\frac{1}{2}, & \frac{1}{4}\leqslant x\leqslant\frac{3}{4},\\ 1, & x\geqslant\frac{3}{4}. \end{cases}$$

Тогда q — эрмитов проектор, причем $\|p-q\|<1/2$. По лемме 4, p и q унитарно эквивалентны, поэтому $\operatorname{Im} p\simeq\operatorname{Im} q$. Однако q обладает тем свойством, что $p_nqp_n=q$, поэтому $\operatorname{Im} q$ конечнопорожден и проективен. ■

Доказательство теоремы 3. Сначала будем считать, что B унитальна. Гомоморфизм $\mathfrak{G}^0(B)\to K^0(B)$ определяется так. Пусть V — конечнопорожденный проективный гильбертов B-модуль. Тогда $\mathcal{H}_B\oplus$ $\oplus V\simeq\mathcal{H}_B$, поэтому существует оператор $F_V\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_B\oplus V)\simeq\mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$, изометрически отображающий $\mathcal{H}_B\oplus\{0\}$ на $\mathcal{H}_B\oplus V$ и равный 0 на $\{0\}\oplus V$. Ясно, что $F_VF_V^*=1$, $F_V^*F_V\doteq 1-p$, где $p\in\mathcal{K}(\mathcal{H}_B\oplus V)$ — проектор на V. Сопоставление $[V]\to[F_V]$ продолжается до гомоморфизма $\mathfrak{G}^0(B)\to K^0(B)$, так как $K^0(B)$ — группа.

Обратно, пусть $F\in\mathcal{E}^0(B)$. Тогда $FF^*=1-k$, $k\in\mathcal{K}(\mathcal{H}_B)$. Существует такое n, что $\|(1-p_n)k(1-p_n)\|<1$ (где p_n — инвариантный проектор на первые n координат). Положим

$$h=(1-p_n)k(1-p_n),\qquad l=(1-p_n)+\sum_{r=1}^{\infty}h^r,\qquad F_1=\sqrt{l}\,F.$$

Ясно, что $F_1-F\in\mathcal{K}_B$. Кроме того, $\sqrt{l}(1-p_n)=\sqrt{l}$, поэтому $F_1F_1^*=$ $=\sqrt{l}FF^*\sqrt{l}=\sqrt{l}(1-p_n)FF^*(1-p_n)\sqrt{l}=\sqrt{l}(1-p_n-h)\sqrt{l}=1-p_n$. Тем самым $F_1F_1^*$ (а значит, и $F_1^*F_1$) — эрмитов проектор. Сопоставление $[F]\to$ $\to[\operatorname{Ker} F_1^*F_1]-[\operatorname{Ker} F_1F_1^*]=[\operatorname{Ker} F_1]-[\operatorname{Ker} F_1^*]$ определяет гомоморфизм $K^0(B)\to\mathfrak{G}^0(B)$.

Корректность. Надо доказать, что если $F_1-F_2\in\mathcal{K}_B$, причем F_1F и $F_2F_2^*$ — проекторы, то $[\operatorname{Ker} F_1]-[\operatorname{Ker} F_1^*]=[\operatorname{Ker} F_2]-[\operatorname{Ker} F_2^*]$. Заменяя F_1 на $\begin{pmatrix}F_1 & 0\\ 0 & F_2^*\end{pmatrix}$, а F_2 на $\begin{pmatrix}F_2 & 1-F_2F_2^*\\ 1-F_2^*F_2 & F_2^*\end{pmatrix}$, можно считать, что $F_2\in$ $\in\mathcal{D}^0(B)$. Теперь замена F_1 на $F_1F_2^*$ сводит все к случаю $F_1-1\in\mathcal{K}_B$.

Итак, пусть $F-1\in\mathcal{K}_B$, $FF^*=1-p$. Используя конструкции лемм 4 и 5, нетрудно построить такую последовательность целых чисел $n_i\to\infty$ и инвариантных унитарных элементов $\{u_i\}$, что

$$p_{n_i}(u_ipu_i^{-1})p_{n_i}=u_ipu_i^{-1}\ \text{и}\ \lim_{i\to\infty}\|u_i-1\|=0,$$

причем все p_{n_i} инвариантны. Так как $F-1\in\mathcal{K}_B$, то при $n\to\infty$

$$\|F^*(1-p_n)F-(1-p_n)\|\to 0,$$

поэтому при $i \to \infty$

$$a_i = \|u_i F^* u_i^{-1}(1-p_{n_i}) u_i F u_i^{-1} - (1-p_{n_i})\| \to 0.$$

Значит, существует такое i, что $a_i < 1$. Заменим F на $u_i F u_i^{-1}$ и обозначим n_i через n. Имеем:

$$(1-p_n)FF^*(1-p_n) = 1-p_n, \quad \|F^*(1-p_n)F-(1-p_n)\| < 1.$$

Применяя лемму 4, мы видим, что оператор $\Phi = (1-p_n)F$ имеет нулевой «индекс», т. е.

$$\operatorname{Im}(1-\Phi\Phi^*) = \operatorname{Im} p_n, \quad \operatorname{Im}(1-\Phi^*\Phi) \simeq \operatorname{Im} p_n.$$

С другой стороны,

$$\operatorname{Im}(1-\Phi\Phi^*) = \operatorname{Im}(1-FF^*) \oplus \operatorname{Im}(p_n-p),$$

$$\operatorname{Im}(1-\Phi^*\Phi) = \operatorname{Im}(1-F^*F+F^*(p_n-p)F) = \operatorname{Im}(1-F^*F) \oplus$$

$$\oplus \operatorname{Im}(F^*(p_n-p)F).$$

(Последнее равенство получается из ортогональности проекторов $(1-F^*F)$ и $F^*(p_n-p)F$.) Так как $\operatorname{Im}(p_n-p) \simeq \operatorname{Im}(F^*(p_n-p)F)$ (оператор F^* определяет этот изоморфизм), то $\operatorname{Im}(1-F^*F)$ стабильно изоморфен $\operatorname{Im}(1-FF^*)$. Корректность доказана.

Нетрудно проверить, что построенные гомоморфизмы взаимно обратны. Это дает требуемый изоморфизм в случае, когда B унитальна. В общем случае достаточно сослаться на следствие 1 § 7. Такая ссылка корректна, так как никакие утверждения настоящего параграфа, кроме теорем 1, 2 и леммы 1, в следующем параграфе использованы не будут. ■

Следствие 2. *Пусть B — тривиально градуированная алгебра, оператор $\varepsilon \in \mathscr{L}(\widetilde{B}^n)$ определяет градуировку алгебры $\mathscr{L}(B^n)$, а $F \in \mathscr{L}(B^n)$ — инвариантный эрмитов оператор степени 1, удовлетворяющий условиям $\|F\| \leqslant 1$ и $F^2 - 1 \in \mathscr{K}(B^n)$. Тогда образ элемента $(\varepsilon, F) \in K^0(B)$ в группе $K^0(\widetilde{B})$ равен разности двух проективных модулей $\operatorname{Im}\left(\frac{1+\Phi}{2}\right)$ и $\operatorname{Im}\left(\frac{1-\varepsilon}{2}\right)$, где $\Phi = (1-2F)\varepsilon + 2F\sqrt{1-F^2}$.*

Доказательство. Оператор ε можно рассматривать также как элемент $\mathscr{L}(B^n)$. Обозначим гильбертовы подмодули $\operatorname{Im}\left(\frac{1+\varepsilon}{2}\right)$ и $\operatorname{Im}\left(\frac{1-\varepsilon}{2}\right)$ в $\widetilde{B}^n$ через $\widetilde{E}_1$ и $\widetilde{E}_2$, а аналогичные подмодули в B^n — через E_1 и E_2 соответственно. Относительно разложения $B^n = E_1 \oplus E_2$ оператор F имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & T^* \\ T & 0 \end{pmatrix}$. Оператор $T: E_1 \to E_2$ можно (после стабилизации: $T \oplus 1 : E_1 \oplus \oplus \mathscr{H}_{\widetilde{B}} \to E_2 \oplus \mathscr{H}_{\widetilde{B}}$) рассматривать как элемент $\mathscr{E}^0(\widetilde{B})$. Мы рассмотрим другой оператор $S: E_1 \oplus E_2 \to E_2 : S(x, y) = T(x) + \sqrt{1-TT^*}(y)$. Поскольку $1 - TT^* \in \mathscr{K}(E_2)$, в группе $K^0(\widetilde{B})$ разность двух элементов $[S]-[T]$ совпадает с проективным модулем $\widetilde{E}_2 = \operatorname{Im}\left(\frac{1-\varepsilon}{2}\right)$. Заметим также, что $SS^* = 1$.

Поэтому наше утверждение вытекает из равенства $1 - S^*S = \frac{1}{2}(1 + \Phi)$, которое проверяется непосредственно с использованием соотношения $T \cdot \sqrt{1 - T^*T} = \sqrt{1 - TT^*} \cdot T$. Это последнее соотношение получается переходом к пределу из $T \cdot p(T^*T) = p(TT^*) \cdot T$, где p — многочлен. ■

Рассмотрим теперь гомотопические определения групп $K_iK(X, Y)$ для локально компактных пространств X и Y, когда одноточечные компактификации X^+ и Y^+ являются конечными клеточными комплексами. Мы ограничимся случаем комплексного и вещественного K-функтора с тривиальным действием G, оставив в стороне возможные обобщения. В наших рассмотрениях будет использован тот факт, что $K_*K(X, Y)$ является обобщенной теорией гомологий по X и обобщенной теорией когомологий по Y. Это вытекает из теорем 3 § 4, 7 § 5, 2 и 3 § 7. (Ссылка на § 7 корректна, так как приводимые здесь гомотопические определения не используются в § 7.)

Классифицирующее пространство $\widetilde{\mathcal{F}}_{p,q}$ для приведенного K-функтора $\widetilde{KU}^{p-q}(Z)$ или $\widetilde{KO}^{p-q}(Z)$, где Z—компакт, реализуется следующим образом (ср. ([13])). Рассмотрим градуированное сепарабельное гильбертово пространство H и фиксированное градуированное представление $\psi_{q,p}: C_{q+1,p} \to \mathcal{L}(H)$, имеющее бесконечную кратность. Через $\mathcal{F}_{p,q}(H)$ обозначим пространство операторов $F \in \mathcal{L}(H)$, удовлетворяющих условиям:

$$F^* = F; \quad F^2 - 1 \in \mathcal{K}(H); \quad \deg F = 1;$$
$$F\psi_{q,p}(a) = -\psi_{q,p}(a)F \text{ при } a = \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q, e_1, \ldots, e_p.$$

Топология на $\mathcal{F}_{p,q}(H)$ индуцирована операторной нормой. Через $\widetilde{\mathcal{F}}_{p,q}(H)$ обозначим связную компоненту точки $\psi_{q,p}(\varepsilon_{q+1}) \in \mathcal{F}_{p,q}(H)$. При фиксированном $p-q$ все пространства $\widetilde{\mathcal{F}}_{p,q}(H)$ гомеоморфны. Отображение $S: \widetilde{\mathcal{F}}_{p,q+1} \to \Omega\widetilde{\mathcal{F}}_{p,q}$ (где Ω означает пространство петель) определим по формулам:

$$\psi_{q,p}(\varepsilon_i) = \psi_{q+1,p}(\varepsilon_{i+1}), \quad 1 \leqslant i \leqslant q+1,$$
$$\psi_{q,p}(e_i) = \psi_{q+1,p}(e_i), \quad 1 \leqslant i \leqslant p,$$
$$S(F)(t) = \psi_{q+1,p}(\varepsilon_1)\cos t + F\sin t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi,$$
$$S(F)(t) = \psi_{q+1,p}(\varepsilon_1)\cos t + \psi_{q+1,p}(\varepsilon_{q+2})\sin t, \quad \pi \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

В результате получается спектр пространств $\widetilde{\mathcal{F}}_{p-q} = \widetilde{\mathcal{F}}_{p,q}(H)$. Нетрудно проверить, что для компакта Z изоморфизм надстройки $\widetilde{K}^n(Z) \simeq \widetilde{K}^{n+1}(SZ)$, индуцированный описанным выше отображением $S^1 \wedge \widetilde{\mathcal{F}}_n \to \widetilde{\mathcal{F}}_{n+1}$, совпадает с периодичностью Ботта: $\widetilde{K}^1(S^1) \otimes \widetilde{K}^n(Z) \rightleftarrows \widetilde{K}^{n+1}(SZ)$.

Если P и Q — пространства с отмеченными точками, то через $Q(P)$ обозначим пространство непрерывных отображений $P \to Q$, сохраняющих отмеченную точку ($Q(P)$ наделяется компактно-открытой топологией). Для любого пространства R с отмеченной точкой естественное отображение $R \times Q(P) \to (R \times Q)(P)$, переводящее (r, f) в $f_r: p \to (r, f(p))$, факторизуется до отображения $R \wedge Q(P) \to (R \wedge Q)(P)$.

Определение 4.

$$H_i K(X, Y) = \varinjlim_n \pi_{n+i}(X^+ \wedge \widetilde{\mathcal{F}}_n(Y^+)),$$

$$KH^{-i}(X, Y) = \varinjlim_n \pi_{n+i}((X^+ \wedge \widetilde{\mathcal{F}}_n)(Y^+)) = \varinjlim_n [S^{n+i}Y^+, X^+ \wedge \widetilde{\mathcal{F}}_n].$$

Согласно теоремам 5.2 и 5.10 работы ([20]) на категории конечных клеточных комплексов $H_iK(X, Y)$ — обобщенная теория гомологий по X (при фиксированном Y), а $KH^{-i}(X, Y)$ — обобщенная теория когомологий по Y (при фиксированном X).

ТЕОРЕМА 4. *Если X^+ и Y^+ — конечные клеточные комплексы, то*

$$H_iK(X, Y) \simeq KH^{-i}(X, Y) \simeq K_iK(X, Y).$$

Доказательство. Обозначим через $\alpha_i(Y) \in K_iK(\mathbf{R}^i \times Y, Y) = \widetilde{K}_i\widetilde{K}(S^i \wedge Y^+, Y^+)$ образ канонической образующей $\alpha_i \in K_i(\mathbf{R}^i)$ при гомоморфизме $\tau_{C(Y)}$. Гомоморфизм $t: KH^{-i}(X, Y) \to KK^{-i}(X, Y)$ определим следующим образом. Для любого отображения $f: S^{n+i}Y^+ \to X^+ \wedge \widetilde{\mathcal{F}}_n$ существует такой компакт Z и отображение $g: Z \to \widetilde{\mathcal{F}}_n$, что f разлагается в композицию

$$S^{n+i}Y^+ \to X^+ \wedge Z \xrightarrow{\mathrm{id} \wedge g} X^+ \wedge \widetilde{\mathcal{F}}_n.$$

Отождествим $\widetilde{K}_{n+i}\widetilde{K}(X^+ \wedge Z, Y^+)$ с

$$\operatorname{Ker}[\widetilde{K}_{n+i}\widetilde{K}(X^+ \times Z, Y^+) \to \widetilde{K}_{n+i}\widetilde{K}(X^+ \vee Z, Y^+)].$$

Образ $\alpha_{n+i}(Y)$ при отображении

$$\widetilde{K}_{n+i}\widetilde{K}(S^{n+i}Y^+, Y^+) \to \widetilde{K}_{n+i}\widetilde{K}(X^+ \wedge Z, Y^+)$$

обозначим через $[f]$, а элемент $\widetilde{K}^n(Z)$, соответствующий отображению g,— через $[g]$. Положим

$$t(f) = [g] \otimes_{C(Z)} [f] \in \widetilde{K}_i\widetilde{K}(X^+, Y^+) = K_iK(X, Y).$$

Корректность легко проверяется.

Для компактных X и Y t является изоморфизмом. Действительно, если X и Y — одноточечные пространства, то отображение t — тождественный изоморфизм. Если Y — точка, то $KH^{-i}(X, Y)$ является обобщенной теорией гомологий по X. Поэтому в этом случае t — изоморфизм теорий гомологий

$$KH^{-i}(X, \text{точка}) \to KK^{-i}(X, \text{точка}).$$

Рассматривая теперь $KH^{-i}(X, Y)$ как теорию когомологий по Y (при фиксированном X), получим, что t — изоморфизм теорий когомологий. В случае, когда X и Y не компактны, достаточно перейти к соответствующим приведенным группам (от X^+ и Y^+).

Заметим теперь, что отображение $X^+ \wedge \widetilde{\mathcal{F}}_n(Y^+) \to (X^+ \wedge \widetilde{\mathcal{F}}_n)(Y^+)$ индуцирует гомоморфизм w: $H_iK(X, Y) \to KH^{-i}(X, Y)$, который является изоморфизмом, если хотя бы одно из пространств X или Y одноточечно. Поскольку $H_iK(X, Y)$ — обобщенная теория гомологий по X, гомоморфизм $t \cdot w$, а следовательно, и w, являются изоморфизмами. ■

§ 7. Расширения

В этом параграфе будет рассмотрена группа $\operatorname{Ext}(A, B)$, построенная из расширений вида

$$0 \to \mathcal{K} \otimes B \to D \to A \to 0, \tag{1}$$

где все алгебры A, B, D, $\mathcal{K}$ градуированы тривиально. Мы установим изоморфизм $\operatorname{Ext}(A, B) \simeq KK^1(A, B)$, а также получим точные последовательности для K-функтора (гомологическую и когомологическую). В конце параграфа будут рассмотрены расширения градуированных алгебр. Далее всюду предполагается, что алгебра A сепарабельна, а B имеет счетную аппроксимативную единицу.

Начнем со следующего замечания (см. ([10])). Расширение (1) однозначно определяет гомоморфизм $D \to \mathcal{M}(\mathcal{K} \otimes B)$, который после факторизации по $\mathcal{K} \otimes B$ дает

$$\varphi: A \to \mathcal{M}(\mathcal{K} \otimes B)/\mathcal{K} \otimes B = \mathcal{O}(\mathcal{K} \otimes B).$$

Мы будем предполагать, что группа G действует непрерывно на A, B, D. Это накладывает на φ следующее условие:

$$\left\{\begin{array}{l}\textit{если } a \in A,\ b \in \mathcal{M}(\mathcal{K} \otimes B) \textit{ и } \varphi(a) = b \bmod \mathcal{K} \otimes B, \\ \textit{то отображение } G \to \mathcal{M}(\mathcal{K} \otimes B): g \to g(b) \textit{ непрерыв-} \\ \textit{но по норме.}\end{array}\right\} \tag{2}$$

Обратно, если $\varphi: A \to \mathcal{O}(\mathcal{K} \otimes B)$ удовлетворяет условию (2), то, полагая $D = \mathcal{M}(\mathcal{K} \otimes B) \oplus_{\mathcal{O}(\mathcal{K} \otimes B)} A$ (см. п. 18 § 1), получим расширение (1), причем G действует на D непрерывно. При таком соответствии подмножество *расщепимых* расширений (т. е. расширений, допускающих гомоморфизм-сечение: $A \to D$) отвечает множеству гомоморфизмов φ, допускающих *поднятие*: $A \to \mathcal{M}(\mathcal{K} \otimes B)$. Мы часто будем отождествлять расширение с соответствующим ему гомоморфизмом φ.

Определение 1. Множество расширений типа (1) при фиксированных A и B обозначим через $\mathscr{E}xt(A, B)$, подмножество расщепимых расширений — через $\mathscr{D}xt(A, B)$. Элементы φ_1 и $\varphi_2 \in \mathscr{E}xt(A, B)$ называются *унитарно эквивалентными*, если существует такой инвариантный унитарный оператор $u \in \mathcal{M}(\mathcal{K} \otimes B)$, что $\forall a \in A$ $\varphi_2(a) = u\varphi_1(a)u^{-1}$. Пусть $\overline{\mathscr{E}xt}(A, B)$ — множество классов унитарно эквивалентных расширений, $\overline{\mathscr{D}xt}(A, B)$—образ $\mathscr{D}xt(A, B)$ в $\overline{\mathscr{E}xt}(A, B)$. Сложение $\varphi_1 \oplus \varphi_2$ в $\overline{\mathscr{E}xt}(A, B)$ определяется как прямая сумма ($\mathcal{K}(\mathscr{H}_B \oplus \mathscr{H}_B)$ отождествляется с $\mathcal{K}(\mathscr{H}_B)$ при помощи инвариантной изометрии $\mathscr{H}_B \oplus \mathscr{H}_B$ на $\mathscr{H}_B$). Положим

$$\operatorname{Ext}(A, B) = \overline{\mathscr{E}xt}(A, B)/\overline{\mathscr{D}xt}(A, B).$$

Отметим, что прямая сумма двух расширений $0 \to \mathcal{K} \otimes B \to D_i \xrightarrow{p_i} A \to 0$ ($i = 1, 2$) представляет собой расширение

$$0 \to M_2 \otimes (\mathcal{K} \otimes B) \to D_\oplus \xrightarrow{p} A \to 0,$$

где

$$D_\oplus = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & b_1 \\ b_2 & x_2 \end{pmatrix} \middle| x_i \in D_i,\ b_i \in \mathcal{K} \otimes B;\ p_1(x_1) = p_2(x_2) \right\},$$

$$p \begin{pmatrix} x_1 & b_1 \\ b_2 & x_2 \end{pmatrix} = p_i(x_i).$$

Определение 2. Назовем расширение $\varphi \in \mathscr{E}xt(A, B)$ *поглощающим*, если $\forall \psi \in \mathscr{D}xt(A, B)$ элементы $\varphi \oplus \psi$ и φ унитарно эквивалентны. Обозначим через $\mathscr{E}xt_a(A, B)$ множество поглощающих расширений, а через $\mathrm{Ext}_a(A, B)$ — множество классов унитарно эквивалентных поглощающих расширений. Сложение на $\mathrm{Ext}_a(A, B)$ определим как прямую сумму. (Отметим, что поглощающее расширение φ не может быть унитальным, так как φ и $\varphi \oplus 0$ унитарно эквивалентны.)

Определение 3. Пусть A и B — тривиально градуированные алгебры. Мы будем считать, что алгебра $\mathcal{K}$ также градуирована тривиально. Обозначим через $\mathscr{E}^1(A, B)$ множество пар (φ, P), где $\varphi : A \to \mathcal{M}(\mathcal{K} \otimes B)$ — гомоморфизм, $P \in \mathcal{M}(\mathcal{K} \otimes B)$ — инвариантный элемент, причем $\forall a \in A$ элементы

$$\varphi(a) P - P \varphi(a), \qquad (P^2 - P) \varphi(a), \qquad (P^* - P) \varphi(a) \tag{3}$$

принадлежат $\mathcal{K} \otimes B$. Пусть $\mathscr{D}^1(A, B)$ — множество (вырожденных) пар, для которых все элементы (3) равны 0. Пары (φ_1, P_1) и (φ_2, P_2) *унитарно эквивалентны*, если существует такой инвариантный унитарный элемент $u \in \mathcal{M}(\mathcal{K} \otimes B)$, что $\forall a \in A$ $\varphi_2(a) = u \varphi_1(a) u^{-1}$, $P_2 = u P_1 u^{-1}$. Пары (φ_1, P_1) и (φ_2, P_2) назовем *гомологичными*, если $\forall a \in A$ $P_1 \varphi_1(a) - P_2 \varphi_2(a) \in \mathcal{K} \otimes B$. Пусть $\overline{\mathscr{E}}^1(A, B)$ — множество классов эквивалентности $\mathscr{E}^1(A, B)$ по модулю унитарной эквивалентности и гомологичности, $\overline{\mathscr{D}}^1(A, B)$ — образ $\mathscr{D}^1(A, B)$ в $\overline{\mathscr{E}}^1(A, B)$. Сложение классов эквивалентности определим как прямую сумму. Положим

$$E^1(A, B) = \overline{\mathscr{E}}^1(A, B) / \overline{\mathscr{D}}^1(A, B).$$

ЛЕММА 1. 1) *Если хотя бы одна из двух алгебр A или B ядерна, то* $\mathrm{Ext}_a(A, B) \simeq \mathrm{Ext}(A, B)$.

2) *Если алгебра A ядерна, то отображение* $(\varphi, P) \to P \cdot \varphi \bmod \mathcal{K} \otimes B$ *определяет изоморфизм* $\gamma : E^1(A, B) \simeq \mathrm{Ext}(A, B)$.

Доказательство. 1) Зафиксируем такое правильное G-вложение $A \subsetneq \mathcal{M}(\mathcal{K})$, что $A \cap \mathcal{K} = 0$ (см. § 1, п. 16). Композицию $A \subsetneq \mathcal{M}(\mathcal{K}) \subsetneq \mathcal{M}(\mathcal{K} \otimes B) \to \mathcal{O}(\mathcal{K} \otimes B)$ обозначим через π. Согласно обобщенной теореме Войкулеску (§ 1, п. 16) расширение π является поглощающим. Если $\varphi \in \mathscr{E}xt(A, B)$, то, очевидно, $\varphi \oplus \pi \in \mathscr{E}xt_a(A, B)$. Поэтому вложение $\mathscr{E}xt_a(A, B) \subset \mathscr{E}xt(A, B)$ определяет искомый изоморфизм $\mathrm{Ext}_a(A, B)$ на $\mathrm{Ext}(A, B)$.

2) Эпиморфность γ. Пусть $\varphi \in \mathscr{E}xt(A, B)$. Продолжим φ до унитального $\tilde{\varphi} : \tilde{A} \to \mathcal{O}(\mathcal{K} \otimes B)$. Так как алгебра $\tilde{A}$ ядерна, то существует вполне положительное унитальное поднятие $\chi : \tilde{A} \to \mathcal{M}(\mathcal{K} \otimes B)$ (см. ([11]),

теорема 3.10, или ([4]), теорема 7). Из условия (2) следует, что $\forall a\in\tilde{A}$ функция $g\to g^{-1}\chi(ga)$ непрерывна по норме на G. Кроме того, $\forall a\in\tilde{A}$, $\forall g\in G$ $g^{-1}\chi(ga)-\chi(a)\in\mathcal{K}\otimes B$, $\overline{\chi(\bar{a})}-\chi(a)\in\mathcal{K}\otimes B$. Положим

$$\chi_1(a)=\int_G g^{-1}\chi(ga)\,dg,\quad \xi(a)=\frac{1}{2}(\chi_1(a)+\overline{\chi_1(\bar{a})}).$$

Отображение $\xi:A\to\mathcal{M}(\mathcal{K}\otimes B)$ унитально, эквивариантно, «вещественно» и является поднятием φ. Применяя обобщенную теорему Стайнспринга (см. п. 15 § 1), получим такой гомоморфизм $\psi:\tilde{A}\to\mathcal{M}(M_2\otimes\mathcal{K}\otimes B)$, что $\forall a\in\tilde{A}$ $\tilde{\varphi}(a)\oplus 0=P\psi(a)P$, где $P=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$.

Нетрудно проверить, что $\forall a\in\tilde{A}$ $\psi(a)P-P\psi(a)\in M_2\otimes\mathcal{K}\otimes B$. В самом деле,

$$(P\psi(a^*)P)(P\psi(a)P)=P\psi(a^*a)P \mod M_2\otimes\mathcal{K}\otimes B.$$

Поэтому $[(1-P)\psi(a)P]^*[(1-P)\psi(a)P]\in M_2\otimes\mathcal{K}\otimes B$, откуда $\psi(a)P-P\psi(a)P\in M_2\otimes\mathcal{K}\otimes B$. Подставляя a^* вместо a, переходя к сопряженным и вычитая, получим требуемое. Тем самым $\varphi\oplus 0=P\cdot\psi \mod M_2\otimes\mathcal{K}\otimes B$, где $(\psi, P)\in\mathcal{E}^1(A, B)$.

Мономорфность γ очевидна. ∎

ЛЕММА 2. $E^1(A, B)\simeq KK^1(A, B)$.

Доказательство. Переформулируем сначала определение $\mathcal{E}(A, B\hat{\otimes}C_{1,0})$. Алгебру $\mathcal{K}_B$, градуированную посредством градуировочного оператора $\varepsilon\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$, временно обозначим через $\mathcal{K}_B^{\mathrm{gr}}$. Обозначение $\mathcal{K}_B$ сохраним для алгебры $\mathcal{K}_B$ с тривиальной градуировкой. Отождествим $\mathcal{K}_B^{\mathrm{gr}}\hat{\otimes}C_{1,0}$ с $\mathcal{K}_B\otimes C_{1,0}$ по формуле:

$$x\,\hat{\otimes}\,y\to(x\varepsilon^{\deg y})\otimes(y\varepsilon_1^{\deg x}).$$

Это градуированный изоморфизм. Пространство $\mathcal{H}_B$ будем считать градуированным при помощи оператора ε. Через η обозначим соответствующую градуировку пространства $\mathcal{H}_{B\hat{\otimes}C_{1,0}}=\mathcal{H}_B\hat{\otimes}C_{1,0}$. Заметим, что любой элемент степени 0 в $\mathcal{M}(\mathcal{K}_B\otimes C_{1,0})$ имеет вид $x\otimes 1$, а любой элемент степени 1 имеет вид $y\otimes\varepsilon_1$, где $x, y\in\mathcal{M}(\mathcal{K}_B)$. Поэтому если

$$(\eta, \varphi:A\to\mathcal{M}(\mathcal{K}_B^{\mathrm{gr}}\hat{\otimes}C_{1,0})=\mathcal{M}(\mathcal{K}_B\otimes C_{1,0}), F)\in\mathcal{E}(A, B\hat{\otimes}C_{1,0}),$$

то $\varphi=\varphi'\otimes 1$, $F=F'\otimes\varepsilon_1$. Нетрудно проверить, что $\left(\varphi', \dfrac{F'+1}{2}\right)\in\mathcal{E}^1(A, B)$. Отображение $(\varphi, P)\to(\eta, \varphi\otimes 1, (2P-1)\otimes\varepsilon_1)$ отождествляет $\mathcal{E}^1(A, B)$ с $\mathcal{E}(A, B\hat{\otimes}C_{1,0})$.

Если пары (φ, P) и (ψ, Q) гомологичны, то пары $(\varphi, P)\oplus(\psi, 0)$ и $(\varphi, 0)\oplus(\psi, Q)$ операторно гомотопны. Гомотопия определяется при $0\leqslant t\leqslant\infty$ по формуле:

$$\left(\begin{pmatrix}\varphi&0\\0&\psi\end{pmatrix}, \frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix}P&tPQ\\tQP&t^2Q\end{pmatrix}\right).$$

Следовательно, соответствующие элементы из $\mathcal{E}(A, B\hat{\otimes}C_{1,0})$ также опе-

раторно гомотопны. Обратно, если (η, φ, F_t), $0 \leqslant t \leqslant 1$, — операторная гомотопия в $\mathscr{E}(A, B\hat{\otimes}C_{1,0})$, то лемма 1 § 6 дает такой инвариантный унитарный элемент $u_1 \in \mathscr{M}(\mathscr{K}_B \otimes C_{1,0})$ степени 0, что $\forall a \in A$ $u_1\varphi(a)u_1^{-1} - \varphi(a) \in \mathscr{K}_B \otimes C_{1,0}$, $(F_1 - u_1F_0u_1^{-1}) \cdot \varphi(a) \in \mathscr{K}_B \otimes C_{1,0}$. Записывая u_1 в виде $u \otimes 1$, F_t — в виде $F'_t \otimes \varepsilon_1$, φ — в виде $\varphi' \otimes 1$, получим, что $\forall a \in A$ $u\varphi'(a)u^{-1} - \varphi'(a) \in \mathscr{K}_B$, $(F'_1 - uF'_0u^{-1})\varphi'(a) \in \mathscr{K}_B$. Поэтому пары $\left(\varphi', \frac{F'_1+1}{2}\right)$ и $\left(u\varphi'u^{-1}, u\frac{F'_0+1}{2}u^{-1}\right)$ гомологичны. Применение теоремы 1 § 6 показывает, что наше отображение устанавливает искомый изоморфизм. ■

Объединяя леммы 1 и 2, получим следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. *Если алгебра A ядерна, то* $\mathrm{Ext}_a(A, B) \simeq \mathrm{Ext}(A, B) \simeq E^1(A, B) \simeq KK^1(A, B)$. ■

Замечание 1. В случае $B = C$ в силу теоремы Войкулеску свойство расширения быть поглощающим соответствует мономорфности гомоморфизма $\tilde{\varphi}: \tilde{A} \to \mathscr{O}(K) = \mathscr{L}(\mathscr{H})/\mathscr{K}$. Наше отношение эквивалентности на множестве $\mathscr{E}xt(A, B)$ соответствует сильной эквивалентности работы ([9]). Однако поскольку даже для унитальной алгебры A мы рассматриваем все расширения, а не только унитальные, мы получаем ту же группу $\mathrm{Ext}(A, B)$, что и в случае слабой эквивалентности (см. ([9]), 3.1). Отметим, что в случае $B \neq C$ свойство расширения быть поглощающим сильнее, чем мономорфность. В частности, при $B = C(Y)$, где Y — локально компактное пространство, нетрудно проверить, что для поглощающих расширений должно быть выполнено условие *строгой мономорфности*: $\forall y \in Y$ $\omega_y(\tilde{\varphi}(\tilde{A})) \simeq \tilde{A}$, где $\omega_y: \mathscr{O}(\mathscr{K}_{C(Y)}) \to \mathscr{O}(\mathscr{K})$ — ограничение над точкой $y \in Y$. Полезно было бы найти внутреннее описание поглощающих расширений.

Замечание 2. Поскольку существует вложение $\mathscr{O}(B_1) \subsetneq \mathscr{O}(\mathscr{K} \otimes B_1)$: $x \to p_1 \otimes x$ (где p_1 — ортогональный проектор в $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ на одномерное подпространство, все элементы которого инвариантны), каждое расширение $0 \to B_1 \to D \to A \to 0$ определяет элемент $(\varphi_1: A \to \mathscr{O}(B_1) \subsetneq \mathscr{O}(\mathscr{K} \otimes B_1)) \in \mathscr{E}xt(A, B_1)$. Если применить эту конструкцию к расширению (1) при $B_1 = \mathscr{K} \otimes B$, то получится элемент из $KK^1(A, \mathscr{K} \otimes B)$, который соответствует ранее определенному элементу из $KK^1(A, B)$ при изоморфизме из теоремы 1 § 5.

ЛЕММА 3. *Пусть алгебра A ядерна, а идеал $J \subset B$ имеет счетную аппроксимативную единицу. Тогда последовательность групп*

$$KK^1(A, J) \xrightarrow{i_*} KK^1(A, B) \xrightarrow{q_*} KK^1(A, B/J)$$

точна. (Здесь $i: J \to B$ — вложение, $q: B \to B/J$ — проекция.)

Доказательство. Ясно, что $q_*i_* = 0$. Покажем, что $\mathrm{Ker}\, q_* \subset \mathrm{Im}\, i_*$. Воспользуемся теоремой 1. Пусть $\varphi \in \mathscr{E}xt(A, B)$, $q_*(\varphi) = 0$ в группе $\mathrm{Ext}(A, B/J)$, т. е. композиция $q_* \cdot \varphi: A \to \mathscr{O}(\mathscr{K} \otimes B) \to \mathscr{O}(\mathscr{K} \otimes B/J)$ после добавления некоторого $\psi \in \mathscr{D}xt(A, B/J)$ становится элементом $\mathscr{D}xt(A,$

B/J). Зафиксируем такое правильное G-вложение $A \subset \mathcal{M}(\mathcal{K})$, что $A \cap \mathcal{K} = 0$ (см. § 1 п. 16). Композицию $A \subset \mathcal{M}(\mathcal{K}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{K} \otimes B) \to \mathcal{O}(\mathcal{K} \otimes B)$ обозначим через π. Согласно обобщенной теореме Войкулеску (§ 1, п. 16) $\psi \oplus q_*(\pi)$ унитарно эквивалентен $q_*(\pi)$, поэтому элемент $q_*(\varphi) \oplus \psi \oplus \oplus q_*(\pi) \in \mathcal{D}xt(A, B/J)$ унитарно эквивалентен $q_*(\varphi \oplus \pi)$. Поднятие $q_*(\varphi \oplus \oplus \pi)$ до гомоморфизма $A \to \mathcal{M}(\mathcal{K} \otimes B/J)$ обозначим через χ, а сам элемент $\varphi \oplus \pi$ для удобства переобозначим через φ. (Ясно, что $[\varphi] = [\varphi \oplus \pi]$ в $\operatorname{Ext}(A, B)$.)

Пара гомоморфизмов (φ, χ) определяет гомоморфизм

$$\eta : A \to E = \mathcal{O}(\mathcal{K} \otimes B) \oplus_{\mathcal{O}(\mathcal{K} \otimes B/J)} \mathcal{M}(\mathcal{K} \otimes B/J).$$

Нетрудно проверить, что $E \simeq \mathcal{M}(\mathcal{K} \otimes B)/\mathcal{K} \otimes J$ (гомоморфизм $\mathcal{M}(\mathcal{K} \otimes B) \to \to E : x \to (x \bmod \mathcal{K} \otimes B,\ q_*(x))$ является эпиморфизмом, а его ядро равно $\mathcal{K} \otimes J$). Композиция η с ограничением $E \simeq \mathcal{M}(\mathcal{K} \otimes B)/\mathcal{K} \otimes J \to \mathcal{O}(\mathcal{K} \otimes J)$ дает элемент $[\tilde{\eta}]$ группы $\operatorname{Ext}(A, J) \simeq KK^1(A, J)$, причем известно, что композиция $A \xrightarrow{\eta} \mathcal{M}(\mathcal{K} \otimes B)/\mathcal{K} \otimes J \to \mathcal{O}(\mathcal{K} \otimes B)$ совпадает с φ. Остается проверить, что в этом случае $i_*[\tilde{\eta}] = [\varphi]$ в группе $KK^1(A, B)$.

Конструкция, проведенная в доказательстве леммы 1, позволяет построить такой гомоморфизм $\xi : A \to \mathcal{M}(M_2 \otimes \mathcal{K} \otimes B)$ и инвариантный эрмитов проектор $P \in \mathcal{M}(M_2 \otimes \mathcal{K} \otimes B)$, что $\forall a \in A$ $\xi(a)P - P\xi(a) \in M_2 \otimes \mathcal{K} \otimes J$ и $\eta(a) \oplus 0 = P\xi(a) \bmod M_2 \otimes \mathcal{K} \otimes J$. Если $(\tilde{\xi}, \tilde{P}) \in \mathcal{E}^1(A, J)$ — элемент, полученный из (ξ, P) при ограничении $\mathcal{M}(M_2 \otimes \mathcal{K} \otimes B) \to \mathcal{M}(M_2 \otimes \mathcal{K} \otimes J)$, то в группе $E^1(A, B)$ $i_*(\tilde{\xi}, \tilde{P}) = (\xi, P)$ ввиду п. 1 теоремы 2 § 4 (здесь используется изоморфизм леммы 2). ■

Замечание 3. Если расширению $0 \to B \to D \to A \to 0$ соответствует, согласно замечанию 2, элемент $\alpha \in KK^1(A, B)$, то расширению $0 \to B \oplus \oplus 0 \to D \oplus_A A_1 \to A_1 \to 0$, индуцированному посредством гомоморфизма $f: A_1 \to A$, очевидно, соответствует элемент $f^*(\alpha) \in KK^1(A_1, B)$. Далее, если диаграмма расширений

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & B_1 & \to & D_1 & \to & A & \to & 0 \\ & & {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \to & B_2 & \to & D_2 & \to & A & \to & 0 \end{array}$$

коммутативна, причем либо g — эпиморфизм, либо B_1 — идеал в B_2 и g — вложение, то при гомоморфизме g_*: $KK^1(A, B_1) \to KK^1(A, B_2)$ элемент, соответствующий первому расширению, переходит в элемент, соответствующий второму расширению. Для эпиморфизма утверждение очевидно, а для вложения — содержится в доказательстве леммы 3.

Установим теперь некоторые общие факты, касающиеся гомотопических функторов на категории C^*-алгебр.

Определение 4. Мы будем говорить, что функтор L (ковариантный или контравариантный) из категории C^*-алгебр (или некоторой ее подкатегории) в категорию абелевых групп является *гомотопическим функтором*, если $L(f_0) = L(f_1)$ для гомотопных гомоморфизмов f_0 и f_1.

(Гомоморфизм $L(f)$ далее будем обозначать через f_* или f^*.) Скажем, что L удовлетворяет *аксиоме точности*, если для любой алгебры D и идеала J имеет место короткая точная последовательность $L(J)\xrightarrow{i_*}L(D)\xrightarrow{q_*}L(D/J)$ в случае ковариантного L и $L(D/J)\xrightarrow{q^*}L(D)\xrightarrow{i^*}L(J)$ — в случае контравариантного L, где $i: J\hookrightarrow D$ — вложение, $q: D\to D/J$ — проекция. Алгебра D называется *стягиваемой*, если тождественный гомоморфизм гомотопен нулевому.

ЛЕММА 4. *Рассмотрим гомотопический функтор L, удовлетворяющий аксиоме точности, определенный либо на категории ядерных сепарабельных C^*-алгебр, либо на категории C^*-алгебр со счетной аппроксимативной единицей.* (*В действительности годится любая категория C^*-алгебр, содержащая все алгебры, которые используются в доказательстве.*) *Пусть J — идеал в алгебре D. Тогда*:

1) *если D/J стягиваема, то вложение $i: J\hookrightarrow D$ индуцирует изоморфизм $L(J)\simeq L(D)$*;

2) *вложение $J=J[0]\hookrightarrow S(D,\ D/J)$ индуцирует изоморфизм $L(J)\simeq L(S(D,\ D/J))$.* (*Определение $S(D,\ D/J)$ см. в п.* 18 § 1.)

Доказательство. Поскольку факторалгебра $S(D,\ D/J)/J[0]\simeq \simeq(D/J)[0,\ 1)$ стягиваема, то 2) вытекает из 1). В доказательстве 1) будем для определенности считать, что L — ковариантный функтор. Очевидно, $L(E)=0$ для стягиваемой алгебры E, поэтому $L(D/J)= =L((D/J)(0,\ 1))=L(J(0,\ 1])=0$. Из точных последовательностей

$$L(J)\to L(D)\to L(D/J)=0,$$

$$0=L((D/J)(0,\ 1))\to L(S(D,\ D/J))\to L(D),$$

$$0=L(J(0,\ 1])\to L(Z_1(J,\ D))\to L(S(D,\ D/J))$$

вытекает, что $i_*: L(J)\to L(D)$ — эпиморфизм, а $L(Z_1(J,\ D))\to \to L(S(D,\ D/J))\to L(D)$ — мономорфизм. Однако алгебра $Z_1(J,\ D)$ гомотопически эквивалентна J, и композиция $J\hookrightarrow J[0,\ 1]\hookrightarrow Z_1(J,\ D)\to \to S(D,\ D/J)\to D$ совпадает с i. Поэтому i_* также и мономорфизм. ■

ЛЕММА 5. *Рассмотрим ковариантный функтор L, удовлетворяющий условиям леммы* 4. *Пусть J — идеал в алгебре D, $i: J\hookrightarrow D$ — вложение, $q: D\to D/J$ — проекция. Имеет место бесконечная влево точная последовательность*:

$$\ldots\xrightarrow{i_*}L(D(0,\ 1))\xrightarrow{q_*}L((D/J)(0,\ 1))\xrightarrow{\delta}L(J)\xrightarrow{i_*}L(D)\xrightarrow{q_*}L(D/J),$$

где δ — композиция $L((D/J)(0,\ 1))\to L(S(D,\ D/J))\simeq L(J)$. Для контравариантного функтора L имеет место аналогичное (*двойственное*) *утверждение.*

Доказательство. Достаточно проверить точность в начальных трех членах. Точность в $L(D)$ имеется по условию, а точность в $L(J)$ получается из точности последовательности

$$L((D/J)(0,\ 1))\to L(S(D,\ D/J))\to L(D).$$

Рассмотрим теперь алгебру

$$T(D, D/J)=D(-1, 0]\oplus_{D/J}(D/J)[0, 1).$$

Заметим, что $L(T(D, D/J))\simeq L((D/J)(0, 1))$, так как факторалгебра $T(D, D/J)/(D/J)(0, 1)\simeq D(-1, 0]$ стягиваема. Кроме того, вложение $D(-1, 0)\subset T(D, D/J)$ гомотопно отображению факторизации $D(0, 1)\to\to(D/J)(0, 1)\subset T(D, D/J)$. Поэтому точность в $L((D/J)(0, 1))$ следует из точности последовательности $L(D(-1, 0))\to L(T(D, D/J))\to\to L(S(D, D/J))$. ■

ЛЕММА 6. *Пусть алгебра A ядерна и $\alpha_D\in KK^1(A, B)$—элемент, соответствующий, согласно замечанию 2, расширению $0\to B\to D\to A\to 0$. Тогда при гомоморфизме*

$$\delta : KK^0(A(0, 1), A(0, 1))\to KK^0(A(0, 1), S(D, A))\simeq$$
$$\simeq KK^0(A(0, 1), B)\simeq KK^1(A, B)$$

каноническая образующая $\tau_{A(C, 1)}(c_1)$ переходит в α_D.

Доказательство. Сначала докажем наше утверждение для расширения $0\to C(0, 1)\to C(0, 1]\to C\to 0$. Соответствующий ему элемент из $\mathrm{Ext}(C, C(0, 1))$ определяется гомоморфизмом $\varphi : C\to\mathcal{O}(C(0, 1))$, при котором $1\in C$ переходит в элемент $t \bmod C(0, 1)\in C_b(0, 1)/C(0, 1)$, где $C_b(0, 1)$ — алгебра всех ограниченных непрерывных функций на $(0, 1)$, t—координатная функция на $(0, 1)$. Положим $P=t\in C_b(0, 1)$, $F=2P-1$. При подходящем гомеоморфизме $(0, 1)$ на $\mathbf{R}^1$ функция $2t-1$ переходит в $x\cdot(1+\|x\|^2)^{-1/2}\in C_b(\mathbf{R}^1)$. Поэтому изоморфизм $E^1(C, C(0, 1))\simeq\simeq KK^1(C, C(0, 1))$ переводит элемент $(\mathrm{id} : C\to C_b(0, 1), P)$ в образующую $K^1(\mathbf{R}^1)$ (см. § 5).

С другой стороны, δ совпадает с периодичностью Ботта, что и доказывает утверждение в рассматриваемом частном случае.

Используя теперь гомоморфизм τ_A, получим наше утверждение для расширения $0\to A(0, 1)\to A(0, 1]\to A\to 0$.

Применяя вторую часть замечания 3 к коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & A(0, 1) & \to & A(0, 1] & \to & A & \to & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
0 & \to & S(D, A) & \to & Z_0(D, A) & \to & A & \to & 0\\
 & & \uparrow & & \uparrow f & & \| & & \\
0 & \to & B & \to & D & \to & A & \to & 0
\end{array}$$

где f — композиция $D\subset D[0, 1]\to Z_0(D, A)$, получим утверждение в общем случае. ■

ТЕОРЕМА 2. *Пусть алгебры A и B тривиально градуированы, причем A ядерна; J — идеал со строго положительным элементом в B. Обозначим вложение $J\subset B$ через i, а проекцию $B\to B/J$—через q. Имеет место бесконечная в обе стороны (когомологическая) точная последовательность:*

$$\ldots\xrightarrow{i_*}KK^n(A, B)\xrightarrow{q_*}KK^n(A, B/J)\xrightarrow{\delta}KK^{n+1}(A, J)\xrightarrow{i_*}KK^{n+1}(A, B)\xrightarrow{q_*}\ldots,$$

где кограничный гомоморфизм δ определяется как композиция

$$KK^n(A, B/J) \simeq KK^{n+1}(A, (B/J)(0, 1)) \to KK^{n+1}(A, S(B, B/J)) \simeq KK^{n+1}(A, J).$$

Если алгебра B/J также ядерна и сепарабельна, то $\delta(x) = x \otimes_{B/J} [\varphi]$, где $[\varphi] \in KK^1(B/J, J)$ — элемент, соответствующий расширению $0 \to J \to B \to \to B/J \to 0$.

Доказательство. Ввиду теоремы 3 § 4 и леммы 3 функтор $L(B) = KK^1(A, B)$ удовлетворяет условиям леммы 5, которая вместе с периодичностью Ботта (теорема 7 § 5) и дает искомую точную последовательность. Для доказательства второго утверждения достаточно рассмотреть коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} KK^n(A, B/J) \otimes_{B/J} KK^0(B/J, B/J) & \longrightarrow & KK^n(A, B/J) \\ \| \qquad\qquad\qquad \downarrow{\scriptstyle\delta_1} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} \\ KK^n(A, B/J) \otimes_{B/J} KK^1(B/J, J) & \longrightarrow & KK^{n+1}(A, J) \end{array}$$

где δ_1 определяется так же, как δ, и применить лемму 6. ■

ЛЕММА 7. *Пусть алгебра A ядерна, I — идеал в A, $i: I \hookrightarrow A$ — вложение, $q: A \to A/I$ — проекция. Тогда последовательность групп*

$$KK^1(A/I, B) \xrightarrow{q^*} KK^1(A, B) \xrightarrow{i^*} KK^1(I, B)$$

точна.

Доказательство. Ясно, что $i^* q^* = 0$. Проверим, что $\operatorname{Ker} i^* \subset \operatorname{Im} q^*$. Пусть $\varphi \in \mathscr{E}xt(A, B)$, $i^*(\varphi) = 0$ в группе $\operatorname{Ext}(I, A)$, т. е. композиция $\varphi \cdot i: I \to \to \mathcal{O}(\mathscr{H} \otimes B)$ после добавления некоторого $\psi \in \mathscr{D}xt(I, B)$ становится элементом $\mathscr{D}xt(I, B)$. Зафиксируем такое правильное G-вложение $A \hookrightarrow \mathscr{M}(\mathscr{H})$, что $A \cap \mathscr{H} = 0$. Композицию $A \hookrightarrow \mathscr{M}(\mathscr{H}) \hookrightarrow \mathscr{M}(\mathscr{H} \otimes B) \to \mathcal{O}(\mathscr{H} \otimes B)$ обозначим через π. Согласно обобщенной теореме Войкулеску (§ 1, п. 16), $\psi \oplus i^*(\pi)$ унитарно эквивалентен $i^*(\pi)$, поэтому элемент $i^*(\varphi) \oplus \psi \oplus i^*(\pi) \in \mathscr{D}xt(I, B)$ унитарно эквивалентен $i^*(\varphi \oplus \pi)$. Для удобства переобозначим $\varphi \oplus \pi$ через φ.

Пусть элементу $\varphi \in \mathscr{E}xt(A, B)$ соответствует расширение $0 \to \mathscr{H} \otimes B \xrightarrow{e} \xrightarrow{e} E \xrightarrow{p} A \to 0$. Согласно замечанию 3 элементу $i^*(\varphi) \in \mathscr{E}xt(I, B)$ соответствует расширение

$$0 \to \mathscr{H} \otimes B \xrightarrow{e} D = p^{-1}(I) \xrightarrow{p} I \to 0.$$

Поскольку $i^*(\varphi) \in \mathscr{D}xt(I, B)$, последнее расширение расщепляется: существует такой гомоморфизм $s: I \to D$, что $ps = 1$. Используя расщепление s, из точной последовательности теоремы 2 нетрудно получить, что

$$KK^1(A/I, D) \simeq KK^1(A/I, \mathscr{H} \otimes B) \oplus KK^1(A/I, I).$$

Проекцию на первое прямое слагаемое обозначим через ω. Пусть $\beta \in KK^1(A/I, D)$ — элемент, соответствующий расширению $0 \to D \to E \to \to E/D \simeq A/I \to 0$. Покажем, что $q^*(\omega(\beta)) = [\varphi]$. (Здесь мы отождествляем группу $KK^1(A, \mathscr{H} \otimes B)$ с $KK^1(A, B)$ так же, как в замечании 2.) Достаточно проверить совпадение элементов $q^*(\beta)$ и $e_*([\varphi])$ в группе $KK^1(A, D)$,

так как их проекции в $KK^1(A, \mathcal{K}\otimes B)$ при аналогичном расщеплении

$$KK^1(A, D)\simeq KK^1(A, \mathcal{K}\otimes B)\oplus KK^1(A, I)$$

равны соответственно $q^*(\omega(\beta))$ и $[\varphi]$. Совпадение $q^*(\beta)$ и $e_*([\varphi])$ вытекает из замечания 3 и коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccccc} 0\to \mathcal{K}\otimes B & \xrightarrow{e} & E & \xrightarrow{\quad p \quad} & A\to 0 \\ {\scriptstyle e\oplus 0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \| \\ 0\to (D\oplus 0) & \to & (E\oplus_{A/I} A) & \xrightarrow{g} & A\to 0 \end{array}$$

где $f(x)=(x, p(x))$; $g(x, y)=y$. ■

ЛЕММА 8. *Пусть обе алгебры A и B ядерны и сепарабельны. Обозначим через $\alpha_D\in KK^1(A, B)$ элемент, соответствующий, согласно замечанию 2, расширению $0\to B\to D\to A\to 0$. Тогда при гомоморфизме $\partial: KK^0(B, B)\simeq KK^0(S(D, A), B)\to KK^0(A(0, 1), B)\simeq KK^1(A, B)$ каноническая образующая $\tau_B(c_1)$ переходит в α_D.*

Доказательство. Так же, как в доказательстве леммы 6, утверждение легко проверяется для расширения $0\to C(0, 1)\to C[0, 1)\to C\to 0$. (Элемент α_D в этом случае равен канонической образующей $K^1(C(0, 1))$, взятой со знаком минус.) Используя гомоморфизм τ_B, получаем наше утверждение для расширения $0\to B(0, 1)\to B[0, 1)\to B\to 0$. Общий случай следует из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccccc} 0\to B(0, 1) & \to & B[0, 1) & \to & B & \longrightarrow & 0 \\ \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0\to B(0, 1) & \to & D[0, 1) & \to & S(D, A) & \to & 0 \\ \| & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0\to B(0, 1) & \to & D(0, 1) & \to & A(0, 1) & \to & 0 \end{array}$$

и замечания 3. ■

ТЕОРЕМА 3. *Пусть алгебры A и B тривиально градуированы, причем A ядерна; I—идеал в A. Обозначим вложение $I\hookrightarrow A$ через i, а проекцию $A\to A/I$ — через q. Имеет место бесконечная в обе стороны (гомологическая) точная последовательность*:

$$\ldots \xrightarrow{q^*} K_{n+1}K(A, B) \xrightarrow{i^*} K_{n+1}K(I, B) \xrightarrow{\partial} K_nK(A/I, B) \xrightarrow{q^*} K_nK(A, B) \xrightarrow{i^*} \ldots,$$

где граничный гомоморфизм ∂ определяется как композиция

$$K_{n+1}K(I, B)\simeq K_{n+1}K(S(A, A/I), B)\to K_{n+1}K((A/I)(0, 1), B)\simeq K_nK(A/I, B).$$

Гомоморфизм ∂ допускает также следующее определение: $\partial(x)=[\varphi]\otimes_I x$, где $[\varphi]\in KK^1(A/I, I)$— элемент, соответствующий расширению $0\to I\to A\to A/I\to 0$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2. (Ссылка на лемму 6 заменяется ссылкой на лемму 8.) ■

Следствие 1. *Пусть алгебры A и B тривиально градуированы, причем A ядерна. Тогда*

$$K_iK(A, B)\simeq \widetilde{K}_iK(\widetilde{A}, B)\simeq K_i\widetilde{K}(A, \widetilde{B})\simeq \widetilde{K}_i\widetilde{K}(\widetilde{A}, \widetilde{B}).\ ■$$

Замечание 4. Если в расширении $0\to B\to D\xrightarrow{p}A\to 0$ алгебры A, D и гомоморфизм p унитальны, то соответствующий элемент из $KK^1(A, B)$ принадлежит подгруппе $\tilde{K}K^1(A, B)$. Действительно, при ограничении на $C\subset A$ получаем расширение $0\to B\to \tilde{B}\to C\to 0$, которое расщепляется.

На основании теоремы 1 поглощающие расширения с точностью до унитарной эквивалентности классифицируются элементами группы $KK^1(A, B)$. Зафиксируем $\alpha\in KK^1(A, B)$. Пусть $0\to\mathcal{K}\otimes B\to D_\alpha\to A\to 0$ — соответствующее α поглощающее расширение. (Алгебра A предполагается ядерной.) Зафиксируем также естественное вложение $D_\alpha\subset\mathcal{M}(\mathcal{K}\otimes B)$. Как описать класс всех расширений $0\to B\to D\to A\to 0$ (или $0\to\mathcal{K}\otimes B\to D\to A\to 0$), которые определяют тот же элемент $\alpha\in KK^1(A, B)$? Имеет место

Следствие 2. *Если $0\to B_1\to D\to A\to 0$ (где $B_1=B$ или $\mathcal{K}\otimes B$) — произвольное расширение, определяющее элемент α, то существует такое вложение $D\subset D_\alpha$ и такой инвариантный проектор $P\in\mathcal{M}(\mathcal{K}\otimes B)$, что:*

1) $D+(\mathcal{K}\otimes B)=D_\alpha$,

2) $P(\mathcal{K}\otimes B)P=B_1$,

3) $D\cap(\mathcal{K}\otimes B)=P(\mathcal{K}\otimes B)P$.

Обратно, если D — такая подалгебра в D_α, а P — такой инвариантный проектор в $\mathcal{M}(\mathcal{K}\otimes B)$, что $P(\mathcal{K}\otimes B)P\simeq B$ или $\mathcal{K}\otimes B$ и выполнены условия 1), 3), *то расширению $0\to P(\mathcal{K}\otimes B)P\to D\to A\to 0$ соответствует элемент $\alpha\in KK^1(A, B)$.*

Доказательство. Прибавив к расширению $0\to B_1\to D\to A\to 0$ расщепимое поглощающее расширение $0\to\mathcal{K}\otimes B\to D_0\to A\to 0$, получим поглощающее расширение, унитарно эквивалентное $0\to\mathcal{K}\otimes B\to D_\alpha\to A\to 0$. Поэтому можно считать, что $D_\alpha=D_\oplus$ — сумма D и D_0 (см. определение 1). Определим вложение $D\subset D_\oplus$ по формуле: $x\to\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & sp(x)\end{pmatrix}$, где $p: D\to A$ — проекция, $s: A\to D_0$ — гомоморфизм-сечение, а проектор P по формуле: $P=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. Тогда условия 1)—3) очевидно будут выполнены. Обратно, для любой пары (D, P), согласно 3), $P(\mathcal{K}\otimes B)P=D\cap(\mathcal{K}\otimes B)$ — идеал в D, а согласно 1), $D/P(\mathcal{K}\otimes B)P\simeq D_\alpha/\mathcal{K}\otimes B\simeq A$. Из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P(\mathcal{K}\otimes B)P \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{K}\otimes B \arrow[r] & D_\alpha \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

вытекает, что элемент $\delta_D\tau_A(c_1)\in KK^1(A, P(\mathcal{K}\otimes B)P)$ переходит при вложении $P(\mathcal{K}\otimes B)P\subset\mathcal{K}\otimes B$ в элемент $\delta_{D_\alpha}\tau_A(c_1)\in KK^1(A, \mathcal{K}\otimes B)$. Поэтому расширение $0\to P(\mathcal{K}\otimes B)P\to D\to A\to 0$ определяет элемент $\alpha\in KK^1(A, B)$. ■

Следствие 3. *K-функтор $KK^i(E, D)$ для алгебры D, получающейся в результате расширения $0\to B_1\to D\to A\to 0$ (где $B_1=B$ или $\mathcal{K}\otimes B$, а алгебры A и E ядерны и сепарабельны), зависит только от класса*

$\alpha \in KK^1(A, B)$, *определяемого этим расширением. Аналогично для* $KK^i(D, E)$ *в случае, когда* D *ядерна и сепарабельна.*

Доказательство. Достаточно воспользоваться единственностью поглощающего расширения, соответствующего α, наличием гомоморфизма расширений $D \subset D_\alpha$, функториальностью точных последовательностей теорем 2 и 3 и леммой о пяти гомоморфизмах. ■

Рассмотрим теперь вкратце расширения градуированных алгебр. Зафиксируем каноническую градуировку пространства $\mathscr{H}$ и соответствующую ей градуировку алгебры $\mathscr{K}$. Определения полугрупп $\mathrm{Ext}(A, B)$, $\mathrm{Ext}_a(A, B)$ и $E^1(A, B)$ остаются прежними, за исключением следующих поправок: все гомоморфизмы должны быть градуированными, при определении унитарной эквивалентности и сложения используются инвариантные изометрии степени 0, в определении 3 элемент P имеет степень 0. Лемма 1 дословно сохраняется. (В доказательстве второго утверждения этой леммы для получения *градуированного* поднятия χ надо воспользоваться тем же приемом, что и в лемме п. 10 § 2: заменить χ на χ_0: $\chi_0(a) = p^{(\deg a)}(\chi(a))$, где $p^{(i)}$ — проектор на $\mathscr{M}(\mathscr{K}\otimes B)^{(i)}$ в $\mathscr{M}(\mathscr{K}\otimes B)$.) В результате для ядерной алгебры A

$$\mathrm{Ext}_a(A, B) \simeq \mathrm{Ext}(A, B) \simeq E^1(A, B).$$

Параллель со случаем тривиально градуированных алгебр обрывается на лемме 2, которая неверна в градуированном случае. Например,

$$E^1(C_{1,0}, C) \simeq K^1(C) \neq KK^1(C_{1,0}, C),$$

$$E^1(C, C_{1,0}) \simeq K^1(C) \neq KK^1(C, C_{1,0}).$$

(Первый изоморфизм проверяется непосредственно, а второй проще всего установить с помощью тех же соображений, что и в лемме 2.) Отметим также, что для тривиально градуированных алгебр полугруппа $E^1(A, B)$ изоморфна прямой сумме двух экземпляров группы $KK^1(A, B)$, так как из условия коммутирования φ и P с градуировочным оператором $\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ пространства $\mathscr{H}_B$ следует, что $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 & 0 \\ 0 & \varphi_2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}$.

Связь $E^1(A, B)$ с K-функтором неясна. Тем не менее можно изучать $E^1(A, B)$ в полной аналогии с K-функтором. Положим $E^n(A, B) = E^1(A(\mathbf{R}^{n-1}), B)$ (действие G и «вещественная» инволюция на $\mathbf{R}^{n-1}$ тривиальны).

ТЕОРЕМА 4. *Для градуированных алгебр A и B полугруппа $E^n(A, B)$ является группой, гомотопически инвариантной по A и B. Если алгебры A_0, B_0 и D градуированы тривиально, причем A_0 сепарабельна, а B_0 и D имеют строго положительные элементы, то определены билинейные спаривания*:

$$E^i(A, B\otimes D)\otimes_D KK^j(D\otimes A_0, B_0) \to E^{i+j}(A\otimes A_0, B\otimes B_0), \tag{4}$$

$$KK^j(A_0, B_0\otimes D)\otimes_D E^i(D\otimes A, B) \to E^{i+j}(A_0\otimes A, B_0\otimes B), \tag{5}$$

обладающие обычными свойствами функториальности, ассоциативности и свойством коммутирования с гомоморфизмом τ (*см. теорему* 4 § 4). *Далее, если* H — *сепарабельное градуированное гильбертово пространство, то* $E^i(A\otimes\mathcal{K}(H),\ B)\simeq E^i(A,\ B)\simeq E^i(A,\ B\otimes\mathcal{K}(H))$. *Если группа* G *действует на* $\mathbf{R}^n$ *посредством спинорного представления, то* $E^i(A(\mathbf{R}^n),\ B)\simeq E^i(A,\ B)\simeq E^i(A,\ B(\mathbf{R}^n))$ *при* $n\equiv 0 \pmod 2$ *в комплексном случае и при* $n\equiv 0 \pmod 8$ *в вещественном случае*; $E^i(A(\mathbf{R}^{p,q}),\ B)\simeq \simeq E^i(A,\ B)\simeq E^i(A,\ B(\mathbf{R}^{p,q}))$ *при* $p-q\equiv 0 \pmod 8$ *в «вещественном» случае. Кроме того,* $E^i(A,\ B)\simeq E^i(A(\mathbf{R}^n),\ B(\mathbf{R}^n))$ *при всех* n. *Если алгебра* A *ядерна,* I *и* J — *градуированные идеалы в* A *и* B *соответственно, причем у* J *есть строго положительный элемент, то имеют место бесконечные точные последовательности*:

$$\ldots \xrightarrow{p^*} E^n(A,\ B) \xrightarrow{i^*} E^n(I,\ B) \xrightarrow{\partial} E^{n+1}(A/I,\ B) \xrightarrow{p^*} E^{n+1}(A,\ B) \xrightarrow{i^*} \ldots,$$

$$\ldots \xrightarrow{j_*} E^n(A,\ B) \xrightarrow{q_*} E^n(A,\ B/J) \xrightarrow{\delta} E^{n+1}(A,\ J) \xrightarrow{j_*} E^{n+1}(A,\ B) \xrightarrow{q_*} \ldots,$$

где $i: I\subset A$, $j: J\subset B$ — *вложения,* $p: A\to A/I$, $q: B\to B/J$ — *проекции.*

Доказательство. Заменив в определении $E^1(A,\ B)$ гомологичность на гомотопию, получим новую полугруппу $E^1_{\mathrm{ht}}(A,\ B)$. Она является группой: элемент, обратный к $(\varphi,\ P)$, равен $(\varphi,\ 1-P)$. В самом деле, операторная гомотопия

$$\left(\begin{pmatrix}\varphi & 0\\ 0 & \varphi\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}P & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix}(1-P)t^2 & (1-P)t\\ (1-P)t & (1-P)\end{pmatrix}\right),\quad 0\leqslant t\leqslant\infty,$$

переводит $(\varphi,\ P)\oplus(\varphi,\ 1-P)$ в $(\varphi\oplus\varphi,\ 1\oplus 0)\in\mathcal{D}^1(A,\ B)$. Теоремы 2 и 3 § 4 дословно переносятся на $E^1_{\mathrm{ht}}(A,\ B)$.

Спаривания (4) и (5) мы определим сначала при $i=1$, $j=0$, заменив при этом E^1 на E^1_{ht}. Для удобства будем вместо пар $(\varphi,\ P)\in E^1_{\mathrm{ht}}(A,\ B)$ рассматривать пары $(\varphi,\ F=2P-1)$, считая, что $\deg F=0$ и $\forall a\in A$ элементы $\varphi(a)F-F\varphi(a)$, $(F^2-1)\varphi(a)$, $(F-F^*)\varphi(a)$ принадлежат $\mathcal{K}\otimes B$. Группу $K_0K(D\otimes A_0,\ B_0)$ реализуем так, как указано в теореме 2 § 6. Пусть $(\varphi,\ F)\in\mathcal{E}^1(A,\ B\otimes D)$, $(\varphi_0,\ F_0)\in\mathcal{E}_{0,0}(D\otimes A_0,\ B_0)$. Проводя те же построения, что и в доказательстве теоремы 4 § 4, получим гомоморфизмы

$$\Phi_0 : \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\tilde{B}\otimes\tilde{D}})\otimes\tilde{A}_0\otimes C_{1,0}\to\mathcal{L}(\mathcal{H}_{B\otimes B_0})$$

и

$$\varphi\otimes_D\varphi_0 : A\otimes A_0\to\mathcal{L}(\mathcal{H}_{B\otimes B_0}).$$

(Отметим, что пространство $\mathcal{H}_{B_0}$ считается тривиально градуированным, так что градуировка $\mathcal{H}_{B\otimes B_0}$ определяется градуировкой $\mathcal{H}_B$.) Положим

$$F\,\#_D\,F_0=\sqrt{M}\cdot\Phi_0(F\otimes\varepsilon_1)+\sqrt{N}\cdot(1\otimes F_0),$$

где ε_1 — образующая $C_{1,0}$, а M и N удовлетворяют аналогу определения 5 § 4. Второе спаривание получается точно так же. Здесь

$$F_0\,\#_D\,F=\sqrt{M}\cdot\Phi(F_0\otimes 1)+\sqrt{N}\cdot\Phi(\varphi_0(\varepsilon_1)\otimes 1)\cdot(1\otimes F).$$

Теорема 1 § 6 и лемма 1 § 6 дословно переносятся на E^1_{ht} (A, B), что дает изоморфизм E^1_{ht} $(A, B) \simeq E^1(A, B)$ (см. вторую часть доказательства леммы 2). Периодичность устанавливается посредством произведения-пересечения с элементами $\alpha_n \in K_0(\mathbf{R}^n)$ и $\beta_n \in K^0(\mathbf{R}^n)$ как в § 5 (здесь $n \equiv 0 \pmod 2$ или $\pmod 8$)). Из периодичности следует, что композиции

$$E^1(A, B) \xrightarrow{\tau_{C(\mathbf{R}^n)}} E^1(A(\mathbf{R}^n), B(\mathbf{R}^n)) \xrightarrow{\tau_{C(\mathbf{R}^{7n})}} E^1(A(\mathbf{R}^{8n}), B(\mathbf{R}^{8n})) \simeq E^1(A, B),$$

$$E^1(A(\mathbf{R}^n), B(\mathbf{R}^n)) \xrightarrow{\tau_{C(\mathbf{R}^{7n})}} E^1(A(\mathbf{R}^{8n}), B(\mathbf{R}^{8n})) \simeq E^1(A, B) \to$$
$$\xrightarrow{\tau_{C(\mathbf{R}^n)}} E^1(A(\mathbf{R}^n), B(\mathbf{R}^n))$$

тождественны. Значит, $E^1(A(\mathbf{R}^n), B(\mathbf{R}^n)) \simeq E^1(A, B)$. Теперь спаривания (4) и (5) можно определить при всех i, j.

В случае тривиально градуированного пространства H теорема 1 § 5 дословно переносится на $E^i(A, B)$. В общем случае достаточно доказать требуемые изоморфизмы при $H = \mathscr{H}$, поскольку тогда

$$E^i(A \otimes \mathscr{K}(H), B) \simeq E^i(A \otimes \mathscr{K}(H) \otimes \mathscr{K}, B) \simeq E^i(A \otimes \mathscr{K}, B) \simeq E^i(A, B).$$

Обозначим временно через $\mathscr{K}_0$ алгебру $\mathscr{K}$ с тривиальной градуировкой. Ясно, что $\mathscr{K} \simeq \mathscr{K}_0 \otimes M_2$, где градуировка M_2 определяется градуировочным оператором $\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (действие G на M_2 тривиально). Остается проверить, что

$$E^1(A, B) \simeq E^1(A \otimes M_2, B), \quad E^1(A, B) \simeq E^1(A, B \otimes M_2).$$

Обозначим через $\mathscr{H}_B'$ пространство $\mathscr{H}_B$ с противоположной градуировкой. Первый изоморфизм переводит (φ, P) в $(\varphi \otimes 1 : A \otimes M_2 \to \mathscr{L}(\mathscr{H}_B \oplus \oplus \mathscr{H}_B'), P \oplus P)$. Обратное отображение получается ограничением на $A \otimes e_{11}$ (где $e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2$). Второй изоморфизм индуцирован вложением $\mathscr{L}(\mathscr{H}_B) \subset \mathscr{L}(\mathscr{H}_B \oplus \mathscr{H}_B')$, а обратный к нему — отождествлением $\mathscr{H}_B \oplus \mathscr{H}_B'$ с $\mathscr{H}_B$.

Точные последовательности для $E^i(A, B)$ устанавливаются так же, как в теоремах 2 и 3. ■

З а м е ч а н и е 5. Вопрос о существовании точных последовательностей для K-функтора в градуированном случае остается открытым.

Поступило
16.I.1979

Литература

[1] **Aarnes J. F., Kadison R. V.**, Pure states and approximate identities, Proc. Amer. Math. Soc., 21, № 3 (1969), 749—752.

[2] **Akemann C. A., Pedersen G. K., Tomiyama J.**, Multipliers of C^*-algebras, J. Funct. Anal., 13, № 3 (1973), 277—301.

[3] **Arveson W. B.**, A note on essentially normal operators, Proc. Roy. Irish Acad., Sect. A, 74 (1974), 143—146.

[4] **Arveson W. B.**, Notes on extensions of C^*-algebras, Duke Math. J., 44, № 2 (1977), 329—355.

[5] **Atiyah M. F., Bott R., Shapiro A.**, Clifford modules, Topology, 3, Suppl. I (1964), 3—38.

[6] **Atiyah M. F., Singer I. M.**, The index of elliptic operators. I, Ann. of Math., 87, № 3 (1968), 484—530.

[7] **Atiyah M. F., Singer I. M.**, The index of elliptic operators. IV, Ann. of Math., 93, № 1 (1971), 119—138.

[8] **Bendat J., Sherman S.**, Monotone and convex operator functions, Trans. Amer. Math. Soc., 79, № 1 (1955), 58—71.

[9] **Brown L. G., Douglas R. G., Fillmore P. A.**, Extensions of C^*-algebras and K^*-homology, Ann. of Math., 105, № 2 (1977), 265—324.

[10] **Busby R. C.**, Double centralizers and extensions of C^*-algebras, Trans. Amer. Math. Soc., 132, № 1 (1968), 79—99.

[11] **Choi M.-D., Effros E. G.**, The completely positive lifting problem for C^*-algebras, Ann. of Math., 104, № 3 (1976), 585—609.

[12] **Диксмье Ж.**, C^*-алгебры и их представления, М., «Наука», 1974.

[13] **Karoubi M.**, Espaces classifiants en K-théorie, Trans. Amer. Math. Soc., 147, № 1 (1970), 75—115.

[14] **Каспаров Г. Г.**, Обобщенный индекс эллиптических операторов, Функц. анализ, 7, № 3 (1973), 82—83.

[15] **Каспаров Г. Г.**, Топологические инварианты эллиптических операторов. I. K-гомологии, Изв. АН СССР. Серия матем., 39 (1975), 796—838.

[16] **Каспаров Г. Г.**, K-функтор в теории расширений C^*-алгебр, Функц. анализ, 13, № 4 (1979), 73—74.

[17] **Kasparov G. G.**, Hilbert C^*-modules: theorems of Stinespring and Voiculescu, Preprint, Chernogolovka, 1980.

[18] **Paschke W. L.**, Inner product modules over B^*-algebras, Trans. Amer. Math. Soc., 182 (1973), 443—468.

[19] **Takesaki M.**, On the cross-norm of the direct product of C^*-algebras, Tôhoku Math. J., 16, № 1 (1964), 111—122.

[20] **Whitehead G. W.**, Generalized homology theories, Trans. Amer. Math. Soc., 102, № 2 (1962), 227—283.

[21] **Choi M.-D., Effros E. G.**, Nuclear C^*-algebras and injectivity: the general case, Indiana Univ. Math. J., 26, № 3 (1977), 443—446.

[22] **Connes A.**, Classification of injective factors, Ann. of Math., 104, № 1 (1976), 73—115.

[23] **До Нгок Зьеп**, О структуре групповой C^*-алгебры группы аффинных преобразований прямой, Функц. анализ, 9, № 1 (1975), 63—64.

[24] **Rieffel M. A.**, Induced representations of C^*-algebras, Adv. in Math., 13 (1974), 176—257.

[25] **Rosenberg J.**, The C^*-algebras of some real and p-adic solvable groups, Pacif. J. Math., 65, № 1 (1976), 175—192.