B. Kostant, Quantization and unitary representations, *Uspekhi Mat. Nauk*, 1973, Volume 28, Issue 1(169), 163–225

1973 г. январь—февраль *т. XXVIII, вып. 1 (169)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 519.4

КВАНТОВАНИЕ И УНИТАРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ [1])

Б. Костант

СОДЕРЖАНИЕ

ЧАСТЬ I
ПРЕДКВАНТОВАНИЕ

§ 0. Введение

Эта статья является первой из двух частей работы, посвященной построению единой теории унитарных представлений связных групп Ли.

Мы обнаружили, что если подходящим образом обобщить и сделать строгим то, что физики имеют в виду под квантованием функции, то можно построить теорию, которая позволяет существенно продвинуться в построении всех унитарных неприводимых представлений связной группы Ли. В компактном случае эта теория включает теорему Бореля — Вейля. Обобщая результаты А. А. Кириллова о нильпотентных группах, Л. Ауслендер и я показали, что эта теория позволяет построить все неприводимые унитарные представления разрешимой группы типа I (критерий принадлежности группы типу I также просто формируется в терминах этой теории). В полупростом случае, согласно результатам Хариш-Чандра и Шмида, оказывается, что построенных таким образом представлений достаточно для разложения регулярного представления.

---

[1]) B. Kostant, Quantization and unitary representations, Lecture Notes in Mathematics, № 170 (1970), 87—208. Перевод выполнен А. А. Кирилловым.

Теория, о которой идет речь, основана на дифференциальной геометрии [1]). Основное соображение состоит в том, что 2-форма симплектического многообразия при некоторых условиях (условиях целочисленности) является формой кривизны линейного расслоения со связностью; что гильбертово пространство, фигурирующее в теории (по крайней мере, в этой части работы), строится из сечений этого линейного расслоения и что на этих сечениях действует некоторая алгебра Ли (относительно скобки Пуассона) функций на многообразии.

Эта конструкция, ставящая в соответствие функции оператор, и есть квантование.

Построение гильбертова пространства и алгебры Ли, упомянутых выше, требует введения понятия поляризации многообразия. (В классическом построении квантовой механики поляризация означает, например, выделение q-координат в четномерном фазовом пространстве с каноническими координатами p и q. Однако это понятие более широкое и включает представление Бергмана — Фока — Сигала соотношений Гейзенберга в терминах $z = q + ip$ так же, как и обычное представление в q-пространстве.)

Мы займемся этим в части II. В части I мы рассматриваем только предквантование (см. п. 4.3).

Представление группы возникает из симплектического однородного пространства X, когда соответствующая алгебра Ли гамильтоновых векторных полей может быть поднята до алгебры Ли квантуемых функций. Один из наших результатов (теорема 5.4.1) утверждает, что это имеет место тогда и только тогда, когда X является орбитой в пространстве, дуальном к алгебре Ли (или накрытием такой орбиты); это оправдывает идею построения неприводимых представлений, исходя из орбит (как это сделал А. А. Кириллов в нильпотентном случае) [2]). Из этого результата вытекает также обобщение теоремы Уанга, характеризующей компактные кэлеровы однородные многообразия. Кроме того (следствие 1 к теореме 5.7.1), обобщая результат Бореля — Вейля в компактном случае, мы получим, что 2-форма на орбите, определяемой линейным функционалом на алгебре Ли, целочисленна, если и только если является дифференциалом некоторого характера стационарной подгруппы (быть может, несвязной) точки.

Первая часть посвящена дифференциально-геометрическим основаниям теории. Для полноты мы приводим с доказательствами основные факты теории линейных расслоений со связностью (многие из этих фактов известны, хотя некоторые, возможно, являются новыми; например, теорема 2.5.1, классифицирующая все линейные расслоения со связностью, имеющие заданную кривизну). Большое значение имеет теорема 1.13.1, сопоставляющая с каждым линейным расслоением со связностью некоторое центральное

---

[1]) В однородном случае теория может быть построена чисто в групповых терминах (см. [6]). (*Прим. перев.*)

[2]) Классификация однородных симплектических многообразий с помощью орбит была независимо получена около 5 лет назад Б. Костантом, Ж. М. Сурьо и А. А. Кирилловым. Эти результаты опубликованы в настоящей статье (см. § 5), в [7] и в [8] соответственно.

расширение группы. В симплектическом случае это расширение ниже будет связано с центральным расширением алгебры Ли гамильтоновых векторных полей, определяемым алгеброй Ли функций относительно скобки Пуассона. Эта связь играет центральную роль в идее предквантования.

§ 1. Линейные расслоения со связностью

1.1. Все многообразия, рассматриваемые здесь, предполагаются дифференцируемыми класса C^∞, сепарабельными (как топологические пространства) и, если не оговорено противное, связными. Термин «гладкое» в применении к отображениям многообразий означает «дифференцируемое класса C^∞». Если M — многообразие, $C(M)$ означает алгебру всех комплекснозначных гладких функций на M.

Пусть π: $M \to N$ — сюръективное отображение множеств; сечением π (или просто сечением, если ясно, о каком π идет речь) называется такое отображение s: $N \to M$, что $\pi \circ s$ — тождественное отображение N.

Пусть X — многообразие. Линейным расслоением над X мы называем векторное расслоение (в гладком смысле) со слоем $\mathbf{C}$ (комплексные числа). Это обозначается схематически:

$$\begin{array}{c} \mathbf{C} \to L \\ \quad\downarrow\pi \\ \quad X. \end{array}$$

Таким образом, L является многообразием. Проекция π — гладкое отображение, и если положить $L_p = \pi^{-1}(p)$ для $p \in X$, то L_p — одномерное векторное пространство над $\mathbf{C}$. Кроме того, существует такое (открытое) покрытие $\mathfrak{U} = \{U_i\}$, $i \in I$ многообразия X и такие не обращающиеся в нуль гладкие сечения s_i: $U_i \to L$, что отображения η_i: $\mathbf{C} \times U_i \to \pi^{-1}(U_i)$, заданные формулой $\eta_i(z, q) = z \cdot s_i(q)$, являются диффеоморфизмами.

Множество пар $\{(U_i, s_i)\}$, $i \in I$, обладающее указанным выше свойствами, называется локальной системой линейного расслоения над X. Для заданной локальной системы можно определить переходные функции $c_{ij} \in C(U_i \cap U_j)$, $i, j \in I$, с помощью равенства $c_{ij}s_i = s_j$ в $U_i \cap U_j$.

Разумеется, справедливы соотношения

$$(1.1.1) \qquad c_{ij} = c_{ji}^{-1} \text{ и } c_{ij}c_{jk} = c_{ik} \text{ в } U_i \cap U_j \cap U_k.$$

Мы обозначим $S(X, L)$ или просто S, если X и L существуют, пространство всех гладких сечений s: $X \to L$. Если s: $X \to L$ — некоторое сечение, а φ — комплекснозначная функция на X, мы определим φs как сечение, заданное формулой $(\varphi s)(p) = \varphi(p)s(p)$. Пространство S становится, таким образом, $C(X)$-модулем.

Если задана локальная система и любое (не обязательно непрерывное) сечение s: $X \to L$, то можно однозначно записать $s = \varphi_i s_i$ в U_i, где φ_i — комплекснозначная функция в U_i. Набор функций φ_i называется локальными координатами сечения s. Ясно, что

$$(1.1.2) \qquad c_{ij}\varphi_j = \varphi_i \text{ в } U_i \cap U_j.$$

Обратно, любой набор функций φ_i (на U_i), удовлетворяющих (1.1.2), является локальными координатами однозначно определенного сечения s.

Ясно, что $s \in S$, если и только если $\varphi_i \in C(U_i)$ для всех i. Можно, однако, рассматривать более широкое пространство $S_m = S_m(X, L)$ всех измеримых сечений. Сечение s: $X \to L$ называется измеримым, если для всех i функция φ_i измерима (по Борелю) в U_i. Это определение, очевидно, не зависит от выбора локальной системы.

1.2. Напомним, что два линейных расслоения L^1 и L^2 над X называются эквивалентными, если существует такой диффеоморфизм τ: $L^1 \to L^2$, что для каждого $p \in X$ τ индуцирует линейный изоморфизм $L_p^1 \to L_p^2$. Таким образом, на множестве линейных расслоений определено отношение эквивалентности; обозначим $\mathscr{L} = \mathscr{L}(X)$ множество классов эквивалентности.

Известно, что на $\mathscr{L}$ можно ввести групповую структуру (используя тензорное произведение линейных расслоений) и что возникающая группа естественно изоморфна $H^2(X, \mathbf{Z})$ (теория первого класса Чженя). Мы напомним определение чеховских когомологий $H^i(X, A)$ для абелевой группы A и конструкцию упомянутого выше изоморфизма.

Покрытие $\mathfrak{U} = \{U_i\}$, $i \in I$ многообразия X называется стягиваемым, если множества

$$U_{i_1 \ldots i_k} = U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_k}$$

гладко стягиваемы при всех k и всех $(i_0, \ldots, i_k) \in I^{k+1}$, для которых $U_{i_0 \ldots i_k} \neq \varnothing$ (т. е. для каждого симплекса). Известно, что стягиваемые покрытия существуют и, более того, каждое покрытие допускает стягиваемое измельчение (можно использовать, например, выпуклые окрестности относительно произвольной римановой метрики на X).

Пусть A — любая абелева группа и $\mathfrak{U} = \{U_i\}$, $i \in I$ — покрытие X. Назовем k-цепью относительно этого покрытия функцию $(i_0, \ldots, i_k) \to a_{i_0 \ldots i_k} \in A$, определенную на множестве всех k-симплексов и принимающую значения в группе A. Совокупность всех k-цепей образует группу $C^k(\mathfrak{U}, A)$ относительно операции сложения функций. Оператор d: $C^k(\mathfrak{U}, A) \to C^{k+1}(\mathfrak{U}, A)$ определяется равенством

$$(da)_{i_0 \ldots i_{k+1}} = \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j a_{i_0 \ldots \hat{i}_j \ldots i_{k+1}}.$$

Справедливо равенство $d^2 = 0$ и соответствующая группа когомологий обозначается $H^k(\mathfrak{U}, A)$. Если $\mathfrak{B}$ — измельчение покрытия $\mathfrak{U}$, определен гомоморфизм $H^k(\mathfrak{U}, A) \to H^k(\mathfrak{B}, A)$, что позволяет определить индуктивный предел по множеству всех покрытий. Этот предел называется группой когомологий $H^k(X, A)$ в смысле Чеха. Для любого покрытия $\mathfrak{U}$ имеется естественный гомоморфизм $H^k(\mathfrak{U}, A) \to H^k(X, A)$. Если покрытие $\mathfrak{U}$ стягиваемо, то это отображение является изоморфизмом (см. [1], следствие на стр. 237; см. также ниже нашу теорему 5.9.2). Таким образом, мы можем отождествить $H^k(\mathfrak{U}, A)$ с $H^k(X, A)$, если $\mathfrak{U}$ — стягиваемо.

Напомним, что функция $a \in C^2(\mathfrak{U}, A)$ является коциклом, если и только если выполняются условия

$$(1.2.1) \qquad a_{jkl} - a_{ikl} + a_{ijl} - a_{ijk} = 0,$$

коль скоро $U_{ijkl} \neq \varnothing$. Этот коцикл определяет нулевой элемент группы когомологий, если и только если существует такой элемент $b \in C^1(\mathfrak{U}, A)$, что

$$a_{ijk} = b_{ij} + b_{jk} - b_{ik}.$$

Пусть теперь L — линейное расслоение над X и $\{(U_i, s_i)\}$, $i \in I$ — локальная система для L. Мы можем считать (переходя, если нужно, к измельчению), что $\{U_i\}$ — стягиваемое покрытие. Пусть c_{ij} — функции перехода. Так как множество $U_i \cap U_j$ стягиваемо (если оно не пусто) и, следовательно, односвязно, мы можем определить гладкую комплекснозначную функцию f_{ij} на $U_i \cap U_j$ по такой формуле:

$$f_{ij} = \frac{1}{2\pi i} \ln c_{ij}.$$

Если $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \varnothing$, то из равенства $c_{ij}c_{jk} = c_{ik}$ следует, что $\exp(2\pi i a_{ijk}) = 1$, где

$$a_{ijk} = f_{ij} + f_{jk} + f_{ki}.$$

Но тогда a_{ijk} должна быть целочисленной функцией и, будучи непрерывной, постоянна на U_{ijk}. Значит, она задает элемент $C^2(X, \mathbf{Z})$. Ясно, что это — коцикл и что соответствующий элемент $[a] \in H^2(X, \mathbf{Z})$ не зависит от выбора ветви логарифма.

Тот факт, что класс $[a] \in H^2(X, \mathbf{Z})$ не зависит также от выбора локальной системы и на самом деле зависит только от класса эквивалентности $[L] \in \mathscr{L}$ расслоения L, следует из того, что если c_{ij}^1 и c_{ij}^2 — функции перехода для расслоений L^1 и L^2, соответствующие локальным системам $\{(U_i, s_i^1)\}$ и $\{(U_i, s_i^2)\}$, $i \in I$, то L^1 эквивалентно L^2, если и только если существуют такие гладкие функции λ_i: $U_i \to \mathbf{C}^*$, что

(1.2.2) $$\lambda_i c_{ij}^1 \lambda_j^{-1} = c_{ij}^2 \quad \text{в} \quad U_i \cap U_j.$$

Таким образом, мы имеем отображение

(1.2.3) $$\varkappa\colon \mathscr{L} \to H^2(X, \mathbf{Z}),$$

переводящее $[L]$ в $[a]$. Инъективность и сюръективность можно получить, используя разбиение единицы. А именно, выберем $\mathfrak{U}$ одновременно стягиваемым и локально конечным. Тогда существует разбиение единицы $\sum\limits_{i \in I} h_i = 1$, где h_i — функция с носителем в U_i. Далее, если $a \in C^2(\mathfrak{U}, \mathbf{Z})$ — коцикл, то элемент $f_{ij} \in C(U_i \cap U_j)$ может быть корректно определен равенством $f_{ij} = \sum\limits_{k \in I} a_{ijk}h_k$, и в силу (1.2.2) мы получаем

$$f_{ij} + f_{jk} - f_{ik} = a_{ijk} \in \mathbf{Z}.$$

Если положить теперь $c_{ij} = \exp(2\pi i f_{ij})$, то будут выполнены равенства (1.1.1). Значит, существует линейное расслоение L с локальной системой, для которой c_{ij} являются функциями перехода. Ясно, что $\varkappa([L]) = [a]$, что доказывает сюръективность.

Пусть теперь L^1 и L^2 — любые два линейных расслоения. Тогда существует стягиваемое покрытие $\mathfrak{U} = \{U_i\}$, $i \in I$, и локальные системы $\{(U_i, s_i^1)\}$ и $\{(U_i, s_i^2)\}$ для L^1 и L^2 соответственно. Пусть c_{ij}^1 и c_{ij}^2 — соответствующие функции перехода. Далее, если $\varkappa(L^1) = \varkappa(L^2)$, то мы можем так выбрать

логарифмы $f_{ij}^k = \frac{1}{2\pi i} \ln c_{ij}^k$ $(k=1, 2)$, чтобы выполнялось условие $f_{ij}+f_{jk}-f_{ik}=0$, где $f_{ij}=f_{ij}^1-f_{ij}^2$.

Но тогда, если определить $\beta_i \in C(U_i)$ формулой $\beta_i = \sum_{k \in I} f_{ki} h_k$, мы получим $\beta_j - \beta_i = f_{ij}$.

Полагая $\lambda_j = \exp(2\pi i \beta_j)$, мы приходим к соотношениям $\lambda_i c_{ij}^1 \lambda_j^{-1} = c_{ij}^2$, что доказывает равенство $[L^1] = [L^2]$, т. е. инъективность $\varkappa$. Итак, имеет место

Предложение 1.2.1. *Отображение* $\varkappa$: $\mathcal{L} \to H^2(X, \mathbf{Z})$ *биективно.*

Замечание 1.2.1. Линейное расслоение L над X называется тривиальным, если оно эквивалентно прямому произведению $\mathbf{C} \times X$, т. е. если $S(X, L)$ содержит сечение, не обращающееся в нуль. В силу изоморфизма (1.2.3) ясно, что это имеет место тогда и только тогда, когда $\varkappa([L]) = 0$.

Так как для стягиваемого X, очевидно, $H^2(X, \mathbf{Z}) = 0$, то для любого X, любого стягиваемого покрытия $\mathfrak{U} = \{U_i\}$, $i \in I$ и любого линейного расслоения L над X можно построить локальную систему $\{(U_i, s_i)\}$, $i \in I$. Это следует из того, что ограничение $L|_{U_i}$ является тривиальным расслоением над U_i и, следовательно, существует нигде не обращающееся в нуль гладкое сечение s_i расслоения L над U_i.

Таким образом, все линейные расслоения над X можно задавать функциями перехода, определенными для одного и того же фиксированного стягиваемого покрытия.

1.3. Для любого многообразия X обозначим $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}(X)$ алгебру Ли всех гладких комплексных векторных полей на X и пусть $\Omega = \Omega(X)$ — градуированная алгебра всех комплекснозначных гладких дифференциальных форм на X.

Если $\xi \in \mathfrak{u}$, то $i(\xi)$ и $\theta(\xi)$ означают соответственно внутреннее произведение и производную Ли в Ω относительно ξ. Пусть d означает внешнее дифференцирование в Ω. Три оператора d, $i(\xi)$ и $\theta(\xi)$ связаны тождеством:

$$\theta(\xi) = i(\xi)d + di(\xi). \tag{1.3.1}$$

Отметим, что $i(\xi)$ понижает градуировку в Ω на 1, $\theta(\xi)$ сохраняет ее, а d повышает на 1.

Справедливо также равенство

$$[\theta(\xi), i(\eta)] = i([\xi, \eta]) \tag{1.3.2}$$

для любых $\xi, \eta \in \mathfrak{u}$.

Для любой функции $\varphi \in C$ мы имеем $i(\xi)\varphi = 0$, $\theta(\xi)\varphi = \xi\varphi$, а дифференциал $d\varphi \in \Omega^1$ задается равенством

$$\langle d\varphi, \xi \rangle = \xi\varphi. \tag{1.3.3}$$

Если $\alpha \in \Omega^1$, то $i(\xi)\alpha \in C$ задается формулой

$$i(\xi)\alpha = \alpha(\xi), \tag{1.3.4}$$

$\theta(\xi)\alpha$ — это 1-форма, определяемая равенством

$$\langle \theta(\xi)\alpha, \eta \rangle = \xi\langle \alpha, \eta \rangle - \langle \alpha, [\xi, \eta] \rangle, \tag{1.3.5}$$

а дифференциал $d\alpha$ имеет вид

$$(1.3.6)\qquad d\alpha(\xi, \eta) = \xi\langle\alpha, \eta\rangle - \eta\langle\alpha, \xi\rangle - \langle\alpha, [\xi, \eta]\rangle.$$

Если $\omega \in \Omega^2$, то $i(\xi)\omega$ — это такая 1-форма, что

$$(1.3.7)\qquad \langle i(\xi)\omega, \eta\rangle = \omega(\xi, \eta).$$

Условие замкнутости ω, т. е. равенства $d\omega = 0$, имеет вид

$$(1.3.8)\quad \text{циклическая сумма}_{\xi,\eta,\zeta}\ \xi\omega(\eta, \zeta) = \text{циклическая сумма}_{\xi,\eta,\zeta}\ \omega([\xi, \eta], \zeta).$$

1.4. Пусть теперь L — некоторое линейное расслоение над X. Связностью в L называется линейное отображение

$$\nabla\colon\ \mathfrak{u} \to \operatorname{End} S\colon\quad \xi \mapsto \nabla_\xi$$

такое, что для любой функции $\varphi \in C$ справедливо равенство

$$(1.4.1)\qquad \nabla_{\varphi\xi} = \varphi\nabla_\xi,$$

и для любого сечения $s \in S$ — равенство

$$(1.4.2)\qquad \nabla_\xi\varphi s = \xi\varphi\cdot s + \varphi\,\nabla_\xi s.$$

Из (1.4.1) ясно, что $(\nabla_\xi s)(p)$ для $p \in X$ зависит только от s и касательного вектора ξ_p. Таким образом, для любых $s \in S$, $p \in X$ и $v \in T_pX$ определена величина $\nabla_v s \in L_p$ и $\nabla_{\xi_p} s = (\nabla_\xi s)(p)$.

Кроме того, из (1.4.2) следует, что величина $(\nabla_\xi s)(p)$ зависит только от ростка сечения s в точке p. Значит, если U — любое открытое множество, то связность ∇ в L, индуцирует связность в $L|_U$ и, следовательно, выражение $\nabla_\xi s \in S(U) = S(L|_U)$ определено для всех $\xi \in \mathfrak{u}$ или $\mathfrak{u}(U)$ и $s \in S(U)$.

При $x, y \in L_p$ и $x \neq 0$ мы определим комплексное число $c = y/x$ из равенства $y = cx$. Более общим образом, если M — многообразие и r, $s\colon M \to L$ — такие отображения, что $\pi\circ r = \pi\circ s$ и s нигде не обращается в нуль, то мы определим r/s как такую функцию φ на M, что $r = \varphi s$. Ясно, что $r/s \in C(M)$, если r и s — гладкие сечения.

Предположим теперь, что (L,∇) — линейное расслоение со связностью над X. Заметим, что если $U \subseteq X$ — любое открытое множество и $s \in S(U)$ — нигде не равное нулю сечение, то можно связать с s 1-форму $\alpha(s) \in \Omega^1(U)$ следующим образом. Если $t \in S(U)$ — любое сечение, то $t/s \in C(U)$. Отображение $\mathfrak{u}$ в $C(U)$, определенное равенством $\xi \mapsto \frac{1}{2\pi i}\nabla_\xi s/s$, является, очевидно, $C(X)$-линейным и, следовательно, существует единственная 1-форма $\alpha = \alpha(s) \in \Omega^1(U)$ такая, что для всех $\xi \in \mathfrak{u}$ выполняется условие

$$(1.4.3)\qquad \nabla_\xi s = 2\pi i\,\langle\alpha, \xi\rangle s,$$

где, разумеется, $\langle\alpha, \xi\rangle \in C(U)$ — сокращенное обозначение для $\langle\alpha, \xi|_U\rangle$.

Пусть $S^*(U)$ — совокупность не обращающихся в нуль гладких сечений над U. Очевидно, это модуль над группой $C^*(U)$ нигде не равных нулю гладких функций на U.

Предложение 1.4.1. *Пусть (L, ∇) — линейное расслоение со связностью над X, $U \subseteq X$ — открытое множество и $s, t \in S^*(U)$. Тогда*

$$\alpha(t) = \alpha(s) + \frac{1}{2\pi i}\frac{dg}{g}, \tag{1.4.4}$$

где $g = t/s \in C^*(U)$.

Доказательство. Для любого $\xi \in \mathfrak{u}$ имеем

$$2\pi i\langle\alpha(t), \xi\rangle = \nabla_\xi t/t = \nabla_\xi gs/gs = \xi g/g + \nabla_\xi s/s = \left\langle\frac{dg}{g} + 2\pi i\alpha(s), \xi\right\rangle.$$

Отсюда в виду произвольности ξ следует (1.4.4).

Следствие 1. *Пусть $\{(U_i, s_i)\}$, $i \in I$,— локальная система для линейного расслоения L и c_{ij} — соответствующие функции перехода. Тогда, если ∇ — связность в L и $\alpha_i = \alpha(s_i) \in \Omega^1(U_i)$, то в $U_i \cap U_j$ справедливо равенство*

$$\alpha_j = \alpha_i + \frac{1}{2\pi i}\frac{dc_{ij}}{c_{ij}}. \tag{1.4.5}$$

Обратно, если задано семейство 1-форм $\alpha_i \in \Omega^1(U_i)$, $i \in I$, удовлетворяющее условию (1.4.5), то существует единственная связность ∇, для которой $\alpha_i = \alpha(s_i)$.

Доказательство. Первое утверждение вытекает непосредственно из (1.4.4), так как в $U_i \cap U_j$ мы имеем $c_{ij} = s_j/s_i$. С другой стороны, если заданы любые 1-формы $\alpha_i \in \Omega^1(U_i)$, удовлетворяющие (1.4.5), то можно корректно определить $\nabla_\xi s \in S$ для всех $\xi \in \mathfrak{u}$ и $s \in S$, полагая в U_i

$$\nabla_\xi s = (\xi(s/s_i) + 2\pi i(s/s_i)\langle\alpha_i, \xi\rangle)s_i. \tag{1.4.6}$$

Соотношение (1.4.5) гарантирует сохранение правой части (1.4.6) в $U_i \cap U_j$ при замене индекса i на j. Очевидно, что ∇ удовлетворяет условиям (1.4.1) и (1.4.2) и, значит, является связностью. Ясно, кроме того, что $\alpha(s_i) = \alpha_i$ и что связность ∇ однозначно определяется этим свойством.

1.5. Обозначим L^* открытое множество в L, которое является объединением $\bigcup L_p^*$ по всем $p \in X$, где L_p^* получается из L_p выбрасыванием начальной точки. Введем также обозначение $\tilde{\pi} = \pi\,|_{L^*}$.

Тогда L^* — расслоение над X

$$\begin{array}{c} \mathbf{C}^* \to L^* \\ \downarrow \tilde{\pi} \\ X \end{array}$$

со слоем $\mathbf{C}^*$. В самом деле, $\mathbf{C}^*$ действует с помощью умножения как группа диффеоморфизмов L^*, причем орбитами этого действия являются как раз слои L_p^*. Открытое подмногообразие $L^* \subset L$ является, разумеется, главным расслоением, ассоциированным с L.

Далее, 1-форма $\frac{1}{2\pi i}\frac{dz}{z}$ в $\mathbf{C}^*$ инвариантна относительно умножения на элементы $\mathbf{C}^*$. Отсюда следует, что для любой точки $p \in X$ существует единственная 1-форма β_p на L_p^* такая, что для любого $\mathbf{C}^*$ -отображения

$$\tau\colon\ \mathbf{C}^* \to L_p^*$$

мы имеем $\tau^*(\beta_p) = \frac{1}{2\pi i}\frac{dz}{z}$.

По определению, форма связности в L^* — это такая 1-форма $\alpha \in \Omega^1(L^*)$, что:

(1) α инвариантна относительно $\mathbf{C}^*$;

(2) $\alpha \mid_{L_p^*} = \beta_p$ для всех $p \in X$.

Если M — произвольное многообразие и s: $M \to L^*$, мы определим

(1.5.1) $$\sigma_s\colon \mathbf{C}^* \times M \to L^*,$$

как отображение, заданное равенством $\sigma_s(c, p) = cs(p)$.

Лемма 1.5.1. *Предположим, что α — форма связности в L^* и пусть s: $M \to L^*$ — гладкое отображение. Тогда*

(1.5.2) $$\sigma_s^*(\alpha) = \left(\frac{1}{2\pi i}\frac{dz}{z},\ s^*\alpha\right).$$

Кроме того, если r: $M \to L^*$ — любое другое гладкое отображение, для которого $\pi \circ r = \pi \circ s$, так что $g = r/s \in C^*(U)$, то

(1.5.3) $$r^*\alpha = s^*\alpha + \frac{1}{2\pi i}\frac{dg}{g}.$$

Доказательство. Для любой точки $p \in M$ ясно из определения α, что $\sigma_s^*\alpha\,|_{\mathbf{C}^*\times p} = \left(\frac{1}{2\pi i}\frac{dz}{z},\ 0\right)$.

Далее, σ_s является $\mathbf{C}^*$-отображением (действие $\mathbf{C}^*$ на $\mathbf{C}^* \times M$ определяется очевидным образом), так что форма $\sigma_s^*(\alpha)$ $\mathbf{C}^*$-инвариантна и, следовательно, определяется своим ограничением $\sigma_s^*\alpha \mid_{1\times M} = (0, s^*\alpha)$.

Это доказывает (1.5.2).

Пусть теперь ρ_g: $\mathbf{C}^* \times M \to \mathbf{C}^* \times M$ — отображение, заданное формулой $\rho_g(c, p) = (g(p)c, p)$.

Ясно, что

(1.5.4) $$\rho_g^*\sigma_s^*\alpha = \sigma_s^*(\alpha) + \left(0,\ \frac{1}{2\pi i}\frac{dg}{g}\right).$$

Но $\sigma_r = \sigma_s \circ \rho_g$, так что $\sigma_r^*\alpha = \rho_g^* \circ \sigma_s^*\alpha$, а $\sigma_r^*\alpha = \left(\frac{1}{2\pi i}\frac{dz}{z},\ r^*\alpha\right)$ в силу (1.5.2). Поэтому (1.5.3) следует из (1.5.4).

Предложение 1.5.1. *Пусть X — многообразие и L — линейное расслоение над X. Тогда, если ∇ — связность в L, то существует единственная форма связности $\alpha \in \Omega^1(L^*)$ такая, что для любого открытого множества $U \subseteq X$, и любого $s \in S^*(U)$ (т. е. s: $U \to L^*$) мы имеем*

(1.5.5) $$\alpha(s) = s^*(\alpha).$$

Обратно, если α — форма связности в L^*, то существует единственная связность ∇ в L, для которой имеет место (1.5.5) для всех $s \in S^*(U)$ и всех открытых множеств $U \subseteq X$.

Доказательство. Для любого $s \in S^*(U)$ ясно, что отображение

$$\sigma_s\colon \mathbf{C}^* \times U \to \tilde{\pi}^{-1}(U)$$

является диффеоморфизмом (здесь σ_s определено формулой (1.5.1)). Предположим теперь, что α — форма связности в L^*. Тогда для любого сечения

$t \in S^*(U)$ по лемме 1.5.1

$$t^*\alpha = s^*\alpha + \frac{1}{2\pi i}\frac{dg}{g}.$$

Если задана локальная система $\{U_i, s_i\}$, $i \in I$, то в $U_i \cap U_j$ мы получаем

$$s_j^*\alpha = s_i^*\alpha + \frac{1}{2\pi i}\frac{dc_{ij}}{c_{ij}}.$$

Согласно следствию 1 предложения 1.4.1 существует единственная связность ∇, для которой $\alpha(s_i) = s_i^*\alpha$ для всех $i \in I$. Тогда $\alpha(s) = s^*\alpha$ для любого открытого множества $U \subseteq X$ и любого сечения $s \in S^*(U)$ в силу (1.4.4) и (1.5.2). Таким образом, форма связности α в L^* однозначно определяет связность ∇ в L так, чтобы выполнялось соотношение (1.5.5).

Обратно, пусть задана связность ∇. Для $s \in S^*(U)$ определим 1-форму β_s на $\mathbf{C}^* \times U$, полагая $\beta_s = \left(\frac{1}{2\pi i}\frac{dz}{z}, \alpha(s)\right)$ и 1-форму α_s на $\tilde{\pi}^{-1}(U)$ так, что $\beta_s = \sigma_s^*\alpha_s$. Ясно, что α_s-форма связности в $L^*|_U$. Мы утверждаем, что для любого $t \in S^*(U)$ справедливо равенство

$$\alpha_s = \alpha_t. \tag{1.5.6}$$

В самом деле, если $g = t/s$ и ρ_g определено как в (1.5.4), то

$$\sigma_t^*\alpha_s = \rho_g^*\sigma_s^*\alpha_s = \rho_g^*\beta_s = \left(\frac{1}{2\pi i}\frac{dz}{z}, \alpha(s) + \frac{1}{2\pi i}\frac{dg}{g}\right).$$

Но $\alpha(s) + \frac{1}{2\pi i}\frac{dg}{g} = \alpha(t)$ в силу (1.4.4). Поэтому $\sigma_t^*(\alpha_s) = \beta_t$. Так как $\sigma_t^*(\alpha_t) = \beta_t$, мы доказали (1.5.6). Но из (1.5.6), очевидно, вытекает (как видно, например, используя локальную систему), что существует такая форма связности α в L^*, что для любого открытого множества $U \subseteq X$ и любого $s \in S^*(U)$ справедливо равенство $\sigma_s^*\alpha = \left(\frac{1}{2\pi i}\frac{dz}{z}, \alpha(s)\right)$. Согласно (1.5.2) $\alpha(s) = s^*\alpha$. Построенная форма связности α, очевидно, является единственной формой со свойством (1.5.5), так как в силу (1.5.2) α однозначно определяется формами $s^*\alpha$ для всех возможных s.

1.6. Начиная с этого места линейное расслоение L со связностью ∇ будет обозначаться парой (L, α), где α — форма связности в L^*, соответствующая ∇.

Предложение 1.6.1. *Пусть (L, α) — линейное расслоение со связностью над X. Существует единственная замкнутая 2-форма $\omega \in \Omega^2(X)$, для которой*

$$d\alpha = \tilde{\pi}^*\omega. \tag{1.6.1}$$

Более того, если U — открытое подмножество в X и $s \in S^*(U)$, то

$$d(\alpha(s)) = \omega|_U. \tag{1.6.2}$$

Доказательство. Если $s \in S^*(U)$, то в силу (1.5.2) $\sigma_s^*\alpha = \left(\frac{1}{2\pi i}\frac{dz}{z}, \alpha(s)\right)$. Поэтому $d(\sigma_s^*\alpha) = (0, d(\alpha(s)))$. Но $d(\sigma_s^*\alpha) = \sigma_s^* d\alpha$. Значит,

$$d\alpha|_{\tilde{\pi}^{-1}(U)} = \tilde{\pi}^* d(\alpha(s)). \tag{1.6.3}$$

Далее, если $t \in S^*(U)$, то $d(\alpha(t)) = d(\alpha(s))$ согласно (1.4.4), так как $\frac{dg}{g}$ — замкнутая форма. Используя локальную систему, мы видим, что существует единственная 2-форма ω на X, обладающая свойством $d(\alpha(s)) = \omega|_U$ для всех $s \in S^*(U)$ и любого открытого множества U. Из (1.6.3) видно, что $d\alpha = \widetilde{\pi}^*\omega$. Форма ω однозначно определяется этим соотношением, так как $\widetilde{\pi}^*$ является вложением $\Omega(X)$ в $\Omega(L^*)$ (как видно, например, из того, что локально L^* является прямым произведением).

Замкнутая 2-форма ω называется формой кривизны для (L, α) и будет обозначаться $\omega = \operatorname{curv}(L, \alpha)$.

1.7. Пусть M — многообразие и $p \in M$; через T_pM мы обозначим касательное пространство к M в точке p.

Кривой γ на многообразии M мы назовем непрерывное отображение $\gamma: I \to M$, где $I \subset \mathbf{R}$ — отрезок вещественной прямой. Кривая называется кусочно-гладкой, если I является объединением конечного числа интервалов, на каждом из которых γ — гладкое отображение. Если γ — гладкая кривая, то $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)} M$ означает касательный вектор к γ, соответствующий точке $t \in I$.

Если L — линейное расслоение над X и $\gamma: I \to X$ кривая в X, то сечением L над γ мы назовем такую кривую $r: I \to L$ в L, что $r(t) \in L_{\gamma(t)}$ для всех $t \in I$. Пусть α-форма связности в L^*. Напомним определение самопараллельного сечения вдоль кусочно гладкой кривой в X.

Предположим, что образ кривой $\gamma: I \to X$ лежит в открытом множестве $U \subseteq X$, для которого $S^*(U)$ не пусто. Тогда, если $s \in S^*(U)$, то $s \circ \gamma$ — не обращающееся в нуль сечение L над γ и, следовательно, для любого другого сечения r над γ определена комплекснозначная функция $\varphi = r/s\circ\gamma$. Если кривая r (и, следовательно, ее проекция γ) — гладкая, то $\varphi \in C(I)$.

Для гладких r определим ковариантную производную r как сечение ∇r над γ, заданное формулой

$$(1.7.1)\quad (\nabla r/s\circ\gamma)(t) = \frac{d}{dt}(r/s\circ\gamma)(t) + 2\pi i\,(r/s\circ\gamma)(t)\,\langle\alpha(s),\ \gamma'(t)\rangle.$$

Легко видеть (используя соотношение (1.4.4)), что это определение ∇r не зависит от выбора множества U и сечения $s \in S^*(U)$ и, следовательно, ∇r определено для всех гладких r без всяких условий на образ γ.

Замечание 1.7.1. Если r имеет вид $r = s\circ\gamma$, где $s \in S$, то $\nabla r(t)$ может быть задано формулой

$$(1.7.2)\qquad \nabla r(t) = \nabla_{\gamma'(t)} s.$$

Если сечение r не обращается в нуль вдоль кривой γ, то ∇r может быть описано более прямым образом. А именно, r отображает I в L^* так, что $r'(t)$ — касательный вектор к L^* в точке $r(t)$ и, следовательно, $\langle\alpha, r'\rangle$ — гладкая функция на I.

Предложение 1.7.1. *Если r — гладкое сечение вдоль γ, не обращающееся в нуль, то*

$$(1.7.3)\qquad \nabla r = 2\pi i\langle\alpha,\ r'\rangle r.$$

Доказательство. Так как утверждение локально, мы можем предположить, что $\gamma(I) \subseteq U$, используя введенные выше обозначения. Тогда

$$\langle\alpha(s), \gamma'\rangle = \langle s^*\alpha, \gamma'\rangle = \left\langle \gamma^* s^*\alpha, \frac{d}{dt}\right\rangle = \left\langle (s\circ\gamma)^*\alpha, \frac{d}{dt}\right\rangle.$$

Но в силу (1.5.3) $r^*\alpha = (s\circ\gamma)^*\alpha + \frac{1}{2\pi i}\, d(r/s\circ\gamma)\cdot s\circ\gamma/r$. Значит,

$$2\pi i\langle\alpha, r'\rangle = 2\pi i\left\langle r^*\alpha, \frac{d}{dt}\right\rangle = 2\pi i\langle\alpha(s), \gamma'\rangle + \frac{d}{dt}(r/s\circ\gamma)\cdot s\circ\gamma/r.$$

Но правая часть равна $(\nabla r/s\circ\gamma)\cdot s\circ\gamma/r = \nabla r/r$ в силу (1.7.1). Следовательно, $\nabla r = 2\pi i\langle\alpha, r'\rangle r$.

Замечание 1.7.2. Для любой кривой $\gamma: I \to X$ легко проверяемое соотношение

$$\nabla fr = f'r + f\nabla r, \tag{1.7.4}$$

где $f \in C(I)$, а r — гладкое сечение вдоль γ, дает вместе с (1.7.2) удобное описание ∇s для любого гладкого сечения s вдоль γ.

1.8. Сечение r вдоль кривой γ в X называется самопараллельным, если оно (и, следовательно, γ) кусочно гладко и $\nabla r = 0$ вдоль каждого интервала гладкости.

Предположим теперь, что $\gamma: I \to X$ — кривая в X, $\gamma(I) \subseteq U$ и $s \in s^*(U)$. Пусть r — гладкое сечение вдоль γ. Условие $\nabla r = 0$ означает согласно (1.7.1), что

$$\frac{d}{dt}(r/s\circ\gamma) = -2\pi i(r/s\circ\gamma)\langle\alpha(s), \gamma'\rangle.$$

Но тогда, если t_0 — любая точка I, то $(r/s\circ\gamma)(t)$ однозначно определяется значением $(r/s\circ\gamma)(t_0)$ (которое может быть произвольным) и выражается с помощью криволинейного интеграла от α:

$$(r/s\circ\gamma)(t) = (r/s\circ\gamma)(t_0)\, e^{-2\pi i\int_{\gamma_t}\alpha(s)}, \tag{1.8.1}$$

где γ_t — кривая $\gamma|_{[t_0, t]}$ (ориентированная от t_0 к t). Отсюда следует, что для любой кусочно-гладкой кривой в X и любого $x \in L_{\gamma(t)}$ существует единственное самопараллельное сечение r_x вдоль γ, обладающее свойством $r_x(t) = x$. Таким образом, для любой кривой $\gamma: [a, b] \to X$ можно определить линейный изоморфизм

$$P_\gamma: L_{\gamma(a)} \to L_{\gamma(b)},$$

называемый параллельным переносом вдоль γ, полагая $P_\gamma(x) = r_x(b)$, где $x = r_x(a) \in L_{\gamma(a)}$.

Замечание 1.8.1. Разумеется, равенство (1.8.1) справедливо для любой кусочно-гладкой кривой, а не только для гладких кривых, целиком лежащих в U.

Обозначим $\Gamma = \Gamma(X)$ совокупность всех кусочно-гладких замкнутых кривых в X. Рассмотрим функцию (скалярную функцию параллельного переноса) $Q: \Gamma \to \mathbb{C}^*$, определенную следующим образом. Кривая $\gamma \in \Gamma$ имеет одну и ту же точку p началом и концом. Поэтому $P_\gamma: L_p \to L_p$ и, следовательно, существует такое число $Q(\gamma)$, что для любого $x \in L_p$

$$P_\gamma(x) = Q(\gamma)x. \tag{1.8.2}$$

Напомним, что кривая $\gamma \in \Gamma$ называется гомотопной точке, если существует такой прямоугольник $R = [a, b] \times [c, d]$ на плоскости, такое непрерывное отображение $\sigma \colon R \to X$ и такое кусочно-гладкое отображение $\rho \colon I \to \dot{R}$ (где $\dot{R}$ — граница R, ориентированная против часовой стрелки), что $\sigma \circ \rho = \gamma$. В этом случае известно, что σ можно выбрать так, чтобы при подходящем разбиении $[a, b]$ и $[c, d]$ на конечное число отрезков I_i и J_j ограничение $\sigma_{ij} = \sigma|_{I_i \times J_j}$ было гладким для всех i и j. Такое отображение σ задает ориентированную поверхность (границей которой является γ), которая называется поверхностью деформации γ.

Теорема 1.8.1. *Пусть (L, α) — линейное расслоение со связностью над многообразием X, γ — замкнутая кусочно-гладкая кривая в X, гомотопная точке, и σ — некоторая поверхность деформации γ. Пусть $\omega = \operatorname{curv}(L, \alpha)$. Тогда скалярный множитель $Q(\gamma)$, соответствующий параллельному переносу вдоль γ, выражается с помощью поверхностного интеграла:*

$$Q(\gamma) = e^{-2\pi i \int_\sigma \omega}. \tag{1.8.3}$$

Доказательство. Ясно, что можно выбрать $R_{ij} = I_i \times J_j$ настолько малыми, чтобы существовало такое открытое множество $U_{ij} \subseteq X$ с неисчезающим сечением $s_{ij} \in S^*(U_{ij})$, что $\sigma(R_{ij}) \subseteq U_{ij}$. Граница R_{ij}, ориентированная против часовой стрелки, определяет замкнутую кривую γ_{ij} в U_{ij} и в силу (1.8.1)

$$Q(\gamma_{ij}) = e^{-2\pi i \int_{\gamma_{ij}} \alpha(s_{ij})}.$$

По формуле Стокса это можно переписать в виде

$$Q(\gamma_{ij}) = e^{-2\pi i \int_{\sigma_{ij}} \omega},$$

так как $\omega|_{U_{ij}} = d\alpha(s_{ij})$ согласно (1.6.2).

Однако ясно, что $Q(\gamma)$ является произведением $Q(\gamma_{ij})$ по всем i и j и, следовательно, мы приходим к (1.8.3).

1.9. Пусть L — линейное расслоение над X. Эрмитовой структурой в L называется функция H на множестве всех $(x, y) \in L \times L$ с условием $\pi(x) = \pi(y)$, обладающая свойствами:

1) H индуцирует на каждом L_p, $p \in X$ структуру одномерного гильбертова пространства;

2) $|H|^2 \in C^2(L^*)$, где через $|H|^2$ обозначена положительная функция на L^*, задаваемая равенством $|H|^2(x) = H(x, x)$.

Мы будем писать (x, y) вместо $H(x, y)$ и $(s, t)(p)$ вместо $H(s(p), t(p))$ для $s, t \in S$. Ясно, что (s, t) — измеримая функция, если s и t принадлежит множеству S_m измеримых сечений. Используем также обозначение $|s|^2$ для (s, s). Очевидно, что $(s, t) \in C(X)$, если $s, t \in S$, и $|s|^2 \in C^*(U)$, если $s \in S^*(U)$.

Если α — форма связности в L^*, то H называется α-инвариантной, коль скоро

$$(1.9.1) \qquad \xi(s, t) = (\nabla_\xi s, t) + (s, \nabla_\xi t)$$

для всех $s, t \in S$ и всех вещественных $\xi \in \mathfrak{u}$.

Предложение 1.9.1. *Пусть задано (L, α). Тогда необходимым и достаточным условием для существования α-инвариантной эрмитовой структуры на L является точность вещественной 1-формы $2\pi i(\alpha - \bar{\alpha})$ на L^*. (Черта означает комплексное сопряжение.)*

Кроме того, при выполнении этого условия H определяется однозначно с точностью до положительного постоянного множителя и имеет место соотношение

$$(1.9.2) \qquad 2\pi i(\alpha - \bar{\alpha}) = d \mid H \mid^2/\mid H \mid^2 = d \ln\mid H \mid^2.$$

Доказательство. Предположим, что H — α-инвариантная эрмитова структура в L. Тогда для любого открытого подмножества $U \subseteq X$, сечения $s \in S^*(U)$ и вещественного векторного поля $\xi \in \mathfrak{u}$ мы имеем

$$(1.9.3) \qquad \xi \mid s \mid^2 = \xi(s, s) = (\nabla_\xi s, s) + (s, \nabla_\xi s) = \\ = 2\pi i \langle\alpha(s), \xi\rangle \mid s \mid^2 - 2\pi i \overline{\langle\alpha(s), \xi\rangle} \mid s \mid^2,$$

откуда

$$\langle d \mid s \mid^2/\mid s \mid^2, \quad \xi\rangle = \xi \mid s \mid^2/\mid s \mid^2 = 2\pi i \langle\alpha(s) - \overline{\alpha(s)}, \xi\rangle.$$

Это доказывает, что

$$(1.9.4) \qquad d\mid s \mid^2/\mid s \mid^2 = 2\pi i(\alpha(s) - \overline{\alpha(s)}).$$

С другой стороны, используя обозначения § 1.5, мы можем написать

$$\sigma_s^*\alpha = \left(\frac{1}{2\pi i}\frac{dz}{z}, \ \alpha(s)\right)$$

в $\mathbf{C}^* \times U$. Следовательно,

$$\sigma_s^*(2\pi i(\alpha - \bar{\alpha})) = \left(\frac{d\mid z\mid^2}{\mid z\mid^2}, \ \frac{d\mid s\mid^2}{\mid s\mid^2}\right) = \sigma_s^* \frac{d\mid H\mid^2}{\mid H\mid^2},$$

так как $\mid H\mid^2(\sigma_s(z, p)) = \mid z\mid^2\mid s(p)\mid^2$.

Таким образом, $2\pi i(\alpha - \bar{\alpha}) = \dfrac{d\mid H\mid^2}{\mid H\mid^2}$ в $\pi^{-1}(U)$ и, следовательно, всюду в L^*.

Это доказывает точность $2\pi i(\alpha - \bar{\alpha})$ и единственность H с точностью до положительного постоянного множителя. (В самом деле, так как $2\pi i(\alpha - \bar{\alpha}) = d \ln \mid H \mid^2$, то $\ln \mid H \mid^2$ определен с точностью до постоянного слагаемого.)

Обратно, предположим, что $2\pi i(\alpha - \bar{\alpha})$ — точная форма. Тогда существует такая вещественная функция $g \in C(L^*)$, для которой $2\pi i(\alpha - \bar{\alpha}) = dg$. Полагая $h = e^g$, мы видим, что $h > 0$ и $2\pi i(\alpha - \bar{\alpha}) = dh/h$. Но тогда из (1.5.2) следует, что

$$(1.9.5) \qquad \sigma_s^*(dh/h) = (d \mid z \mid^2/\mid z \mid^2, \ 2\pi i(\alpha(s) - \overline{\alpha(s)}))$$

для любого открытого множества $U \subseteq X$ и любого сечения $s \in S^*(U)$. Из вида первой компоненты правой части следует, что $h(zx) = \mid z \mid^2 h(x)$ для всех

$z \in \mathbf{C}^*$ и $x \in L^*$. Поэтому существует однозначно определенная эрмитова структура H, для которой $|H|^2 = h$.

Но тогда из (1.9.5) вытекает (1.9.4), так как $h \circ s = |s|^2$, а из (1.9.4) следует (1.9.3) в силу (1.4.3). Наконец, используя (1.4.2), мы приходим к (1.9.1).

Следствие 1. *Если L обладает α-инвариантной эрмитовой структурой, то $\omega = \operatorname{curv}(L, \alpha)$ — вещественная 2-форма.*

Доказательство. Так как $\tilde{\pi}^*\omega = d\alpha$, мы видим, что $\tilde{\pi}^*\omega = d\bar{\alpha}$, ибо $\alpha - \bar{\alpha}$ — точная и, следовательно, замкнутая форма. Поэтому $\omega = \bar{\omega}$.

Можно выразить условие существования α-инвариантной эрмитовой структуры в терминах скалярной функции переноса Q, определенной в п. 1.8. Нам понадобится

Лемма 1.9.1. *Пусть (L, α) — линейное расслоение со связностью над X. Пусть p — точка X и $U \subseteq X$ — любая координатная окрестность с координатами $u^1, \ldots, u^m \in C(U)$, устанавливающими диффеоморфизм $q \mapsto (u^1(q), \ldots, u^m(q))$ этой окрестности с открытым единичным шаром в $\mathbf{R}^m$. Выберем U достаточно малым, чтобы существовало сечение $s \in S^*(U)$. Для каждой точки $q \in U$ обозначим γ_q радиальную кривую, соединяющую точки p и q и пусть*

$$P_{\gamma_q}\colon L_p \to L_q$$

— соответствующий линейный изоморфизм.

Обозначим w сечение над U, определенное условием $w(q) = P_{\gamma_q}(s(p))$. Тогда w — гладкое сечение, удовлетворяющее условию

$$\frac{w}{s}(q) = e^{-2\pi i \int_{\gamma_q} \alpha(s)} \tag{1.9.6}$$

Доказательство. Это — непосредственное следствие (1.1.1) и очевидного факта, что функция $q \mapsto e^{-2\pi i \int_{\gamma_q} \alpha(s)}$ — гладкая и не обращается в нуль на U.

Предложение 1.9.2. *Если задано (L, α), то L обладает α-инвариантной эрмитовой структурой H тогда и только тогда, когда множество значений, принимаемых скалярной функцией переноса Q на замкнутых кривых, принадлежит единичной окружности $\mathbf{T} \subset \mathbf{C}^*$.*

Кроме того, эрмитова структура H в L будет α-инвариантной тогда и только тогда, когда для любой кусочно-гладкой кривой $\gamma\colon [a, b] \to X$ отображение $P_\gamma\colon L_{\gamma(a)} \to L_{\gamma(b)}$ изометрично.

Доказательство. Пусть H — эрмитова структура на L и $\gamma\colon [a, b] \to X$ — гладкая кривая. Ясно, что P_γ изометрично, если и только если $\frac{d}{dt}|r(t)|^2 = 0$ для неисчезающего самопараллельного сечения вдоль γ. Это можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}(r, r) = (\nabla r, r) + (r, \nabla r). \tag{1.9.7}$$

Но, поскольку $\nabla(\varphi u)=\left(\frac{d}{dt}\varphi\right)u+\varphi\nabla u$ для любой функции $\varphi\in C[a,b]$ и любого гладкого сечения u вдоль γ, то (1.9.7) равносильно условию

$$\frac{d}{dt}|u|^2=(\nabla u, u)+(u, \nabla u)$$

для любого сечения u над гладкой кривой γ, которое имеет вид $u(t)=s(\gamma(t))$, $s\in S^*(U)$. Далее, так как $\frac{d}{dt}\mid u\mid^2(t)=\gamma'(t)\mid s\mid^2$, $\nabla u(t)=\nabla_{\gamma'(t)}s$ и так как каждый касательный вектор является касательным к некоторой гладкой кривой, мы видим, что справедливость (1.9.7) равносильна справедливости соотношения (1.4.3) для всех вещественных $\xi\in\mathfrak{u}$, всех $s\in S^*(U)$ и всех открытых подмножеств U. Согласно (1.4.2) это имеет место, если и только если H — α-инвариантная структура.

Это доказывает второе утверждение предложения 1.9.2, а также, что Q принимает значения в $\mathbf{T}$, если H α-инвариантна.

Наконец, предположим, что задано (L, α) и значения функции Q лежат в $\mathbf{T}$. Покажем, что существует α-инвариантная эрмитова структура. Фиксируем точку $o\in X$ и пусть H_o — некоторая гильбертова структура в L_o. Для любой точки $p\in X$ выберем кусочно гладкий путь γ, соединяющий точки o и p. Определим гильбертову структуру H_p в L_p так, чтобы оператор P_γ: $L_o\to L_p$ был изометричным. Заметим, что H_p не зависит от выбора пути γ, так как функция Q от любого замкнутого пути принимает значение в $\mathbf{T}$. Таким образом, мы получаем искомую эрмитову структуру H, если только $|H|^2$ — гладкая функция. Для доказательства ее гладкости мы должны проверить только, что для любой точки $p\in X$ существует такая окрестность U и некоторое гладкое сечение $w\in S^*(U)$, для которого $|w|^2$ — гладкая функция. Мы можем воспользоваться сечением w, построенным в лемме 1.9.1. Согласно этой лемме $w\in S^*(U)$ и, по самому определению w, функция $|w|^2$ постоянна в U.

Построенная структура H α-инвариантна, так как P_γ является по определению изометрическим отображением для всех кусочно-гладких кривых γ в X.

1.10. Пусть (L^i, α^i) $(i=1, 2)$ — два линейных расслоения со связностью над X. Скажем, что они эквивалентны, если существует такая эквивалентность линейных расслоений τ: $L^1\to L^2$, что $\tau^*(\alpha^2)=\alpha^1$.

Замечание 1.10.1. Ясно, что если τ — эквивалентность линейных расслоений, то τ определяет эквивалентность линейных расслоений со связностью, если и только если для всех $\xi\in\mathfrak{u}$ и $s\in S(X, L^1)$ имеет место равенство

$$\tau(\nabla^1_\xi s)=\nabla^2_\xi\tau(s), \tag{1.10.1}$$

где ∇^i $(i=1, 2)$ — связности в L^1 и L^2 соответственно.

В самом деле, если $\tau^*(\alpha^2)=\alpha^1$, то для любого открытого множества $U\subseteq X$ и любого $s\in S^*(U)$ мы имеем $(\tau s)^*\alpha^2=s^*\tau^*\alpha^2=s^*\alpha^1$, откуда в силу (1.4.3) следует (1.10.1) для неисчезающих s и, значит, для всех $t\in S$.

Обращая это рассуждение, можно показать, что из (1.10.1) следует, что $\tau^*(\alpha^2)=\alpha^1$. В самом деле, $\tau^*(\alpha^2)$ — форма связности для L^1. Из (1.10.1)

следует, что $s^*\tau^*\alpha^2 = s^*\alpha^1$ для всех $s \in S^*(U)$ и всех открытых множеств $U \subseteq X$. Согласно предложению 1.5.1 это влечет равенство $\tau^*\alpha^2 = \alpha^1$.

Далее, если L — линейное расслоение над X и $\varphi \in C^*(X)$, то φ задает эквивалентность расслоения L с самим собой:

$$\tau_\varphi: L \to L \tag{1.10.2}$$

по формуле $\tau_\varphi(x) = \varphi(\pi(x))x$ для всех $x \in L$.

Замечание 1.10.2. Разумеется, всякая эквивалентность L на себя имеет такой вид.

Лемма 1.10.1. *Пусть задано расслоение со связностью (L, α) над X и функция $\varphi \in C^*(X)$.*

Тогда

$$\tau_\varphi^*\alpha = \alpha + \frac{1}{2\pi i}\frac{d\widetilde{\varphi}}{\widetilde{\varphi}}, \tag{1.10.3}$$

где $\widetilde{\varphi} \in C^*(L^*)$ означает поднятие $\varphi \circ \widetilde{\pi}$.

Кроме того, если α_1 — другая форма связности в L, то (L, α) и (L, α_1) эквивалентны, если и только если $\alpha_1 = \alpha + \dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{d\widetilde{\varphi}}{\widetilde{\varphi}}$, где $\varphi \in C^*(X)$.

Доказательство. Пусть $U \subseteq X$ — открытое множество, $s \in S^*(U)$ и σ_s: $\mathbb{C}^* \times U \to \widetilde{\pi}^{-1}(U)$ определено как в (1.5.1). Тогда

$$\tau_\varphi \circ \sigma_s = \sigma_t, \tag{1.10.4}$$

где $t \in S^*(U)$ задается формулой $t(p) = \varphi(p)s(p)$. Но это значит, что

$$\sigma_s^*\tau_\varphi^*\alpha = \sigma_t^*\alpha = \left(\frac{1}{2\pi i}\frac{dz}{z},\ \alpha(t)\right).$$

Согласно (1.4.4) $\alpha(t) = \alpha(s) + \dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{d\varphi_0}{\varphi_0}$, где $\varphi_0 = \varphi|_U$. Значит, $\sigma_s^*(\tau_\varphi^*\alpha - \alpha) = \left(0, \dfrac{1}{2\pi i}, \dfrac{d\varphi_0}{\varphi_0}\right) = \sigma_s^*\left(\dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{d\widetilde{\varphi}}{\widetilde{\varphi}}\right)$. Поэтому $\tau_\varphi^*\alpha = \alpha + \dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{d\widetilde{\varphi}}{\widetilde{\varphi}}$ на $\widetilde{\pi}(U)$ (так как σ_s — диффеоморфизм). Это доказывает (1.10.3). Второе утверждение леммы немедленно следует из замечания 1.10.2.

Следствие 1. *Пусть τ: $L \to L$ — эквивалентность L на себя. Тогда τ будет эквивалентностью (L, α) на себя, если и только если τ является умножением на постоянное число $c \in \mathbb{C}^*$.*

Доказательство. По лемме 1.10.1 $\tau_\varphi^*\alpha = \alpha$, если и только если $d\widetilde{\varphi}/\widetilde{\varphi} = 0$. Поэтому $\widetilde{\varphi}$ и, следовательно, φ должны быть постоянными.

1.11. Пусть L_i $(i = 1, 2)$ — линейные расслоения над многообразиями X_i $(i = 1, 2)$. Отображение линейных расслоений — это такое гладкое отображение τ: $L_1 \to L_2$ для которого

1) существует (с необходимостью единственное) гладкое отображение $\check{\tau}$: $X_1 \to X_2$, связанное с τ коммутативной диаграммой:

$$\begin{array}{ccc} L_1 & \xrightarrow{\tau} & L_2 \\ {\scriptstyle\pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi_2} \\ X_1 & \xrightarrow{\check{\tau}} & X_2 \end{array};$$

2) для всех $p \in X_1$ отображение τ: $(L_1)_p \to (L_2)_{\check{\tau}(p)}$ является линейным изоморфизмом.

Гладкое отображение ρ: $X_1 \to X_2$ называется поднимаемым относительно L_1 и L_2, если существует такое отображение линейных расслоений τ: $L_1 \to L_2$ (называемое поднятием или лифтингом), для которого $\check{\tau} = \rho$.

Лемма 1.11.1. *Пусть* ρ: $X_1 \to X_2$ — *гладкое отображение,* L_1 *и* L_1' — *линейные расслоения над* X_1, L_2 — *линейное расслоение над* X_2. *Тогда, если* ρ *может быть поднято до отображения* τ: $L_1 \to L_2$, *то оно поднимается до отображения* τ': $L_1' \to L_2$, *если и только если* L_1 *и* L_1' *эквивалентны; существует единственная эквивалентность* μ: $L_1' \to L_1'$, *для которой* $\tau \circ \mu = \tau'$.

Доказательство. Ясно, что если μ: $L_1' \to L_1$ — эквивалентность расслоений, то $\tau' = \tau \circ \mu$ является поднятием отображения ρ. С другой стороны, если τ': $L_1' \to L_2$ — поднятие ρ, то, отвлекаясь от гладкости, мы получаем единственное отображение расслоений μ: $L_1' \to L_1$, для которого (1) $\tau' = \tau \circ \mu$ и 2) $\check{\mu}$ тождественно на X_1.

Остается только показать, что μ — диффеоморфизм.

Пусть $p_1 \in X_1$ и $p_2 = \rho(p_1)$. Обозначим U_2 окрестность точки p_2 и выберем $s_2 \in S^*(U_2, L_2)$.

Выберем окрестность U_1 точки p_1 так, чтобы $\rho(U_1) \subseteq U_2$, и сечения $s_1 \in S^*(U_1, L_1)$, $s_1' \in S^*(U_1, L_1')$.

Пусть ν: $\mathbf{C}^* \times U_2 \to \mathbf{C}^*$ — проекция на первый сомножитель. Используем обозначения (1.5.1) и положим $f = \nu \circ \sigma_{s_2}^{-1} \partial\tau \circ s_1$ и $f' = \nu \circ \sigma_{s_2}^{-1} \circ \tau' \circ s_2'$. Тогда f и f' — гладкие неисчезающие функции на U_1.

Но $\mu|_{(\tilde{\pi}_1')^{-1}(U_1)} = \sigma_{s_1} \circ g \circ \sigma_{s_1'}^{-1}$, где отображение g: $\mathbf{C}^* \times U_1 \to \mathbf{C}^* \times U_1$ задается формулой $g = 1 \times f/f'$. Значит, μ — диффеоморфизм.

Замечание 1.11.1. Хорошо известно, что отображение ρ: $X_1 \to X_2$ индуцирует гомоморфизм групп когомологий ρ^*: $H^i(X_2, A) \to H^i(X_1, A)$ для любого i. Если L_1 и L_2, как и выше, линейные расслоения, то легко показать, что ρ поднимаемо относительно L_1 и L_2, если и только если $\rho^*\varkappa(L_2) = \varkappa(L_1)$ (см. предложение 1.2.1).

Замечание 1.11.2. Если, как и выше, τ: $L_1 \to L_2$ — отображение линейных расслоений, то τ индуцирует линейное отображение соответствующих пространств сечений τ^*: $S_2 \to S_1$, где $S_i \doteq S(X_i, L_i)$ так, что

$$\tau[(\tau^* s)(p_1)] = s(\check{\tau}(p_1)) \tag{1.11.1}$$

для всех $p_1 \in X_1$. Для доказательства гладкости $\tau^* s$ заметим, что в обозначениях доказательства леммы 1.11.1 мы имеем

$$\tau^* s = (s/s_2) \circ \rho \cdot f^{-1} s_1. \tag{1.11.2}$$

Обобщим введенное понятие на расслоение со связностью. Пусть X_1 и X_2, как и выше, (L_i, α_i) $(i = 1, 2)$ — линейные расслоения со связностью над X_i.

Отображение τ: $L_1 \to L_2$ называется отображением линейных расслоений со связностью, если оно является отображением расслоений и $\tau^*\alpha_2 = \alpha_1$.

Лемма 1.11.2. *Пусть τ: $L_1 \to L_2$ — отображение расслоений. Тогда оно будет отображением расслоений со связностью, если и только если для любого сечения $s \in S_2$, любой точки $p \in X_1$ и любого вектора $v \in T_pX_1$*

$$\tau(\nabla_v^1 \tau^* s) = \nabla_{\rho_* v}^2 s, \tag{1.11.3}$$

где ∇^i — ковариантное дифференцирование для (L_i, α_i) и $\rho = \check{\tau}$.

Доказательство. Пусть $U_2 \subseteq X_2$ — открытое множество с неисчезающим сечением $s \in S^*(U_2, L_2)$.

Тогда $\tau^* s \in S^*(U_1, L_1)$, где $U_1 = \rho^{-1}(U_2)$ и если $p \in U_1$ и $v \in T_pX_1$, то $\nabla_v^1 \tau^* s = 2\pi i \langle \alpha(\tau^* s), v \rangle (\tau^* s)(p)$ и, следовательно, $\tau(\nabla_v^1 \tau^* s) = 2\pi i \langle \alpha(\tau^* s), v \rangle s(\rho(p))$.

С другой стороны, $\nabla_{\rho_* v}^2 s = 2\pi i \langle \alpha(s), \rho_*(v) \rangle s(\rho(p))$. Так как $\tau^* \varphi s = (\varphi \circ \rho)\tau^* s$ для $\varphi \in C(U_2)$, то (1.11.3) выполняется во всех точках U_1 тогда и только тогда, когда

$$\rho^*(\alpha(s)) = \alpha(\tau^* s). \tag{1.11.4}$$

Но если положить $r = \tau^* s$, то $\sigma_s^{-1} \circ \tau \circ \sigma_r = 1 \times \rho$: $\mathbf{C}^* \times U_1 \to \mathbf{C}^* \times U_1$, так что $(1 \times \rho)^* = \sigma_r^* \circ \tau^* \circ (\sigma_s^{-1})^*$. Тогда согласно (1.5.2) и (1.5.5) $(1 \times \rho)^* \left(\frac{1}{2\pi i} \frac{dz}{z}, \alpha(s)\right) = \sigma_r^* \tau^* \alpha_2$. Поэтому $\sigma_r^* \tau^* \alpha_2 = \left(\frac{1}{2\pi i} \frac{dz}{z}, \rho^* \alpha(s)\right)$. С другой стороны, в силу (1.5.2) и (1.5.5) $\sigma_r^* \alpha = \left(\frac{1}{2\pi i} \frac{dz}{z}, \alpha(\tau^* s)\right)$. Значит, $\sigma_r^* \alpha_1 = \sigma_r^* \tau^* \alpha_2$, если и только если имеет место (1.11.4). Но, поскольку σ_r — диффеоморфизм, равенство $\tau^* \alpha_2 = \alpha_1$ в $\tilde{\pi}_1^{-1}(U_1)$ равносильно справедливости (1.11.3) во всех точках U_1.

Ввиду произвольности U_1 это доказывает лемму.

Замечание 1.11.3. Существует аналог отображения (1.11.1) для сечений вдоль кривых. Используя введенные выше обозначения, предположим, что γ: $[a, b] \to X_1$ — кусочно-гладкая кривая в X_1, так что $\rho \circ \gamma$ — кусочно-гладкая кривая в X_2. Если τ: $L_1 \to L_2$ — поднятие ρ до отображения линейных расслоений и r — сечение вдоль $\rho \circ \gamma$, то $(\tau^* r)(t) \in L^1{}_{\gamma(t)}$ задается формулой $\tau[(\tau^* r)(t)] = r(t)$. Так как, очевидно,

$$\tau^*(fr) = f\tau^* r \tag{1.11.5}$$

для любой функции $f \in C[a, b]$ и так как для любого $s \in S(X_2, L_2)$

$$\tau^*(s \circ \rho \circ \gamma) = \tau^* s \circ \gamma, \tag{1.11.6}$$

то ясно (так как локально $r = f(s \circ \rho \circ \gamma)$, где s не исчезает в рассматриваемой точке), что $\tau^* r$ гладко, коль скоро гладки γ и r.

Мы можем переформулировать лемму 1.11.2 в терминах параллельного переноса.

Лемма 1.11.3. *В предположениях леммы 1.11.2 τ является отображением линейных расслоений со связностью, если и только если для каждой гладкой кривой γ в X_1 и гладкого сечения r вдоль кривой $\rho \circ \gamma$ в X_2 справедливо соотношение*

$$\tau^* \check{\nabla} r = \nabla \tau^* r. \tag{1.11.7}$$

Другими словами, τ является отображением линейных расслоений со связностью, если и только если для любой кусочно-гладкой кривой γ: $[a, b] \to X_1$

имеет место равенство

$$(1.11.8) \qquad \tau \circ P^1_\gamma = P^2_{\rho\circ\gamma} \circ \tau$$

отображений $L^1_{\gamma(a)} \to L^2_{\rho\circ\gamma(b)}$, *где* P^1_γ *и* $P^2_{\rho\circ\gamma}$ — *параллельные переносы вдоль* γ *и* $\rho\circ\gamma$ *относительно* (L^1, α^1) *и* (L^2, α^2) *соответственно.*

Доказательство. Предположим, что выполняется 1.11.7 для всех r и γ. Пусть $p \in X_1$, $v \in T_pX_1$ и $s \in S(X_2, L^2)$. Тогда, если γ — гладкая кривая в X_1, для которой $\gamma(t_0) = p$ и $\gamma'(t_0) = v$, и если r — гладкое сечение $s\circ\rho\circ\gamma$ вдоль $\rho\circ\gamma$, то, применяя τ к (1.11.7), получаем $\nabla^2_{\rho_* v}\, s = \tau(\nabla^1_v \tau^* s)$ в силу (1.11.2) и (1.11.6). Но тогда τ является отображением расслоений со связностью по лемме 1.11.2.

Обратно, предположим, что τ — отображение расслоений со связностью, и пусть γ — гладкая кривая в X_1, а r — неисчезающее сечение над $\rho\circ\gamma$. Тогда, так как $\tau[(\tau^* r)(t)] = r(t)$, мы имеем $\tau_*[(\tau^* r')(t)] = r'(t)$. Значит, $\langle \tau^*\alpha_2, (\tau^* r)'(t)\rangle = \langle \alpha_2, r'(t)\rangle$. Но $\tau^*\alpha_2 = \alpha_1$ по предположению и, следовательно, $\langle \alpha_1, (\tau^* r)'(t)\rangle = \langle \alpha_2, r'(t)\rangle$. Далее, $\nabla r = 2\pi i \langle \alpha_2, r'\rangle\, r$ в силу (1.7.3) и, значит, $\tau^*\nabla r = 2\pi i \langle \alpha_1, (\tau^* r)'\rangle\, \tau^* r$ в силу (1.11.5). Поэтому $\tau^*\nabla r = \nabla\tau^* r$ согласно (1.7.3). Это доказывает (1.11.7) для неисчезающих сечений. Общий случай немедленно следует из (1.7.4).

Пусть теперь γ: $[a, b] \to X$ — кусочно-гладкая кривая и пусть $\gamma_t = \gamma \mid_{[a, t]}$ для $t \in [a, b]$. Тогда, если $0 \neq x \in L_{\gamma(a)}$ и $y = \tau x \in L^2{}_{\rho\circ\gamma(a)}$, мы определим неисчезающее самопараллельное сечение r вдоль $\rho\circ\gamma$, полагая $r(t) = P^2_{\rho\circ\gamma_t}\, y$. Если (1.11.8) верно для всех кусочно-гладких кривых, то $r(t) = \tau P'_{\gamma_t} x$. Но $s(t) = P'_{\gamma_t} x$ — неисчезающее самопараллельное сечение вдоль γ. Таким образом, $\tau s(t) = r(t)$ и, следовательно, $\tau^* r = s$ самопараллельно. Значит, если γ — гладкая кривая, то (1.11.7) верно для неисчезающего самопараллельного сечения r вдоль γ, так как обе части этого равенства обращаются в нуль. Тогда, используя (1.7.3), мы получаем, что (1.11.7) верно для всех гладких сечений вдоль $\rho\circ\gamma$, так как каждое такое сечение получается из сечения умножением на гладкую функцию на $[a, b]$.

Наконец, (1.11.7) влечет (1.11.8) вдоль гладких кривых, так как согласно (1.11.7) сечение r самопараллельно, если и только если $\tau^* r$ самопараллельно и $\tau[(\tau^* r)(t)] = r(t)$. Но (1.11.8) для гладких кривых, очевидно, влечет (1.11.8) для кусочно-гладких кривых.

1.12. Если заданы многообразия X_i $(i = 1, 2)$, линейное расслоение L_2 над X_2 и гладкое отображение ρ: $X_1 \to X_2$, то, как хорошо известно, можно определить естественным образом линейное расслоение $\rho^*(L_2)$ над X_1 и отображение τ_ρ: $\rho^*(L_2) \to L_2$ линейных расслоений, которое является поднятием ρ. А именно, в качестве $\rho^*(L_2)$ можно взять подмногообразие в $L_2 \times X_1$, определенное (как множество) как объединение по всем $p \in X_1$ подмножеств

$$(1.12.1) \qquad \rho^*(L_2)_p = [(L_2)_{\rho(p)}, p] \subset L_2 \times X_1.$$

Ясно, что $(L_2)_{\rho(p)}$ индуцирует на $\rho^*(L_2)_p$ линейную структуру и если $\{(U_i, s_i)\}$, $i \in I$,— локальная система для L_2, то $\{(\rho^{-1}(U_i), r_i)\}$, $i \in I$,— локальная система для $\rho^*(L_2)$ (здесь $r_i(p) = (s_i(\rho(p)), p)$).

Отображение τ_ρ определяется равенством $\tau_\rho(x, p) = x$ для $x \in (L_2)_{\rho(p)}$. Ясно, что τ_ρ является отображением расслоений и что $\check{\tau}_\rho = \rho$.

Предложение 1.12.1. *Предположим, что (L_2, α_2) — линейное расслоение со связностью над X_2. Тогда, если L_1 — линейное расслоение над X_1 и τ: $L_1 \to L_2$ — поднятие гладкого отображения ρ: $X_1 \to X_2$, то $(L_1, \tau^* \alpha)$ — линейное расслоение со связностью над X_1 и τ — отображение расслоений со связностью.*

В частности, $(\rho^*(L_2), \tau_\rho^*\alpha_2)$ — линейное расслоение со связностью над X_1 и τ_ρ — отображение расслоений со связностью.

Доказательство. Поскольку τ^* линейно в каждой точке, ясно, что $\tau^*\alpha$ удовлетворяет условиям (1) и (2) из п. 1.5.

Далее, пусть ρ: $X_1 \to X_2$ — заданное гладкое отображение и (L_i, α_i) $(i = 1, 2)$ — линейное расслоение со связностью над X_i. Мы скажем, что ρ поднимаемо относительно (L_i, α_i) $(i = 1, 2)$, если существует такое отображение τ: $L_1 \to L_2$ линейных расслоений со связностью, что $\check{\tau} = \rho$. Вместо когомологического условия, приведенного в замечании 1.11.1 имеет место

Предложение 1.12.2. *Пусть $\Gamma_i (i = 1, 2)$ — множество всех кусочно-гладких кривых в X_i и Q_i — скалярная функция переноса для (L_i, α_i) (см. (1.8.2)). Гладкое отображение ρ: $X_1 \to X_2$ поднимается до отображения τ: $L_1 \to L_2$ расслоений со связностью, если и только если*

$$Q_2(\rho \circ \gamma) = Q_1(\gamma) \tag{1.12.2}$$

*для всех $\gamma \in \Gamma_1$. Кроме того, τ определяется однозначно с точностью до глобального умножения на константу $c \in$ **C*** в том смысле, что всякое другое поднятие τ' имеет вид*

$$\tau' = \tau \circ c, \tag{1.12.3}$$

т. е. $\tau'(x) = \tau(cx)$ для всех $x \in L_1$.

Далее, если L_i обладает α_i-инвариантной эрмитовой структурой $H_i (i = 1, 2)$ (т. е. Q_i принимает значения в **T** *согласно предложению 1.9.2), то τ можно выбрать так, чтобы выполнялось условие $| H_2 |^2 \circ \tau = | H_1 |^2$ на L_1 (т. е. $\tau\,|_{(L_1)p}$ — изометрия для всех $p \in X_1$). В этом случае τ определяется с точностью до глобального умножения на константу из* **T**.

Доказательство. Если ρ поднимается до отображения τ: $L_1 \to L_2$ линейных расслоений со связностью, то согласно (1.11.8) $\tau \circ P^1_\gamma = P^2_{\rho\circ\gamma} \circ \tau$ для всех кусочно-гладких кривых γ в X_1. Если $\gamma \in \Gamma_1$ и γ: $[a, b] \to X_1$, то для $0 \neq x \in (L_1)_{\gamma(a)}$ мы имеем $P^1_\gamma x = Q_1(\gamma) x$. Кривая $\rho \circ \gamma$ также замкнута в X_2 и $P^2_{\rho\circ\gamma} y = Q_2(\rho\circ\gamma) y$, где $y = \tau x$. Значит, $\tau P^1_\gamma x = Q_1(\gamma) y = P^2_{\rho\circ\gamma} y = Q_2(\rho\circ\gamma) y$. Следовательно, $Q_1(\gamma) = Q_2(\rho \circ \gamma)$.

Обратно, предположим, что выполнено (1.12.2). Если $L = \rho^*(L_2)$ и $\alpha = \tau_\rho^*\alpha_2$, то (L, α) — линейное расслоение со связностью над X_1 и τ_ρ — отображение линейных расслоений со связностью. Тогда из сказанного выше следует, что $Q(\gamma) = Q_2(\rho \circ \gamma)$ для $\gamma \in \Gamma_1$ (через Q обозначена скалярная функция переноса относительно (L, α)). Это значит, что $Q_1 = Q$. Теперь для доказательства существования поднятия τ отображения ρ относительно $(L_i, \alpha_i) (i = 1, 2)$ достаточно показать, что существует поднятие σ: $L_1 \to L$

тождественного отображения X_1 относительно (L_1, α_1), (L, α), так как в этом случае можно положить $\tau = \tau_\rho \circ \sigma$.

Определим σ, взяв сначала в качестве σ_o для фиксированной точки $o \in X_1$ произвольный изоморфизм $\sigma_o: (L_1)_o \to L_o$. Пусть теперь p — любая точка X_1 и γ — некоторый кусочно-гладкий путь из o в p. Определим $\sigma_p: (L_1)_p \to L_p$ равенством $\sigma_p = P_\gamma \circ \sigma_o \circ (P_\gamma^1)^{-1}$, где P_γ и P_γ^1 — параллельные переносы вдоль γ для (L, α) и (L_1, α_1) соответственно. Из соотношения $Q(\gamma_1) = Q_1(\gamma_1)$ для всех кусочно-гладких замкнутых кривых γ_1 в X_1 следует, что σ_p не зависит от γ и, следовательно, определено отображение $\sigma: L_1 \to L$, для которого $\sigma \mid_{(L_1)_p} = \sigma_p$.

Чтобы проверить, что σ является искомым поднятием, нужно только проверить его гладкость. Для этого достаточно показать, что для любой точки $p \in X$ существует такая окрестность U и такое сечение $w \in S^*(U, L_1 \mid_U)$, что сечение σw расслоения L над U, определенное равенством $(\sigma w)(q) = \sigma(w(q))$, является гладким. Но если в качестве w взять сечение, построенное в лемме 1.9.1, то, по определению σ, сечение σw также удовлетворяет условиям этой леммы и, следовательно, является гладким. Таким образом, σ — отображение расслоений. Оно является также отображением расслоений со связностью, так как по самому определению удовлетворяет условию (1.11.8).

Итак, существует такое отображение $\tau: L_1 \to L_2$ линейных расслоений со связностью, что $\check{\tau} = \rho$. Предположим, что τ' — другое такое отображение. Тогда по лемме 1.11.1 существует такая эквивалентность $\mu: L_1 \to L_1$, что $\tau \circ \mu = \tau'$. Но тогда $\mu^* \tau^* \alpha_2 = (\tau')^* \alpha_2$. Значит, $\mu^* \alpha_1 = \alpha_1$ так, что μ — эквивалентность линейных расслоений со связностью. По следствию 1 к лемме 1.10.1 отображение μ является просто умножением на комплексное число из $\mathbf{C}^*$, что доказывает (1.12.3).

Предположим, наконец, что $H_i (i = 1, 2)$ — α_i-инвариантная эрмитова структура в L_i и $\tau: L_1 \to L_2$ — поднятие отображения ρ относительно $(L_i, \alpha_i) (i = 1, 2)$. Тогда, поскольку $\tau^* \alpha_2 = \alpha_1$, мы имеем на L_1^* (см. (1.9.2)) $\tau^*(d \mid H_2 \mid^2 / \mid H_2 \mid^2) = d \mid H_1 \mid^2 / \mid H_1 \mid^2$.

Но тогда $d(\mid H_2 \mid^2 \circ \tau / \mid H_1 \mid^2) = 0$, т. е. $\mid H_2 \mid^2 \circ \tau = c \mid H_1 \mid^2$, где c — положительное число. Следовательно, если заменить τ на $\tau \circ c^{-1/2}$, то $\mid H_2 \mid^2 \circ \tau = \mid H_1 \mid^2$ на L_1^* так, что τ_ρ будет изометрией для всех точек p. Такое τ, очевидно, единственно с точностью до множителя из $\mathbf{T}$.

Предложение 1.12.3. *Пусть (L_i, α_i) — линейные расслоения со связностью над многообразием X и пусть Q_i: $\Gamma \to \mathbf{C}^*$ — соответствующие скалярные функции переноса. Тогда (L_1, α_1) и (L_2, α_2) эквивалентны, если и только если $Q_1 = Q_2$.*

Доказательство. Достаточно применить предложение 1.12.2 к случаю, когда ρ: $X \to X$ — тождественное отображение.

Из предложения 1.12.3 следует, что скалярная функция переноса зависит только от класса эквивалентности $l = [(L, \alpha)]$ расслоения (L, α) так, что определена функция Q^l: $\Gamma \to \mathbf{C}^*$ для всех классов l.

Для заданного многообразия X обозначим $\mathscr{L}_c = \mathscr{L}_c(X)$ множество классов эквивалентности $l = [(L, \alpha)]$, для которых значения функции Q^l

лежат в $\mathbf{T}$ (т. е., согласно предложению 1.9.2, для которых существует α-инвариантная эрмитова структура на L).

Замечание 1.12.1. Согласно предложению 1.12.3 класс $l \in \mathscr{L}_c$ не только определяет функцию Q^l, но и сам определяется этой функцией.

Заметим теперь, что если ρ: $X \to Y$ — гладкое отображение многообразий, то соответствие $(L, \alpha) \to (\rho^*(L), \tau_\rho^*\alpha)$ задает отображение

$$\mathscr{L}_c(Y) \to \mathscr{L}_c(X), \tag{1.12.4}$$

переводящее $l = [(L, \alpha)]$ в $\rho^* l = [(\rho^*(L), \tau_\rho^*\alpha)]$.

То, что оно зависит только от класса эквивалентности, ясно, например, из предложений 1.12.2 и 1.12.3. Оттуда же следует, что

$$Q^{\rho^* l}(\gamma) = Q^l(\rho \circ \gamma) \tag{1.12.5}$$

для любой кусочно-гладкой кривой γ на X.

Замечание 1.12.2. Если $[(L_i, \alpha_i)] = l_i \in \mathscr{L}_c(X_i)$ $(i = 1, 2)$ и τ: $L_1 \to L_2$ — отображение линейных расслоений со связностью, то согласно предложению 1.12.2 $(\check{\tau})^* l_2 = l_1$.

1.13. Обозначим $D(X)$ группу всех диффеоморфизмов многообразия X. Тогда $D(X)$ действует на $\mathscr{L}_c(X)$ по правилу $g \cdot l = (g^{-1})^* l$ так, что в силу (1.12.5) для каждой кривой $\gamma \in \Gamma(X)$

$$Q^{g \cdot l}(\gamma) = Q^l(g^{-1} \circ \gamma). \tag{1.13.1}$$

Для любого $l \in \mathscr{L}_c$ обозначим $D_l = D_l(X) \subseteq D(X)$ стабилизатор точки l. Другими словами, D_l — группа всех таких диффеоморфизмов g многообразия X, что для любой кусочно-гладкой кривой γ в X

$$Q^l(\gamma) = Q^l(g^{-1} \circ \gamma). \tag{1.13.2}$$

С другой стороны, если (L, α) — любое расслоение со связностью над X, обладающее α-инвариантной эрмитовой структурой, то мы обозначим $E(L, \alpha)$ группу всех диффеоморфизмов τ: $L \to L$, которые

1) являются отображениями расслоений со связностью (и, следовательно, определяют эквивалентность (L, α) на себя),

2) обладают свойством $|H|^2 \circ \tau = |H|^2$.

Таким образом (см. п. 1.11), если $\tau \in E(L, \alpha)$, то $\check{\tau} \in D(X)$ и τ индуцирует изометрически отображения τ_p: $L_p \to L_{\check{\tau}(p)}$.

Замечание 1.13.1. Согласно предложению 1.9.1 $E(L, \alpha)$ не зависит от выбора H.

Теорема 1.13.1. *Пусть (L, α) — линейное расслоение со связностью над многообразием X, допускающее α-инвариантную эрмитову структуру; $l \in \mathscr{L}_c$ — класс эквивалентности* $[(L, \alpha)]$ (см. п. 1.12). *Тогда имеет место точная последовательность групп*

$$1 \to \mathbf{T} \to E(L, \alpha) \to D_l(X) \to 1,$$

превращающая $E(L, \alpha)$ в центральное расширение $D_l(X)$ с помощью группы $\mathbf{T}$. *Здесь вложение $\mathbf{T} \to E(L, \alpha)$ определяется с помощью скалярного действия $\mathbf{T}$ на L, а отображение $E(L, \alpha) \to D_l(X)$ имеет вид $\tau \to \check{\tau}$* (см. п. 1.11).

Доказательство. Если $\tau \in E(L, \alpha)$, то $\check{\tau} \in D_l(X)$, согласно замечанию 1.12.2. Это отображение сюръективно в силу предложения 1.12.2 (поднятие, очевидно, является диффеоморфизмом). Кроме того, предложение 1.12.2 утверждает, что $\check{\tau}_1 = \check{\tau}_2$, где $\tau_i \in E(L, \alpha)$ $(i = 1, 2)$, если и только если τ_1 отличается от τ_2 скалярным умножением на число из $\mathbf{T}$.

Если $g \in D_l(X)$, то поднятием g в $E(L, \alpha)$ мы назовем отображение $\tau \in E(L, \alpha)$, для которого $\check{\tau} = g$.

Предположим теперь, что группа G действует на X как группа диффеоморфизмов и что элемент $l \in \mathscr{L}_c$ сохраняется под действием G. Другими словами, задан гомоморфизм σ: $G \to D_l(X)$.

Поднятием σ в $E(L, \alpha)$ мы назовем такой гомоморфизм ν: $G \to E(L, \alpha)$, что имеет место коммутативная диаграмма:

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathbf{T} \arrow[r] & E(L, \alpha) \arrow[r] & D_l(X) \arrow[r] & 1 \\
& & G \arrow[u, "\nu"] \arrow[ur, "\sigma"'] & &
\end{tikzcd}
\tag{1.13.3}
$$

Замечание 1.13.1. Гомоморфизм σ определяет класс когомологий $[\mu] \in H^2(G, \mathbf{T})$ (с тривиальным действием G на $\mathbf{T}$), где μ — коцикл, заданный формулой $\mu(a, b) = \mu_0(a)\mu_0(b)\mu_0(ab)^{-1} \in \mathbf{T}$, в которой μ_0 означает любое отображение G в $E(L, \alpha)$, делающее диаграмму (1.13.3) коммутативной. Поднятие ν гомоморфизма σ существует тогда и только тогда, когда $[\mu] = 0$, т. е. тогда и только тогда, когда существует такое отображение ρ: $G \to \mathbf{T}$, что $\mu(a, b) = \rho(a)\rho(b)\rho(ab)^{-1}$.

Пространство K, на котором действует группа H, называется главным однородным пространством для H, если для любых $k, l \in K$ существует существенный элемент $h \in H$, переводящий k в l.

Предложение 1.13.1. *Если $\nu : G \to E(L, \alpha)$ — какое-нибудь поднятие σ, то самое общее поднятие однозначно записывается в виде $a \to \chi(a)\nu(a)$, где χ — характер группы G, т. е. гомоморфизм G в* $\mathbf{T}$.

Таким образом, множество поднятий становится главным однородным пространством для группы характеров G^* группы G, если положить $(\chi\nu)(a) = \chi(a)\nu(a)$.

Доказательство. Так как $\mathbf{T}$ лежит в центре $E(L, \alpha)$, из теоремы 1.13.1 очевидно, что любые два поднятия отличаются на характер.

§ 2. Условие целочисленности

2.1. Пусть $l \in \mathscr{L}_c(X)$; положим по определению $\operatorname{curv} l = \operatorname{curv}(L, \alpha)$, где $l = [(L, \alpha)]$. Это определение корректно, поскольку в силу предложения 1.6.1 $\operatorname{curv}(L_1, \alpha_1) = \operatorname{curv}(L_2, \alpha_2)$, коль скоро $[(L_1, \alpha_1)] = [(L_2, \alpha_2)]$. Напомним, что согласно следствию 1 к предложению 1.9.1 $\operatorname{curv} l$ для любого $l \in \mathscr{L}_c$ является замкнутой вещественной 2-формой на X.

Обозначим $\mathscr{L}_c(X, \omega)$ множество тех $l \in \mathscr{L}_c$, для которых $\operatorname{curv} l = \omega$. Тогда

$$\mathscr{L}_c(X) = \bigcup \mathscr{L}_c(X, \omega)$$

— дизъюнктное объединение по всем замкнутым вещественным 2-формам на X.

Напомним, что группа когомологий де Рама $H^2_D(X, \mathbf{R})$ определяется как фактор-пространство пространства всех гладких замкнутых вещественных 2-форм по подпространству точных форм. Известно также, что $H^2_D(X, \mathbf{R})$ естественно изоморфна группе когомологий Чеха $H^2(X, \mathbf{R})$, рассмотренной в п. 1.2. Напомним, как строится этот изоморфизм.

Пусть $\omega \in \Omega^2(X)$ — вещественная замкнутая форма и $\mathfrak{U} = \{U_i\}$, $i \in I$,— стягиваемое покрытие X. Поскольку U_i стягиваемо, мы можем написать $\omega = d\alpha_i$ в U_i, где $\alpha_i \in \Omega^1(U_i)$ — вещественная форма. С другой стороны, так как $U_i \cap U_j$ стягиваемо и так как $d(\alpha_i - \alpha_j) = \omega - \omega = 0$ в $U_i \cap U_j$, мы можем написать $\alpha_j - \alpha_i = df_{ij}$, где $f_{ij} \in C(U_i \cap U_j)$ — вещественная функция. Но очевидно, что $df_{ij} + df_{jk} + df_{ki} = d(f_{ij} + f_{jk} + f_{ki}) = 0$ в $U_i \cap U_j \cap U_k$ и, так как это множество стягиваемо, то $f_{ij} + f_{jk} + f_{ki} = a_{ijk}$ — вещественная константа, если только $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \varnothing$.

Таким образом, определен коцикл α и его класс когомологий $[a]$. Легко проверить, что класс $[a]$ не зависит от выбора покрытия, форм α_i и функций f_{ij} и определяется классом $[\omega] \in H^2_D(X, \mathbf{R})$.

Тем самым задан гомоморфизм

$$H^2_D(X, \mathbf{R}) \to H^2(X, \mathbf{R}). \tag{2.1.1}$$

Рассуждение с разбиением единицы, аналогичное тому, которое было использовано в доказательстве изоморфизма (1.2.3), показывает, что (2.1.1) — изоморфизм. Поэтому мы будем в дальнейшем отождествлять $H^2_D(X, \mathbf{R})$ и $H^2(X, \mathbf{R})$.

Если A и B — абелевы группы, то любой гомоморфизм $\varepsilon\colon A \to B$ индуцирует гомоморфизм $\tilde{\varepsilon}\colon H^2(X, A) \to H^2(X, B)$, где $\tilde{\varepsilon}[a] = [\varepsilon a]$. В частности, вложение $\varepsilon\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ индуцирует гомоморфизм

$$\tilde{\varepsilon}\colon H^2(X, \mathbf{Z}) \to H^2(X, \mathbf{R}). \tag{2.1.2}$$

Класс $\gamma \in H^2(X, \mathbf{R})$ называется целочисленным, если он лежит в образе этого отображения.

Замечание 2.1.1. Из сказанного следует, что если ω — замкнутая вещественная 2-форма, то класс $[\omega] \in H^2(X, \mathbf{R})$ будет целочисленным, если и только если существует такое стягиваемое покрытие $\mathfrak{U} = \{U_i\}$, $i \in I$, многообразия X, такие вещественные 1-формы $\alpha_i \in \Omega^1(U_i)$ и такие функции $f_{ij} \in C(U_i \cap U_j)$, что $\omega = d\alpha_i$ в U_i, $\alpha_j - \alpha_i = df_{ij}$ в $U_i \cap U_j$ и $f_{ij} + f_{jk} + f_{ki} = a_{ijk}$ — целое число для любых i, j, k, для которых $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \varnothing$.

Напомним, что $\mathscr{L}$ означает совокупность классов эквивалентности линейных расслоений над X и что существует взаимно однозначное отображение $\rho\colon \mathscr{L} \to H^2(X, \mathbf{Z})$ (см. (1.23)). С другой стороны, очевидно, имеется отображение

$$\mathscr{L}_c \to \mathscr{L}, \tag{2.1.3}$$

переводящее $[(L, \alpha)]$ в $[L]$.

Имеет место (см. [5], лемма 2, стр. 108)

Предложение 2.1.1. *Пусть* ω — *замкнутая вещественная 2-форма на* X. *Тогда множество* $\mathcal{L}_c(X, \omega)$ *непусто тогда и только тогда, когда класс* $[\omega] \in H^2(X, \mathbf{R})$ *целочисленный. Кроме того, в этом случае образ* $\mathcal{L}_c(X, \omega)$ *при отображении* (2.1.3) *состоит из тех* $[L] \in \mathcal{L}$, *для которых* $\widetilde{\varepsilon\rho}(L) = [\omega]$. (*Другими словами, при отождествлении* $\mathcal{L}$ *с* $H^2(X, \mathbf{Z})$ *образ* $\mathcal{L}_c(X, \omega)$ *совпадает с прообразом* $[\omega]$ *при отображении* (2.1.2).)

Доказательство. Предположим, что $\mathcal{L}_c(X, \omega)$ непусто и $[(L, \alpha)] \in \mathcal{L}_c(X, \omega)$. Пусть H — α-инвариантная эрмитова структура на H и $\{(U_i, s_i)\}$, $i \in I$,— локальная система для L, соответствующая стягиваемому покрытию. Заменяя s_i на $s_i/|s_i|$, мы можем считать, что $|s_i| = 1$.

Тогда $|c_{ij}| = 1$ для всех функций перехода c_{ij} (см. п. 1.1). Далее, так как $\xi |s_i|^2 = 0$ для $\xi \in \mathfrak{u}$ из (1.9.3) следует, что формы $\alpha_i = \alpha(s_i)$ вещественны для всех $i \in I$. Поэтому функции $f_{ij} = \frac{1}{2\pi i} \ln c_{ij}$ можно выбрать вещественными и, так как $c_{ij} \cdot c_{jk} \cdot c_{ki} = 1$ в $U_i \cap U_j \cap U_k$, величина $a_{ijk} = f_{ij} + f_{jk} + f_{ki}$ целочисленна. Но, поскольку $\alpha_j - \alpha_i = \frac{1}{2\pi i} \frac{dc_{ij}}{c_{ij}}$, согласно (1.4.5) мы получаем $\alpha_j - \alpha_i = df_{ij}$. Кроме того, $\omega = d\alpha_i$ в U_i в силу (1.6.2). Таким образом, $[\omega]$ — целочисленный класс согласно замечанию 2.1.1. Кроме того, $\rho(L) = [a]$ в силу п. 1.2, где a — целочисленный коцикл Чеха, принимающий значение a_{ijk} на $U_i \cap U_j \cap U_k$. С другой стороны, по формуле (2.1.2) $[\omega] = \tilde{\varepsilon}[a]$. Итак, $\widetilde{\varepsilon\rho}(L) = [\omega]$. Предположим теперь, что $[\omega]$ — целочисленный класс. Пусть $\{U_i\}$, $i \in I$, α_i, f_{ij} и a_{ijk} — те же, что и в замечании 2.1.1. Из целочисленности $f_{ij} + f_{jk} + f_{ki} = a_{ijk}$ следует, что функции $c_{ij} = e^{2\pi i f_{ij}}$ удовлетворяют условиям $c_{ij}c_{jk}c_{ki} = 1$ в $U_i \cap U_j \cap U_k$; кроме того, $c_{ij}c_{ji} = 1$ в $U_i \cap U_j$. Тогда существует линейное расслоение L с локальной системой $\{(U_i, s_i)\}$, $i \in I$, для которого c_{ij} являются функциями перехода. Ясно, что $\widetilde{\varepsilon\rho}(L) = [\omega]$.

С другой стороны, если L_1 — любое линейное расслоение, для которого $\widetilde{\varepsilon\rho}(L_1) = [\omega]$, мы можем выбрать f_{ij} так, чтобы класс $[L]$ совпал с $[L_1]$. В самом деле, если c^1_{ij} — функции перехода для L_1 относительно покрытия $\{U_i\}$ (см. замечание 1.2.1) и $f^1_{ij} = \frac{1}{2\pi i} \ln c^1_{ij}$, то из равенства $\widetilde{\varepsilon\rho}(L_1) = [\omega]$ следует, что $\tilde{\varepsilon}[a^1] = \tilde{\varepsilon}[a]$, где $a^1_{ijk} = f^1_{ij} + f^1_{jk} + f^1_{ki}$. Но тогда, заменяя f_{ij} на $f_{ij} + r_{ij}$, для подходящей вещественной коцепи r мы получим $a = a^1$, так что $[a] = [a^1]$ и, следовательно, $[L] = [L_1]$, так как $\rho[L] = [a]$ и $\rho(L_1) = [a^1]$. Далее, равенство $\alpha_j - \alpha_i = df_{ij}$ влечет за собой $\alpha_j - \alpha_i = \frac{1}{2\pi i} \frac{dc_{ij}}{c_{ij}}$ в $U_i \cap U_j$ и, значит, в силу следствия к предложению 1.4.1 существует такая форма связности α на L^*, что $\alpha(s_i) = \alpha_i$. Но, поскольку $d\alpha_i = \omega$ в U_i, $\omega = \operatorname{curv} l$, где $l = [(L, \alpha)]$. Остается показать, что $l \in \mathcal{L}_c$, т. е. что L обладает α-инвариантной эрмитовой структурой H.

Пусть $x, y \in L$ и $\pi(x) = \pi(y) = p \in X$. Тогда $p \in U_i$ для некоторого $i \in I$. Положим $H(x, y) = x/s_i(p) \cdot \overline{y/s_i(p)}$ (см. обозначения в п. 1.4). Это выражение не зависит от $i \in I$, так как $|c_{ij}| = 1$.

Гладкость $|H|^2$ очевидна, так что H задает эрмитову структуру на L. В U_i мы имеем $|s_i|^2 = 1$, поэтому для доказательства α-инвариантности H достаточно, пользуясь (1.4.2), проверить, что для любого вещественного $\xi \in \mathfrak{u}\,(\nabla_\xi s_i,\ s_i) + (s_i, \nabla_\xi s_i) = 0$. Но это немедленно следует из (1.4.3), так как форма α_i вещественна.

2.2. Обозначим (X, ω) многообразие X вещественной замкнутой 2-формой ω на нем. Согласно предложению 2.1.1 мы знаем, что $\mathscr{L}_c(X, \omega)$ непусто, если и только если $[\omega] \in H^2(X, \mathbf{R})$ — целочисленный класс. В этом случае мы можем получить больше информации о $\mathscr{L}_c(X, \omega)$.

В односвязном случае справедлива

Теорема 2.2.1. *Пусть задано (X, ω), класс $[\omega]$ — целочисленный и многообразие X односвязно. Тогда $\mathscr{L}_c(X, \omega)$ состоит ровно из одного элемента. Другими словами, существует единственное с точностью до эквивалентности линейное расслоение со связностью (L, α), обладающее α-инвариантной эрмитовой структурой. Для соответствующего класса $l = [(L, \alpha)] \in \in (\mathscr{L}_c X, \omega)$ справедливо равенство*

$$Q^l(\gamma) = e^{-2\pi i \int_\sigma \omega}, \tag{2.2.1}$$

где γ — кусочно-гладкая замкнутая кривая в X, а σ — любая поверхность деформации для γ (см. п. 1.8).

Доказательство. Согласно предложению 2.1.1 $\mathscr{L}_c(X, \omega)$ непусто. Но если $l \in \mathscr{L}_c(X, \omega)$, то по замечанию 1.12.1 l определяется функцией Q^l. Но по теореме 1.8.1 $Q^l(\gamma)$ задается явно, независимо от l, для тех кривых γ, которые стягиваются в точку. Поскольку X односвязно, это верно для всех кривых γ. Следовательно, l — единственный класс.

Пусть теперь $D(X, \omega)$ означает обобщенную симплектическую группу, т. е. подгруппу таких $g \in D(X)$, для которых $g^*\omega = \omega$. Напомним, что если $l \in \mathscr{L}_c(X)$, то $D_l(X)$ означает группу тех $s \in D(X)$, для которых $s \cdot l = l$.

Предложение 2.2.1. *Пусть $l \in \mathscr{L}_c(X, \omega)$. Тогда $D_l(X) \subset D(X, \omega)$ и, если X односвязно, то $D_l(X) = D(X, \omega)$.*

Доказательство. Пусть $[(L, \alpha)] = l$ и $g \in D_l(X)$. Тогда, если $\tau \in E(L, \alpha)$ — поднятие g, то $\tau^*\alpha = \alpha$ так, что $\tau^* d\alpha = d\alpha$. Поэтому $\tau^*\omega = \omega$. Но если $g \in D(X, \omega)$ и X односвязно, то $Q^l(g^{-1}\gamma) = Q^l(\gamma)$ для любой кривой $\gamma \in \Gamma$, так как $Q^l(\gamma)$ выражается формулой (2.2.1). Поэтому $g \in \in D_l(X)$ в силу (1.12.1).

Теорема 2.2.2. *Предположим, что X односвязно и $[\omega]$ — целочисленный класс, так что существует линейное расслоение со связностью (L, α) (единственное с точностью до эквивалентности), для которого* $\operatorname{curv}(L, \alpha) = \omega$. *Тогда отображение $\tau \to \check{\tau}$ превращает $E(L, \alpha)$ в центральное расширение*

$$1 \to \mathbf{T} \to E(L, \alpha) \to D(X, \omega) \to 1$$

группы $D(X, \omega)$ с помощью $\mathbf{T}$.

Доказательство следует из предложения 2.2.1 и теоремы 1.13.1.

2.3. Рассмотрим общий случай. Пусть Π — фундаментальная группа X и Π^* — группа всех гомоморфизмов (характеров) $\chi\colon \Pi \to \mathbf{T}$.

Так как каждая кривая $\gamma \in \Gamma$ определяет класс сопряженных элементов в Π (без выбора базисной точки) и так как каждый характер $\chi \in \Pi^*$ постоянен на классах сопряженных элементов, мы можем рассматривать Π^* как множество отображений $\chi\colon \Gamma \to \mathbf{T}$, тривиальных на кривых, стягиваемых в точку и обладающих свойством

$$(2.3.1) \qquad \chi(\gamma_1 + \gamma_2) = \chi(\gamma_1)\chi(\gamma_2),$$

где $\gamma_1 + \gamma_2$ — обычная композиция кривых с одним и тем же началом и концом.

Предположим, что $[\omega]$ — целочисленный класс и пусть $\mathscr{P}$ означает совокупность отображений $Q\colon \Gamma \to \mathbf{T}$, удовлетворяющих (2.3.1) и таких, что для кривых, стягиваемых в точку, величина $Q(\gamma)$ задается формулой (1.8.3).

Согласно предложению 2.1.1 $\mathscr{P}$ непусто. Ясно, что группа Π^* действует на $\mathscr{P}$, если положить для $\chi \in \Pi^*$, $Q \in \mathscr{P}$:

$$(2.3.2) \qquad (\chi \cdot Q)(\gamma) = \chi(\gamma) \cdot Q(\gamma).$$

Предложение 2.3.1. *$\mathscr{P}$ является главным однородным пространством относительно Π^*. Другими словами, для любых Q_1, $Q_2 \in \mathscr{P}$ существует единственный элемент $\chi \in \Pi^*$, для которого $\chi \cdot Q_1 = Q_2$.*

Доказательство. Если Q_1, $Q_2 \in \mathscr{P}$ и отображение $\chi\colon \Gamma \to \mathbf{T}$ определено равенством $\chi(\gamma) = Q_2(\gamma)/Q_1(\gamma)$, то, очевидно, выполняется (2.3.1) и $\chi(\gamma) = 1$, если γ стягивается в точку. Поэтому $\chi \in \Pi^*$.

2.4. Пусть X^1 — односвязное накрывающее пространство для X и пусть $\beta\colon X^1 \to X$ — накрывающее отображение. Разумеется, X^1 является многообразием и β — локальный диффеоморфизм.

Фундаментальная группа Π многообразия X действует на X^1. Записывая это действие справа, мы имеем

$$X^1 \times \Pi \to X^1\colon (q, b) \to q \cdot b,$$

где $q \in X^1$, $b \in \Pi$.

Пусть теперь $\omega^1 = \beta^*\omega$. Очевидно, что ω^1 инвариантна относительно действия Π и, следовательно, это действие индуцирует гомоморфизм

$$(2.4.1) \qquad \sigma\colon \Pi \to D(X^1, \omega^1),$$

задаваемый равенством $\sigma(b)q = q \cdot b^{-1}$.

Если $[\omega]$ — целочисленный класс, то $[\omega^1]$ — также целочисленный (обратное не всегда верно).

В этом разделе мы будем предполагать только, что $[\omega^1]$ — целочисленный класс. Пусть $[(L^1, \alpha^1)] = l^1 \in \mathscr{L}_c(X^1, \omega^1)$ — класс расслоений со связностью, однозначно определенный по теореме 2.2.1.

Если существует поднятие $\nu\colon \Pi \to E(L^1, \alpha^1)$ отображения σ, то на пространстве $L = L^1/\nu(\Pi)$ орбит группы Π в L^1 можно ввести структуру линейного расслоения над X. В самом деле, ν задает отображение

$$L^1 \times \Pi \to L^1\colon (x, b) \mapsto x \cdot b,$$

где $x \in L^1$, $b \in \Pi$ и $x \cdot b = \nu(b)^{-1}x$.

Пусть $\widetilde{\beta}\colon L^1 \to L$ задано формулой $x \mapsto x \cdot \Pi$. Если $U \subseteq X^1$ — такое связное открытое множество в X^1, что $U \cdot b \cap U = \varnothing$ при $b \neq 1$, то тем же

свойством обладает множество $(\pi^1)^{-1}(U) \subseteq L^1$, где $\pi^1\colon L^1 \to X^1$ — проекция расслоения. Таким образом, L является многообразием, $\tilde{\beta}$ — накрывающее отображение и локальный диффеоморфизм. Кроме того, очевидно, существует единственное гладкое отображение $\pi\colon L \to X$, для которого коммутативна диаграмма

$$\text{(2.4.2)} \qquad \begin{array}{ccc} L^1 & \xrightarrow{\pi^1} & X^1 \\ {\scriptstyle\tilde{\beta}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\ L & \xrightarrow{\pi} & X \end{array}$$

Для каждой точки $p \in X$ в $\pi^{-1}(p)$ однозначно вводится структура линейного пространства, согласованная с отображением $\tilde{\beta}\colon (\pi^1)^{-1}(p^1) \to \pi^{-1}(p)$ для любого $p^1 \in \beta^{-1}(p)$. Структура прямого произведения, которая есть в $(\pi^1)^{-1}(U)$ для достаточно малых U, обладающих указанным выше свойством, определяет такую же структуру в $\tilde{\beta}[(\pi^1)^{-1}(U)]$, что доказывает локальную тривиалоность L.

Далее, так как α^1 инвариантно относительно Π, существует единственная 1-форма α^* на L^*, определяющая связность в расслоении L и такая, что $\tilde{\beta}^*(\alpha) = \alpha^1$. Из (2.4.2) следует, что $d\alpha = \tilde{\pi}^*\omega$ и, так как Π сохраняет α^1-инвариантную эрмитову структуру на L^1, отсюда следует, что $[(L, \alpha)] = l \in \mathcal{L}_c(X, \omega)$. В частности, $[\omega]$ — целочисленный класс. Так как класс $[(L, \alpha)] \in \mathcal{L}_c(X, \omega)$ зависит от поднятия ν, мы будем обозначать его

$$l_\nu = [(L, \alpha)]. \tag{2.4.3}$$

Обратно, если $[\omega]$ — целочисленный класс и $[(L, \alpha)] = l \in \mathcal{L}_c(X, \omega)$, то обозначим L^2 линейное расслоение $\tilde{\beta}^*(L)$ над X^1 (см. п. 1.11) и пусть $\beta^2\colon L^2 \to L$ играет роль отображения $\tilde{\beta}$. Тогда диаграмма (2.4.2) коммутативна (если заменить в ней $\tilde{\beta}$ и L^1 на β^2 и L^2). Далее, если положить $\alpha^2 = (\beta^2)^*\alpha$, то $[(L^2, \alpha^2)] \in \mathcal{L}_c(X^1, \omega^1)$. Но по теореме 2.2.1 расслоение со связностью (L^2, α^2) эквивалентно (L^1, α^1) и, следовательно, существует такое отображение $\beta\colon L_1 \to L$, для которого коммутативна диаграмма (2.4.2) и справедливо равенство $\beta^*\alpha = \alpha^1$. Определим действие Π на L^1, полагая для $x \in L^1$, $b \in \Pi$ $x \cdot b$ равным единственному элементу $y \in L^1_{\pi^1(x)\cdot b}$, для которого $\tilde{\beta}(x) = \tilde{\beta}(y)$. Так как $\tilde{\beta}(x \cdot b) = \tilde{\beta}(x)$, форма α^1 инвариантна относительно Π и так как L обладает α-инвариантной эрмитовой структурой, Π сохраняет α^1-инвариантную эрмитову структуру на L^1. Таким образом, действие Π на L^1 является поднятием $\nu\colon \Pi \to E(L^1, \alpha^1)$ отображения σ. Мы доказали

Предложение 2.4.1. *Пусть $\beta\colon X^1 \to X$ — накрывающее отображение односвязного накрытия X^1 многообразия X и $\omega^1 = \beta^*\omega$. Если $[\omega^1] \in H^2(X^1, \mathbf{R})$ — целочисленный класс, то класс $[\omega] \in H^2(X, \mathbf{R})$ является целочисленным тогда и только тогда, когда существует поднятие $\Pi \to E(L^1, \alpha^1)$ канонического гомоморфизма $\Pi \to D(X^1, \omega^1)$.*

Здесь Π означает фундаментальную группу многообразия X, а (L^1, α^1) — единственное с точностью до эквивалентности линейное расслоение со связностью над X^1, для которого $\operatorname{curv}(L^1, \alpha^1) = \omega^1$.

Другими словами, в обозначениях замечания 1.13.1 класс $[\omega]$ является целочисленным, если и только если класс $[\mu] \in H^2(\Pi, \mathbf{T})$ обращается в нуль.

2.5. Предположим теперь, что $[\omega]$ и, следовательно, $[\omega^1]$ — целочисленные классы и пусть (L^1, α^1) — как и выше. Выберем точку $p \in X$ и кривую $\gamma \in \Gamma$ с началом и концом в точке p. Пусть $p^1 \in \beta^1(p)$ и γ^1 — единственно кусочно-гладкая кривая в X^1, накрывающая γ и выходящая из точки p^1. Если в $b \in \Pi$ — класс кривой γ, то конечной точкой γ^1 будет $p^1 \cdot b$ и параллельный перенос

(2.5.1) $$P_{\gamma^1}\colon L^1_{p^1} \to L^1_{p^1 \cdot b}$$

является линейным изоморфизмом.

Пусть $\nu\colon \Pi \to E(L^1, \alpha^1)$ — какое-нибудь поднятие отображения (2.4.1) и пусть $[(L, \alpha)] = l_\nu \in \mathcal{L}_c(X, \omega)$ определено, как в (2.4.3), так, что $L = L^1/\nu(\Pi)$ и $\widetilde{\beta}^*\alpha = \alpha^1$. Мы получаем тогда другое отображение:

(2.5.2) $$\nu(b^{-1})\colon L^1_{p^1} \to L^1_{p^1 \cdot b}.$$

Сравнивая (2.5.1) и (2.5.2), мы получаем следующее выражение для скалярной функции переноса Q^{l_ν} на $\Gamma = \Gamma(X)$.

Предложение 2.5.1. *Для любого* $0 \neq x \in L^1_{p^1}$

(2.5.3) $$Q^{l_\nu}(\gamma) = P_{\gamma^1}x/\nu(b^{-1})x.$$

Доказательство. Пусть $y = \widetilde{\beta}x \in L_p$. Тогда, поскольку $\widetilde{\beta}$, очевидно, сохраняет параллельный перенос, мы имеем $Q^{l_\nu}(\gamma)y = \widetilde{\beta}(P_{\gamma^1}x)$. С другой стороны, $y = \widetilde{\beta}(x \cdot b)$, т. е. $\widetilde{\beta}(Q^{l_\nu}(\gamma)(x \cdot b)) = Q^{l_\nu}(\gamma)\widetilde{\beta}(x \cdot b) = Q^{l_\nu}(\gamma) \cdot y = \widetilde{\beta}(P_{\gamma^1}x)$. Поэтому $Q^{l_\nu}(\gamma)x \cdot b = P_{\gamma^1}x$, что доказывает предложение, ибо $x \cdot b = \nu(b^{-1})x$.

Напомним, что согласно предложению 2.3.1 совокупность всех поднятий отображения (2.4.1) является главным однородным пространством для Π^*. Мы можем теперь описать структуру $\mathcal{L}_c(X, \omega)$.

Теорема 2.5.1. *Пусть (X, ω) — многообразие X с вещественной замкнутой 2-формой ω. Предположим, что класс $[\omega] \in H^2(X, \mathbf{R})$ — целочисленный (так что множество $\mathcal{L}_c(X, \omega)$ классов эквивалентности линейных расслоений со связностью, имеющих ω своей формой кривизны, непусто в силу предложения* 2.1.1).

Сохраним обозначение $\mathcal{P}$ из п. 2.3 *и напомним, что $\mathcal{P}$ является главным однородным пространством для группы Π^* характеров фундаментальной группы Π многообразия X. Тогда отображение*

(2.5.4) $$\mathcal{L}_c(X, \omega) \to \mathcal{P},$$

задаваемое формулой $l \to Q^l$, является биекцией, превращающей $\mathcal{L}_c(X, \omega)$ в главное однородное пространство для Π^* относительно действия

(2.5.5) $$Q^{\chi \cdot l} = \chi \cdot Q^l.$$

Напомним далее (*см. предложение* 1.13.1), *что множество поднятий ν отображения* (2.4.1) *является также главным однородным пространством*

для Π^*. *Соответствие между этим множеством и* $\mathscr{L}_c(X,\ \omega)$, *заданное формулой* $\nu \to l_\nu$ (см. 2.4.3), *является биекцией и обладает свойством*

$$l_{\chi\cdot\nu} = \chi\cdot l_\nu. \tag{2.5.6}$$

Доказательство. Согласно замечанию 1.12.1 отображение (2.5.4) инъективно. Пусть ν: $\Pi \to E(L^1,\ \alpha^1)$ — какое-нибудь поднятие 5 (см. (2.4.1)) так, что $Q^{l_{\chi\cdot\nu}}$ лежит в образе (2.5.4) для некоторого $\chi \in \Pi^*$. Но согласно (2.5.3), поскольку $(\chi\cdot\nu)(b^{-1}) = \chi(b^{-1})\cdot\nu(b^{-1})$ для $\gamma \in \Gamma$, мы имеем

$$Q^{l_{\chi\cdot\nu}}(\gamma) = \chi(b)\,Q^{l_\nu}(\gamma) = \chi(\gamma)\,Q^{l_\nu}(\gamma) = (\chi\cdot Q^{l_\nu})(\gamma),$$

так, что $Q^{l_{\chi\cdot\nu}} = \chi\cdot Q^{l_\nu}$. Поскольку χ произволен, отображение (2.5.4) сюръективно. Это соотношение вместе с (2.5.5) доказывает остальные утверждения теоремы.

2.6. Пусть задано $(X,\ \omega)$ с целочисленным классом $[\omega]$ и пусть фиксирован $[(L,\ \alpha)] = l \in \mathscr{L}_c(X,\ \omega)$. Мы хотим вычислить «алгебру Ли» группы $E(L,\ \alpha)$. Заметим, что каждый элемент $\tau \in E(L,\ \alpha)$ сохраняет L^*, и обратно всякий диффеоморфизм L^*, который (1) коммутирует с действием $\mathbf{C}^*$, (2) оставляет α инвариантной и (3) сохраняет $|H|^2$, где H — α-инвариантная эрмитова структура на L, продолжается до элемента $\tau \in E(L,\ \alpha)$.

Мы можем поэтому рассматривать $E(L,\ \alpha)$ как группу диффеоморфизмов L^*.

Замечание 2.6.1. Сказанное выше является частным случаем того факта, что всякий диффеоморфизм главного расслоения, перестановочный с действием группы расслоения, определяет каноническим образом диффеоморфизм любого ассоциированного расслоения.

Для любого $x \in L^*$ обозначим $\mathrm{Ver}_x(L)$ двумерное касательное пространство к $L^*_{\pi(x)}$ (или $L^*_{\pi(x)}$, что то же самое) в точке x и положим

$$\mathrm{Hor}_x(L) = \ker\alpha_x,$$

где α_x — значение α в точке x.

Если τ — диффеоморфизм многообразия, то τ_* означает производное отображение (диффеоморфизм соответствующих касательных пространств).

Предложение 2.6.1. *Для любого* $x \in L^*$ *имеет место разложение в прямую сумму*

$$T_x(L) = \mathrm{Ver}_x(L) \oplus \mathrm{Hor}_x(L). \tag{2.6.1}$$

Кроме того, если τ — *диффеоморфизм* L^*, *который* (1) *перестановочен с действием* $\mathbf{C}^*$ *и* (2) *удовлетворяет условию* $\tau^*\alpha = \alpha$, *то*

$$\tau_*\mathrm{Ver}_x(L) = \mathrm{Ver}_{\tau x}(L), \tag{2.6.2}$$

$$\tau_*\mathrm{Hor}_x(L) = \mathrm{Hor}_{\tau x}(L). \tag{2.6.3}$$

Доказательство. Ясно, что $\ker\alpha_x = \ker\mathrm{Re}\,\alpha_x \cap \ker\mathrm{Im}\,\alpha_x$. Поэтому $\ker\alpha_x$ имеет коразмерность самое большее 2 в $T_x(L)$.

С другой стороны, поскольку $\frac{1}{2\pi i}\frac{dz}{z}$ не обращается в нуль ни на одном вещественном касательном векторе к $\mathbf{C}^*$, мы видим, что $\ker\alpha_x \cap \mathrm{Ver}_x(L) = 0$. Это доказывает (2.6.1). Соотношения (2.6.2) и (2.6.3) очевидны, так как

$$\tau(L^*_{\pi(x)}) = L^*_{\pi(\tau x)} \quad \text{и} \quad \tau^*\alpha = \alpha.$$

Пусть теперь $\mathfrak{e} = \mathfrak{e}(L)$ — алгебра Ли всех вещественных векторных полей η на L^*, которые «перестановочны» с действием $\mathbf{C}^*$ на L^*, т. е. обладают свойством

(2.6.4) $$c_*\eta_x = \eta_{cx}$$

для всех $c \in \mathbf{C}^*$, $x \in L^*$.

Введем также в рассмотрение вложение

$$C(X) \to C(L^*):\ \varphi \mapsto \widetilde{\varphi},$$

действующее по формуле $\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(\pi(x))$. Образ этого вложения обозначим $\widetilde{C}$.

Замечание 2.6.2. Из локальной структуры прямого произведения в L^* видно, что $\widetilde{C}$ совпадает с множеством функций $\varphi \in C(\mathscr{L}^*)$, инвариантных относительно действия $\mathbf{C}^*$ и, следовательно, в силу (2.6.6) $\widetilde{C}$ переходит в себя под действием $\mathfrak{e}(L)$.

Поле $\eta \in \mathfrak{e}(L)$ назовем вертикальным, если $\eta_x \in \operatorname{Ver}_x(L)$, и горизонтальным, если $\eta_x \in \operatorname{Hor}_x(L)$ при всех $x \in L^*$.

Пусть $\operatorname{Ver} L$ и $\operatorname{Hor} L$ означают соответственно пространства всех вертикальных и горизонтальных векторных полей из $\mathfrak{e}(L)$. Из предложения 2.6.1 (примененного к случаю, когда τ — умножение на элемент, из $\mathbf{C}^*$) следует, что как линейное пространство

(2.6.5) $$\mathfrak{e}(L) = \operatorname{Ver} L \oplus \operatorname{Hor} L.$$

Если M и N — многообразия и $\sigma\colon M \to N$ — гладкое отображение, то векторное поле ξ на M и векторное поле η на N называется σ-связанными в случае, когда $\sigma_*\xi_p = \eta_{\sigma(p)}$ для всех $p \in M$. Мы можем тогда писать $\sigma_*\xi = \eta$. Довольно просто установить, что если ξ_i σ-связано с η_i $(i = 1, 2)$, то $[\xi_1, \xi_2]$ σ-связано с $[\eta_1, \eta_2]$, т. е.

(2.6.6) $$\sigma_*[\xi_1, \xi_2] = [\sigma_*\xi_1, \sigma_*\xi_2].$$

Далее, так как $\widetilde{\pi}\circ c = \widetilde{\pi}$, где $\widetilde{\pi}\colon L^* \to X$ — ограничение π на L^*, а c — диффеоморфизм умножения на число из $\mathbf{C}^*$, то в силу (2.6.4) справедливо соотношение $\widetilde{\pi}_*\eta_x = \widetilde{\pi}_*\eta_y$ для всех $\eta \in \mathfrak{e}(L)$, если только $\widetilde{\pi}(x) = \widetilde{\pi}(y)$.

Таким образом, для заданного $\eta \in \mathfrak{e}(L)$ можно определить векторное поле $\check{\eta}$ на X равенством

(2.6.7) $$\check{\eta}_p = \widetilde{\pi}_*\eta_x$$

для любого $x \in L_p^*$. Чтобы показать гладкость $\check{\eta}$, заметим, что для любой функции $\varphi \in C(X)$ выражение $\eta\widetilde{\varphi} = (\check{\eta}\varphi)^\sim$ является гладкой функцией и, следовательно $\check{\eta}\varphi$ — гладкая функция (так как существует локальное сечение).

Очевидно, что η и $\check{\eta}$ π-связаны, так что в силу (2.6.6) справедливо соотношение

(2.6.8) $$[\eta_1, \eta_2]^\vee = [\check{\eta}_1, \check{\eta}_2].$$

Замечание 2.6.3. Подпространство $\operatorname{Ver}(L)$ является ядром гомоморфизма алгебры Ли $\mathfrak{e}(L)$ в $\mathfrak{e}(X)$, переводящего η в $\check{\eta}$ и, следовательно, является идеалом в $\mathfrak{e}(L)$.

2.7. Говорят, что группа Ли G гладко действует на многообразии M, если задан гомоморфизм $\sigma\colon G \to D(M)$, для которого отображение

(2.7.1) $$G \times M \to M\colon (g, p) \to \sigma(g)p$$

является гладким. В этом случае $C(M)$ снабжается естественной структурой G-модуля:

$$(2.7.2) \qquad g\varphi(p) = \varphi(g^{-1}p)$$

для $\varphi \in C(M)$, $g \in G$, $p \in M$.

Если $G = \mathbf{R}$, то σ называется однопараметрической группой диффеоморфизмов.

Вещественное векторное поле η на M называется глобально интегрируемым, если существует такая однопараметрическая группа диффеоморфизмов $\sigma(t)$, что

$$(2.7.3) \qquad \eta(\varphi)(p) = \frac{d}{dt}\varphi(\sigma(-t)p)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\sigma(t)\varphi)|_{t=0}$$

для всех $\varphi \in C(M)$. Известно, что в этом случае σ (называемое порожденной группой диффеоморфизмов) определяется однозначно и что σ в свою очередь определяет поле η (называемое инфинитезимальной образующей σ) по формуле (2.7.3).

Напомним теперь (см. (1.10.2)), что каждая функция $\varphi \in C^*$ задает диффеоморфизм τ_ψ пространства L^* по формуле

$$(2.7.4) \qquad \tau_\psi x = \psi(x)\cdot x.$$

Элементы $\operatorname{Ver}(L)$ могут быть охарактеризованы следующим образом.

Предложение 2.7.1. *Для любой функции $\varphi \in C(X)$ существует единственное вещественное векторное поле $\eta(\varphi)$ на L^*, для которого справедливо равенство*

$$(2.7.5) \qquad [\eta(\varphi)\psi](x) = \frac{d}{dt}\psi(e^{-2\pi it\widetilde{\varphi}(x)}x)|_{t=0}$$

для любых $\psi \in C(L^*)$, $x \in L^*$. Кроме того, $\eta(\varphi) \in \operatorname{Ver}(L)$ и отображение

$$(2.7.6) \qquad C(X) \to \operatorname{Ver}(L),$$

переводящее φ в $\eta(\varphi)$, является линейным изоморфизмом. Поле $\eta(\varphi)$ глобально интегрируемо для любой функции $\varphi \in C(X)$, а соответствующая однопараметрическая группа имеет вид

$$t \mapsto \tau_{\exp 2\pi it\varphi}.$$

Доказательство. Ясно из (2.7.4), что отображение $t \to \tau_{\exp 2\pi it\varphi}$ является однопараметрической группой диффеоморфизмов L^*, перестановочных с действием $\mathbf{C}^*$ и, следовательно, определяет поле $\eta(\varphi) \in e(L)$. Так как орбиты этой группы лежат в слоях L_p^*, $p \in X$, ясно, что $\eta(\varphi) \in \operatorname{Ver}(L)$.

Пусть теперь $\eta \in \operatorname{Ver}(L)$. Для любой точки $x \in L^*$ определим $\psi_x \in C(L^*_{\pi(x)})$ равенством $\psi_x(y) = y/x$ и положим $\rho(x) = \frac{-1}{2\pi i}\eta_x\psi_x \in \mathbf{C}$. Из того, что $c^*(\psi_{cx}) = \psi_x$ для любого $c \in \mathbf{C}^*$ (рассматриваемого, как диффеоморфизм L^*) и из (2.6.4) следует, что функция ρ инвариантна относительно действия $\mathbf{C}^*$ и, следовательно, существует такая функция φ на X, что $\rho(x) = \varphi(\pi(x))$ для всех $x \in L^*$. Чтобы показать гладкость φ, заметим, что если $s \in S^*(U)$

для некоторого открытого множества $U \subseteq X$ и если функция $\psi_s \in C(\widetilde{\pi}^{-1}(U))$ определена равенством $\psi_s(y) = y/s(\pi(y))$, то

$$\varphi \mid_U = \eta\psi_s \circ s. \tag{2.7.7}$$

Теперь можно утверждать, что $\eta = \eta(\varphi)$, так как $\rho(x) = \frac{-1}{2\pi i}\eta(\varphi)_x\psi_x$ в силу (2.7.5). Отсюда следует $\eta(\varphi)_x = \eta_x$, так как ненулевой элемент $\mathrm{Ver}_x(L)$ не обращается в нуль на ψ_x. Мы доказали сюръективность отображения (2.7.6). Оно инъективно в силу (2.7.7), где $\eta = \eta(\varphi)$. Последнее утверждение предложения очевидно из определения $\eta(\varphi)$.

Замечание 2.7.2. Из предложения 2.7.1 следует, что $\mathrm{Ver}(L)$ — коммутативная алгебра Ли, так как группа диффеоморфизмов вида τ_φ, $\varphi \in C^*(X)$, очевидно, коммутативна.

Следующее утверждение позволяет восстановить φ по $\eta(\varphi)$.

Предложение 2.7.2. *Для любой функции* $\varphi \in C$

$$\langle\alpha, \eta(\varphi)\rangle = -\widetilde{\varphi}.$$

Доказательство. В ходе доказательства предложения 2.7.1 мы установили равенство $\rho(x) = \frac{-1}{2\pi i}\eta_x\psi_x$ для $x \in L^*$. Для $\eta(\varphi)$ в качестве η это дает

$$\widetilde{\varphi}(x) = \frac{-1}{2\pi i}\eta(\varphi)_x\psi_x. \tag{2.7.8}$$

Но ясно, что $\alpha|_{L^*_{\pi(x)}} = \frac{1}{2\pi i}\frac{d\psi_x}{\psi_x}$. Так как $\psi_x(x) = 1$, мы получаем $\langle\alpha, \eta(\varphi)\rangle_x = \frac{1}{2\pi i}\eta(\varphi)_x\psi_x$. Применяя (2.7.1), получим искомый результат.

2.8. Пусть $\mathfrak{d}(X)$ означает алгебру Ли вещественных векторных полей на X (так что $\mathfrak{u} = \mathfrak{d}(X) + i\mathfrak{d}(X)$).

Предложение 2.8.1. *Для любого поля* $\xi \in \mathfrak{d}(X)$ *существует единственное такое поле* $\widetilde{\xi} \in \mathrm{Hor}(L)$, *что* $\widetilde{\xi}$ *и* ξ π-*связаны. Отображение*

$$\mathfrak{d}(X) \to \mathrm{Hor}(L), \tag{2.8.1}$$

переводящее ξ *в* $\widetilde{\xi}$, *является линейным изоморфизмом.*

Доказательство. Из локальной структуры прямого произведения в L легко вытекает точность последовательности

$$0 \to \mathrm{Ver}_x(L) \to T_x(L) \xrightarrow{\pi_x} T_{\pi(x)}(X) \to 0$$

для любого $x \in L^*$. Значит, отображение π_*: $\mathrm{Hor}_x(L) \to T_{\pi(x)}(X)$ является изоморфизмом в силу (2.6.1), так что если существует поле $\widetilde{\xi} \in \mathrm{Hor}(L)$, $\widetilde{\pi}$-связное с ξ, то такое поле единственно.

Таким образом, для доказательства существования отображения (2.8.1) мы должны только проверить гладкость поля $\widetilde{\xi}$, принимающего в точке x значение $\widetilde{\xi_x}$, где $\widetilde{\xi}_x$ — единственный вектор из $\mathrm{Hor}_x(L)$, для которого $\widetilde{\pi}(\widetilde{\xi}_x) = \xi_x$. (Ясно, что $\widetilde{\xi}$ инвариантно относительно действия $\mathbf{C}^*$.)

Пусть $U \subseteq X$ — открытое множество, для которого $S^*(U)$ непусто. Для $s \in S^*(U)$ определим вещественное поле ξ_s на $\mathbf{C}^* \times U$ по формуле

$$(2.8.2)\qquad (\xi_s)_{c,\,p} = \left\{2\pi i\left[\langle\overline{\alpha(s)},\, \xi\rangle_p\, \bar{c}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \langle\alpha(s),\, \xi\rangle_p c\frac{\partial}{\partial z}\right],\ \xi_p\right\}.$$

Ясно, что ξ_s вещественно, гладко и что $\langle\sigma_s^*\alpha, \xi_s\rangle = 0$ в силу (1.5.2), так как $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ ортогонально dz.

Далее, так как $z\frac{\partial}{\partial z}$ и $\bar{z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ оба $\mathbf{C}^*$-инвариантны, $(\sigma_s)_*\, \xi_s \in \operatorname{Hor}(\tilde{\pi}^{-1}(U))$. Однако если $x = \sigma_s(c, p)$, то $\pi_*((\sigma_s)_*\xi_s)_x = \xi_p$ так, что должно быть

$$(2.8.3)\qquad (\sigma_s)_*\xi_s = \tilde{\xi}|_{\tilde{\pi}^{-1}(U)}.$$

Это доказывает гладкость $\tilde{\xi}$.

Отображение (2.8.1), очевидно, инъективно, но оно также и сюръективно, ибо если $\eta \in \operatorname{Hor}(L)$, то $\pi_*\eta_x = \pi_*\eta_{cx}$ для всех $c \in \mathbf{C}^*$, $x \in L^*$ в силу (2.6.4) и, следовательно, существует единственное векторное поле ξ на X, для которого справедливо соотношение $\pi_*\eta_x = \xi_{\pi(x)}$ для всех $x \in L^*$. Поле ξ гладко, так как для любой функции $\varphi \in C$ $(\xi\varphi)^\sim = \eta\tilde{\varphi}$, откуда $(\xi\varphi)^\sim$ и, следовательно, $\xi\varphi$ — гладкие функции. Очевидно, что $\eta = \tilde{\xi}$.

2.9. Таким образом, множество $C(X) \times \mathfrak{d}(X)$ параметризует $\mathfrak{e}(L)$. Для любых $\varphi \in C$, $\xi \in \mathfrak{d}$ положим $\eta(\varphi, \xi) = \eta(\varphi) + \tilde{\xi} \in \mathfrak{e}(L)$.

Предложение 2.9.1. *Отображение $C \times \mathfrak{d} \to \mathfrak{e}(L)$, заданное формулой $(\varphi, \xi) \mapsto \eta(\varphi, \xi)$, является линейным изоморфизмом. Кроме того, если H — α-инвариантная эрмитова структура на L, то $\eta(\varphi, \xi)\,|H|^2 = 0$, если и только если φ вещественна.*

Доказательство. Первое утверждение вытекает из (2.6.5) и предложений 2.7.1 и 2.8.1. Далее, согласно (1.9.2) $d\,|H|^2/|H|^2 = 2\pi i(\alpha - \bar{\alpha})$. Но если $\xi \in \mathfrak{d}$, то $\langle\alpha, \tilde{\xi}\rangle = 0$, и следовательно, $\langle\bar{\alpha}, \xi\rangle = 0$, так как ξ вещественно. Поэтому $\langle d\,|H|^2, \tilde{\xi}\rangle = \tilde{\xi}\,|H|^2 = 0$. Так как $\eta(\varphi)$ вещественно, то $\langle\alpha - \bar{\alpha}, \eta(\varphi)\rangle = \bar{\varphi} - \varphi$ согласно предложению 2.7.2. Поэтому $\langle d|H|^2, \eta(\varphi)\rangle = \eta(\varphi)|H|^2 = 0$, если и только если φ вещественна.

2.10. Известно, что вещественное векторное поле ξ на многообразии M глобально интегрируемо, если для любой точки $p \in M$ существует глобальная траектория γ поля ξ, выходящая из p. Это значит, что существует гладкая кривая $\gamma\colon \mathbf{R} \to M$, обладающая свойствами $\gamma(0) = p$ и $\gamma'(t) = \xi_{\gamma(t)}$ для всех t.

Заметим, что всякая кривая $\tilde{\gamma}(t)$ в L^* является неисчезающим сечением над кривой $\gamma(t) = \pi(\tilde{\gamma}(t))$ в X. Следующее утверждение обобщает предложение 2.7.1.

Теорема 2.10.1. *Пусть $\eta \in \mathfrak{u}(L)$, так что $\eta = \eta(\varphi, \xi)$ для однозначно определенных $\varphi \in C(X)$ и $\xi \in \mathfrak{d}(X)$. Тогда η глобально интегрируемо на L^* тогда и только тогда, когда ξ глобально интегрируемо на X. В этом случае глобальная траектория $\tilde{\gamma}$, выходящая из точки $x \in L^*$, задается формулой*

$$(2.10.1)\qquad \tilde{\gamma}(t) = g(t)s(t),$$

где s — единственное самопараллельное сечение с условием $s(p) = x$ над кривой γ, которая является глобальной траекторией поля ξ, выходящей из точки

$p = \pi(x)$, *а функция* g *на* $\mathbf{R}$ *задается формулой*

(2.10.2) $$g(t) = e^{-2\pi i \int_0^t \varphi(\gamma(r))\,dr}.$$

Доказательство. Так как $\pi_*(\eta(\varphi, \xi)_y) = \xi_{\pi(y)}$, ясно, что если $\tilde{\gamma}$ — глобальная траектория для $\eta(\varphi, \xi)$, проходящая через x, то $\gamma = \pi \circ \tilde{\gamma}$ — глобальная траектория для ξ, проходящая через $p = \pi(x)$.

Следовательно, ξ — глобально интегрируемо, если этим свойством обладает η.

Предположим теперь, что ξ глобально интегрируемо и γ—глобальная траектория для ξ, проходящая через $p = \pi(x)$. Обозначим s самопараллельное сечение вдоль γ, выделяемое условием $s(p) = x$. Тогда для любого $t \in \mathbf{R}$

$$s'(t) \in \mathrm{Hor}_{s(t)}(L),$$

поскольку $\langle \alpha, s'(t)\rangle = 0$ в силу (1.7.2). Но так как $\langle \alpha, s'\rangle = \left\langle s^*\alpha, \frac{d}{dt}\right\rangle$, это влечет $s^*\alpha = 0$. Следовательно, если g — любая неисчезающая гладкая функция на $\mathbf{R}$ и $r = g\cdot s$, то согласно (1.5.3)

$$r^*\alpha = \frac{1}{2\pi i}\frac{dg}{g}.$$

Значит, $\langle \alpha, r'\rangle = \left\langle r^*\alpha, \frac{d}{dt}\right\rangle = g'/2\pi i g$. Но тогда, если мы определим g формулой (2.10.2), мы получим

(2.10.3) $$\langle \alpha, r'\rangle = -\varphi\circ\gamma.$$

С другой стороны, если $\eta(\varphi)\circ r$ означает вертикальное векторное поле вдоль γ, заданное формулой $(\eta(\varphi)\circ r)(t) = \eta(\varphi)_{r(t)}$, то $\langle \alpha, \eta(\varphi)\circ r\rangle = -\varphi\circ\gamma$ согласно предложению 2.7.2, так как $\tilde{\varphi}(r(t)) = \varphi(\pi(r(t))) = \varphi(\gamma(t))$. Но тогда в силу (2.10.3) поле $h = r' - \eta(\varphi)\circ r$ горизонтально вдоль γ, и, следовательно, равенство $r' = \eta(\varphi)\circ r + h$ является разложением r' на вертикальную и горизонтальную составляющие. Кроме того, $\pi_* r'(t) = \gamma'(t) = \xi_{\gamma(t)}$. Таким образом, горизонтальная компонента $r'(t)$ совпадает с $\tilde{\xi}_{r(t)}$, т. е. $h = \tilde{\xi}_{r(t)}$. Поэтому для всех $t \in \mathbf{R}$

(2.10.4) $$r'(t) = \eta(\varphi)_{r(t)} + \tilde{\xi}_{r(t)} = \eta(\varphi\xi)_{r(t)}.$$

Так как $r(0) = x$, мы доказали, что $\tilde{\gamma} = r$ является глобальной траекторией поля $\eta(\varphi, \xi)$, проходящей через точку x.

§ 3. Алгебра Ли векторных полей, сохраняющих связность, как центральное расширение алгебры Ли гамильтоновых векторных полей

3.1. Для любого векторного поля $\xi \in \mathfrak{u} = \mathfrak{d} + i\mathfrak{d}$ на X обозначим через β_ξ 1-форму на X, заданную равенством $\beta_\xi = i(\xi)\omega$, где $\omega = \mathrm{curv}(L, \alpha)$. Таким образом, если $\eta \in \mathfrak{u}$, то

(3.1.1) $$\langle \beta_\xi, \eta\rangle = \omega(\xi, \eta).$$

Относительно производной Ли формы ω вдоль поля ξ справедливо

Предложение 3.1.1. *Для любого* $\xi \in \mathfrak{u}$

$$\theta(\xi)\omega = d\beta_\xi,$$

так что $\theta(\xi)\omega = 0$ (*т. е.* ξ *локально гамильтоново в обобщенном смысле — здесь* ω *не обязательно невырождена*), *если и только если* β_ξ *замкнута.*

Доказательство. Это следует немедленно из (1.3.1), так как ω замкнута.

Пусть $\mathfrak{u}$ (X, ω) (соответственно $\mathfrak{d}\,(X, \omega)$) — алгебра Ли всех (соответственно вещественных) векторных полей, для которого $\theta(\xi)\omega = 0$.

Замечание 3.1.1. Если $\xi \in \mathfrak{d}$ (X) глобально интегрируемо, то ясно, что $\xi \in \mathfrak{d}$ (X, ω), если и только если соответствующая однопараметрическая группа принадлежит $D(X, \omega)$.

Напомним, что если $\beta \in \Omega(M)$ для некоторого многообразия M и $\xi \in \mathfrak{d}$ (M) — глобально интегрируемое поле, то

$$(\theta\,(\xi)\,\beta)\,(p) = \frac{d}{dt}\,(\sigma\,(t)\cdot\beta)\,(p)\,|_{t=0},$$

где $\sigma(t)$ — однопараметрическая группа, порождения ξ, а действие $D(M)$ на $\Omega(M)$ определено равенством

(3.1.2) $$(\tau\cdot\beta)(p) = (\tau^*)^{-1}[\beta(\tau^{-1}p)].$$

3.2. Пусть $\mathfrak{a}$ $(X, \omega) \subseteq \mathfrak{d}$ (X, ω) — подалгебра всех вещественных векторных полей, для которых форма β_ξ точна, т. е. $\beta_\xi = d\varphi$ для некоторой вещественной функции $\varphi \in C$.

Замечание 3.2.1. Очевидно, что $\mathfrak{a} = \mathfrak{d}$ (X, ω), если $H^1(X, \mathbf{R}) = 0$. В частности, это равенство справедливо для односвязных X.

Предложение 3.2.1. *Если* $\xi, \eta \in \mathfrak{u}$ и $\xi \in \mathfrak{a}$ (X, ω), *то*

(3.2.1) $$\theta(\xi)\beta_\eta = \beta_{[\xi,\eta]}\,.$$

Кроме того, $\mathfrak{a}$ *содержит коммутант* $\mathfrak{d}$ (X, ω) *и, в частности,* $\mathfrak{a}$ — *идеал в* $\mathfrak{d}$ (X, ω).

Доказательство. Для любых $\xi, \eta \in \mathfrak{u}$ известно (см. (1.3.2)), что $[\theta(\xi), i(\eta)] = i([\xi, \eta])$. Если $\xi \in \mathfrak{a}$ (X, ω), то (3.2.1) получается применением $\theta(\xi)$ к равенству $i(\eta)\omega = \beta_\eta$, так как $\theta(\xi)\omega = 0$.

Если теперь оба поля ξ, η принадлежат $\mathfrak{u}\,(X, \omega)$, то в силу (1.3.1) $\beta_{[\xi,\eta]} = \theta(\xi)\beta_\eta = d[i(\xi)\beta_\eta]$, так что $\beta_{[\xi,\eta]}$ — точная форма. Если ξ и η вещественны, то вещественна и функция $i(\xi)\beta_\eta$. Значит, $[\xi, \eta] \in \mathfrak{a}$ (X, ω).

Замечание 3.2.2. Для любых $\xi, \eta \in \mathfrak{u}$ (X, ω) и $\rho \in \mathfrak{u}$ справедливо равенство

(3.2.2) $$\omega([\xi, \eta], \rho) = \rho\omega(\xi, \eta).$$

В самом деле, левая часть равна $\langle\beta_{[\xi,\eta]}, \rho\rangle$, а правая часть $\langle d[\omega(\xi, \eta)], \rho\rangle$. Но $\omega(\xi, \eta) = \langle\beta_\eta, \xi\rangle = i(\xi)\beta_\eta$. В силу сказанного выше, $\beta_{[\xi,\eta]} = d[i(\xi)\beta_\eta]$, что и доказывает (3.2.2), а также соотношение

(3.2.3) $$\beta_{[\xi,\eta]} = d[\omega(\xi, \eta)].$$

3.3. Предположим теперь, что $l = [(L, \alpha)] \in \mathscr{L}_c(X, \omega)$. Рассмотрим «алгебру Ли» $\mathfrak{e}\,(L, \alpha)$ группы $E(L, \alpha)$ (см. п. 1.12). В качестве таковой мы возьмем множество всех $\eta \in \mathfrak{e}\,(L)$, для которых $\theta(\eta)\alpha = 0$ и $\eta|H|^2 = 0$, где H — α-инвариантная эрмитова структура на L.

Замечание 3.3.1. Ясно, что если $\eta \in \mathfrak{e}(L)$ глобально интегрируемо и σ — соответствующая однопараметрическая группа, то $\eta \in \mathfrak{e}(L, \alpha)$ тогда и только тогда, когда $\sigma(t) \in E(L, \alpha)$ для всех $t \in \mathbf{R}$.

Для $\eta \in \mathfrak{e}(L)$ форма $\theta(\eta)\alpha$ может быть записана следующим образом.

Лемма 3.3. *Пусть* $\varphi \in C(X)$ *и* $\xi \in \mathfrak{d}(X)$; *тогда*

$$\theta[\eta(\varphi, \xi)]\alpha = \pi^*(\beta_\xi - d\varphi).$$

Доказательство. Пусть $\eta = \eta(\varphi, \xi)$ так, что $\eta = \eta(\varphi) + \tilde{\xi}$. Из тождества $\theta(\eta) = i(\eta)\circ d + d\circ i(\eta)$ и равенства $i(\eta)\alpha = \langle\alpha, \eta\rangle = -\tilde{\varphi}$ (см. предложение 2.7.2) следует, что

$$di(\eta)\alpha = -d\tilde{\varphi} = \tilde{\pi}^*(-d\varphi).$$

С другой стороны, $d\alpha = \tilde{\pi}^*\omega$ так, что $i(\eta)d\alpha = i(\eta)\tilde{\pi}^*\omega = \tilde{\pi}^*i(\xi)\omega = \tilde{\pi}^*\beta_\xi$, так как $\check{\eta} = \xi$.

Мы можем теперь явно описать $\mathfrak{e}(L, \alpha)$. Это описание содержит также инфинитезимальный вариант теоремы 1.13.1. Оно более конструктивно, чем теорема 1.13.1, так как $\mathfrak{e}(L, \alpha)$ допускает явную параметризацию.

Теорема 3.3.1. *Пусть* $\eta \in \mathfrak{e}(L)$, *так, что* $\eta = \eta(\varphi, \xi)$ *для некоторых* $\varphi \in C(X)$, $\xi \in \mathfrak{d}(X)$. *Тогда* $\eta = \mathfrak{e}(L, \alpha)$, *если и только если* 1) φ *вещественна,* 2) $\beta_\xi = d\varphi$.

Кроме того, имеет место точная последовательность алгебр Ли

$$0 \to \mathbf{R} \to \mathfrak{e}(L, \alpha) \to \mathfrak{a} \to 0, \tag{3.3.1}$$

превращающая $\mathfrak{e}(L, \alpha)$ *в центральное расширение* $\mathfrak{a}$ *с помощью* $\mathbf{R}$. *Здесь отображение* $\mathfrak{e}(L, \alpha)$ *в* $\mathfrak{a}$ *переводит* η *в* $\check{\eta}$ (см. (2.6.7)), *а вложение* $\mathbf{R} \to \mathfrak{e}(L, \alpha)$ *задается формулой* $r \to \eta(r)$, *где число* r *отождествляется с постоянной функцией на* X, *тождественно равной* r.

Доказательство. Согласно предложению 2.4.1 $\eta(\varphi, \xi)|H|^2 = 0$, если и только если φ вещественна.

С другой стороны, поскольку $\tilde{\pi}^*$ инъективно, то по лемме 3.3 $\theta(\eta)\alpha = 0$, если и только если $\beta_\xi = d\varphi$. Значит, если $\eta = \eta(\varphi, \xi) \in \mathfrak{e}(L, \alpha)$, то $\check{\eta} = \xi \in \mathfrak{a}$, так как форма $\beta_\xi = d\varphi$ точна. Отображение $\mathfrak{e}(L, \alpha) \to \mathfrak{a}$, очевидно, сюръективно, так как для всякого поля $\xi \in \mathfrak{a}$ существует вещественная функция φ, для которой $\beta_\xi = d\varphi$. Следовательно, $\xi = \check{\eta}$, где $\eta = \eta(\varphi, \xi)$. Функция φ определяется однозначно с точностью до вещественной константы, что доказывает точность последовательности (3.3.1). Входящие в эту последовательность отображения являются гомоморфизмами алгебр Ли в силу (2.6.1). Кроме того, образ $\mathbf{R}$ принадлежит центру $\mathfrak{e}(L, \alpha)$ по определению $\mathfrak{e}(L)$.

Следствие. *Если* $\xi \in \mathfrak{a}$ — *глобально интегрируемое поле и* σ — *соответствующая однопараметрическая группа диффеоморфизмов, то для любого класса* $l \in \mathcal{L}_c(X, \omega)$ $\sigma(t) \in D_l(X)$ *для всех* $t \in \mathbf{R}$ (см. п. 1.13).

Доказательство. Пусть $[(L, \alpha)] = l \in \mathcal{L}_c(X, \omega)$, $\varphi \in C$—вещественная функция, удовлетворяющая условию $d\varphi = \beta_\xi$ и $\eta = \eta(\varphi, \xi)$. Тогда $\check{\eta} = \xi$ и η глобально интегрируемо по теореме 2.10.1. Если σ_η — соответствующая однопараметрическая группа, то, очевидно, $\check{\sigma}_\eta(t) = \sigma(t)$. Но $\sigma_\eta(t) \in E(L, \alpha)$, так как $\eta \in \mathfrak{e}(L, \alpha)$ и, следовательно, $\sigma(t) \in D_l(X)$ по теореме 1.13.1.

Замечание 3.3.2. Имеет место естественное отображение $H^1(X, \mathbf{R})$ в Π^*, которое классу μ ставит в соответствие характер χ_μ, задаваемый формулой $\chi_\mu(\gamma) = \exp 2\pi i \int_\gamma \beta$, где β — замкнутая 1-форма, принадлежащая классу μ. Можно легко показать, хотя мы не будем использовать этого в дальнейшем, что приведенное выше следствие допускает обобщение в следующем смысле. Пусть поле ξ принадлежит $d(X, \omega)$ вместо α так, что форма β_ξ замкнута, но не обязательно точна. Тогда

$$\sigma(t)\cdot l = \chi_{[t\beta_\xi]}\cdot l$$

(см. теорему 2.5.1), где $[t\beta_\xi] \in H^1(X, \mathbf{R})$ — класс когомологий де Рама, содержащий форму $t\beta_\xi$.

3.4. Обозначим S_m пространство всех измеримых сечений L. Это пространство является модулем для группы $E(L)$ относительно действия $\tau\cdot s(p) = \tau(s(\check{\tau}^{-1}p))$, где $\tau \in E(L)$, $s \in S_m$, $p \in X$.

Это действие может быть сведено к действию на обычные функции следующим образом. Пусть $\widetilde{S}_m$ означает пространство всех измеримых комплекснозначных функций u на L^*, обладающих свойством

$$c\cdot u = cu \tag{3.4.1}$$

для всех $c \in \mathbf{C}^*$. Другими словами, это те функции u, для которых $u(c^{-1}x) = cu(x)$. Так как элементы $E(L)$ перестановочны с действием $\mathbf{C}^*$, ясно, что $\widetilde{S}_m$ инвариантно относительно действия $E(L)$.

Предложение 3.4.1. *Для любого $s \in S_m$ обозначим $\widetilde{s}$ функцию на L^*, определенную формулой*

$$\widetilde{s}(x) = s(\pi(x))/x. \tag{3.4.2}$$

Тогда $\widetilde{s} \in \widetilde{S}_m$ и отображение

$$S_m \to \widetilde{S}_m, \tag{3.4.3}$$

переводящее s в $\widetilde{s}$, является изоморфизмом $E(L)$-модулей.

Доказательство. Из (3.4.2) ясно, что $\widetilde{s}(c^{-1}x) = c\widetilde{s}(x)$. Кроме того, если $r \in S^*(U)$ для некоторого открытого множества $U \subseteq X$, то $(\widetilde{s}\circ r)r = s$ и, следовательно (см. (1.5.1)),

$$(\widetilde{s}\circ\sigma_r)(c, p) = c^{-1}(s/r)(p), \tag{3.4.4}$$

что доказывает измеримость $\widetilde{s}$, так что $\widetilde{s} \in \widetilde{S}_m$.

Ясно также, что $\widetilde{s} = 0$ влечет $s = 0$. С другой стороны, любая функция $u \in \widetilde{S}_m$ определяет такое сечение $s \in S_m$, что $u = \widetilde{s}$. В самом деле, на U в качестве s можно взять $(u\circ r)r$. Так как $(u\circ gr)gr = (u\circ r)r$ для $g \in C^*(U)$ в силу (3.4.1), это выражение не зависит от выбора r, что и доказывает искомый изоморфизм.

Далее, если $\tau \in E(L)$, $s \in S_m$, $x \in L^*$, то $(\tau\circ\widetilde{s})(x) = \widetilde{s}(\tau^{-1}x) = s(\check{\tau}^{-1}p)/\tau^{-1}x$, где $p = \pi(x)$. Из линейности τ на слое $L_{\check{\tau}^{-1}p}$ вытекает, что $s(\check{\tau}^{-1}p)/\tau^{-1}x = \hat{\tau s}(\tau^{-1}p)/x = (\tau s)(p)/x = (\tau s)^{\sim}(x)$. Значит, $\tau\cdot\widetilde{s} = (\tau s)^{\sim}$.

Пусть $\widetilde{S}$ — образ S при отображении (3.4.3). Из (3.4.4) видно, что $\widetilde{S}$ совпадает с множеством всех гладких функций из $\widetilde{S}_m$. Это пространство,

очевидно, инвариантно относительно $E(L)$, а из соотношений

$$c\cdot(\widetilde{\eta s}) = (c_*\eta)c\cdot\widetilde{s} = \eta c\widetilde{s} = c\eta\widetilde{s}, \quad c \in \mathbb{C}^*,$$

следует, что $\widetilde{S}$ инвариантно относительно $\mathfrak{e}(L)$.

Соответствующее действие на S описывает

Предложение 3.4.2. *Для любой вещественной функции $\varphi \in C$, поля $\xi \in \mathfrak{d}$ и сечения $s \in S$ справедливо равенство $\eta(\varphi, \xi)\widetilde{s} = \widetilde{t}$, где сечение $t \in S$ задается формулой $t = (\nabla_\xi + 2\pi i\varphi)s$. (Здесь φ рассматривается как оператор умножения на функцию φ.)*

Доказательство. По определению

$$(\eta(\varphi)\widetilde{s})(x) = \frac{d}{dt}\,\widetilde{s}(e^{-2\pi it\widetilde{\varphi}(x)}x)|_{t=0}.$$

Но $\widetilde{s}(e^{-2\pi it\widetilde{\varphi}(x)}x) = e^{2\pi it\widetilde{\varphi}(x)}\widetilde{s}(x)$. Значит,

$$\eta(\varphi)\widetilde{s} = 2\pi i\widetilde{\varphi}\,\widetilde{s} = 2\pi i\,(\varphi s)^{\sim},$$

ибо, как легко видеть,

$$\widetilde{\varphi}\,\widetilde{s} = (\varphi s)^{\sim}. \tag{3.4.5}$$

Нам осталось только доказать, что $\widetilde{\xi}\widetilde{s} = (\nabla_\xi s)^{\sim}$. Так как это соотношение локально, достаточно проверить его для элемента $s \in S^*(U)$, где U — открытое подмножество в X. Затем, используя (1.4.6), (3.4.5) и равенство $\widetilde{\xi}\widetilde{\psi} = (\xi\psi)^{\sim}$ для $\psi \in C$, можно доказать его справедливость для произвольного сечения. Но согласно (1.5.1), $s\circ\sigma_s$ как функция на $\mathbb{C}^* \times U$ задается формулой $(s\circ\sigma_s)(c, p) = c^{-1}$. С другой стороны, если ξ_s — векторное поле на $\mathbb{C}^* \times U$, определенное равенством (2.8.3), то

$$(\xi_s(\widetilde{s}\circ\sigma_s))(c, p) = 2\pi i\,\langle\alpha(s)_p, \xi_p\rangle\, c^{-1} = 2\pi i\,\langle\alpha(s_p), \xi_p\rangle\,[(s\circ\sigma_s)(c, p)].$$

Согласно (2.8.3), $(\sigma_s)_*\xi_s = \widetilde{\xi}$. Следовательно, в $\widetilde{\pi}^{-1}(U)$ справедливо равенство

$$\widetilde{\xi}\widetilde{s} = 2\pi i\langle\alpha(s), \xi\rangle\;\widetilde{s} = 2\pi i[\langle\alpha(s), \xi\rangle\, s]^{\sim} = (\nabla_\xi s)^{\sim}.$$

Операцию коммутирования в $\mathfrak{e}(L)$ описывает

Предложение 3.4.3. *Пусть $\varphi_i \in C(X)$, $\xi_i \in \mathfrak{d}(X)$ $(i=1, 2)$. Тогда*

$$[\eta(\varphi_1, \xi_1), \eta(\varphi_2, \xi_2)] = \eta(\xi_1\varphi_2 - \xi_2\varphi_1 + \omega(\xi_1, \xi_2), [\xi_1, \xi_2]).$$

Доказательство. Пусть $\eta_i = \eta(\varphi_i, \xi_i)$ и $[\eta_1, \eta_2] = \eta = \eta(\varphi, \xi)$. Ясно, что $\xi = [\xi_1, \xi_2]$ ввиду (2.6.8) и равенств $\check{\eta}_i = \check{\xi}_i$ и $\check{\eta} = \xi$. С другой стороны,

$$\langle\alpha, [\eta_1, \eta_2]\rangle = -\widetilde{\varphi} \tag{3.4.6}$$

согласно предложению 2.7.2. Далее, поскольку $\widetilde{\pi}^*\omega = d\alpha$ и, следовательно, $d\alpha(\eta_1, \eta_2) = \omega(\xi_1, \xi_2)^{\sim}$, мы получаем согласно (1.3.6)

$$-\langle\alpha, [\eta_1, \eta_2]\rangle = \omega(\xi_1, \xi_2)^{\sim} - \eta_1\,\langle\alpha, \eta_2\rangle + \eta_2\langle\alpha, \eta_1\rangle.$$

Но $\langle\alpha, \eta_i\rangle = -\widetilde{\varphi}_i$ и, значит, (3.4.6) принимает вид

$$\widetilde{\varphi} = \omega(\xi_1, \xi_2)^{\sim} + (\xi_1\varphi_2)^{\sim} - (\xi_2\varphi_1)^{\sim}.$$

Относительно действия на S из предложения 3.4.3 легко вывести

Предложение 3.4.4. *Пусть* $\xi_i \in \mathfrak{d}$ $(i = 1, 2)$ *и* $s \in S$. *Тогда*

$$([\nabla_{\xi_1}, \nabla_{\xi_2}] - \nabla_{[\xi_1, \xi_2]})\, s = 2\pi i \omega (\xi_1, \xi_2)\, s.$$

Доказательство. Положив $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ в предложении 3.4.3, мы получим

$$[\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2] = \eta(\omega(\xi_1, \xi_2), [\xi_1, \xi_2]) = \eta(\omega(\xi_1, \xi_2)) + [\xi_1, \xi_2]^{\sim},$$

или

$$(3.4.7) \qquad [\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2] - [\xi_1, \xi_2]^{\sim} = \eta(\omega(\xi_1, \xi_2)).$$

Теперь достаточно применить это равенство к $\tilde{s}$ и воспользоваться предложением 3.4.2.

Выражение для коммутатора в предложении 3.4.2 существенно упрощается, если $\eta_1 \in \mathfrak{e}\ (L, \alpha)$. В самом деле, если $\beta_\xi = d\varphi$ для $\varphi \in C$ и $\xi \in \mathfrak{d}$, то для любого $\eta \in \mathfrak{a}$

$$(3.4.8) \qquad \eta\varphi = \omega(\xi, \eta),$$

так как $\eta\varphi = \langle d\varphi, \eta\rangle = \langle i(\xi)\omega, \eta\rangle = \omega(\xi, \eta)$.

Предложение 3.4.5. *В предположениях предложения* 3.4.3, *если* $\eta(\varphi_1, \xi_1) \in \mathfrak{e}\ (L, \alpha)$, *то*

$$(3.4.9) \qquad [\eta(\varphi, \xi_1), \eta(\varphi_2, \xi_2)] = \eta(\xi_1\varphi_2, [\xi_1, \xi_2]).$$

Доказательство. Из (3.4.8) и теоремы 3.3.1 следует, что $\xi_2\varphi_1 = \omega(\xi_1, \xi_2)$, откуда и вытекает искомое равенство.

Замечание 3.4.1. Если поле $\eta(\varphi_2, \xi_2)$ также принадлежит $\mathfrak{e}\ (L, \alpha)$, то правая часть равенства (3.4.9) лежит в $\mathfrak{e}\ (L, \alpha)$ так, что $d(\xi_1 \varphi_2) = \beta_{[\xi_1, \xi_2]}$. Это следует из (3.2.3), так как $\xi_1\varphi_2 = \omega(\xi_1, \xi_2)$ в силу (3.4.8).

Замечание 3.4.2. До сих пор мы предполагали, что класс $[\omega]$ целочисленный. Однако центральное расширение $\mathfrak{e}(L, \alpha)$ алгебры $\mathfrak{a}$, построенное с помощью элемента $l \in \mathcal{L}_c(X, \omega)$, может быть определено без предположения о целочисленности $[\omega]$ (так что $\mathcal{L}_c(X, \omega)$ может быть пусто). В самом деле, согласно предложению 3.4.5 мы можем в качестве $\mathfrak{e}\ (L, \alpha)$ рассмотреть множество $\mathfrak{a}'$ всех пар (φ, ξ), где φ — вещественная функция, а поле $\xi \in \mathfrak{d}$ удовлетворяет условию $d\varphi = \beta_\xi = i(\xi)\omega$.

Структура алгебры Ли определяется формулой

$$[(\varphi_1, \xi_1), (\varphi_2, \xi_2)] = (\xi_1\varphi_2, [\xi_1, \xi_2]).$$

Отображение $\mathfrak{a}' \to \mathfrak{a}$, переводящее (φ, ξ) в ξ, превращает $\mathfrak{a}'$ в центральное расширение $\mathfrak{a}$ с помощью $\mathbf{R}$. Мы увидим ниже, что в симплектическом случае это расширение может быть получено гораздо более естественным способом.

§ 4. Симплектический случай и предквантование

4.1. Пара (X, ω) определяет структуру симплектического многообразия в случае, когда внешняя 2-форма ω_p на $T_p(X)$ невырождена для всех $p \in X$. В этом случае мы будем говорить, что (X, ω) — симплектическая пара.

Предположим, что (X, ω) — симплектическая пара, но класс $[\omega]$ не обязательно целочисленный. Соответствие $\xi \to \beta_\xi$ задает изоморфизм

$$(4.1.1) \qquad \mathfrak{u}(X) \to \Omega^1(X),$$

при котором $\mathfrak{d}(X)$ соответствует множеству всех вещественных 1-форм. $\mathfrak{u}(X, \omega)$ (соответственно $\mathfrak{d}(X, \omega)$) соответствует множеству всех (соответственно всех вещественных) замкнутых 1-форм, а $\mathfrak{a}(X)$ соответствует множеству вещественных точных 1-форм.

Каждой функции $\varphi \in C$ мы поставим в соответствие элемент ξ_φ из комплексной оболочки $\mathfrak{a}_c$ пространства $\mathfrak{a}$, полагая ξ_φ равным тому единственному (ибо (4.1.1) — изоморфизм) векторному полю на X, для которого

(4.1.2) $$i(\xi_\varphi)\omega = \beta_{\xi_\varphi} = d\varphi.$$

Соотношение (3.4.8) принимает следующий вид:

(4.1.3) $$\eta\psi = \omega(\xi_\psi, \eta)$$

для любых $\eta \in \mathfrak{a}$, $\psi \in C$.

Ясно, что если обозначить $R = R(X)$ пространство всех вещественных гладких функций на X, то имеет место точная последовательность

(4.1.4) $$0 \to \mathbf{R} \to R \to \mathfrak{a} \to 0,$$

где $\mathbf{R} \to R$ — естественное вложение, а $R \to \mathfrak{a}$ — отображение, переводящее φ в ξ_φ.

Определим операцию коммутирования (скобки Пуассона) в C, полагая

(4.1.5) $$[\varphi, \psi] = \xi_\varphi\psi.$$

Предложение 4.1.1. *Пространство $C = C(X)$ является алгеброй Ли относительно операции* (4.1.5). *Кроме того, отображение $C \to \mathfrak{a}_c$, переводящее φ в ξ_φ, является гомоморфизмом; R является вещественной формой алгебры Ли C и* (4.1.4) *является точной последовательностью алгебр Ли, превращающей R в центральное расширение $\mathfrak{a}$ с помощью $\mathbf{R}$.*

Доказательство. Согласно (4.1.3) $\xi_\varphi\psi = \omega(\xi_\varphi, \xi_\psi)$, так что

(4.1.6) $$[\varphi, \psi] = \omega(\xi_\varphi, \xi_\psi),$$

откуда следует, что $[\varphi, \psi] = -[\psi, \varphi]$. Далее, так как $\xi_\varphi, \xi_\psi \in \mathfrak{a}(X, \omega)$, $\beta_{[\xi_\varphi, \xi_\psi]} = d\omega(\xi_\varphi, \xi_\psi)$ в силу (3.2.3). Значит, $\beta_{[\xi_\varphi, \xi_\psi]} = d[\varphi, \psi]$. Но $d[\varphi, \psi] = \beta_{\xi_{[\varphi, \psi]}}$ по определению $\xi_{[\varphi, \psi]}$. Поэтому

(4.1.7) $$[\xi_\varphi, \xi_\psi] = \xi_{[\varphi, \psi]},$$

так как (4.1.1) — изоморфизм.

Пусть теперь $\zeta \in C$. Из замкнутости ω следует в силу (1.3.8), что

$$\sum_{\text{цикл } \zeta, \varphi, \psi} [\xi_\zeta\omega(\xi_\varphi, \xi_\psi) - \omega([\xi_\varphi, \xi_\psi], \xi_\zeta)] = 0.$$

С другой стороны, согласно (3.2.3) $\xi_\zeta\omega(\xi_\varphi, \xi_\psi) = -\omega([\xi_\varphi, \xi_\psi], \xi_\zeta)$. Поэтому

(4.1.8) $$\sum_{\text{цикл } \zeta, \varphi, \psi} \xi_\zeta\omega(\xi_\varphi, \xi_\psi) = 0.$$

Но $\xi_\zeta\omega(\xi_\varphi, \xi_\psi) = \xi_\zeta[\varphi, \psi] = [\zeta, [\varphi, \psi]]$. Таким образом, справедливо тождество Якоби. Следовательно, C является алгеброй Ли и в силу (4.1.7) отображение $\varphi \to \xi_\varphi$ является гомоморфизмом алгебр Ли. Ясно, что $[\varphi, \psi] \in R$, если $\varphi, \psi \in R$. Кроме того, образ $\mathbf{R}$ в R, очевидно, лежит в центре R.

4.2. Предположим теперь, что класс $[\omega]$ целочисленный и пусть $l = [(L, \alpha)] \in \mathcal{L}_c(X, \omega)$.

Покажем, что R эквивалентно $\mathfrak{e}(L, \alpha)$ как центральное расширение алгебры $\mathfrak{a}$. Для любого $\varphi \in R$ определим $\tilde{\delta}(\varphi) \in \mathfrak{u}(L)$ по формуле

$$\tilde{\delta}(\varphi) = \eta(\varphi, \xi_\varphi). \tag{4.2.1}$$

Теорема 4.2.1. *Поле* $\tilde{\delta}(\varphi)$ *принадлежит* $\mathfrak{e}(L, \alpha)$ *и отображение* $\tilde{\delta} : R \to \mathfrak{e}(L, \alpha)$ *является изоморфизмом алгебр Ли. Кроме того, имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd} & & \mathfrak{e}(L, \alpha) \arrow[dr] & & \\ 0 \arrow[r] & \mathbf{R} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathfrak{a} \arrow[r] & 0, \\ & & R \arrow[uu, "\tilde{\delta}"] \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

где верхняя и нижняя точные последовательности совпадают с (3.3.1) *и* (4.1.4) *соответственно.*

Доказательство. Так как $d\varphi = \beta_{\xi_\varphi}$, $\tilde{\delta}(\varphi)$ принадлежит $\mathfrak{e}(L, \alpha)$ по теореме 3.3.1. Согласно предложению 3.4.5

$$[\tilde{\delta}(\varphi_1), \tilde{\delta}(\varphi_2)] = \eta(\xi_{\varphi_1}\varphi_2, [\xi_{\varphi_1}, \xi_{\varphi_2}]).$$

Но $\xi_{\varphi_1}\varphi_2 = [\varphi_1, \varphi_2]$ и $[\xi_{\varphi_1}, \xi_{\varphi_2}] = \xi_{[\varphi_1, \varphi_2]}$, поэтому $\tilde{\delta}$ — гомоморфизм. Очевидно, что $\tilde{\delta}(\varphi) = 0$ влечет $\varphi = 0$.

Наконец, если $\eta = \eta(\varphi, \xi) \in \mathfrak{e}(L, \alpha)$, то φ вещественна и $\beta_\xi = d\varphi$. Значит, $\xi = \xi_\varphi$ и, следовательно, $\eta = \tilde{\delta}(\varphi)$. Таким образом, $\tilde{\delta}$ — изоморфизм. Коммутативность диаграммы очевидна.

4.3. Из-за наличия кривизны ω, как показывает предложение 3.4.4, пространство S не является $\mathfrak{a}$-модулем относительно инвариантного дифференцирования. Однако (и в этом состоит существо дела), S становится модулем для расширения R алгебры $\mathfrak{a}$. Другими словами, переход к R «убивает» кривизну

Определим отображение

$$\delta \colon R \to \operatorname{End} S \tag{4.3.1}$$

по формуле

$$\delta(\varphi)s = (\nabla_{\xi_\varphi} + 2\pi i\varphi)s \tag{4.3.2}$$

для $\varphi \in R$, $s \in S$.

Теорема 4.3.1. *Отображение* δ *является представлением алгебры Ли* R *в пространстве* S (*т. е.* $\delta([\varphi, \psi]) = [\delta(\varphi), \delta(\psi)]$). *Кроме того, для любого* $s \in S$ *справедливо равенство*

$$(\delta(\varphi)s)^\sim = \tilde{\delta}(\varphi)\tilde{s}. \tag{4.3.3}$$

Доказательство. Равенство (4.3.3) вытекает из предложений 3.4.2. Но тогда δ — представление, так как S изоморфно $\tilde{S}$, а по теореме 4.2.1 $\tilde{\delta}$ является представлением R в $\tilde{S}$.

Замечание 4.3.1. Отображение δ, которое мы называем предквантованием, является первым этапом в «квантовании» функций (грубо говоря, в превращении функций в операторы).

Второй этап, использующий понятие поляризации, будет рассмотрен в другом месте. Напомним, что на первых порах развития квантовой механики основным математическим вопросом было нахождение представлений гейзенберговых коммутационных соотношений. Этот вопрос, разумеется, решается теоремой Стоуна — фон Неймана. Более общий вопрос относится к произвольной конечномерной алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Принятая здесь точка зрения состоит в том, что коль скоро задан гомоморфизм $\mathfrak{g}$ в R (например, заданы p_i, q_j и 1 для гейзенберговой алгебры), представление тем самым естественно определено. Оно строится с помощью δ и ограничений, налагаемых подходящей поляризацией. Другой вопрос,— когда представление алгебры Ли приводит к представлению группы Ли? Как правило, это очень трудный вопрос, если гильбертово пространство задано абстрактно; здесь имеется только теорема Нелсона [1]). Однако в нашем случае может помочь формула (4.3.3). Она показывает, что R действует на S инфинитезимальными преобразованиями, сохраняющими связность. Согласно одному результату Пале и теореме 2.10.1 дело сводится к вопросу о глобальной интегрируемости поля ξ_φ для соответствующей функции $\varphi \in R$. Если эта интегрируемость имеет место, действие группы в гильбертовом пространстве определяется не абстрактно, а с помощью точечных преобразований в L^* (см. теорему 4.5.1).

Отметим, что хотя в определении δ участвует конкретное линейное расслоение со связностью (L, α), класс эквивалентности представления δ зависит только от класса l пары (L, α), как легко проверить.

Замечание 4.3.2. Даже не приводя здесь точного определения поляризации, мы можем указать разницу между предквантованием и квантованием. Выбор поляризации F многообразия X приводит к выделению подалгебры R_F^1 в R и подпространства S_F в S. Подпространство S_F инвариантно относительно $\delta(R_F^1)$, что позволяет определить представление δ_F: $R_F^1 \to \operatorname{End} S_F$.

Это отображение δ_F мы и называем квантованием.

Следует отметить, что и δ и δ_F зависят от выбора класса в $l \in \mathcal{L}_c(X, \omega)$ (мы, разумеется, предполагаем, что $[\omega]$— целочисленный класс) и, следовательно, должны обозначаться δ^l, δ_F^l.

Фиксируя начальную точку l, можно отождествить $\mathcal{L}_c(X, \omega)$ с $\Pi^* = H^1(X, \mathbf{T})$ так, что все возможные предквантования R или квантования R_F^1 параметрируются элементами $H^1(X, \mathbf{T})$.

В такой форме наше утверждение обобщает теорему Сигала (см. [3], стр. 474). А именно, частным случаем поляризованного симплектического многообразия является кокасательное расслоение любого многообразия M. В этом случае $[\omega] = 0$, так что $[\omega]$ — целочисленный класс. Пространство S_F может быть отождествлено с $C(M)$, а R_F^1 состоит из функций на X, огра-

[1]) См. статью Э. Нелсона в журнале «Математика» (Сборник переводов) **6**:3, 1962, 79—132. (*Прим. перев.*)

ничение которых на каждый слой является многочленом не выше первой степени (т. е. функций, линейных по p). Сигал, по существу, находил квантование R^1_F и обнаружил, что оно неоднозначно и все возможные квантования нумеруются элементами $H^1(M, \mathbf{T})$. Но $H^1(M, \mathbf{T}) = H^1(X, \mathbf{T})$ и можно показать, что совокупность δ^l_F для всех $l \in \mathcal{L}_c(X, \omega)$ совпадает с квантованиями в смысле Сигала.

4.4. Если группа Ли G с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ гладко действует на многообразии M с помощью гомоморфизма $\sigma\colon G \to D(M)$, мы определим отображение

$$d\sigma\colon \ \mathfrak{g} \to \mathfrak{d}(M)$$

как гомоморфизм алгебр Ли, задаваемый формулой

$$(4.4.1) \qquad [d\sigma(x)\varphi](p) = \frac{d}{dt}\varphi(\exp(-tx)p)|_{t=0} = \frac{d}{dt}[\exp(tx)\cdot\varphi](p)|_{t=0},$$

где $x \in \mathfrak{g}$, $\varphi \in D(M)$, $p \in M$, а $\exp$ означает экспоненциальное отображение $\mathfrak{g}$ в G.

З а м е ч а н и е 4.4.1. Если связная группа G действует на многообразиях X и Y с помощью гомоморфизмов σ_X и σ_Y и если $\tau\colon X \to V$ — гладкое отображение, то τ будет G-отображением, если и только если векторные поля $d\sigma_X(x)$ и $d\sigma_Y(x)$ τ-связаны для всех $x \in \mathfrak{g}$. В самом деле, пусть $x \in \mathfrak{g}$, $a = \exp x \in G$ и $p \in X$. Траектории полей $\sigma_X(x)$ и $\sigma_Y(x)$, проходящие через точки p и τp соответственно,— это кривые $\gamma_X(t) = \exp(-tx)p$ и $\gamma_Y(t) = \exp(-tx)\tau p$. Если $d\sigma_X(x)$ и $d\sigma_Y(x)$ τ-связаны, то $\tau\gamma_X(t)$ является также траекторией для векторного поля $d\sigma_Y(x)$, проходящий через точку τp. По теореме единственности должно быть $\tau\gamma_X(x) = \gamma_Y(t)$ для всех t так, что $\tau a \cdot p = a \cdot \tau p$. Так как группа G порождается множеством $\exp \mathfrak{g}$, отсюда следует, что τ является G-отображением. Обратное утверждение очевидно.

Пусть теперь связная группа Ли G с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ действует на многообразии X с помощью гомоморфизма $\sigma\colon G \to D(X)$. Мы скажем, что (X, ω)— симплектическое G-многообразие, если форма ω G-инвариантна (т. е. $\sigma(G) \subseteq D(X, \omega)$). В дальнейшем будем предполагать это условие выполненным и для удобства предположим, что G односвязна.

Если не оговорено противное, мы не будем предполагать действие G транзитивным на X (т. е. X не обязано быть G-однородным).

Скажем, что (X, ω) — строго симплектическое G-пространство, если $d\sigma(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{a}$.

З а м е ч а н и е 4.4.2. Если класс $[\omega]$ целочисленный, то согласно следствию к теореме 3.3.1 $\sigma(G) \subseteq D_l(X)$ для любого $l \in \mathcal{L}_c(X, \omega)$.

П р е д л о ж е н и е 4.4.1. *Строгая симплектичность эквивалентна симплектичности в каждом из следующих случаев*: (1) X *односвязно*, (2) $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ (*например, если* $\mathfrak{g}$ *полупроста*).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Это следует непосредственно из предложения 3.2.1 в случае (2), и из равенства $\mathfrak{a} = \mathfrak{d}(X, \omega)$ в случае (1).

З а м е ч а н и е 4.4.3. Если X только симплектическое (а не строго симплектическое) многообразие, то во многих вопросах можно заменить X его односвязным накрывающим $\widetilde{X}$, которое является (при условии, что G односвязна) строго симплектическим G-пространством и имеет место

коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} G\times\widetilde{X} & \to & \widetilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ G\times X & \to & X. \end{array}$$

Замечание 4.4.4. Наше определение строго симплектического пространства было основано на алгебре Ли. В ситуации, где имеются несвязные группы, требуется скорее теоретико-групповое, а не инфинитезимальное определение этого понятия. Нам это не понадобится, но это можно было бы сделать в случае целочисленного $[\omega]$, вводя следующую группу: $A = A(X, \omega) \subseteq D(X, \omega)$.

Каждая кривая $\gamma \in \Gamma$ определяет сингулярный 1-цикл $[\gamma]$. Пусть $D_0(X)$ — подгруппа всех диффеоморфизмов $\tau \in D(X)$, которые индуцируют тривиальное действие на первой группе гомологий. Другими словами, $\tau \in D_0(X)$, если и только если для любой кривой $\gamma \in \Gamma$ 1-цикл $[\gamma] - [\tau\gamma]$ является границей $\partial\rho$ кусочно-гладкой сингулярной 1-цепи ρ. В этом случае корректно определен интеграл $\int\limits_\rho \omega$. Мы обозначим A группу тех $\tau \in D_0(X)$, для которых

$$e^{2\pi i\int\limits_\rho \omega} = 1$$

для любой кусочно-гладкой 2-цепи ρ, обладающей свойством $\partial\rho = [\gamma] - [\tau\gamma]$, где γ — произвольная замкнутая кривая.

Из предложения 2.3.1 и доказательства соотношения (1.1.3) легко выводится, что A является пересечением групп $D_l(X, \omega)$ по всем $l \in \mathscr{L}_c(X, \omega)$.

Далее (см. замечание 3.3.2), $\sigma(G) \subseteq A$, если и только если $d\sigma\,(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{a}$. Таким образом, определение строгой симплектичности может быть дано в теоретико-групповых терминах.

4.5. В случае, когда $[\omega]$ — целочисленный класс, так что существует $l = [(L, \alpha)] = \mathscr{L}_c(X, \omega)$, мы определили в п. 1.13 понятие лифтинга, или поднятия, $\nu\colon G \to E(L, \alpha)$ гомоморфизма σ. Будем говорить, что это поднятие гладко, если G гладко действует на L^*.

Теперь, не предполагая целочисленности $[\omega]$, но считая, что G строго симплектично действует на X, мы назовем гомоморфизм $\lambda\colon \mathfrak{g} \to R$ поднятием $d\sigma$, если имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbf{R} \arrow[r] & R \arrow[r] & \mathfrak{a} \arrow[r] & 0 \\ & & \mathfrak{g} \arrow[u, "\lambda"] \arrow[ur, "d\sigma"'] & & \end{tikzcd} \tag{4.5.1}$$

Замечание 4.5.1. Отметим, что λ существует тогда и только тогда, когда обращается в нуль класс $[\mu] \in H^2(\mathfrak{g}, \mathbf{R})$, содержащий коцикл μ, определяемый равенством

$$\mu(x, y) = [\mu_0(x), \mu_0(y)] - \mu_0([x, y]) \in \mathbf{R} \subset R,$$

где μ_0: $\mathfrak{g} \to R$ — любое линейное отображение, делающее (4.5.1) коммутативной диаграммой. В частности, λ заведомо существует, если $H^2(\mathfrak{g}, \mathbf{R}) = 0$ (например, если $\mathfrak{g}$ полупроста).

Заметим также, что если λ — поднятие, то таковым же является и $\lambda + f$, где $f \in \mathfrak{g}'$ (вещественное сопряженное к $\mathfrak{g}$) — такой функционал, что $f \mid_{[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]} = 0$ (другими словами, f является гомоморфизмом алгебры $\mathfrak{g}$ в $\mathbf{R}$ или, что то же, $f \in H^1(\mathfrak{g}, \mathbf{R})$. Кроме того, любое поднятие однозначно записывается в виде $\lambda + f$.

Два введенных нами определения поднятия согласованы между собой. А именно, имеет место

Теорема 4.5.1. *Пусть* $[\omega]$ — *целочисленный класс и* $l = [(L, \alpha)] \in \mathcal{L}_c(X, \omega)$. *Предположим также, что* (X, ω) — *симплектическое G-пространство. Тогда отображение* $\sigma = \sigma_X$ *поднимается до гладкого отображения* σ_L: $G \to E(L, \alpha)$ (*откуда следует, что* $\sigma(G) \subset D_l(X)$) *так, что имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \mathbf{T} \arrow[r] & E(L,\alpha) \arrow[r] & D_l(X) \arrow[r] & 1 \\ & & G \arrow[u, "\sigma_L"] \arrow[ur, "\sigma_X"'] & & \end{tikzcd} \qquad (4.5.2)$$

если и только если G действует на X строго симплектично и отображение $d\sigma$ *поднимается до отображения* λ: $\mathfrak{g} \to R$. *Кроме того, в этом случае* σ_L *можно выбрать единственным образом, так, чтобы оно было связано с* λ *равенством* (см. теорему 4.2.1)

$$d\sigma_L = \tilde{\delta}\circ\lambda. \qquad (4.5.3)$$

Доказательство. Пусть G строго симплектична и λ — поднятие $d\sigma$. Тогда по теореме 4.2.1 $\tilde{\delta}\circ\lambda$: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{e}(L, \alpha)$ — такой гомоморфизм, что $\pi_*(\tilde{\delta}\circ\lambda)(x) = d\sigma(x)$ для любого $x \in \mathfrak{g}$. Но так как $d\sigma(x)$ глобально интегрируемо, то же самое верно и для $(\delta\circ\lambda)(x)$ по теореме 2.10.1. Согласно теореме Пале (см. теорему III на стр. 91 в [3]) существует единственное гладкое действие G на L^*, задающее такой гомоморфизм σ_L: $G \to D(L^*)$, что $d\sigma_L = \tilde{\delta}\circ\lambda$. Ясно, что $\sigma_L(G) \subseteq E(L, \alpha)$ (см. замечание 3.3.1). Чтобы доказать, что σ_L — поднятие σ, мы должны проверить, что $\tilde{\pi}$ — G-отображение, а это следует из замечания 4.4.1, так как поле $d\sigma_L(x) = (\tilde{\delta}\circ\lambda)(x)$ $\tilde{\pi}$-связано с полем $d\sigma(x)$ для всех $x \in \mathfrak{g}$.

Предположим теперь, что σ_L — поднятие σ. Нам осталось показать, что G строго симплектично действует на X и что существует поднятие λ отображения $d\sigma$, удовлетворяющее условию (4.5.3).

Мы знаем, что $d\sigma_L$: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{e}(L, \alpha)$ — такой гомоморфизм, что

$$\pi_*\circ d\sigma_L = d\sigma. \qquad (4.5.4)$$

По теореме 3.3.1 $d\sigma(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{a}$, так что G строго симплектична на X. Кроме того, по теореме 4.2.1 $d\sigma_L$ однозначно записывается в виде $d\sigma_L = \tilde{\delta}\circ\lambda$, где λ — некоторый гомоморфизм $\mathfrak{g}$ в R.

Из (4.5.6) следует, что λ — поднятие $d\sigma$: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{e}$.

§ 5. Орбиты и гамильтоновы G-пространства

5.1. Фиксируем односвязную группу Ли G с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Симплектическое многообразие (X, ω) называется гамильтоновым G-пространством, если задан такой гомоморфизм

$$\lambda: \mathfrak{g} \to R$$

(напомним, что R — пространство всех гладких вещественных функций на X, рассматриваемое как алгебра Ли относительно скобки Пуассона), что

(1) ковекторы $d\lambda(x)_p$, где x пробегает $\mathfrak{g}$, порождают кокасательное пространство $T_p^*(X)$ для всех $p \in X$;

(2) поле $\xi_{\lambda(x)}$ глобально интегрируемо для всех $x \in \mathfrak{g}$.

Замечание 5.1.1. По теореме Пале из условия (2) вытекает, что (X, ω) — строго симплектическое G-пространство, причем (так как $\xi_{\lambda(x)} \in \mathfrak{a}$)

$$d\sigma(x) = \xi_{\lambda(x)}, \tag{5.1.1}$$

так что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbf{R} \arrow[r] & R \arrow[r] & \mathfrak{a}(X) \arrow[r] & 0 \\ & & \mathfrak{g} \arrow[u, "\lambda"] \arrow[ur, "d\sigma"'] & & \end{tikzcd}$$

а из условия (1) следует, что X — однородное G-пространство (так как векторы $(\xi_{\lambda(x)})_p$, где x пробегает $\mathfrak{g}$, порождают касательное пространство $T_p(X)$ для любого $p \in X$. Обратно, если (X, ω) — однородное строго симплектическое G-пространство, так что $d\sigma$ допускает поднятие, то (X, ω) вместе с этим поднятием λ определяем на (X, ω) структуру гамильтонова G-пространства.

Гамильтоново G-пространство мы будем обозначать тройкой (X, ω, λ); две последние компоненты этой тройки обычно будут обозначаться ω_X, λ_X. Действие G на X обозначается гомоморфизмом σ_X: $G \to D(X; \omega_X)$.

В свете теоремы 4.5.1 смысл понятия гамильтонова G-пространства заключается в том, что для любого линейного расслоения со связностью (L, α) над X, для которого $\omega_X = \operatorname{curv}(L, \alpha)$, существует выделенное поднятие σ_L: $G \to E(L, \alpha)$ отображения σ_X. Таким образом, мы получаем следствие (или, точнее, переформулировку одного из утверждений) теоремы 4.5.1.

Теорема 5.1.1. *Пусть (X, ω_X, λ_X) — гамильтоново G-пространство. Предположим, что класс $[\omega_X] \in H^2(X, \mathbf{R})$ — целочисленный и пусть $[(L, \alpha)] \in \in \mathscr{L}_c(X, \omega_X)$.*

Тогда существует единственное поднятие

$$\sigma_L: G \to E(L, \alpha) \tag{5.1.2}$$

отображения σ_X, для которого $d\sigma_L = \tilde{\delta} \circ \lambda_X$.

Доказательство немедленно вытекает из теоремы 4.5.1. Мы можем рассматривать гамильтоновы G-пространства как объекты категории $\operatorname{Ham} G$.

Если (X, ω_X, λ_X) и (Y, ω_Y, λ_Y) — два объекта, то морфизмом первого во второй называется такое отображение многообразий

$$(5.1.3) \qquad \tau\colon X \to Y,$$

что

$$(5.1.4) \qquad \tau^*\omega_Y = \omega_X \quad \text{и} \quad \lambda_Y(x)\circ\tau = \lambda_X(x)$$

для всех $x \in \mathfrak{g}$.

Предложение 5.1.1. *Отображение* (5.1.3) *является G-отображением, так что поля $\xi_{\lambda_X(x)}$ и $\xi_{\lambda_Y(x)}$ τ-связаны для любого $x \in \mathfrak{g}$. Кроме того, для любой точки $p \in X$ отображение*

$$(5.1.5) \qquad \tau_*\colon T_p(X) \to T_{\tau p}(Y)$$

является изоморфизмом и τ на самом деле является накрытием.

Доказательство. Так как $\tau\circ\lambda_Y(x) = \lambda_X(x)$, мы имеем $\tau^* d(\lambda_Y(x)) = d\lambda_X(x)$, или $\tau^*[i(\xi_{\lambda_Y(x)})\omega_Y] = i(\xi_{\lambda_X(x)})\omega_X = i(\xi_{\lambda_X(x)})\tau^*\omega_Y$. Поэтому $\tau_*(\xi_{\lambda_X(x)})_p = (\xi_{\lambda_Y(x)})_{\tau p}$ для всех $p \in X$, так как ω_Y невырождена. Таким образом, $\xi_{\lambda_X(x)}$ и $\xi_{\lambda_Y(x)}$ τ-связаны. Значит, τ является G-отображением согласно замечанию 4.4.1. Это показывает также, что отображение 5.1.5 сюръективно, поскольку пространство $T_p(X)$ порождается векторами $(\xi_{\lambda_X(x)})_p$, $x \in \mathfrak{g}$. Оно также инъективно, поскольку $\tau^*\omega_Y = \omega_X$, а ω_X невырождена. Это доказывает, что отображение (5.1.5) — изоморфизм и что τ — накрытие. В самом деле, если $p \in X$ и G_p, $G_{\tau p}$ — стабилизаторы в G точек p и τp соответственно, то $X \cong G/G_p$, $Y = G/G_{\tau p}$, как однородные пространства, и $G_0 \subseteq G_p \subseteq G_{\tau p}$, где G_0 — связная компонента единицы в группе $G_{\tau p}$.

Если $X = (X, \omega_X, \lambda_X)$ и $Y = (Y, \omega_Y, \lambda_Y)$ — два гамильтонова G-пространства и существует морфизм $\tau\colon X \to Y$, мы скажем просто, что X накрывает Y и τ — накрывающее отображение гамильтоновых пространств. Разумеется, τ является изоморфизмом в категории $\mathrm{Ham}\, G$ тогда и только тогда, когда оно является диффеоморфизмом многообразий.

Замечание 5.1.2. Если $\tau\colon X \to Y$ — накрытие и (Y, ω_Y, λ_Y) — гамильтоново G-пространство, то на X существует единственная структура (X, ω_X, λ_X) гамильтонова G-пространства, для которой τ является морфизмом гамильтоновых пространств. В самом деле, ω_X и λ_X определяются из (5.1.3). Поле $\xi_{\lambda_X(x)}$ глобально интегрируемо, так как поднятие глобальной траектории поля $\xi_{\lambda_Y(x)}$ является глобальной траекторией поля $\xi_{\lambda_X(x)}$.

5.2. Приведем теперь примеры гамильтоновых G-пространств. Для $a \in G$ и $x \in \mathfrak{g}$ будем писать $a\cdot x$ вместо $(\mathrm{Ad}\, a)(x)$. Вещественное сопряженное пространство $\mathfrak{g}'$ к пространству $\mathfrak{g}$ является G-модулем относительно представления G, контраградиентного к присоединенному. Обозначая $a\cdot f$ величину $(\mathrm{Ad}\, a^{-1})'(f)$ для $a \in G$ и $f \in \mathfrak{g}'$, мы имеем

$$\langle a\cdot f, x\rangle = \langle f, a^{-1}\cdot x\rangle.$$

Теперь $\mathfrak{g}'$ становится $\mathfrak{g}$-модулем, где $y\cdot f = \frac{d}{dt}(\exp ty\cdot f)\Big|_{t=0}$ для $y \in \mathfrak{g}$.

Справедливо равенство

$$(5.2.1) \qquad \langle y\cdot f,\ x\rangle = \langle f,\ [x,\ y]\rangle.$$

G-орбитой в $\mathfrak{g}'$ называется любое множество $O\subseteq\mathfrak{g}'$ вида $O=G\cdot f$, где $f\in\mathfrak{g}'$. Каждая орбита является однородным G-пространством и как таковое эквивалентна пространству G/G_f, где f — любая точка O, а $G_f=\{a\in G\colon\ a\cdot f=f\}$. Мы покажем, что каждая орбита естественно снабжается структурой гамильтонова G-пространства.

Прежде всего все пространство $\mathfrak{g}'$ является гладким многообразием, на котором гладко действует G, и, следовательно, определен гомоморфизм $\mathfrak{g}\to\mathfrak{d}(\mathfrak{g}')$, переводящий $x\in\mathfrak{g}$ в поле η^x, задаваемое формулой

$$(5.2.2) \qquad (\eta^x\varphi)(f) = \frac{d}{dt}\,\varphi(\exp(-tx)\cdot f)\,|_{t=0}$$

для любой функции $\varphi\in C(\mathfrak{g}')$ и любой точки $f\in\mathfrak{g}'$.

Далее, для любого $y\in\mathfrak{g}'$ определим функцию $\psi^y\in C(\mathfrak{g}')$ равенством

$$(5.2.3) \qquad \psi^y(f) = \langle f,\ y\rangle.$$

Замечание 5.2.1. Очевидно, ковекторы $d\psi^y$, где y пробегает $\mathfrak{g}$, порождают кокасательное пространство к $\mathfrak{g}'$ в любой точке $\mathfrak{g}'$.

Лемма 5.2.1. *Для любых $x, y\in\mathfrak{g}$ справедливо равенство*

$$(5.2.4) \qquad \eta^x\psi^y = \psi^{[x,\,y]}$$

так что для любого $f\in\mathfrak{g}'$

$$(5.2.5) \qquad (\eta^x\psi^y)(f) = \langle f,\ [x,\ y]\rangle = -\langle x\cdot f,\ y\rangle.$$

Доказательство. По определению

$$(\eta^x\psi^y)(f) = \frac{d}{dt}\,\psi^y(\exp(-tx)\,f)\,|_{t=0} = \frac{d}{dt}\,\langle\exp(-tx)\,f,\ y\rangle\,|_{t=0}.$$

Правая часть этого равенства равна $\langle -x\cdot f,\ y\rangle = \langle f,\ [x,\ y]\rangle = \psi^{[x,\,y]}(f)$. Значит, $\eta^x\psi^y=\psi^{[x,\,y]}$. Определим теперь для $f\in\mathfrak{g}'$ подалгебру $\mathfrak{g}_f=\{x\in\mathfrak{g}\colon\ x\cdot f=0\}$ так, что $\mathfrak{g}_f$ — алгебра Ли подгруппы G_f. Так как вектор η^x_f принадлежит $T_f(O)$, где $O=G\cdot f$, мы введем в рассмотрение линейное отображение

$$\sigma_f\colon\ \mathfrak{g}\to T_f(O),$$

полагая $\sigma_f(x)=\eta^x_f$.

Предложение 5.2.1. *Имеет место точная последовательность линейных пространств*

$$0\to\mathfrak{g}_f\to\mathfrak{g}\xrightarrow{\sigma_f} T_f(O)\to 0.$$

Доказательство. Отображение σ_f сюръективно, так как орбита $O=G\cdot f$ G-однородна. С другой стороны, ядро σ_f совпадает с $\mathfrak{g}_f$ согласно замечанию 5.2.1 и равенству (5.2.5).

Наличие симплектической структуры на любой орбите $O\subseteq\mathfrak{g}'$ вытекает из следующего факта.

Предложение 5.2.2 (Кириллов). *Пусть $O\subseteq\mathfrak{g}'$ — любая G-орбита в $\mathfrak{g}'$ и $f\in O$. Тогда существует и единственна такая внешняя 2-форма*

ω_f *в пространстве* $T_f(O)$, *что для любых* $x, y \in \mathfrak{g}$ *справедливо равенство*

$$\omega_f(\sigma_f(y), \sigma_f(x)) = \langle f, [x, y]\rangle.$$

Кроме того, ω_f *невырождена, так что* O *четномерна.*

Доказательство. Пусть B_f — внешняя 2-форма на $\mathfrak{g}$, определенная равенством $B_f(y, x) = \langle f, [x, y]\rangle = -\langle x \cdot f, y\rangle$. Эта форма индуцирует невырожденную внешнюю 2-форму на фактор-пространстве $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{(f)}$, где $\mathfrak{g}_{(f)}$ — ядро формы B_f, т. е. $\mathfrak{g}_{(f)} = \{x \in \mathfrak{g}\colon B_f(y, x) = 0$ для всех $y \in \mathfrak{g}\}$. Но из равенства $B_f(x, y) = \langle x \cdot f, y\rangle$ следует, что $\mathfrak{g}_{(f)}$ совпадает с $\mathfrak{g}_f$. Мы знаем, однако, что σ_f индуцирует изоморфизм $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_f \cong T_f(O)$ согласно предложению 5.2.1. Это доказывает предложение 5.2.2.

5.3. Фиксируем теперь орбиту $O \subset \mathfrak{g}'$. Действие G на O задает гомоморфизм групп $\sigma_O\colon G \to D(O)$ и гомоморфизм алгебр Ли $d\sigma_O\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{d}(O)$, где векторное поле $\xi^x = d\sigma_O(x)$ в силу (5.2.2) имеет вид

$$\xi^x = \eta^x|_O \tag{5.3.1}$$

для любого $x \in \mathfrak{g}$.

Далее, положим $\varphi^x = \psi^x|_O$ для $x \in \mathfrak{g}$, так что $\varphi^x \in C(O)$. По лемме 5.2.1 справедливо равенство

$$\xi^x\varphi^y = \varphi_{[x,y]} \tag{5.3.2}$$

Наконец, определим дифференциальную 2-форму ω_O (гладкость и даже непрерывность которой предстоит еще доказать) на O, полагая $(\omega_O)_f = \omega_f$.

Предложение 5.3.1. *Форма* ω_O — *гладкая и для любого* $y \in \mathfrak{g}$ *справедливо соотношение* $i(\xi^y)\omega_O = d\varphi^y$.

Доказательство. Если $f \in O$, то $\sigma_f(y) = \xi^y_f$ согласно (5.3.1). В силу предложения 5.2.2 для $x, y \in \mathfrak{g}$ справедливо равенство

$$\omega_O(\xi^y, \xi^x) = \varphi^{[x, y]}, \tag{5.3.3}$$

так как $\langle f, [x, y]\rangle = \psi^{[x, y]}(f) = \varphi^{[x, y]}(f)$ для $f \in O$.

Но так как O однородно, существуют для любого $f \in O$ такие элементы $x_i \in \mathfrak{g}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, что $\xi^{x_i}_g$ образуют базис в $T_g(O)$ для всех g из некоторой окрестности f. Поскольку выражение $\omega_O(\xi^{x_i}, \xi^{x_j}) = \varphi^{[x_i, x_j]}$ является гладкой функцией в этой окрестности, отсюда следует, что форма ω_O гладка на O. Фиксируя $y \in \mathfrak{g}$, мы получаем из (5.3.2) и (5.3.3), что

$$\langle i(\xi^y)\omega_O, \xi^x\rangle = \omega_O(\xi^x, \xi^y) = \xi^x\varphi^y = \langle d\varphi^y, \xi^x\rangle$$

для всех $x \in \mathfrak{g}$. Так как векторы ξ^x порождают касательное пространство в каждой точке O, предложение доказано.

Пусть теперь $R(O)$ — множество вещественных гладких функций на O. Определим линейное отображение $\lambda_O\colon \mathfrak{g} \to R(O)$, полагая $\lambda_O(x) = \varphi^x$, так что $\lambda_O(x)(f) = \langle f, x\rangle$ для $f \in O$.

Оказывается, что (O, ω_O) не только является симплектическим многообразием, но и справедлива

Теорема 5.3.2. *Для любой орбиты* $O \subset \mathfrak{g}'$ *пара* (O, ω_O) *является строго симплектическим многообразием. Кроме того, отображение* λ_O *является поднятием* $d\sigma_O$, *так что* λ_O — *гомоморфизм алгебр Ли* ($R(O)$ *является*

алгеброй Ли относительно скобок Пуассона) и (O, ω_O, λ_O) — *гамильтоново* G-*пространство.*

Доказательство. Покажем сначала, что ω_O G-инвариантно, т. е. $\theta(\xi^x)\omega_O = 0$ для всех $x \in \mathfrak{g}$.

Применим $\theta(\xi^x)$ и обеим частям равенства (5.3.3). Мы знаем, что $\theta(\xi^x)\,d\varphi^y = d(\xi^x\varphi^y) = d\varphi^{[x,y]}$ в силу (5.3.2). Но $d\varphi^{[x,y]} = i(\xi^{[x,y]})\,\omega_O$ согласно предложению 5.3.1, так что

$$\theta(\xi^x)\,d\varphi^y = i(\xi^{[x,y]})\,\omega_O. \tag{5.3.4}$$

С другой стороны, $[O(\xi^x), i(\xi^y)] = i([\xi^x, \xi^y])$ в силу (1.3.2). Последнее выражение равно $i(\xi^{[x,y]})$, так как σ_O — гомоморфизм. Поэтому $\theta(\xi^x)\,i(\xi^y)\,\omega_O = i(\xi^{[x,y]})\,\omega_O + i(\xi^y)\,\theta(\xi^x)\,\omega_O$. Сравнивая это с (5.3.4) и предложением 5.3.1, мы получаем $i(\xi^y)\,\theta(\xi^x)\,\omega_O = 0$ для всех x, $y \in \mathfrak{g}$. Так как векторы ξ^y, $y \in \mathfrak{g}$, порождают касательное пространство к O в каждой точке O, отсюда следует, что $\theta(\xi^x)\,\omega_O = 0$ для всех $x \in \mathfrak{g}$.

Следовательно, ω_O G-инвариантна.

Далее (см. (1.3.1)), $\theta(\xi^x) = i(\xi^x)\circ d + d\circ i(\xi^x)$ и, следовательно, равенство $\theta(\xi^x) = 0$ влечет $i(\xi^x)d\omega_O + d[i(\xi^x)\omega_O] = 0$. Но $i(\xi^x)\omega_O = d\varphi^x$ согласно предложению 5.3.1 и, следовательно, $d[i(\xi^x)\omega_O] = dd\varphi^x = 0$. Значит, $i(\xi^x)d\omega_O = 0$ для всех $x \in \mathfrak{g}$. Отсюда следует, что $d\omega_O = 0$, так как векторы ξ^x, $x \in \mathfrak{g}$, порождают касательное пространство к O в любой точке. Значит, (O, ω_O) — симплектическое многообразие.

Применяя еще раз предложение 5.3.1, мы видим, что форма $\beta_{d\sigma_O(x)} = i(d\sigma_O(x))\omega_O = i(\xi^x)\omega_O = d\varphi^x$ точна и, следовательно, $d\sigma_O(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{a}$, так что G строго симплектична на O. По определению ξ_φ, отсюда вытекает, что для любого $x \in \mathfrak{g}$

$$\xi_{\varphi^x} = \xi^x = d\sigma_O(x). \tag{5.3.5}$$

Таким образом, нам остается только доказать, что отображение $\lambda_O\colon x \longmapsto \varphi^x$ является гомоморфизмом алгебр Ли и, следовательно, поднятием $d\sigma_O$. Другими словами, нужно проверить равенство $[\varphi^x, \varphi^y] = \varphi^{[x,y]}$.

Но, по определению, $[\varphi^x, \varphi^y] = \xi_{\varphi^x}\varphi^y = \xi^x\varphi^y$ согласно (5.3.5). Далее, $\xi^x\varphi^y = \varphi^{[x,y]}$ в силу (5.3.2).

Наконец (см. замечание 5.2.1), формы $d\varphi^x$, $x \in \mathfrak{g}$, порождают кокасательное пространство в любой точке O. Итак, (O, ω_O, λ_O) — гамильтоново G-пространство.

Согласно замечанию 5.1.2 отсюда вытекает, что всякое многообразие, накрывающее G-орбиту в $\mathfrak{g}'$, обладает структурой гамильтонова G-пространства.

Покажем, что и обратно, множество G-орбит в $\mathfrak{g}'$ универсально в том смысле, что каждое гамильтоново G-пространство $X = (X, \omega_X, \lambda_X)$ накрывает некоторую орбиту O в $\mathfrak{g}'$ не только как многообразие, но и как гамильтоново пространство. Более того, в категории гамильтоновых пространств орбита O и накрывающий морфизм $X \to O$ определены однозначно.

5.4. Если X — односвязное многообразие, мы будем говорить, что соответствующее гамильтоново G-пространство (X, ω_X, λ_X) односвязно.

Теорема 5.4.1. *Пусть (X, ω_X, λ_X) — любое гамильтоново G-пространство. Существует единственная орбита O, для которой существует морфизм гамильтоновых пространств*

$$\tau_X\colon X \to O. \tag{5.4.1}$$

Этот морфизм определен однозначно. Кроме того, отображение (5.4.1) устанавливает взаимно однозначное соответствие между классами эквивалентности односвязных гамильтоновых G-пространств и G-орбитами в $\mathfrak{g}'$.

Доказательство. Пусть $\tau_X\colon X \to \mathfrak{g}'$ задана формулой

$$\langle \tau_X(p), x\rangle = [\lambda_X(x)](p) \tag{5.4.2}$$

для $x \in \mathfrak{g}$. Поскольку $\psi^x(\tau_X(p)) = \langle \tau_X(p), x\rangle$, мы имеем

$$\psi^x \circ \tau_X = \lambda_X(x). \tag{5.4.3}$$

Так как функции ψ^x, $x \in \mathfrak{g}$, задают систему координат на $\mathfrak{g}'$ и так как $\lambda_X(x) \in C(X)$, из (5.4.3) следует, что τ_X — гладкое отображение.

Далее, для $p \in X$ и $y \in \mathfrak{g}$ определим вектор

$$v = (\tau_X)_*[d\sigma_X(y)]_p \in T_{\tau_X(p)}(\mathfrak{g}').$$

Тогда согласно (5.4.3)

$$v\psi^x = [d\sigma_X(y)]_p \lambda_X(x) = [\lambda_X([y, x])](p),$$

так как $d\sigma_X(y) = \xi_{\lambda_X(y)}$ и, значит, $d\sigma_X(y)\lambda_X(x) = [\lambda_X(y), \lambda_X(x)] = \lambda_X([y, x])$. Но $[\lambda_X([y, x])](p) = \psi^{[y, x]}(\tau_X(p))$ согласно (5.4.3). Поэтому $v\psi^x = \psi^{[y, x]}(\tau_X(p))$ для всех $x \in \mathfrak{g}$. Кроме того, имеет место равенство $\eta^y_{\tau_X(p)}\psi^x = \psi^{[y, x]}(\tau_X(p))$ для всех $x \in \mathfrak{g}$ в силу (5.2.6), откуда $v = \eta^p_{\tau_X(p)}$. Значит, согласно (5.2.4), поля $\sigma_X(y)$ и η^y τ_X-связаны, т. е. $(\tau_X)_*\sigma_X(y) = \eta^y$.

Но тогда τ_X является G-отображением, поскольку оно является $\mathfrak{g}$-отображением (см. замечание 4.4.1). Далее, так как G транзитивно действует на X, образ τ_X является G-орбитой $O \subseteq \mathfrak{g}'$. Поэтому поля $\sigma_X(x)$ и ξ^x τ_X-связаны для всех $x \in \mathfrak{g}$, так что мы имеем

$$\omega_O(\xi^y, \xi^x) \circ \tau_X = (\tau_X^*\omega_O)(\sigma_X(y), \sigma_X(x)) \tag{5.4.4}$$

для любых $x, y \in \mathfrak{g}$. Из (5.4.3) вытекает равенство

$$\varphi^x \circ \tau_X = \lambda_X(x). \tag{5.4.5}$$

Но $\omega_O(\xi^y, \xi^x) = \varphi^{[x, y]}$ согласно (5.3.3) и, следовательно, левая часть равенства (5.4.4) совпадает с $\lambda_X([x, y])$. С другой стороны, $\omega_X(\sigma_X(y), \sigma_X(x)) = \lambda_X([x, y])$ в силу (4.1.6). Значит, $\omega_X = \tau_X^*\omega_O$, ибо векторные поля $\sigma_X(x)$, $x \in \mathfrak{g}$ порождают касательное пространство в каждой точке X. Поэтому в силу (5.4.5) τ_X является морфизмом гамильтоновых пространств. Если O_1 — любая орбита и $\tau\colon X \to O_1$ — морфизм гамильтоновых пространств, то $[\lambda_X(x)](p) = [\lambda_{O_1}(x)](\tau(p))$ для всех $p \in X$ и $x \in \mathfrak{g}$. Но $[\lambda_{O_1}(x)](\tau(p)) = \langle \tau(p), x\rangle$, а $[\lambda_X(x)](p) = \langle \tau_X(p), x\rangle$.

Значит, $\tau = \tau_X$, откуда следует, что $O_1 = O$. Это доказывает единственность O и τ_X.

Далее, пусть X и Y — односвязные гамильтоновы G-пространства и $\tau_X(X) = \tau_Y(Y) = O \subset \mathfrak{g}'$. Так как X и Y как многообразия являются односвязными накрытиями O, то для любой пары точек $p \in X$, $q \in Y$, обладающих свойством $\tau_X(p) = \tau_Y(q)$, существует единственный диффеоморфизм τ: $X \to Y$, такой, что $\tau_Y \circ \tau = \tau_Y$ и $\tau(p) = q$. Но тогда $\omega_X = \tau_X^*\omega_O = \tau^*\tau_Y^*\omega_O = \tau^*\omega_Y$. Кроме того, для любого $x \in \mathfrak{g}$ $\lambda_X(x) = \varphi^x \circ \tau_X = \varphi^x \circ \tau_Y \circ \tau = \lambda_Y(x)\,\tau$. Значит, τ — изоморфизм гамильтоновых пространств, т. е. X и Y изоморфны.

С другой стороны, если $\tau_X(X) \neq \tau_Y(Y)$, то X и Y не могут быть изоморфны. В самом деле, если τ: $X \to Y$ — изоморфизм гамильтоновых G-пространств, то $\tau_Y \circ \tau$ и τ_X — накрытия двух различных орбит одним и тем же многообразием. Это противоречит уже доказанному. Значит, соответствие $X \to \tau_X(X)$ является вложением множества классов эквивалентности односвязных гамильтоновых G-пространств в множество G-орбит в $\mathfrak{g}'$. Это соответствие, очевидно, сюръективно, так как согласно замечанию 5.1.2 односвязное накрытие X любой орбиты O обладает такой структурой гамильтонова G-пространства, что накрывающее отображение τ: $X \to O$ является морфизмом гамильтоновых G-пространств (так что $\tau = \tau_X$).

Замечание 5.4.1. По теореме 5.4.1 различные орбиты в $\mathfrak{g}'$ определяют неизоморфные гамильтоновы G-пространства, так как τ_O является, очевидно, тождественным отображением для любой G-орбиты $O \subset \mathfrak{g}'$.

Следствие. *Пусть* $X = (X, \omega_X, \lambda_X)$ — *гамильтоново* G-*пространство. Тогда* X *изоморфно некоторой орбите* $O \subset \mathfrak{g}'$, *если и только если функции* $\lambda_X(x)$, $x \in \mathfrak{g}$, *разделяют точки* X (*т. е. если для любых двух различных точек* p *и* q *из* X *существует такой* $x \in \mathfrak{g}$, *что* $[\lambda_X(x)](p) \neq [\lambda_X(x)](q)$).

Доказательство. Пусть $O \subset \mathfrak{g}'$ — G-орбита. Так как $[\lambda_O(x)](f) = \langle f, x\rangle$, ясно, что совокупность функций $\lambda_O(x)$, $x \in \mathfrak{g}$, разделяет точки O.

Следовательно, если X и O изоморфны, то функции $\lambda_X(x)$, $x \in \mathfrak{g}$, разделяют точки X.

Обратно, если эти функции разделяют точки, то отображение τ_X, задаваемое формулой (5.4.2), является вложением. Поскольку это отображение всегда является локальным гомеоморфизмом и сюръективным отображением на G-орбиту $\tau_X(X)$, ясно, что τ_X — диффеоморфизм и, следовательно, изоморфизм гамильтоновых G-пространств.

5.5. Если не обращать внимание на поднятие λ_X и рассматривать только симплектическое пространство (X, ω_X), то может случиться, что X накрывает орбиту (т. е. существует G-отображение τ: $X \to O$, которое является накрытием многообразий и обладает свойством $\tau^*\omega_O = \omega_X$, но отображение τ или орбита O определяются неоднозначно. Например, если $\hat{\mathfrak{g}} = H^1(\mathfrak{g}, \mathbf{R})$ — множество тех $f \in \mathfrak{g}'$, для которых $f \mid_{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]} = 0$, то легко видеть, что все элементы $\hat{\mathfrak{g}}$ являются неподвижными точками относительно действия G на $\mathfrak{g}'$, и, обратно, всякая неподвижная точка (т. е. орбита,

состоящая из одной точки) лежит в $\hat{\mathfrak{g}}$. (Это ясно из того, что условие $x \cdot f = 0$ для всех $x \in \mathfrak{g}$ равносильно условию $f \mid_{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]} = 0$.) Таким образом, если X — тривиальное G-симплектическое пространство, т. е. состоит из одной точки, то оно накрывает любую точку из $\hat{\mathfrak{g}}$.

Мы покажем сейчас, что и в общем случае вся неоднозначность связана с множеством $\hat{\mathfrak{g}}$.

Теорема 5.5.1. *Предположим, что (X, ω_X) — симплектическое однородное G-пространство и τ: $X \to O$ — накрытие (в смысле симплектических G-пространств). Тогда для любого $f \in \hat{\mathfrak{g}}$ множество $f + O = O^f$ также является G-орбитой в $\mathfrak{g}'$ и отображение τ^f: $X \to O^f$, задаваемое формулой $\tau^f(p) = f + \tau(p)$, является накрытием.*

Обратно, всякое накрытие τ': $X \to O'$ имеет такой вид, так что, в частности, $O' = g + O$ для некоторого $g \in \hat{\mathfrak{g}}$.

Доказательство. Пусть τ_i: $X \to O_i$ $(i = 1, 2)$ — два накрытия. Определим отображения λ_X^i: $\mathfrak{g} \to R(X)$ $(i = 1, 2)$, полагая $\lambda_X^i(x) = \psi^x \circ \tau_i$. Тогда (см. замечание 5.1.2) оба этих отображения будут поднятиями $d\sigma_X$:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbf{R} \arrow[r] & R(X) \arrow[r] & \mathfrak{a}(X) \arrow[r] & 0 \\ & & \mathfrak{g} \arrow[u, "\lambda_X^i"] \arrow[ur, "d\sigma_X"'] & & \end{tikzcd}$$

Из точности верхней последовательности вытекает, что $\lambda_X^2(x) - \lambda_X^1(x) = \langle g, x\rangle \in \mathbf{R}$ для всех $x \in \mathfrak{g}$ и некоторого однозначно определенного $g \in \mathfrak{g}'$. Этот элемент g должен принадлежать $\hat{\mathfrak{g}}$, так как рассматриваемое расширение центрально. Поскольку $\langle \tau_i(p), x\rangle = [\lambda_X^i(x)](p)$, отсюда следует, что $\tau_2(p) = \tau_1(p) + g$ для всех $p \in X$. Это доказывает существование и единственность записи $\tau'(p)$ (в обозначениях теоремы) в форме $\tau(p) + g$ для некоторого $g \in \hat{\mathfrak{g}}$, не зависящего от $p \in X$.

Пусть теперь, обратно, $f \in \hat{\mathfrak{g}}$. Коль скоро $\lambda_X(x) = \varphi^x \circ \tau$ задает поднятие $d\sigma_X$, этим же свойством обладает и отображение λ_X^f, определяемое формулой $\lambda_X^i(x) = \lambda_X(x) + \langle f, x\rangle$. Другими словами, (X, ω_X, λ_X) и $(X, \omega_X, \lambda_X^f)$ задают структуру гамильтонова G-пространства. Если τ_X и τ_X^f — соответствующие накрытия орбит (в смысле теоремы 5.4.1), то согласно (5.4.2) $\tau_X = \tau$ и $\tau_X^f = \tau^f$, так что O^f — орбита и τ^f: $X \to O^f$ — накрытие этой орбиты.

В одном важном классе примеров рассмотрение накрытий орбит приводит к описанию всех однородных симплектических пространств.

Следствие теоремы 5.5.1. Предположим, что $H^1(\mathfrak{g}, \mathbf{R}) = H^2(\mathfrak{g}, \mathbf{R}) = 0$ (например, алгебра $\mathfrak{g}$ полупроста). Тогда самое общее G-однородное симплектическое пространство (X, ω_X) накрывает одну из орбит O в $\mathfrak{g}$. Кроме того, накрывающее отображение τ и, следовательно, орбита O определены однозначно.

Доказательство. Пусть (X, ω_X) — G-однородное симплектическое пространство. Поскольку, $H^1(\mathfrak{g}, \mathbf{R}) = 0$, алгебра $\mathfrak{g}$ совпадает со своим коммутантом $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, так что X строго симплектично (см. предложение 4.4.8). С другой стороны, поскольку $H^2(\mathfrak{g}, \mathbf{R}) = 0$, существует поднятие λ_X отображения $d\sigma_X$ (см. замечание 4.5.1). Поэтому (X, ω_X, λ_X) —гамильтоново G-пространство. Искомое утверждение вытекает теперь из теорем 5.4.1 и 5.5.1.

Замечание 5.5.1. В работе Уанга [4] доказано, что произвольное келерово пространство, однородное относительно компактной полупростой группы Ли, имеет вид G/H, где H — централизатор некоторого тора в G. Приведенное выше следствие обобщает этот результат в нескольких направлениях. Прежде всего, келеровость влечет симплектичность, так что наше следствие применимо. Оно утверждает, что рассматриваемое пространство накрывает некоторую орбиту. Но все орбиты односвязны и имеют вид G/H, где H — централизатор некоторого тора. Поэтому результат Уанга имеет место при более слабом предположении о симплектичности. Кроме того, наш подход не использует компактности.

5.6. Пусть (X, ω_X, λ_X) — фиксированное гамильтоново G-пространство. Нас интересует вопрос, когда класс $[\omega_X] \in H^2(X, \mathbf{R})$ является целочисленным (так что $\mathscr{L}_c(X, \omega_X)$ непусто)?

Пусть G_p означает стабилизатор точки $p \in X$, так что имеет место изоморфизм G-однородных пространств $X \cong G/G_p$.

Обозначим через f точку $\tau_X(p) \in \mathfrak{g}'$ и пусть $O = \tau_X(X) \subset \mathfrak{g}'$ — орбита этой точки, а G_f — стабилизатор f так, что $O = G/G_f$. Так как отображение τ_X: $X \to O$ — локальный диффеоморфизм, мы имеем

$$(G_f)_0 \subseteq G_p \subseteq G_f, \tag{5.6.1}$$

где $(G_f)_0$ — связная компонента единицы в группе G_f.

В частности,

$$(G_p)_0 = (G_f)_0 \tag{5.6.2}$$

и, следовательно, $\mathfrak{g}_f$ является алгеброй Ли обеих групп G_f и G_p.

Замечание 5.6.1. Если мы рассмотрим совокупность всех объектов Y из $\mathrm{Ham}\,(G)$, для которых $\tau_Y(Y) = 0$, то согласно замечанию 5.1.2 группа G_p, где $p \in \tau_Y^{-1}(f)$, пробегает совокупность всех подгрупп, заключенных между G_f и $(G_f)_0$. Разумеется, односвязному Y соответствует случай $G_p = (G_f)_0$.

По определению $\mathfrak{g}_f$ функционал f обращается в нуль на $[\mathfrak{g}_f, \mathfrak{g}]$ и тем более на $[\mathfrak{g}_f, \mathfrak{g}_f]$. Поэтому, рассматривая $i\,\mathbf{R}$ как алгебру Ли группы $\mathbf{T}$ (окружности), мы получаем гомоморфизм алгебр Ли:

$$2\pi i f\colon \mathfrak{g}_f \to i\,\mathbf{R}. \tag{5.6.3}$$

Возникает естественный вопрос, когда существует гомоморфизм Λ_0: $(G_f)_0 \to \mathbf{T}$, т. е. характер $(G_f)_0$, для которого (5.6.3) является производным отображением, а если такой характер существует, то допускает ли он продолжение Λ: $G_p \to \mathbf{T}$?

Пусть G_p^* — группа характеров группы G_p. Обозначим через $G_p^{\#} \subset G_p^*$ множество (возможно, пустое) всех характеров $\Lambda: G_p \to \mathbf{T}$, для которых

$$\frac{d}{dt}\Lambda(\exp tx)\,|_{t=0} = 2\pi i\,\langle f, x\rangle \tag{5.6.4}$$

для всех $x \in \mathfrak{g}_f$.

Мы можем выбрать $Y = G/(G_f)_0$ в качестве односвязного накрытия X, тогда накрывающее отображение τ: $Y \to X$ имеет вид $\tau[a(G_f)_0] = a \cdot p$. Рассмотрим Y как объект из $\operatorname{Ham} G$, для которого $\omega_Y = \tau^*\omega_X$ и $\lambda_Y(x) = \lambda_X(x) \circ \tau$ для любого $x \in \mathfrak{g}$. Мы можем тогда отождествить фундаментальную группу Π многообразия X с $G_p/(G_f)_0$:

$$\Pi = G_p/(G_f)_0. \tag{5.6.5}$$

Если $b = a(G_f)_0 \in \Pi$ так, что $a \in G_p$, то соответствующее преобразование

$$\tau_b\colon Y \to Y \tag{5.6.6}$$

задается формулой $\tau_b(g(G_f)_0) = ga(G_f)_0$ (напомним, что G_p нормализует $(G_f)_0$).

В силу (5.6.5) мы можем рассматривать группу характеров Π^* группы Π как подгруппу таких характеров $\chi \in G_p^*$, для которых ограничение $\chi \mid_{(G_f)_0}$ тривиально.

Ясно, что $\chi\Lambda \in G_p^{\#}$ для любых $\Lambda \in G_p^{\#}$, $\chi \in \Pi^*$, так что Π^* действует на $G_p^{\#}$, если последнее множество непусто.

Предложение 5.6.1. *Если $G_p^{\#}$ непусто, то оно является главным однородным пространством для группы Π^*, т. е. для любого $\Lambda \in G_p^{\#}$ отображение $\chi \to \chi\Lambda$ является биекцией Π^* в $G_p^{\#}$.*

Доказательство. Это немедленно вытекает из того, что G_p^* должно быть смежным классом по Π^* в G_p^* и из того, что характер связной группы $(G_f)_0$ определяется своим производным отображением.

5.7. Если $[\omega_X]$ — целочисленный класс и $l = [(L, \alpha)] \in \mathscr{L}_c(X, \omega_X)$, то по теореме 4.5.1 существует выделенное поднятие σ_L: $G \to E(L, \alpha)$ отображения σ_X, определяемое равенством $(d\sigma_L)(x) = \widetilde{\delta} \circ \lambda_X(x)$ для любого $x \in \mathfrak{g}$ (см. (4.5.3)). Отметим, что если $[(L_i, \alpha_i)] = l$ $(i = 1, 2)$ и σ: $L_1 \to L_2$ устанавливает эквивалентность линейных расслоений со связностью над X, то в силу (4.5.4) мы имеем $\sigma_* d\sigma_{L_1}(x) = d\sigma_{L_2}(x)$, так что

$$\sigma\sigma_{L_1}(a)\sigma^{-1} = \sigma_{L_2}(a) \tag{5.7.1}$$

для всех $a \in G$.

Далее, ясно, что L_p инвариантно относительно $\sigma_L(G_p)$ и, следовательно, можно определить характер $\Lambda^l \in G_p^*$ группы G_p с помощью формулы

$$\Lambda^l(a) = \sigma_L(a)u/u \tag{5.7.2}$$

для любого $u \in L_p^*$. Величина $\Lambda^l(a)$, очевидно, не зависит от выбора u. В силу (5.7.1) Λ^l зависит на самом деле не от (L, α), а только от класса $l = [(L, \alpha)]$.

Предложение 5.7.1. *Характер Λ^l принадлежит $G_p^{\#}$.*

Доказательство. Пусть $x \in \mathfrak{g}_f$. Тогда $\xi_f^x = 0$ согласно предложению 5.2.1 и (5.3.1), так что $[d\sigma_X(x)]_p = 0$. Значит, глобальная траектория γ поля $d\sigma_X(x)$ через точку p состоит из одной этой точки, т. е. $\gamma(t) = p$ для всех $t \in \mathbf{R}$. Следовательно, если $s(t)$ — самопараллельное сечение вдоль γ и $s(0) = u \in L_p^*$, то $s(t) = u$ и для всех t.

Но если $\widetilde{\gamma}(t)$ — глобальная траектория поля $d\sigma_L(x)$ через точку u, то $\widetilde{\gamma}(t) = \sigma_L(\exp(-tx))u$.

Кроме того, $d\sigma_L(x) = \eta\,(\lambda_X(x), d\sigma_X(x))$ в обозначениях (4.2.1) и (4.5.3), поэтому в силу теоремы 10.2.1 $\widetilde{\gamma}(t) = g(t)u$, где

$$g(t) = e^{-2\pi i\int\limits_0^t [\lambda_X(x)](\gamma(r))dr}.$$

Но $[\lambda_X(x)](\gamma(r)) = [\lambda_X(x)](p) = [\lambda_O(x)](f) = \langle f, x\rangle$.

Значит, $g(t) = e^{-2\pi it\langle f,\, x\rangle}$, или $\sigma_L(\exp(tx))\,u = e^{2\pi it\langle f,\, x\rangle}u$, или $\Lambda^l(\exp(tx)) = e^{2\pi it\langle f,\, x\rangle}$.

Отсюда $(d\Lambda^l)(x) = 2\pi i\langle f, x\rangle$, так что $\Lambda^l \in G_p^{\#}$

Предположим теперь, что $G_p^{\#}$ непусто и пусть $\Lambda^l \in G_p^{\#}$. Линейное расслоение $L = L_\Lambda$ над X, соответствующее Λ, можно построить следующим образом. Группа $G_{p^{-1}}$ свободно действует на $G \times \mathbf{C}$ по формуле $a\cdot(g, z) = (ga, \Lambda(a)z)$.

В качестве L можно взять пространство G_p-орбит в $G \times \mathbf{C}$, которое является фактор-многообразием, а проекцию $\pi\colon L \to X$ определить равенством $\pi(G_p\cdot(g, z)) = g\cdot p$. Структура линейного пространства в $L_p = \pi^{-1}(p)$ переносится из $\mathbf{C}$.

В стандартной терминологии построенное таким образом расслоение обозначается $L = G \underset{G_p}{\times} \mathbf{C}$ и называется расслоением, ассоциированным с главным расслоением

$$\begin{array}{c} G_p \to G \\ \quad\ \downarrow \\ \quad\ X \end{array}$$

над X с пространством G и слоем G_p, соответствующим характеру $\Lambda\colon G_p \to \operatorname{Aut}\mathbf{C}$.

Существование локального гладкого сечения отображения $G \to X$ обеспечивает выполнение условий п. 1.1 для L.

Далее, $\mathbf{C}^*$ действует на L по формуле $c\cdot(G_p\cdot(g, z)) = G_p\cdot(g, cz)$, а группа G — по формуле $a\cdot(G_p\cdot(g, z)) = G_p\cdot(ag, z)$.

Поскольку действия G и $\mathbf{C}^*$ перестановочны, действие G порождает гомоморфизм $\sigma_L\colon G \to E(L)$.

Покажем теперь, что L^* обладает естественной формой связности α. Так как действия G и $\mathbf{C}^*$ перестановочны, прямое произведение $H = G \times \mathbf{C}^*$ действует на L. Это действие транзитивно на L^* и определяет сюръективное отображение

$$\nu\colon H \to L^*$$

H-однородных пространств по формуле $\nu(g, z) = G_p \cdot (g, z) = (g, z) \cdot u$, где $u = G_p \cdot (e, 1) \in L_p^*$. Стабилизатором точки $u = G_p \cdot (e, 1) \in L_p^*$ будет, очевидно, подгруппа H_u, состоящая из элементов вида $(a, \Lambda(a)^{-1})$, где $a \in G_p$.

Рассмотрим теперь $\mathbf{C}$ как алгебру Ли группы $\mathbf{C}^*$ (полагая $\exp z = e^z$), так что алгеброй Ли группы H будет $\mathfrak{h} = \mathfrak{g} + \mathbf{C}$.

Каждый элемент g из комплексного сопряжения пространства к $\mathfrak{h}$ задает левоинвариантную комплексную 1-форму $\delta_g \in \Omega^1(H)$ (форму Маурера—Картана), значение которой в точке $(e, 1)$ совпадает с g. Если $d \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}, \mathbf{C})$ — такой функционал, что $\langle d, z\rangle = \frac{z}{2\pi i}$ и g имеет вид $g = (f, d)$, то

$$\delta_g = \left(\delta_f, \frac{1}{2\pi i} \frac{dz}{z}\right), \tag{5.7.3}$$

где δ_f — левоинвариантная 1-форма на G, значение которой в точке e равно $f = \tau_X(p)$.

Далее, из сказанного выше следует, что алгебра Ли $\mathfrak{h}_u$ группы H_u состоит из всех элементов алгебры Ли $\mathfrak{h} = \mathfrak{g} + \mathbf{C}$, имеющих вид $(x, -2\pi i \langle f, x\rangle)$, где $x \in \mathfrak{g}_f$. Так как $g = (f, d)$, мы видим, что $g \mid_{\mathfrak{h}_u} = 0$.

Далее производное отображение для ν в единице группы H порождает точную последовательность

$$0 \to \mathfrak{h}_u \to \mathfrak{h} \xrightarrow{\nu_*} T_u(L^*) \to 0.$$

Следовательно, существует единственный элемент g_u в кокасательном пространстве к L^* в точке u, для которого $g_u \circ \nu_* = g$.

Далее, так как $G_p \subset G_f$, элемент $f \in \mathfrak{g}'$ неподвижен относительно группы G_p (действующей с помощью представления Ad'). Поскольку $\mathbf{C}^*$ — центральная подгруппа в H, ясно, что $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(H, \mathbf{C})$ неподвижен относительно $\mathrm{Ad}'(H_u)$. Значит, g_u неподвижен относительно действия H_u на кокасательном пространстве в точке u и, следовательно, существует единственная 1-форма α на L^*, которая H-инвариантна и удовлетворяет условию $\alpha_u = g_u$. Ясно, что

$$\nu^* \alpha = \delta_g, \tag{5.7.4}$$

так что из локальной структуры прямого произведения вытекает гладкость α.

Пусть теперь $q \in X$ и $q = a \cdot p$ для некоторого $a \in G$. Тогда $\nu(a, 1) = v \in L_q^*$.

Если определить отображение $\tau_v : \mathbf{C}^* \to L_q^*$, полагая $\tau_v(c) = cv$, то $\tau_v = \nu \circ \rho$, где отображение ρ: $\mathbf{C}^* \to H$ задается формулой $\rho(c) = (a, c)$. Значит, $\tau_v^* \alpha = \rho^* \nu^* \alpha = \rho^* \delta_g$ в силу (5.7.4). Но $\rho^* \delta_g = \frac{1}{2\pi i} \frac{dz}{z}$ в силу (5.7.3). Поэтому $\alpha \mid_{L_q^*} = \beta_q$ в обозначениях п. 1.5. Из того, что $\mathbf{C}^* \subset H$, следует, что α $\mathbf{C}^*$-инвариантна и, следовательно (см. п. 1.5), задает форму связности на L^*.

Так как значения характера Λ по модулю равны 1, существует такая эрмитова структура N на L, что для $g \in G$, $c \in \mathbf{C}^*$ справедливы равенства

$$|N|^2[G_p \cdot (g, c)] = |N|^2(\nu(g, c)) = |c|^2,$$

так что $\nu^*(d \mid N \mid^2/\mid N \mid^2) = (0, d \mid z \mid^2/\mid z \mid^2)$. Из вещественности f и соотношений (5.7.3) и (5.7.4) следует, что

$$\nu^*[2\pi i(\alpha - \bar{\alpha})] = 2\pi i(\delta_g - \delta_{\bar{g}}) = (0, d \mid z \mid^2/\mid z \mid^2).$$

Но из локальных рассмотрений ясно, что ν^* инъективно, так что $d \mid N \mid^2/\mid N \mid^2 = 2\pi i(\alpha - \bar{\alpha})$.

Следовательно, N является α-инвариантной эрмитовой структурой и $l = [(L, \alpha)] \in \mathscr{L}_c(X)$.

Группа G содержится в H и поскольку α H-инвариантна, она G-инвариантна; N также G-инвариантна, так что σ_L: $G \to E(L, \alpha)$.

Предложение 5.7.2. *Предположим, что $C_p^{\#}$ непусто, $\Lambda \in G_p^{\#}$ и класс $[(L, \alpha)] = l \in \mathscr{L}_c(X)$ определен, как и выше. Тогда $\omega_X = \operatorname{curv}(L, \alpha)$, так что $l \in \mathscr{L}_c(X, \omega_X)$.*

Доказательство. Положим $\omega = \operatorname{curv}(L, \alpha)$ и ρ: $G \to X$ — отображение, действующее по формуле $\rho(a) = a \cdot p$. Обозначим, как и выше, через δ_f левоинвариантную 1-форму на G, значение которой в точке e равно f. Мы утверждаем, что

$$\rho^*\omega = d\delta_f. \tag{5.7.5}$$

В самом деле, в принятых выше обозначениях $\pi \circ \nu \circ i = \rho$, где i: $G \to H$ — естественное вложение. Значит, $\rho^*\omega = (i^* \circ \nu^* \circ \pi^*)\omega$. Но $\pi^*\omega = d\alpha$ и, следовательно, $\nu^*\pi^*\omega = d\delta_g = (d\delta_f, 0)$. Это доказывает (5.7.5).∎

Далее, для $x \in \mathfrak{g}$ обозначим через Γ_x правоинвариантное векторное поле на G, задаваемое равенством $(\Gamma_x\varphi)(a) = \frac{d}{dt}\varphi(\exp(-tx)a)\mid_{t=0}$ для $\varphi \in C(G)$ и $a \in G$. Тогда очевидно, что Γ_x и $\sigma_X(x)$ ρ-связаны. Поэтому для $x, y \in \mathfrak{g}$ имеет место равенство

$$\omega(\sigma_X(y), \sigma_X(x)) \circ \rho = d\delta_f(\Gamma_y, \Gamma_x) = \langle i(\Gamma_y)d\delta_f, \Gamma_x\rangle.$$

Но $i(\Gamma_y)d = -di(\Gamma_y) + \theta(\Gamma_y)$ и $\theta(\Gamma_y)\delta_f = 0$, поскольку δ_f левоинвариантна, а Γ_y, будучи правоинвариантным, является инфинитезимальной образующей однопараметрической группы левых сдвигов. Значит, $i(\Gamma_y)d\delta_f = -di(\Gamma_y)\delta_f = -d\,\langle\delta_f, \Gamma_y\rangle$ и, следовательно,

$$\omega(\sigma_X(y), \sigma_X(x)) \circ \rho = -\Gamma_x\,\langle\delta_f, \Gamma_y\rangle.$$

Из равенства $\theta(\Gamma_x)\delta_f = 0$ вытекает, что $\Gamma_x\langle\delta_f, \Gamma_y\rangle = \langle\delta_f, [\Gamma_x, \Gamma_y]\rangle = \langle\delta_f, \Gamma_{[x, y]}\rangle$ согласно (1.3.2). Поэтому $\omega(\sigma_X(y), \sigma_X(x)) \circ \rho = -\langle\delta_f, \Gamma_{[x, y]}\rangle$

В точке e $\delta_f = f$, а $\Gamma_{[x, y]} = -[x, y]$. Значит,

$$\omega_p(\sigma_X(y), \sigma_X(x)) = \langle f, [y, x]\rangle = (\omega_O)_f(\sigma_O(y), \sigma_O(x))$$

согласно (5.3.3).

Однако $\tau_X^*\omega_O = \omega_X$ и поля $\sigma_O(x)$ и $\sigma_X(x)$ τ_X-связаны, так что полученное выражение можно записать также в виде $(\omega_X)_p(\sigma_X(y), \sigma_X(x))$. Значит, $\omega_p = (\omega_X)_p$, поскольку векторы $[\sigma_X(x)]_p$, $x \in \mathfrak{g}$, порождают $T_p(X)$. Так как ω и ω_X — G-инвариантные 2-формы на X, отсюда следует, что $\omega = \omega_X$.

Мы можем теперь доказать следующее утверждение.

Теорема 5.7.1. *Пусть (X, ω_X, λ_X) — любое гамильтоново G-пространство, $p \in X$ и G_p — стабилизатор точки p. Тогда класс когомологий*

$[\omega_X] \in H^2(X, \mathbf{R})$ *является целочисленным, если и только если множество характеров* $G_p^{\#}$ (см. (5.6.4)) *непусто. Кроме того, если* Λ^l — *характер* G_p (см. (5.7.2)), *определенный классом* $l \in \mathscr{L}_c(X, \omega_X)$, *то* $\Lambda^l \in G_p^{\#}$ *и отображение*

$$(5.7.6) \qquad \mathscr{L}_c(X, \omega_X) \to G_p^{\#},$$

переводящее l *в* Λ^l, *взаимно однозначно.*

Напомним, что $\mathscr{L}_c(X, \omega_X)$ — множество классов эквивалентности линейных расслоений со связностью над X, имеющих ω_X своей формой кривизны. Далее, отображение (5.7.6) является Π^*-отображением, где Π^* — группа характеров фундаментальной группы X (напомним, что $\mathscr{L}_c(X, \omega_X)$ и $G_p^{\#}$ являются главными однородными пространствами группы Π^* согласно теореме 2.5.1 и предложению 5.6.1).

Доказательство. Если существует $\Lambda \in G_p^{\#}$, то согласно предложению 5.7.2 построенное выше расслоение со связностью (L, α) определяет элемент $l \in \mathscr{L}_c(X, \omega_X)$. Согласно предложению 2.1.1 это влечет целочисленность класса $[\omega_X]$. Обратно, если $[\omega_X]$ — целочисленный класс, то существует $l = [(L, \alpha)] \in \mathscr{L}_c(X, \omega_X)$.

Значит, в силу предложения 5.7.1 характер Λ^l лежит в $G_p^{\#}$, так что это множество непусто.

Предположим теперь, что $[\omega_X]$ — целочисленный класс. Поскольку в силу теоремы 2.5.1 и предложения 5.6.1 $\mathscr{L}_c(X, \omega_X)$ и $G_p^{\#}$ оба являются главными однородными пространствами, нам остается только доказать, что (5.7.6) является Π^*-отображением, т. е.

$$(5.7.7) \qquad \Lambda^{\chi \cdot l} = \chi \cdot \Lambda^l$$

для любых $\chi \in \Pi^*$ и $l = [(L, \alpha)] \in \mathscr{L}_c(X, \omega_X)$.

Воспользуемся обозначениями пп. 2.4, 2.5 и 5.6. Многообразие $X^1 = G/(G_f)_0$ является односвязным накрытием пространства X, а направляющее отображение β из п. 2.4 совпадает с отображением τ из п. 5.6. Кроме того, $\omega_{X^1} = \omega^1 = \beta^* \omega_X$. Очевидно, что $[\omega^1]$ — целочисленный класс, коль скоро этим свойством обладает $[\omega_X]$.

Гомоморфизм $\sigma\colon \Pi \to D(X^1, \omega^1)$ (см. (2.4.1)) имеет вид $\sigma(b) = \tau_{b^{-1}}$ (см. (5.6.6)). Определим (единственное с кривизной ω^1) линейное расслоение со связностью (L^1, α^1) над X^1, как в п. 2.4, и пусть

$$(5.7.8) \qquad \nu\colon \Pi \to E(L^1, \alpha^1)$$

— поднятие σ (см. предложение 2.4.1). Как и в п. 2.4, фактор-пространство $L = L^1/\nu(\Pi)$ является линейным расслоением над X и обладает такой формой связности α, что $\widetilde{\beta}^* \alpha = \alpha^1$, где $\widetilde{\beta}\colon L^1 \to L$ — каноническая проекция. В обозначениях (2.4.3) $l_\nu = [(L, \alpha)] \in \mathscr{L}_c(X, \omega_X)$. Мы хотим теперь вычислить характер $\Lambda^{l_\nu} \in G_p^{\#}$ в терминах ν.

Группа G действует на L^1 и L с помощью гомоморфизмов

$$\sigma_{L^1}\colon G \to E(L^1, \alpha^1) \quad \text{и} \quad \sigma_L\colon G \to E(L, \alpha),$$

задаваемых теоремой 5.1.1 (так как (X, ω_X, λ_X) и $(X^1, \omega_{X^1}, \lambda_{X^1})$ — гамильтоновы G-пространства).

Мы утверждаем, что $\widetilde{\beta}$: $L^1 \to L$ — G-отображение.

Согласно замечанию (4.4.1) достаточно проверить, что $\widetilde{\beta}$ является $\mathfrak{g}$-отображением. Но так как $d\sigma_L = \widetilde{\delta}_L \circ \lambda_X$, $d\sigma_{L^1} = \widetilde{\delta}_{L^1} \circ \lambda_{L^1}$ и $\lambda_{X^1}(x) = \lambda_X(x) \circ \beta$ для $x \in \mathfrak{g}$, остается проверить, что поле $\widetilde{\delta}_L(\varphi)$ $\widetilde{\beta}$-связано с $\widetilde{\delta}_{L^1}(\varphi \circ \beta)$ для любой функции $\varphi \in R(X)$. Но поле ξ_φ β-связано с $\xi_{\varphi\circ\beta}$, поскольку β — локальный симплектический изоморфизм. Далее, поскольку $\beta^*\alpha = \alpha^1$, β^* переводит горизонтальные векторы в горизонтальные, так что ξ_φ и $\xi_{\varphi\circ\beta}$ $\widetilde{\beta}$-связаны в силу коммутативной диаграммы (2.4.2). Если $v \in (L^1)^*$, то $\eta(\varphi \circ \beta)$ — касательный вектор к кривой $t \to e^{-\pi i t \varphi(\beta(\pi^1 v))} v$ в точке $t = 0$, а $\eta(\varphi)_{\widetilde{\beta}v}$ — касательный вектор к кривой $t \to e^{-2\pi i t \varphi(\pi \widetilde{\beta}(v))} \widetilde{\beta}(v)$ в точке $t = 0$. Значит, $\eta(\varphi)$ и $\eta(\varphi \circ \beta)$ $\widetilde{\beta}$-связаны, поскольку $\widetilde{\beta}$ линейно на L^1_v и $(\pi\beta)^\sim = \beta\pi^1$ в силу (2.4.2). Поэтому поле $\delta_L(\varphi) = \eta(\varphi) + \widetilde{\xi}_\varphi$ $\widetilde{\beta}$-связано с полем $\delta_{L^1}(\varphi \circ \beta) = \eta(\varphi \circ \beta) + \widetilde{\xi}_{\varphi\circ\beta}$, так что $\widetilde{\beta}$ — G-отображение.

Пусть теперь $u \in L_p$, так что в силу (5.7.2)

$$\Lambda^{l_\nu}(a) = \sigma_L(a)u/u \tag{5.7.9}$$

для $a \in G_p$. Если p^1 — смежный класс $(G_f)_0$ в X^1, то $\beta(p^1) = p$. Определим вектор $v \in L^1_{p^1}$ равенством $\widetilde{\beta}v = u$ и пусть $b = a(G_f)_0 \in \Pi$. Тогда

$$\widetilde{\beta}(\nu(b^{-1})v) = \widetilde{\beta}(v) = u, \tag{5.7.10}$$

так как $\widetilde{\beta}\circ\nu(b^{-1}) = \widetilde{\beta}$ по определению $\widetilde{\beta}$. Однако $\nu(b^{-1})v = L^1{}_{\sigma(b^{-1})p^1}$, $\sigma(b^{-1})p^1 = \tau_b p^1$, а $\tau_b p^1$ — это смежный класс $a(G_f)_0$ в X^1. С другой стороны,

$$\widetilde{\beta}(\sigma_{L^1}(a)v) = \sigma_L(a)u, \tag{5.7.11}$$

поскольку $\widetilde{\beta}$ — G-отображение. Но $\sigma_{L^1}(a)v \in L^1{}_{\sigma_{L^1}(a)\,p^1}$ и $\sigma_{X^1}(a)p^1$ — это тот же смежный класс $a(G_f)_0$. Поэтому $\sigma_{L^1}(a)v/\nu(b^{-1})v$ корректно определено и, поскольку $\widetilde{\beta}$ линейно на слое, то согласно (5.2.4), (5.7.10) и (5.7.11),

$$\Lambda^{l_\nu}(a) = \sigma_{L^1}(a)v/\nu(b^{-1})v. \tag{5.7.12}$$

Далее, для любого $\chi \in \Pi^*$ в силу (2.5.6) справедливо равенство $\chi \cdot l = l_{\chi\cdot\nu}$. Но $\chi\nu(b^{-1}) = \chi(b^{-1})\nu(b^{-1})$ согласно предложению 1.13.1. Кроме того, $\chi(b) = \chi(a)$, если рассматривать Π^* как подгруппу в G_p^*. Подставляя $\chi\nu$ вместо ν в (5.2.12), мы получаем $\Lambda^{\chi\cdot l_\nu}(a) = \chi(a)\Lambda^{l_\nu}(a) = (\chi\cdot\Lambda)^{l_\nu}$. Поскольку (L^1, α^1), v и σ_{L^1} не зависят от поднятия ν и поскольку $l = l_\nu$ — произвольный элемент $\mathscr{L}_c(X, \omega_X)$, мы получаем $\Lambda^{\chi\cdot l} = \chi\cdot\Lambda^l$ для всех $\chi \in \Pi^*$ и $l \in \mathscr{L}_c(X, \omega_X)$.

С л е д с т в и е 1. *Пусть G — односвязная группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли, $O \subset \mathfrak{g}'$ — орбита группы G, так что (O, ω_O, λ_O) — гамильтоново G-пространство* (см. теорему 5.3.1). *Пусть $f \in O$ и G_f — стабилизатор точки f. Тогда класс когомологий $[\omega_O] \in H^2(O, \mathbf{R})$ является целочисленным, если и только если существует характер Λ группы G_f, дифференциал которого*

совпадает с $2\pi i f\mid_{\mathfrak{g}_f}$, *где* $\mathfrak{g}_f$ *— алгебра Ли группы* G_f. *В случае, когда это условие выполнено, множество* $G_f^\#$ *всех таких характеров* G_f *и множество* $\mathscr{L}_c(O, \omega_O)$ *всех классов эквивалентности линейных расслоений со связностью над* O, *имеющих* ω_O *своей кривизной, оба являются главными однородными пространствами для группы* Π^* *— группы характеров фундаментальной группы* Π *орбиты* O. *Каждому классу* $[(L, \alpha)] = l \in \mathscr{L}_c(O, \omega_O)$ *соответствует характер* $\Lambda^l \in G_f^\#$, *определенный в* (5.7.2) *с помощью ограничения поднятия* $\sigma_L(G_f)$ *действия* G_f *в* O *на слой* L_f. *Наконец, соответствие* $\mathscr{L}_c(O, \omega_O) \to \to G_f^\#$, *переводящее* l *в* Λ^l, *является* Π^**-отображением и, следовательно, взаимно однозначно.*

Доказательство следует из теоремы 5.7.1, если в качестве X взять G-орбиту в $\mathfrak{g}'$ (см. теорему 5.3.1).

ЛИТЕРАТУРА

[1] R. Godement, Theorie des faisceaux, Hermann, Paris. (Русск. перевод: Р. Годеман, Алгебраическая топология и теория пучков, М., ИЛ, 1961.)

[2] R. Palais, Lie theory of transformation groups, Mem. Amer. Math. Soc. 22 (1957).

[3] I. E. Segal, Quantization of non-linear systems, J. Math. Phys 1 (1960), 468—488.

[4] H. C. Wang, Closed manifolds with homogeneous structures, Amer. J. Math. 76 (1954), 1—32.

[5] A. Weil, Variétés kählériennes, Hermann, Paris. (Русск. перевод: А. Вейль, Введение в теорию кэлеровых многообразий, М., ИЛ, 1961.)

[6] А. А. Кириллов, Конструкции унитарных неприводимых представлений групп Ли, Вестник МГУ, № 2 (1970), 41—51.

[7] J.-M. Sourian, Structure des systèmes dinamiques, Dunod, Paris, 1970.

[8] А. А. Кириллов, Лекции по теории представлений групп. IV. Представления групп Ли и механика, МГУ, 1970.