Yu. I. Manin, Algebraic curves over fields with differentiation, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 1958, Volume 22, Issue 6, 737–756

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
22 (1958), 737—756

Ю. И. МАНИН

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ НАД ПОЛЯМИ С ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕМ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе строится дифференциально-алгебраический гомоморфизм группы классов дивизоров нулевой степени кривой, определенной над полем констант с дифференцированием, в аддитивную группу векторного пространства конечной размерности над полем констант; частично исследуется ядро этого гомоморфизма.

Введение. Теория алгебраических кривых сейчас гораздо более разработана, чем теория многообразий высших размерностей. Один из методов изучения этих последних, нашедший много полезных применений, как раз и заключается в изучении общих кривых линейных пучков на таких многообразиях. Эти кривые определены над некоторыми функциональными полями, и естественно ожидать, что свойства их должны существенно зависеть от свойств поля определения. Однако, как заметил А. Вейль, большая общность методов современной теории алгебраических кривых, позволяющая получать результаты этой теории единообразно над произвольными полями констант, здесь, именно в силу этого свойства, становится в какой-то степени бесполезной; в функциональном основном поле параметры остаются замороженными, если не изучать специализации общей кривой. В самом деле, изучение специализаций дает очень много, но мы имеем еще одну возможность воспользоваться параметрами функционального основного поля, притом оставаясь в рамках теории общей кривой. Эта возможность — дифференцирование по параметру. Поясним, что мы имеем в виду, на примере пучка C_u кривых над комплексным полем $F(X, Y; u) = 0$, где u — параметр пучка. Пусть род общей кривой равен g. Выберем на ней g линейно независимых дифференциалов первого рода $\omega_1, \ldots, \omega_g$ и зафиксируем на римановой поверхности C_u базис одномерных гомологий $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g}$. Этот выбор определит совокупность периодов

$$\Omega_\alpha^\beta = \int_{\gamma_\beta} \omega_\alpha.$$

Любой период есть однозначная аналитическая функция от u в произвольной односвязной области u-плоскости, не содержащей критических точек, т. е. точек u^0 таких, что специализация $u \to u^0$ понижает род кривой C_u, в окрестности же критической точки часть периодов приобретает многозначность (подробности см. в книге ([3]), гл. VI—VII). Для нас сейчас важно заметить, что $2g$ периодов данного дифференциала ω_α

удовлетворяют линейному дифференциальному однородному уравнению с коэффициентами, рационально зависящими от u:

$$p_{2g}^{\alpha}(u)\frac{d^{2g}}{du^{2g}}\Omega_{\alpha}^{\beta}+\ldots+p_{1}^{\alpha}\frac{d}{du}\Omega_{\alpha}^{\beta}+p_{0}^{\alpha}(u)\Omega_{\alpha}^{\beta}=0,\quad 1\leqslant\beta\leqslant 2g. \qquad (A)$$

Этот факт заметил и подробно изучил Фукс [1]. Алгебраический смысл соотношения (A) заключается в том, что естественным образом определяя в поле функций на C_u дифференцирование D по параметру u и распространяя его на дифференциалы ω, мы получим, что существует такая функция y_α на C_u, что

$$p_{2g}^{\alpha}D^{2g}\omega_{\alpha}+\cdots+p_{0}^{\alpha}\omega_{\alpha}=dy_{\alpha},$$

ибо только у полного дифференциала периоды по всем одномерным циклам обращаются в нуль. Последнее же линейное соотношение обусловлено двумя обстоятельствами: во-первых, тем, что производная по параметру от дифференциала, не имеющего ненулевых вычетов, сама не имеет ненулевых вычетов, а во-вторых, тем, что фактор-пространство пространства таких дифференциалов по пространству полных дифференциалов над основным полем имеет конечную размерность $2g$. Отсюда и следует, что любой дифференциал первого рода и его $2g$ производных по параметру, подходящим образом линейно скомбинированные, дадут полный дифференциал.

Рассмотрим интегралы $\int^{\mathfrak{a}}\omega_\alpha$, где $\mathfrak{a}$ — какой-нибудь рациональный дивизор нулевой степени на кривой C_u. Эти интегралы, понимаемые как

$$\sum\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a})\int_{\mathfrak{p}_0}^{\mathfrak{p}}\omega_\alpha$$

(сумма, очевидно, не зависит от выбора точки $\mathfrak{p}_0$), являются так называемыми нормальными функциями Пуанкаре и определены с точностью до целого кратного периодов. Так как периоды обращаются в нуль линейным дифференциальным оператором (A), то естественно применить этот оператор к интегралу $\int^{\mathfrak{a}}\omega_\alpha$. Мы получим однозначную функцию от u:

$$Z_\alpha=(p_{2g}^{\alpha}D^{2g}+\cdots+p_{0}^{\alpha})\int^{\mathfrak{a}}\omega_\alpha,$$

определяемую дивизором $\mathfrak{a}$ или, точнее, в силу теоремы Абеля, классом дивизоров, к которому принадлежит $\mathfrak{a}$. Естественно ожидать, что эта функция будет рационально зависеть от u; прямой подсчет показывает, что так оно и есть; в окончательном выражении Z_α знак интеграла стоит над полным дифференциалом

$$(p_{2g}^{\alpha}D^{2g}+\cdots+p_{0}^{\alpha})\,\omega_\alpha$$

и имеются еще некоторые члены, возникающие из-за необходимости учитывать зависимость от u пределов интегрирования. Во всяком случае, Z_α зависит алгебраически-дифференциально от значений в точках $\mathfrak{a}$ некоторых функций на кривой C_u. Абелевы интегралы

$$\int^{\mathfrak{a}}\omega_\alpha$$

играют важнейшую роль в трансцендентной теории кривых, в частности, с их помощью строится якобиево многообразие кривой: многообразие классов дивизоров нулевой степени. Соответственно, функции Z_α определяют гомоморфизмы группы классов дивизоров нулевой степени в аддитивную группу поля функций от u. Уже само по себе существование таких алгебраически-дифференциальных гомоморфизмов представляет интерес, ибо чисто алгебраически их существование невозможно. Весьма интересно и то, что, как доказано в п. 10, пересечение ядер всех таких гомоморфизмов фактически совпадает с хорошо известным многообразием Пикара для C_u.

Основная цель этой работы — построить для случая основного поля нулевой характеристики дифференциально-алгебраический гомоморфизм, частный случай которого описан выше. Гомоморфизм строится алгебраически и так же доказываются все его элементарные свойства, подсказанные аналогией с классическим случаем. Исследование ядра гомоморфизма, однако, не совсем тривиально уже для простейшего случая пучка C_u над комплексным полем. Мы излагаем это исследование, вскрывающее характерные связи изучаемого вопроса в общей постановке с другими вопросами алгебраической геометрии. В частности, идя этим путем, следует ожидать, что для определения ядра в случае кривой над алгебраическим функциональным полем от многих переменных окажется полезной абстрактная теория групп монодромий [см. ([5])] и дифференциальных полей.

В качестве приложения общей теории мы даем критерий линейной зависимости точек на эллиптической кривой над полем рациональных функций. Этот критерий может оказаться полезным в связи с работами Нерона о ранге алгебраических кривых.

Нам представляется, однако, что наиболее интересно было бы найти аналог рассмотренных здесь объектов, когда поле констант имеет конечную характеристику или является полем алгебраических чисел. Хотя в последнем нетривиальных дифференцирований не существует, а в аддитивной группе полей ненулевой характеристики все элементы имеют конечный порядок, так что неразумно было бы ожидать существования какого-то интересного гомоморфизма, в точности подобного построенному здесь, тем не менее изученные здесь явления кажутся достаточно «алгебраичными», чтобы ожидать их более широкой распространенности. Прежде всего, конечно, нужно найти подходящий аналог дифференцирования.

1. Основные обозначения и понятия. Во всем дальнейшем изложении мы будем пользоваться следующими обозначениями:

K — основное поле характеристики нуль, над которым, как над полем констант, определено поле алгебраических функций одной переменной R. Поле K обладает (по крайней мере одним) нетривиальным дифференцированием D, т. е. отображением K в себя со следующими свойствами:

$$\left.\begin{aligned} &D(a+b)=Da+Db,\\ &D(ab)=aDb+Da\cdot b,\\ &Da\not\equiv 0 \quad (a,b\in K). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Дифференцирования поля K, очевидно, образуют над ним линейное пространство.

Нам придется продолжать дифференцирование поля K до дифференцирования его расширений, а также некоторых векторных пространств, определенных над K и R. Не оговаривая этого в дальнейшем, мы будем обозначать продолженное дифференцирование той же буквой, что и продолжаемое дифференцирование, если продолжение строится однозначно.

Дифференцирование D поля K однозначно продолжается до дифференцирования алгебраического расширения K [см. ([2]), стр. 112, лемма 2].

Дифференцирование D поля K однозначно продолжается до дифференцирования D_v поля R, определенного условием $D_v v = 0$, где v — произвольный элемент R, трансцендентный над K [см. ([2]), стр. 116, лемма 7].

Дифференцирование D_v поля R однозначно продолжается до дифференцирования $\mathfrak{p}$-адического замыкания R, где $\mathfrak{p}$ — простой дивизор, если требовать непрерывности продолжения по $\mathfrak{p}$-адической метрике [см. ([2]), стр. 115].

Дифференцирование D_v поля R однозначно продолжается до дифференцирования векторного пространства дифференциалов ω поля R при помощи равенства:

$$D_v \omega = D_v \left(\frac{\omega}{dv}\right) \cdot dv$$

(во избежание путаницы и усложнения обозначений символами d и $\frac{d}{dv}$ мы обозначаем взятие дифференциала и производной по v в поле R, определенное обычным образом. О связи этих двух типов дифференцирований см. подробно в книге ([2]), гл. VI). Дифференцирование векторного пространства определяется как отображение его в себя, удовлетворяющее соотношениям (1), где сложение следует понимать как сложение векторов, а умножение — как умножение вектора на элемент поля определения.

Род поля R обозначается через g; $\omega_1, \ldots, \omega_g$ — базис дифференциалов первого рода, $\mathfrak{W}$ — линейное пространство дифференциалов R, не имеющих отличных от нуля вычетов, $\mathfrak{V}$ — линейное пространство полных дифференциалов R. Пространства $\mathfrak{W}$ и $\mathfrak{V}$ строятся над полем констант R.

Обозначим $\overline{\mathfrak{W}} = \mathfrak{W}/\mathfrak{V}$ и для любого дифференциала ω через $\overline{\omega}$ будем обозначать класс ω в фактор-пространстве $\overline{\mathfrak{W}}$.

$\mathfrak{p}$ — простые дивизоры (точки), $\mathfrak{a}$ — составные дивизоры поля R; предполагается, что $\mathfrak{p}$ имеет над K первую степень,

$\nu_\mathfrak{p}$ — показатель функции или дивизора, соответствующий $\mathfrak{p}$,

$\overline{\mathfrak{a}}$ — класс дивизоров, к которому принадлежит $\mathfrak{a}$,

$v_\mathfrak{p}$ — значение элемента $v \in R$ в точке $\mathfrak{p}$.

2. Основные леммы.

ЛЕММА 1. *Пусть v, w — любые элементы R, трансцендентные над K, u — произвольный элемент R. Тогда для любого дифференцирования D поля K и его продолжений D_v, D_w имеем:*

$$(D_v - D_w)(u dv) = -d(u D_w v).$$

Доказательство. Оператор

$$D_v - D_w + (D_w v)\,\frac{d}{dv}$$

есть дифференцирование R, обращающееся в нуль на $K(v)$ и, следовательно, на всем R. В частности,

$$(D_v - D_w)\,u = -D_w v\cdot\frac{du}{dv}.$$

Далее,

$$(D_v - D_w)(udv) = (D_v - D_w)\,u\cdot dv + u\,(D_v - D_w)\,dv.$$

Но

$$D_v\,dv = D_v\left(\frac{dv}{dv}\right)dv = 0,$$

$$D_w\,dv = D_w\left(\frac{dv}{dw}\right)dw = \frac{d}{dw}(D_w v)\,dw = d\,(D_w v),$$

ибо

$$\frac{d}{dw}D_w = D_w\,\frac{d}{dw}$$

[см. ([2]), стр. 125, лемма 1]. Следовательно,

$$(D_v - D_w)(udv) = -\left(D_w v\cdot\frac{du}{dv}\,dv + ud\,(D_w v)\right) = -d\,(uD_w v).$$

Примечание. Эта лемма принадлежит Шевалле [см. ([2]), стр. 125—126, лемма 3]. Мы привели ее доказательство ввиду его простоты и важности леммы в последующих рассмотрениях. Смысл леммы заключается в том, что, как из нее следует, все дифференцирования D_v, где v — произвольный трансцендентный элемент R, пространства $\mathfrak{W}$ совпадают друг с другом на фактор-пространстве $\overline{\mathfrak{W}}$, чем однозначно и определяется продолжение D на $\overline{\mathfrak{W}}$. Кроме того, в вычислениях эта лемма играет роль, подобную роли формулы дифференцирования интеграла по параметру в классическом случае.

ЛЕММА 2. *Пусть v, w — любые элементы R, трансцендентные над K, $\mathfrak{p}$ — простой дивизор R, а D — дифференцирование такие, что выполняются условия*: $\nu_{\mathfrak{p}}(v) \geqslant 0$ *и либо* $\nu_{\mathfrak{p}}(w) < 0$, *либо* $D(w_{\mathfrak{p}}) = 0$. *Тогда*

$$D(v_{\mathfrak{p}}) = (D_w v)_{\mathfrak{p}}.$$

Доказательство. Пусть t — униформизирующая переменная в точке $\mathfrak{p}$,

$$v = v_{\mathfrak{p}} + \sum_{\alpha=1}^{\infty} a_\alpha t^\alpha, \quad w = \sum_{\alpha=\alpha_0}^{\infty} b_\alpha t^\alpha.$$

Имеем:

$$D_w w = 0,$$

откуда следует:

$$D_w t = -\frac{\sum\limits_{\alpha=\alpha_0}^{\infty} Db_\alpha\cdot t^\alpha}{\dfrac{dw}{dt}},$$

и ясно, что в предположениях леммы $\nu_\mathfrak{p}(D_w t) \geqslant 1$. Но

$$D_w v = D(v_\mathfrak{p}) + \sum_{\alpha=1}^{\infty} Da_\alpha t^\alpha + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \alpha a_\alpha t^{\alpha-1} D_w t,$$

так что действительно

$$(D_w v)_\mathfrak{p} = D(v_\mathfrak{p}),$$

ибо

$$\left(\sum_{\alpha=1}^{\infty} Da_\alpha \cdot t^\alpha + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \alpha a_\alpha t^{\alpha-1} D_w t\right)_\mathfrak{p} = 0.$$

Доказанная лемма устанавливает связь между двумя основными инструментами исследования — дифференцированием и специализацией — и вместе с предыдущей леммой составляет основу последующих рассмотрений.

3. Линейно дифференциальные соотношения в пространстве $\overline{\mathfrak{W}}$. Пусть $D_1, \ldots, D_n$ — n линейно независимых дифференцирований поля констант K, которые мы не будем предполагать перестановочными. Обозначим через $\mathscr{D}_\lambda^\mu$, $1 \leqslant \lambda \leqslant \varkappa(\mu)$, пронумерованные в произвольном, но раз навсегда фиксированном порядке, дифференциальные одночлены порядка μ, т. е. операторы вида

$$D_{\lambda_1}^{\mu_1} D_{\lambda_2}^{\mu_2} \ldots D_{\lambda_m}^{\mu_m},$$

где

$$1 \leqslant \lambda_i \leqslant n, \quad \mu_1 + \ldots + \mu_m = \mu.$$

Пусть задана система линейных дифференциальных операторов

$$L_\alpha = \sum_\mu \sum_{\lambda=1}^{\varkappa(\mu)} p_{\lambda\mu}^\alpha \mathscr{D}_\lambda^\mu, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant g, \quad p_{\lambda\mu}^\alpha \in K,$$

которую, как было замечено, можно считать действующей в векторном пространстве $\overline{\mathfrak{W}}$ и которая в этом пространстве удовлетворяет соотношению

$$\sum_{\alpha=1}^{g} L_\alpha \bar{\omega}_\alpha = 0. \tag{2}$$

Такие соотношения всегда существуют, ибо для любого L_α $L_\alpha \bar{\omega}_\alpha \in \overline{\mathfrak{W}}$, что следует из теоремы 13 книги (²) (стр. 126), и, кроме того, размерность $\overline{\mathfrak{W}}$ конечна и равна $2g$ [см. (²), стр. 112, лемма 2]. Более того, над кольцом дифференциальных многочленов соотношения (2) образуют левый модуль, имеющий конечный базис. Иными словами, существует конечная совокупность дифференциальных многочленов $(L_{\alpha\beta})$, $1 \leqslant \alpha \leqslant g$, $1 \leqslant \beta \leqslant N$, таких, что, во-первых,

$$\sum_{\alpha=1}^{g} L_{\alpha\beta} \bar{\omega}_\alpha = 0, \quad 1 \leqslant \beta \leqslant N, \tag{3}$$

и, во-вторых, для любых L_α, удовлетворяющих (2), существуют дифференциальные многочлены L'_β такие, что

$$L_\alpha = \sum_{\beta=1}^{N} L'_\beta L_{\alpha\beta}, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant g.$$

Совокупность $(L_{\alpha\beta})$ порождает систему соотношений (3), которую мы назовем базисной системой линейно дифференциальных соотношений пространства $\overline{\mathfrak{W}}$ или просто базисной системой. Укажем эффективный способ нахождения базисной системы, который понадобится нам в дальнейшем.

Выпишем последовательность

$$\begin{gathered}\overline{\omega}_1, \ \ldots, \ \overline{\omega}_g; \ \mathscr{D}_1^1\overline{\omega}_1, \ \ldots, \ \mathscr{D}_n^1\overline{\omega}_1, \ \ldots, \ \mathscr{D}_1^1\overline{\omega}_g, \ \ldots, \ \mathscr{D}_n^1\overline{\omega}_g; \ldots \\ \ldots \mathscr{D}_1^\mu\overline{\omega}_1, \ \ldots, \ \mathscr{D}_{\varkappa(\mu)}^\mu\overline{\omega}_1, \ \ldots, \ \mathscr{D}_1^\mu\overline{\omega}_g, \ \ldots, \ \mathscr{D}_{\varkappa(\mu)}^\mu\overline{\omega}_g, \ \ldots . \end{gathered} \tag{4}$$

Назовем μ-м периодом последовательности отрезок $\mathscr{D}_1^\mu\overline{\omega}_1, \ldots, \mathscr{D}_{\varkappa(\mu)}^\mu\overline{\omega}_g$. На первом шаге испытаем $\mathscr{D}_1^1\overline{\omega}_1$ на линейную зависимость с $\overline{\omega}_1, \ldots, \overline{\omega}_g$ (на самом деле, конечно, следует испытывать просто дифференциалы $\mathscr{D}_{\lambda v}^\mu\omega$, отбрасывая полные дифференциалы. Здесь $v \in R$ — произвольный элемент, а $\mathscr{D}_{\lambda v}^\mu$ получается из $D_{1v}, \ldots, D_{nv}$ так же, как $\mathscr{D}_\lambda^\mu$ из $D_1, \ldots, D_n$). Если такая линейная зависимость существует, запишем ее и вычеркнем $\mathscr{D}_1^1\overline{\omega}$ из последовательности (4). В противном случае оставляем $\mathscr{D}_1^1\overline{\omega}_1$ и переходим к следующему дифференциалу. На очередном шаге испытаем очередной член последовательности на его линейную зависимость с теми невычеркнутыми членами, которые стоят слева от него; если такая линейная зависимость существует, выписываем ее и вычеркиваем испытуемый член, если нет — переходим к следующему члену. Шагов без вычеркивания может быть не более g, так как размерность $\overline{\mathfrak{W}}$ есть $2g$. Следовательно, рано или поздно мы вычеркнем целиком какой-нибудь период. После этого процесс заканчивается, ибо, как легко видеть, выписанная система соотношений будет базисной. Заметим, что в определении мы не требовали линейной независимости базисных соотношений, и на самом деле, если действовать в точности так, как описано, среди выписанных соотношений, вообще говоря, будут лишние. Однако в действительности легко уточнить предписания так, чтобы результатом процесса оказалась линейно независимая базисная система (имеется в виду линейная зависимость над кольцом дифференциальных многочленов). Мы проделаем это для частного случая в п. 9.

Заметим еще, что интересно было бы выяснить смысл количества невычеркнутых элементов последовательности (4), которое не зависит от выбора базиса дифференциалов первого рода и является инвариантом поля и совокупности дифференцирований $D_1, \ldots, D_n$. Например, легко видеть, что если в поле R есть пара образующих, связанных соотношением над полем $k \in K$, в котором все дифференцирования $D_1, \ldots, D_n$ обращаются в нуль, то в последовательности (4) невычеркнутыми останутся лишь первые g членов.

4. Функция $Z^v(\mathfrak{a})$. Построение. В ближайших трех пунктах мы будем рассматривать фиксированную систему линейных дифферен-

циальных операторов

$$L_\alpha = \sum_\mu \sum_{\lambda=1}^{\varkappa(\mu)} p^\alpha_{\lambda\mu} \mathscr{D}^\mu_\lambda, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant p, \quad p^\alpha_{\lambda\mu} \in K,$$

удовлетворяющую соотношению (2).

Соотношение (2) означает, что для любого элемента $v \in R$, трансцендентного над K, существует такой элемент $y^v \in R$, что

$$\sum_{\alpha=1}^{g} L_{\alpha v} \omega_\alpha = dy^v,$$

где

$$L_{\alpha v} = \sum_\mu \sum_{\lambda=1}^{\varkappa(\mu)} p^\alpha_{\lambda\mu} \mathscr{D}^\mu_{\lambda v}.$$

Введем на множестве простых дивизоров $\mathfrak{p}$ поля R функцию $Z^v(\mathfrak{p})$ со значениями в $K(\mathfrak{p})$:

$$Z^v(\mathfrak{p}) = y^v_\mathfrak{p} + \sum_{\alpha=1}^{g} \sum_\mu \sum_{\lambda=1}^{\varkappa(\mu)} p^\alpha_{\lambda\mu} V^{\mu\alpha}_{\lambda v}(\mathfrak{p}), \tag{5}$$

где $V^{\mu\alpha}_{\lambda v}(\mathfrak{p})$ определяются индуктивно:

$$V^{1\alpha}_{\lambda v}(\mathfrak{p}) = (u_\alpha)_\mathfrak{p} D_\lambda (v_\mathfrak{p}), \quad u_\alpha = \frac{\omega_\alpha}{dv}, \tag{6}$$

и если $\mathscr{D}^{\mu+1}_\pi = D_\rho \mathscr{D}^\mu_\sigma$, а функция $V^{\mu\alpha}_{\sigma v}(\mathfrak{p})$ уже определена, то

$$V^{\mu+1,\alpha}_{\pi v}(\mathfrak{p}) = D_\rho V^{\mu\alpha}_{\sigma v}(\mathfrak{p}) + (\mathscr{D}^\mu_{\sigma v} u_\alpha)_\mathfrak{p} D_\rho (v_\mathfrak{p}). \tag{6a}$$

В такой записи функция $Z^v(\mathfrak{p})$ остается неопределенной в конечном множестве полюсов элементов R, входящих в формулах (6) и (6a) под знак $(\ )_\mathfrak{p}$. Обозначим это множество через $\mathfrak{N}_v$, а через $\widetilde{\mathfrak{N}}_v$ — множество всех тех дивизоров нулевой степени $\mathfrak{a}$ поля R, для которых $\nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}) = 0$, если $\mathfrak{p} \in \mathfrak{N}_v$. На $\widetilde{\mathfrak{N}}_v$ определим по аддитивности функцию $Z^v(\mathfrak{a})$:

$$Z^v(\mathfrak{a}) = \sum \nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}) Z^v(\mathfrak{p}). \tag{7}$$

Заметим что элемент y^v определен с точностью до аддитивной произвольной постоянной; то же, следовательно, справедливо и относительно $Z^v_\mathfrak{p}$; но мы будем рассматривать функцию Z^v на дивизорах ненулевой степени лишь в качестве подсобного средства для получения данных о Z^v на дивизорах нулевой степени, где значение Z^v не зависит от выбора постоянной. Поэтому в дальнейшем, не оговаривая этого специально, мы будем в выборе y^v исходить из соображений удобства.

5. Функция $Z^v(\mathfrak{a})$ на главных дивизорах. Мы докажем сейчас, что для любого главного дивизора $\mathfrak{a} \in \widetilde{\mathfrak{N}}_v$

$$Z^v(\mathfrak{a}) = 0.$$

ЛЕММА 3. *Пусть для элемента $w \in R$, трансцендентного над K, элемент y^w определяется так же, как y^v для v. Тогда*

$$\sum \nu_{\mathfrak{p}}(w)\, y^w_{\mathfrak{p}} = 0.$$

Доказательство. Обозначим через S_w оператор взятия следа элементов поля R над подполем $K(w)$. Для всех $1 \leqslant \lambda \leqslant n$ имеем:

$$D_{\lambda w} S_w = S_w D_{\lambda w}, \quad \frac{d}{dw} S_w = S_w \frac{d}{dw}$$

[см. (2), стр. 113, лемма 3 и стр. 125, лемма 1]. Поэтому

$$S_w\left(\frac{d}{dw}\, y^w\right) = \frac{d}{dw} S_w(y^w) = S_w\left(\sum_{\alpha=1}^{g} L_{\alpha w} \frac{\omega_\alpha}{dw}\right) = \sum_{\alpha=1}^{g} L_{\alpha w} S_w\left(\frac{\omega_\alpha}{dw}\right) = 0,$$

ибо все дифференциалы ω_α — первого рода. Отсюда следует, что $S_w y^w \in K$. Но

$$\sum \nu_{\mathfrak{p}}(w)\, y^w_{\mathfrak{p}} = S_w y^w\big|_{w=\infty} - S_w y^w\big|_{w=0} = 0.$$

Лемма доказана.

Пусть теперь $\mathfrak{a} \in \widetilde{\mathfrak{N}}_v$, $\mathfrak{a} = \{w\}$, где $\{w\}$ обозначает дивизор элемента $w \in R$. Подсчитаем $y^v - y^w$. Имеем:

$$d(y^v - y^w) = \sum_{\alpha=1}^{g} (L_{\alpha v} - L_{\alpha w})\,\omega_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{g} \sum_{\mu} \sum_{\lambda=1}^{\varkappa(\mu)} p^{\alpha}_{\lambda\mu} (\mathscr{D}^{\mu}_{\lambda v} - \mathscr{D}^{\mu}_{\lambda w})\,\omega_\alpha. \tag{8}$$

Пусть

$$(\mathscr{D}^{\mu}_{\sigma v} - \mathscr{D}^{\mu}_{\sigma w})\,\omega_\alpha = dt^{\mu\alpha}_{\sigma v w}, \quad t^{\mu\alpha}_{\sigma v w} \in R. \tag{9}$$

В силу леммы 1,

$$t^{1\alpha}_{\lambda v w} = -\,u_\alpha D_{\lambda w} v. \tag{10}$$

Пусть $\mathscr{D}^{\mu+1}_{\pi} = D_\rho \mathscr{D}^{\mu}_{\sigma}$. Установим связь между $t^{\mu+1,\alpha}_{\pi v w}$ и $t^{\mu\alpha}_{\sigma v w}$. Пользуясь формулой (9) и леммой 1, получаем:

$$\mathscr{D}^{\mu+1}_{\pi v}\omega_\alpha = (D_{\rho v} - D_{\rho w})(\mathscr{D}^{\mu}_{\sigma v} u_\alpha \cdot dv) + D_{\rho w} \mathscr{D}^{\mu}_{\sigma v}\,\omega_\alpha =$$
$$= -\,d(\mathscr{D}^{\mu}_{\sigma v} u_\alpha \cdot D_{\rho w} v) + \mathscr{D}^{\mu+1}_{\pi w}\,\omega_\alpha + d(D_{\rho w} t^{\mu\alpha}_{\sigma v w}),$$

откуда

$$t^{\mu+1,\alpha}_{\pi v w} = D_{\rho w} t^{\mu\alpha}_{\sigma v w} - \mathscr{D}^{\mu}_{\sigma v} u_\alpha \cdot D_{\rho w} v. \tag{11}$$

Формулы (5), (8) и (9) дают:

$$Z^v(\mathfrak{p}) - y^w_{\mathfrak{p}} = \sum_{\alpha=1}^{g} \sum_{\mu} \sum_{\lambda=1}^{\varkappa(\mu)} p^{\alpha}_{\lambda\mu} (V^{\mu\alpha}_{\lambda v}(\mathfrak{p}) + (t^{\mu\alpha}_{\lambda v w})_{\mathfrak{p}}). \tag{12}$$

Докажем, что если $\nu_{\mathfrak{p}}(w) \neq 0$, то $V^{\mu\alpha}_{\lambda v}(\mathfrak{p}) + (t^{\mu\alpha}_{\lambda v w})_{\mathfrak{p}} = 0$. Проведем индукцию по μ. Так как $\{w\} \in \widetilde{\mathfrak{N}}_v$ и $\nu_{\mathfrak{p}}(w) \neq 0$, то, пользуясь леммой 2 и формулами (6), (10), имеем для $\mu = 1$:

$$V^{1\alpha}_{\lambda v}(\mathfrak{p}) = (u_\alpha)_{\mathfrak{p}} D_\lambda(v_{\mathfrak{p}}) = (u_\alpha D_{\lambda w} v)_{\mathfrak{p}} = -\,(t^{1\alpha}_{\lambda v w})_{\mathfrak{p}}.$$

Пусть снова $\mathscr{D}_\pi^{\mu+1} = D_\rho \mathscr{D}_\sigma^\mu$ и пусть утверждение уже доказано для μ, т. е., в частности,

$$V_{\sigma v}^{\mu\alpha}(\mathfrak{p}) + (t_{\sigma v w}^{\mu\alpha})_\mathfrak{p} = 0. \tag{13}$$

Тогда формулы (6а) и (11) дают:

$$V_{\pi v}^{\mu+1,\alpha}(\mathfrak{p}) + (t_{\pi v w}^{\mu+1,\alpha})_\mathfrak{p} =$$
$$= D_\rho V_{\sigma v}^{\mu\alpha}(\mathfrak{p}) + (\mathscr{D}_{\sigma v}^\mu u_\alpha)_\mathfrak{p} D_\rho(v_\mathfrak{p}) + (D_{\rho w} t_{\sigma v w}^{\mu\alpha})_\mathfrak{p} - (\mathscr{D}_{\sigma v}^\mu u_\alpha)_\mathfrak{p}(D_{\rho w} v)_\mathfrak{p} =$$
$$= D_\rho(V_{\sigma v}^{\mu\alpha}(\mathfrak{p}) + (t_{\sigma v w}^{\mu\alpha})_\mathfrak{p}) + (\mathscr{D}_{\sigma v}^\mu u_\alpha)_\mathfrak{p}(D_\rho(v_\mathfrak{p}) - (D_{\rho w} v)_\mathfrak{p}) = 0\,.$$

Возможность применения леммы 2 обеспечивается здесь условием $\{w\}\in\widetilde{\mathfrak{N}}_v$ и индуктивным предположением (13). Из формул (12) и (13) получаем:

$$Z^v(\mathfrak{p}) - y_\mathfrak{p}^w = 0, \tag{14}$$

если $\nu_\mathfrak{p}(w) \neq 0$. Пользуясь равенством (14) и леммой 3, находим, что для $\mathfrak{a} = \{w\}$

$$Z^v(\mathfrak{a}) = \sum \nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}) Z^v(\mathfrak{p}) = \sum \nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{a})(Z^v(\mathfrak{p}) - y_\mathfrak{p}^w) = 0.$$

6. Доопределение $Z^v(\mathfrak{a})$. Независимость от выбора v. По доказанному, функция $Z^v(\mathfrak{a})$ обращается в нуль в любом главном дивизоре, где она определена. Естественно поэтому доопределить ее следующим образом. Пусть $\mathfrak{N}_v$ состоит из точек $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_h$. Подберем элементы $w_\alpha \in R$, удовлетворяющие условиям:

$$\begin{aligned} &\nu_{\mathfrak{p}_\alpha}(w_\alpha) \geqslant 1, && 1 \leqslant \alpha \leqslant h\,, \\ &\nu_{\mathfrak{p}_\alpha}(w_\beta - 1) \geqslant 1, && \beta \neq \alpha. \end{aligned} \tag{15}$$

Это, как хорошо известно, всегда можно сделать. Пусть

$$\{w_\alpha\} = \mathfrak{p}_\alpha^{\nu_{\mathfrak{p}_\alpha}(w_\alpha)} \mathfrak{a}_\alpha\,.$$

Очевидно, для $\mathfrak{p} \in \mathfrak{N}_v$

$$\nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}_\alpha) = 0\,,$$

так что $Z^v(\mathfrak{a}_\alpha)$ определена (по аддитивности); положим

$$Z^v(\mathfrak{p}_\alpha) = -\frac{1}{\nu_{\mathfrak{p}_\alpha}(w_\alpha)} Z^v(\mathfrak{a}_\alpha)\,. \tag{16}$$

От выбора w_α это определение не зависит. В самом деле, пусть w_α' — другие элементы R, удовлетворяющие (15). Пусть

$$\{w_\alpha'\} = \mathfrak{p}_\alpha^{\nu_{\mathfrak{p}_\alpha}(w_\alpha')} \mathfrak{a}_\alpha'\,.$$

Тогда, очевидно,

$$\frac{\mathfrak{a}_\alpha^{\nu_{\mathfrak{p}_\alpha}(w_\alpha')}}{\mathfrak{a}_\alpha'^{\,\nu_{\mathfrak{p}_\alpha}(w_\alpha)}} \in \widetilde{\mathfrak{N}}_v\,,$$

и этот дивизор является главным, так что

$$\nu_{\mathfrak{p}_\alpha}(w'_\alpha)Z^v(\mathfrak{a}_\alpha) - \nu_{\mathfrak{p}_\alpha}(w_\alpha)Z^v(\mathfrak{a}'_\alpha) = 0$$

и

$$-\frac{1}{\nu_{\mathfrak{p}_\alpha}(w_\alpha)} Z^v(\mathfrak{a}_\alpha) = -\frac{1}{\nu_{\mathfrak{p}_\alpha}(w'_\alpha)} Z^v(\mathfrak{a}'_\alpha),$$

что доказывает корректность (16); $Z^v(\mathfrak{a})$ доопределяется теперь по аддитивности.

Понимая под $Z^v(\mathfrak{a})$ доопределенную таким образом функцию, докажем, что $Z^v(\{w\}) = 0$ для произвольного $w \in R$. В самом деле, пусть w_α удовлетворяют условиям (15). Положим

$$\nu_\alpha = v_{\mathfrak{p}_\alpha}(w_\alpha), \quad \nu = \text{н. о. к.}\,(\nu_1, \ldots, \nu_h).$$

Пусть

$$w' = w^\nu \prod_{i=0}^{h} w_\alpha^{-\frac{\nu}{\nu_\alpha}\nu_{\mathfrak{p}_\alpha}(w)}.$$

Очевидно, $\{w'\} \in \widetilde{\mathfrak{N}}_v$, так что

$$Z^v(\{w'\}) = \nu Z^v(\{w\}) - \sum_{\alpha=1}^{h} \frac{\nu}{\nu_\alpha} \nu_{\mathfrak{p}_\alpha}(w)\; Z^v(\{w_\alpha\}) = 0.$$

Но, в силу (16), $Z^v(\{w_\alpha\}) = 0$, поэтому

$$Z^v(\{w\}) = 0.$$

Докажем, что на совокупности дивизоров нулевой степени функция Z^v не зависит от выбора v. В самом деле, пусть

$$\nu_{\mathfrak{p}}(w) \neq 0, \quad \mathfrak{p} \,\overline{\in}\, \mathfrak{N}_{v_1} \cup \mathfrak{N}_{v_2}.$$

Тогда, как было доказано выше,

$$Z^{v_1}(\mathfrak{p}) = Z^{v_2}(\mathfrak{p}) = y^w_{\mathfrak{p}}.$$

Отсюда следует, что функции $Z^{v_1}(\mathfrak{a})$ и $Z^{v_2}(\mathfrak{a})$ совпадают для $\mathfrak{a} \in \widetilde{\mathfrak{N}}_{v_1} \cap \widetilde{\mathfrak{N}}_{v_2}$. Но рассуждения этого раздела показывают, что $Z^v(\mathfrak{a})$ полностью определяется своими значениями во всех, кроме конечного числа, точках, и это определение однозначно, если мы хотим, чтобы $Z^v(\mathfrak{a})$ обращалась на главных дивизорах в нуль. Поэтому $Z^{v_1}(\mathfrak{a})$ и $Z^{v_2}(\mathfrak{a})$ совпадают полностью. В дальнейших обозначениях, следовательно, индекс v можно отбросить, постоянно помня, однако, что функция $Z(\mathfrak{a})$ порождена некоторым соотношением (2).

7. **Гомоморфизм ζ. Его рациональность. Инвариантность ядра.** Пусть функция $Z(\mathfrak{a})$ определена соотношением (2). Обозначим буквой ζ отображение $\bar{\mathfrak{a}} \to Z(\mathfrak{a})$, где $\mathfrak{a} \in \bar{\mathfrak{a}}$, группы $C(K^*)$ классов дивизоров нулевой степени, рациональных над некоторым расширением K^* поля K (алгебраическим). Это отображение (по доказанному, не зависящее от выбора дивизора $\mathfrak{a}$ в классе $\bar{\mathfrak{a}}$) есть гомоморфизм $C(K^*)$ в аддитивную группу K^*. В самом деле, достаточно доказать, что $Z(\mathfrak{a}) \in K^*$. Пусть над полем $\widetilde{K} \supset K^*$ все простые делители $\mathfrak{a} \in \bar{\mathfrak{a}}$ рациональны.

Пусть σ — произвольный автоморфизм $\widetilde{K}/K^*$, $\mathfrak{a}^\sigma$ — образ $\mathfrak{a}$ при автоморфизме, порожденном σ в группе дивизоров R. Так как класс $\bar{\mathfrak{a}}$ рационален над K^*, $\mathfrak{a}^\sigma \in \bar{\mathfrak{a}}$ (т. е. $\mathfrak{a}^\sigma\mathfrak{a}^{-1}$ есть главный дивизор), то

$$Z(\mathfrak{a}^\sigma) = Z(\mathfrak{a}).$$

С другой стороны, формулы (5) и (6) показывают что

$$\sigma(Z(\mathfrak{a})) = Z(\mathfrak{a}^\sigma).$$

Будучи инвариантным при всех автоморфизмах $\widetilde{K}/K^*$, $Z(\mathfrak{a}^\sigma)$ принадлежит K^*, что и требовалось доказать.

Построим базисную систему соотношений пространства $\overline{\mathfrak{W}}$ и μ-му соотношению сопоставим функцию $Z_\mu(\mathfrak{a})$, $1 \leqslant \mu \leqslant N$. Обозначим через $\bar{\zeta}$ гомоморфизм

$$\bar{\mathfrak{a}} \to (Z_1(\mathfrak{a}), \ldots, Z_N(\mathfrak{a}))$$

группы $C(K^*)$ в аддитивную группу N-мерного векторного пространства над полем K^*. Ядро гомоморфизма $\bar{\zeta}$ обладает свойством минимальности: если $\bar{\mathfrak{a}}$ принадлежит этому ядру и если функция $Z(\mathfrak{a})$ соответствует соотношению (2), то (для $\bar{\mathfrak{a}} \in \mathfrak{a}$) $Z(\mathfrak{a}) = 0$.

В самом деле, выберем $v \in R$ так, чтобы $\nu_\mathfrak{p}(v) > 0$ для всех $\mathfrak{p}$ с $\nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}) \neq 0$. Пусть, далее, (3) является базисной системой, так что

$$\sum_{\alpha=1}^{g} L_{\alpha\beta v}\omega_\alpha = dy^v_\beta, \quad 1 \leqslant \beta \leqslant N,$$

$$\sum_{\beta=1}^{N} L'_\beta L_{\alpha\beta} = L_\alpha, \qquad 1 \leqslant \alpha \leqslant g,$$

$$\sum_{\alpha=1}^{g} L_{\alpha v}\omega_\alpha = dy^v.$$

Пользуясь этими соотношениями и леммой 2, получим:

$$Z(\mathfrak{a}) = \sum \nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}) y^v_\mathfrak{p} = \sum \nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}) \Big(\sum_{\beta=1}^{N} L'_{\beta v} y^v_\beta \Big)_\mathfrak{p} =$$

$$= \sum_{\beta=1}^{N} L'_\beta \Big(\sum \nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}) (y^v_\beta)_\mathfrak{p} \Big) = \sum_{\beta=1}^{N} L'_\beta Z_\beta(\mathfrak{a}) = 0,$$

что и требовалось доказать. Отсюда непосредственно следует, что ядро $\bar{\zeta}$ не зависит от выбора базисных соотношений и, следовательно, также является инвариантом поля K и совокупности дифференцирований $D_1, \ldots, D_n$. Можно еще уточнить это утверждение. Пусть $k \subset K$ — подполе K, над которым K является конечным расширением степени трансцендентности n. Тогда существует ровно n линейно независимых над K дифференцирований, обращающихся в нуль на k. Легко доказать, что ядро $\bar{\zeta}$ не зависит также и от выбора базиса дифференцирований K над k; таким образом, это ядро инвариантно определяется парой (K, k). Ниже мы изучим ядро $\bar{\zeta}$ для простейшего, но важного и характерного частного

случая — однопараметрического семейства кривых над комплексным полем. Результат исследования этого случая наводит на мысль, что ядро, определяемое парой (K, k), должно состоять из классов дивизоров, в каком-то смысле определенных над k. Более точный смысл этого будет ясен из последующего.

8. Кривая C_u. Периоды дифференциалов. Пусть над полем k комплексных чисел определена неособая проективная алгебраическая поверхность V. Обозначим через C_u неприводимую общую кривую линейного пучка кривых на V рода g, через R — поле функций на C_u, через $K = k(u)$ — поле определения C_u. Здесь u — параметр пучка, трансцендентный над k. Мы будем предполагать, что при любой специализации $u \to a \in k$ кривая C_u остается неприводимой, но может приобрести одну двойную точку, что понизит ее род до $g - 1$ (над k). Таких специализаций, очевидно, конечное число. D будет означать дифференцирование K (и его расширений), определенное условиями $Du = 1$, $Dc = 0$, если $c \in k$, т. е. попросту дифференцирование по u функций от u.

Пусть $u \to a_\nu$, $\nu = 1, \ldots, r$, — все специализации, понижающие род C_u. Обозначим через σ_ν автоморфизм одномерной группы гомологий C_u, порожденный обходом на u-плоскости вокруг точки $u = a_\nu$, а через ε — единичный автоморфизм. Тогда можно выбрать базис одномерных гомологий на C_u:

$$(\gamma_1, \ldots, \gamma_{2q}; \quad \gamma_{2q+1}, \ldots, \gamma_{2g})$$

таким образом, чтобы выполнялись соотношения:

$$(\sigma_\nu - \varepsilon)(\gamma_1, \ldots, \gamma_{2q}) = (0, \ldots, 0),$$

$$(\sigma_\nu - \varepsilon)(\gamma_{2q+1}, \ldots, \gamma_{2g}) = (\gamma_{2q+1}, \ldots, \gamma_{2g})S_\nu,$$

где S_ν — целочисленные квадратные матрицы порядка $2g - 2q$. Циклы $(\gamma_1, \ldots, \gamma_{2q})$ образуют базис инвариантных циклов, а $(\gamma_{2q+1}, \ldots, \gamma_{2g})$ — базис «исчезающих» циклов, т. е. гомологичных нулю на V [см. ([3]), гл. VI].

Нам понадобится следующее простое предложение.

ЛЕММА 4. *Система уравнений* $(x_{2q+1}, \ldots, x_{2g})\,S_\nu^* = 0$, $1 \leqslant \nu \leqslant r$ *(где * обозначает транспонирование), не имеет ненулевых решений.*

Доказательство. В самом деле, в противном случае эта система имела бы целочисленное ненулевое решение $(x^0_{2q+1}, \ldots, x^0_{2g})$. Положим

$$\gamma^0 = x^0_{2q+1}\gamma_{2q+1} + \cdots + x^0_{2g}\gamma_{2g},$$

или, обозначая

$$\bar{x}^0 = (x^0_{2q+1}, \ldots, x^0_{2g}) \quad \text{и} \quad \bar{\gamma} = (\gamma_{2q+1}, \ldots, \gamma_{2g}),$$

запишем это в виде формального скалярного произведения $\gamma^0 = (\bar{x}^0, \bar{\gamma})$. Тогда имеем:

$$(\sigma_\nu - \varepsilon)\gamma^0 = (\bar{x}^0, \bar{\gamma}S_\nu) = (\bar{x}^0 S_\nu^*, \bar{\gamma}) = 0, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant r.$$

Следовательно, цикл γ^0 инвариантен, чего не может быть, так как он есть линейная комбинация исчезающих циклов. Лемма доказана.

На поверхности V существует q линейно независимых одномерных дифференциалов первого рода, так называемых дифференциалов Пикара.

Их можно рассматривать как дифференциалы первого рода $\omega_1, \ldots, \omega^q$ на кривой C_u, где они останутся линейно независимыми. Периоды этих дифференциалов по исчезающим циклам равны, очевидно, нулю, ибо эти последние гомологичны нулю на V. Поэтому, в силу теоремы полной приводимости Пуанкаре, на кривой C_u существует дополнительная система из $g-q$ дифференциалов первого рода $\omega_{q+1}, \ldots, \omega_g$ таких, что дифференциалы $\omega_1, \ldots, \omega_g$ линейно независимы, а их матрица периодов $\Omega_\alpha^\beta = \int\limits_{\gamma_\beta} \omega_\alpha$ имеет следующий вид:

$$\left\| \begin{array}{c|c} \begin{matrix} \Omega_1^1 & \ldots & \Omega_1^{2q} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \Omega_q^1 & \ldots & \Omega_q^{2q} \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} \Omega_{q+1}^{2q+1} & \ldots & \Omega_{q+1}^{2g} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \Omega_g^{2q+1} & \ldots & \Omega_g^{2g} \end{matrix} \end{array} \right\|$$

[ср. ([4])]. При этом периоды Ω_α^β дифференциалов Пикара, инвариантные относительно обходов вокруг критических точек на u-плоскости, являются рациональными функциями от u. С помощью подходящего линейного преобразования $(\omega_1, \ldots, \omega_q)$ над K мы можем добиться того, чтобы эти периоды оказались постоянными; в дальнейшем будем считать это выполненным.

9. Построение базисной системы. Заметим прежде всего, что дифференциалы $D_v\omega_\alpha$, $1 \leqslant \alpha \leqslant q$, имеют только нулевые периоды и поэтому являются полными; следовательно, в пространстве $\overline{\mathfrak{W}}$ мы имеем q соотношений:

$$D\bar{\omega}_\alpha = 0, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant q. \tag{17}$$

Обозначим, далее,

$$\overline{\Omega}_\alpha = (\Omega_\alpha^{2q+1}, \ldots, \Omega_\alpha^{2g}), \quad q+1 \leqslant \alpha \leqslant g,$$

$$\overline{\Omega}^\beta = (\Omega_{q+1}^\beta, \ldots, \Omega_g^\beta), \quad 2q+1 \leqslant \beta \leqslant 2g; \quad \overline{\mathfrak{W}}_0 = \mathfrak{W}_0/\mathfrak{B},$$

где $\mathfrak{W}_0$ обозначает пространство дифференциалов R с нулевыми вычетами и нулевыми периодами по инвариантным циклам. Очевидно, $\overline{\mathfrak{W}}$ распадается в прямую сумму $\overline{\mathfrak{W}}_0$ и дополнительного пространства; базисная система $\overline{\mathfrak{W}}$ может состоять из соотношений (17) и базисной системы $\overline{\mathfrak{W}}_0$. В этом виде мы и будем ее строить.

Заметим, что любому соотношению в $\overline{\mathfrak{W}}_0$

$$\sum_{\alpha=q+1}^{g} L_\alpha \bar{\omega}_\alpha = 0 \tag{18}$$

соответствует соотношение

$$\sum_{\alpha=q+1}^{g} L_\alpha \overline{\Omega}_\alpha = \bar{0}, \tag{19}$$

где $\overline{0}$ есть нулевой вектор, а дифференцирование применяется покоординатно. Точно так же всякое соотношение (19), означающее, что дифференциал

$$\sum_{\alpha=q+1}^{g} L_{\alpha v}\omega_\alpha$$

имеет лишь нулевые периоды, равносильно соотношению (18). Поэтому базисной системе $\overline{\mathfrak{W}}_0$ соответствует некоторая однородная система (Σ) линейных дифференциальных уравнений относительно $g-q$ неизвестных над полем $k(u)$, имеющая $2g-2q$ решений $\overline{\Omega}^\beta$.

Построим такую систему (Σ), ставя своей целью добиться того, чтобы некоторая часть векторов $\overline{\Omega}^\beta$ составляла совокупность фундаментальных решений (Σ). Для этого воспользуемся способом, описанным в п.3, с некоторыми уточнениями.

Пусть p — максимальное число линейно независимых над k векторов $\overline{\Omega}^\beta$. Рассмотрим последовательность

$$\overline{\Omega}_{q+1}, \ \ldots, \ \overline{\Omega}_g, \quad D\overline{\Omega}_{q+1}, \ \ldots, \ D\overline{\Omega}_g, \ \ldots, \ D^p\overline{D}_{q+1}, \ \ldots, \ D^p\overline{\Omega}_g. \tag{20}$$

Над полем K^*, которое получается присоединением к K всех периодов Ω_β^α и их производных до p-й включительно (это будет не алгебраическое расширение, но и дифференцирование мы здесь понимаем как операцию анализа), в этой последовательности есть не более p линейно независимых векторов (конечно, $p \geqslant g-q$). В самом деле, расписывая покоординатно друг под другом векторы (20), мы получим матрицу, имеющую, очевидно, не более p линейно независимых столбцов и, следовательно, строк. Пусть количество линейно независимых векторов (20) равно $p_1 \leqslant p$. Если применить к последовательности (20) описанный в п.3 процесс, то, избегая выписывать лишние соотношения, мы при подходящей нумерации $\overline{\Omega}_{q+1}, \ldots, \overline{\Omega}_g$ получим следующее. Существует такая последовательность целых чисел $g-q=r_0 \geqslant r_1 \geqslant \ldots \geqslant r_t > r_{t+1}=0$, что

а) $r_0+r_1+\ldots+r_t=p_1$;

б) линейно независимыми (т. е. невычеркнутыми) членами последовательности (20) являются векторы

$$\overline{\Omega}_{q+1}, \ \ldots, \ \overline{\Omega}_{q+r_0}; \quad D\overline{\Omega}_{q+1}, \ \ldots, \ D\overline{\Omega}_{q+r_1}, \ \ldots, \ D^t\overline{\Omega}_{q+1}, \ \ldots, \ D^t\overline{\Omega}_{q+r_t};$$

в) в μ-м периоде будут выписаны $r_{\mu-1}-r_\mu$ соотношений для испытуемых векторов $D^\mu\overline{\Omega}_{q+r_{\mu-1}+1}, \ \ldots, \ D^\mu\overline{\Omega}_{q+r_\mu}$ (и ни одного, если $r_{\mu-1}=r_\mu$), все остальные соотношения будут следствиями этих.

Заменяя в выписанных соотношениях $\overline{\Omega}_\alpha$ на знаки неизвестных, мы получим искомую систему уравнений (Σ). В самом деле, с одной стороны, эта система имеет p линейно независимых решений $\overline{\Omega}^\beta$, с другой стороны, число ее фундаментальных решений должно быть не больше, чем

$$(r_0-r_1)+2(r_1-r_2)+\cdots+(t+1)(r_t-r_{t+1})=p_1.$$

Следовательно, это число есть в точности $p_1=p$, и мы можем считать, что $\overline{\Omega}^{2q+1}, \ \ldots, \ \overline{\Omega}^{2q+p}$ образуют фундаментальную систему решений (Σ).

Но, по сделанному выше замечанию, каждому уравнению (Σ) соответствует некоторая линейно дифференциальная зависимость в пространстве $\overline{\mathfrak{W}}_0$; коэффициенты этой зависимости, по построению (Σ), принадлежат K^*, однако вовсе не обязаны принадлежать K. На самом же деле, векторы $\overline{\mathfrak{W}}_0$, линейно независимые над K, остаются таковыми и над любым расширением K, способным служить полем констант кривой C_u; это почти тривиальное замечание позволяет заключить, что линейные зависимости $\overline{\mathfrak{W}}_0$, соответствующие (Σ), имеют коэффициенты в K (если при необходимости разделить их на некоторые элементы K^*). Тот факт, что полученные зависимости составляют базисную систему $\overline{\mathfrak{W}}_0$, следует из способа построения (Σ).

10. Ядро гомоморфизма $\bar{\zeta}$. Как уже было упомянуто во введении, функция $Z(\mathfrak{a})$, соответствующая соотношению

$$\sum_{\alpha=q+1}^{g} L_\alpha \overline{\omega}_\alpha = 0,$$

определяется формулой

$$Z(\mathfrak{a}) = \sum_{\alpha=q+1}^{g} L_\alpha \int^{\mathfrak{a}} \omega_\alpha, \tag{21}$$

где интеграл

$$\int^{\mathfrak{a}} \omega_\alpha = \sum \nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}) \int_{\mathfrak{p}_0}^{\mathfrak{p}} \omega_\alpha,$$

очевидно, не зависит (для дивизора нулевой степени) от выбора точки $\mathfrak{p}_0$ и определен с точностью до периодов. Соответствие формулы (21) определению, заданному формулами (5), (6), (6a) и (7), легко проверяется; в действительности, конечно, эти последние формулы выписывались, исходя из (21). Отсюда непосредственно следует, что если $\mathfrak{a}$ принадлежит ядру гомоморфизма $\bar{\zeta}$, построенного для всех базисных соотношений, то $\left(\int^{\mathfrak{a}} \omega_\alpha\right)$ удовлетворяет системе (Σ) для $q+1 \leqslant \alpha \leqslant g$ и уравнениям (17) для $1 \leqslant \alpha \leqslant q$. Последнее же означает, что

$$\int^{\mathfrak{a}} \omega_\alpha = \mathrm{const}, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant q,$$

$$\int^{\mathfrak{a}} \omega_\alpha = \sum_{\beta=2q+1}^{2g} c_\beta \Omega_\alpha^\beta, \quad q+1 \leqslant \alpha \leqslant g, \quad c_\beta \in k, \tag{22}$$

где мы положили $c_\beta = 0$ для $2q+p+1 \leqslant \beta \leqslant 2g$. Положим $\bar{c} = (c_{2q+1}, \ldots, \ldots, c_{2g})$ и запишем (22) в виде формального скалярного произведения:

$$\int^{\mathfrak{a}} \omega_\alpha = (\bar{c}, \overline{\Omega}_\alpha). \tag{23}$$

Совершая обход вокруг ν-й критической точки на u-плоскости и пользуясь тем, что периоды преобразуются как соответствующие циклы, мы

получим для интеграла (23) приращение вида:

$$(\bar{c},\ (\sigma_\nu - \varepsilon)\ \bar{\Omega}_\alpha) = (\bar{c},\ \overline{\Omega_\alpha S_\nu}) = (cS^*_\nu,\ \bar{\Omega}_\alpha).$$

Если класс $\mathfrak{a}$ рационален над K, то это приращение должно быть целочисленной линейной комбинацией периодов. Иначе говоря, существуют такие целочисленные векторы $\bar{f}_\nu$, что $\bar{c}$ удовлетворяет системе уравнений

$$\bar{c}S^*_\nu = \bar{f}_\nu, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant N.$$

Так как соответствующая однородная система, в силу леммы 4, не имеет ненулевых решений, то $\bar{c}$ определяется векторами $\bar{f}_\nu$ однозначно и, следовательно, имеет рациональные координаты. Обозначая буквой d общий знаменатель этих координат, получим окончательно:

$$\begin{aligned} &\int^{\mathfrak{a}^d} \omega_\alpha = \text{const}, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant q, \\ &\Bigl(\int^{\mathfrak{a}^d} \omega_\alpha\Bigr) \equiv 0\,(\text{mod периодов}), \quad q+1 \leqslant \alpha \leqslant g. \end{aligned} \tag{24}$$

В силу теоремы Севери [см. ([3]), гл. VII, 4, с] это дает следующий результат:

Если рациональный над $k(u)$ класс дивизоров нулевой степени $\bar{\mathfrak{a}}$ кривой C_u принадлежит ядру гомоморфизма $\bar{\zeta}$, то существует такое целое число d, что класс $\bar{\mathfrak{a}}^d$ алгебраически эквивалентен нулю.

Очевидно, обратное утверждение также справедливо.

В якобиевом многообразии J_u кривой C_u классы дивизоров, алгебраически эквивалентные нулю, образуют абелево подмногообразие, бирационально эквивалентное абелеву многообразию, которое определено над k. Это последнее называется многообразием Пикара поверхности V и, как мы выяснили, фактически совпадает с ядром $\bar{\zeta}$. Оговорку относительно d можно было бы предвидеть заранее, учитывая, что в аддитивной группе основного поля нет элементов конечного порядка. В этом смысле, действительно, ядро гомоморфизма, соответствующего паре (K, k), состоит из классов дивизоров, «определенных» над k.

11. Эллиптические кривые. Случай вырождения. Ниже мы в общих чертах проведем вычисления гомоморфизма $\bar{\zeta}$ для случая эллиптической кривой C_u.

Пусть эллиптическая кривая C_u задана каноническим уравнением

$$Y^2 = X^3 + aX + b, \quad 4a^3 + 27b^2 \neq 0. \tag{25}$$

Род C_u равен единице, единственный дифференциал первого рода есть $\omega = \frac{dX}{Y}$; базис пространства $\overline{\mathfrak{W}}$ задается векторами $(\bar{\omega}, \bar{\omega}')$, где $\omega' = \frac{XdX}{Y}$; D в K обозначает дифференцирование по u; продолжение D на R, обозначаемое для простоты той же буквой, соответствует D_X в прежних обозначениях.

Так как размерность пространства $\overline{\mathfrak{W}}$ равна двум, то следует ожидать, что в общем случае $\bar{\omega}$ и $D\bar{\omega}$ должны быть линейно независимы. В действительности так оно и есть; исследуем сначала случай вырождения, когда между $\bar{\omega}$ и $D\bar{\omega}$ линейная зависимость существует.

Пусть

$$X^3 + aX + b \equiv (X - e_1)(X - e_2)(X - e_3),$$

e_α принадлежат алгебраическому расширению K,

$$\delta = [(e_1 - e_2)(e_2 - e_3)(e_3 - e_1)]^2 = -(4a^3 + 27b^2).$$

Тогда имеем:

$$D\omega = -\frac{1}{2}\frac{Da \cdot X + Db}{Y^3}dX,$$

$$D\omega - d\left(\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{Dae_\alpha + Db}{3e_\alpha^2 + a}\frac{Y}{X - e_\alpha}\right) = \frac{2a^2Da + 9bDb}{2\delta}\frac{dX}{Y} - \frac{9bDa - 6aDb}{2\delta} \cdot \frac{XdX}{Y}.$$

Следовательно, для линейной зависимости $\bar{\omega}$ и $D\bar{\omega}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство:

$$9bDa - 6aDb = 0.$$

Общее решение этого простого дифференциального уравнения задается условием

$$\xi a^3 + \eta b^2 = 0,$$

где ξ, η — произвольные постоянные (заметим, что это условие равносильно независимости от u абсолютного инварианта кривой). Здесь может представиться три случая:

а) $b = 0$. Уравнение кривой: $Y^2 = X^3 + aX$.

$$D\bar{\omega} + \frac{Da}{4a}\bar{\omega} = 0,$$

$$Z(\mathfrak{p}) = \frac{Da \cdot X_\mathfrak{p} - 2aD(X_\mathfrak{p})}{2aY_\mathfrak{p}}. \tag{26а}$$

б) $a = 0$. Уравнение кривой: $Y^2 = X^3 + b$.

$$D\bar{\omega} + \frac{Db}{6b}\bar{\omega} = 0,$$

$$Z(\mathfrak{p}) = \frac{Db \cdot X_\mathfrak{p} - 3bD(X_\mathfrak{p})}{3bY_\mathfrak{p}}. \tag{26б}$$

в) $ab \neq 0$; $\lambda = \frac{\eta}{\xi} \neq \frac{27}{4}$. Уравнение кривой: $Y^2 = X^3 + c^2X + \lambda c^3$.

$$D\bar{\omega} + \frac{Dc}{2c}\bar{\omega} = 0,$$

$$Z(\mathfrak{p}) = \frac{DcX_\mathfrak{p} - cD(X_\mathfrak{p})}{cY_\mathfrak{p}}. \tag{26в}$$

Чрезвычайная простота формул (26а), (26б), (26в) делает их удобными для практической проверки линейной зависимости конкретных точек на кривой C_u. Как легко видеть, если a не есть квадрат, b не есть куб, c не есть квадрат, то формулы (26а), (26б), (26в) могут терять смысл лишь в тривиальных случаях $Y_\mathfrak{p} = 0$ и ни в каких рациональных точках над $k(u)$ в нуль не обращаются.

12. Эллиптические кривые. Общий случай. В общем случае формулы получаются гораздо более громоздкими, если не накладывать на a и b никаких специальных ограничений.

Ищем линейное соотношение

$$D^2\overline{\omega} + p^1 D\overline{\omega} + p^0\overline{\omega} = 0$$

с неопределенными коэффициентами p^1, p^0. Выделение полных дифференциалов дает:

$$D^2\omega + p^1 D\omega + p^0\omega = d\Big[-\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{(De_\alpha)^2}{(3e_\alpha^2+a)^2}\frac{Y^3}{(X-e_\alpha)^3} +$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{-\frac{3}{2}(f_2e_\alpha^2+f_1e_\alpha+f_0)+p^1(e_\alpha Da+Db)+e_\alpha D^2a+D^2b}{(3e_\alpha^2+a)^2}\cdot\frac{Y}{X-e_\alpha}+\frac{1}{2}g_2Y\Big]+$$

$$+\left[p^0+\frac{3}{4}\left(g_0+h_0-\frac{ag_2}{3}\right)-\frac{1}{2}p^1k_0-\frac{1}{2}l_0\right]\frac{dX}{Y}+$$

$$+\left[\frac{3}{4}(g_1+h_1)-\frac{1}{2}p^1k_1-\frac{1}{2}l_1\right]\frac{XdX}{Y}.$$

Здесь введены обозначения:

$$g_2=\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{(De_\alpha)^2}{(3e_\alpha^2+a)^2},\qquad f_2=-3\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{e_\alpha(De_\alpha)^2}{3e_\alpha^2+a},\qquad h_1=\frac{2a^2f_2+9bf_1-6af_0}{\delta},$$

$$g_1=\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{e_\alpha(De_\alpha)^2}{(3e_\alpha^2+a)^2},\qquad f_1=-\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{(6e_\alpha^2+a)(De_\alpha)^2}{3e_\alpha^2+a},\qquad h_0=\frac{3abf_2-2a^2f_1-9bf_0}{\delta},$$

$$g_0=-2\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{e_\alpha^2(De_\alpha)^2}{(3e_\alpha^2+a)^2},\qquad f_0=-\frac{a}{b}\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{(De_\alpha)^2e_{\alpha+1}^2e_{\alpha+2}^2}{3e_\alpha^2+a}+\frac{(Db)^2}{b},$$

$$k_1=\frac{9bDa-6aDb}{\delta},\qquad l_1=\frac{9bD^2a-6aD^2b}{\delta},$$

$$k_0=-\frac{2a^2Da+9bDb}{\delta},\qquad l_0=-\frac{2a^2D^2a+9bD^2b}{\delta}.$$

Коэффициенты p^1 и p^0 находятся из уравнений:

$$p^0+\frac{3}{4}\left(g_0+h_0-\frac{ag_2}{3}\right)-\frac{1}{2}p^1k_0-\frac{1}{2}l_0=0,$$

$$\frac{3}{4}(g_1+h_1)-\frac{1}{2}p^1k_1-\frac{1}{2}l_1=0.$$

Для кривой C_u в частном виде $Y^2=X(X-1)(X-u)$ [см. ([1])] уравнение для дифференциала приобретает простую форму:

$$D^2\overline{\omega}+\frac{2u-1}{u(u-1)}D\overline{\omega}+\frac{1}{4u(u-1)}\overline{\omega}=0,$$

однако $Z(\mathfrak{p})$ и здесь выглядит достаточно сложно.

В заключение приношу благодарность И. Р. Шафаревичу за постоянное внимание к этой работе.

Поступило
20.III.1958

ЛИТЕРАТУРА

[1] F u c h s L., Gesammelte mathematische Werke, Bd. 1, S. 241—281, 285—292, 343—360; Bd 3, S. 251—264, 283—293, Berlin, 1904—1909.

[2] C h e v a l l e y C., Introduction to the theory of algebraic functions of one variable, New York, 1951.

[3] Z a r i s s k i O., Algebraic surfaces, Berlin, 1935.

[4] I g u s a J.— I., On the Picard varieties attached to algebraic varieties, Am. Journ. Math., 74, № 1 (1952), 1—22.

[5] I g u s a J.— I., Fibre systems of Jacobian varieties. I—II, Am. Journ. Math., 78, № 1 (1956), 171—199; № 4 (1956), 745—760.