Д. В. Аносов, Об аддитивном функциональном гомологическом уравнении, связанном с эргодическим поворотом окружности, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1973, том 37, выпуск 6, 1259–1274

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
37(1973), 1259—1274

УДК 517.9

Д. В. АНОСОВ

ОБ АДДИТИВНОМ ФУНКЦИОНАЛЬНОМ ГОМОЛОГИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ, СВЯЗАННОМ С ЭРГОДИЧЕСКИМ ПОВОРОТОМ ОКРУЖНОСТИ

Показано, что упомянутое уравнение с непрерывной и даже аналитической правой частью может иметь измеримое решение, не интегрируемое по Лебегу (и даже с еще более «плохими» свойствами).

1. Напомню, что аддитивным гомологическим уравнением, связанным с каскадом $\{T^n\}$ на фазовом пространстве X, называется функциональное уравнение

$$g(Tx)-g(x)=f(x), \tag{1.1}$$

где f — известная, а g — неизвестная функция на X. (Прилагательное «гомологическое» употребляется по причине некоторой аналогии с гомологической алгеброй: см., напр., ([1]). Впрочем, эта аналогия пока не получила серьезного развития, а возможно и не допускает такового; но, так или иначе, надо же как-то называть это уравнение.) Мультипликативным гомологическим уравнением (связанным с тем же каскадом) называется уравнение $\psi(Tx)=\varphi(x)\psi(x)$, где φ — известная, а ψ — неизвестная функция на X. Эта статья посвящена уравнению (1.1) для того случая, когда X является окружностью $\mathbf{S}^1=\mathbf{R}/\mathbf{Z}$, функция f — вещественная и непрерывная *, а преобразование T в терминах циклической координаты, отсчитываемой по mod 1, имеет вид $Tx=x+\alpha$ (α — иррациональное число). Речь будет идти о решениях этого уравнения, т. е. уравнения

$$g(x+\alpha)-g(x)=f(x), \quad x \bmod 1, \tag{1.2}$$

вещественных и измеримых ** относительно меры Лебега — единственной конечной инвариантной меры нашего каскада (согласованной с топологией). Равенство в (1.2) должно выполняться для почти всех x.

---

* Не считая некоторых несущественных обобщений, где $f\in L^1$.

** Поскольку в теории функций иногда допускаются и такие функции, которые обращаются в бесконечность на множестве положительной меры, то стоит подчеркнуть, что я понимаю «измеримую функцию» в более узком (и более обычном) смысле — при почти каждом x она должна иметь конечное значение (а на остальных x я ее считаю не заданной).

Ясно, что измеримое решение (1.2), если оно существует, определено однозначно с точностью до константы (точнее, с точностью до функции, почти всюду постоянной), ибо разность двух таких решений будет измеримой инвариантной функцией эргодического каскада. Еще одно замечание: если (1.2) имеет измеримое решение, то среднее значение функции f равно нулю. Чтобы не отвлекаться в самом начале от основной темы, я вынес доказательство, несмотря на его простоту, в п. 4 (другое доказательство неявно содержится в п. 8). Поскольку это ничего не усложнит, приведу более общую формулировку:

ТЕОРЕМА 1. *Пусть T — эндоморфизм пространства с конечной мерой (X, μ) и $f \in L^1(X, \mu)$. Если уравнение* (1.1) *имеет измеримое решение g, то* $\int\limits_X f d\mu = 0$.

В дальнейшем везде подразумевается без особых напоминаний, что среднее значение f равно нулю.

Д. Гильберт мимоходом упомянул уравнение (1.2) как пример того, что «существуют вполне аналитические функциональные уравнения, отдельными решениями которых являются недифференцируемые функции» ([2], пятая проблема). Простые соображения, основанные на рядах Фурье и свойствах аппроксимации иррациональных чисел рациональными, приводят к выводу, что даже при аналитической функции f (не сводящейся к тригонометрическому полиному) решение (1.2), в зависимости от выбора α, может быть аналитической функцией, функцией конечной гладкости или разрывной функцией из $L^2(S^1)$; наконец, может и не существовать решения из $L^1(S^1)$. Действительно, пусть f_ν — коэффициенты Фурье функции f*. Если искать g в виде $\Sigma g_\nu e^{2\pi i\nu x}$, то непосредственная подстановка в (1.2) приводит к соотношениям

$$g_\nu = \frac{f_\nu}{e^{2\pi i\nu\alpha} - 1}, \quad \nu \neq 0. \tag{1.3}$$

Если $g \in L^1$, то это вполне законное рассуждение. В зависимости от того, насколько хорошо можно аппроксимировать α рациональными числами, получаются различные возможности для поведения g_ν, начиная от экспоненциального убывания и вплоть до того, что $\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}} |g_\nu| = \infty$; в последнем случае мы заключаем, что предположение, будто (1.2) имеет решение $g \in L^1$, приводит к противоречию. По-видимому, впервые все это было изложено в ([3]).

Подобные рассуждения, однако, ничего не говорят насчет измеримых решений. Из других соображений известны и такие случаи, когда даже измеримых решений нет (см. п. 3 ниже). В конце статьи ([4]) высказано предположение, влекущее следующее: если при аналитической f

$$\sum_{\nu \neq 0} \frac{|f_\nu|^2}{|e^{2\pi i\nu\alpha} - 1|^2} = \infty,$$

* В дальнейшем f_ν всегда имеют этот смысл.

то (1.2) не имеет измеримых решений; иными словами, измеримое решение (1.2) принадлежит L^2 (см. п. 3). Цель настоящей статьи — показать, что это не так.

ТЕОРЕМА 2. *Для любого иррационального α существует такая непрерывная функция $f\colon \mathbf{S}^1 \to \mathbf{R}$, что уравнение* (1.2) *имеет измеримое решение g, не принадлежащее L^1 (и тем более L^2). Более того, для любого α и любой невозрастающей функции $h(t)$, для которой $\lim\limits_{t\to\infty} h(t)=0$, существует такая непрерывная функция f, что уравнение* (1.2) *имеет измеримое решение g, для которого при всех достаточно больших t*

$$\operatorname{mes}\{x : g(x) > t\} > h(t), \tag{1.4}$$

а если формально определить «коэффициенты Фурье» g_ν согласно (1.3), *то*

$$\varlimsup_{\nu\to\infty} |g_\nu| = \infty. \tag{1.5}$$

ТЕОРЕМА 3. *Существуют такое иррациональное число α и такая аналитическая функция $f\colon \mathbf{S}^1 \to \mathbf{R}$, что уравнение* (1.2) *имеет измеримое решение g, не принадлежащее L^1. Более того, для любой невозрастающей функции $h(t)$, для которой $\lim\limits_{t\to\infty} h(t)=0$, и любой последовательности $m_\nu>0$ существуют такое иррациональное число α и такая аналитическая функция f, что уравнение* (1.2) *имеет измеримое решение g, для которого при всех достаточно больших t выполняются* (1.4) *и*

$$\varlimsup_{\nu\to\infty} \frac{|g_\nu|}{m_\nu} = \infty \tag{1.6}$$

(*g_ν по-прежнему определяются согласно* (1.3)).

Возникающую ситуацию стоит сравнить с той, которая имеет место для $У$-систем (свойства последних вообще обычно контрастируют со свойствами поворота окружности). А. Н. Лившиц, А. М. Стёпин и я независимо нашли доказательства (родственные по основной идее) следующей теоремы. Пусть $\{T^n\}$ — $У$-каскад класса $C^{1+\varepsilon}$ с интегральным инвариантом (т. е. с конечной инвариантной мерой, которая в локальных координатах эквивалентна эвклидовой), и пусть $f \in C^\varepsilon$, тогда измеримое решение g уравнения (1.2) непрерывно и даже удовлетворяет условию Гёльдера * (т. е. имеет такого представителя mod 0). Соответствующий аналог верен для $У$-потоков. Доказательство А. Н. Лившица опубликовано в ([12]).

В примерах, которые я построю для доказательства теорем 2 и 3, функция $g(x)$ будет положительной почти всюду (см. п. 6). Поскольку

---

* Как обычно, в посылке и заключении этой теоремы можно условие Гёльдера на f, на первые производные T и на g ослабить до условия $\int\limits_0 \frac{\omega(r)}{r}\,dr < \infty$, где ω — модуль непрерывности.

для таких функций любое разумное обобщение понятия интеграла, несомненно, должно совпадать с интегралом Лебега, то g ни в каком смысле нельзя считать интегрируемой.

Если бы мы хотели интерпретировать числа g_ν (с $\nu \neq 0$), формально определенные согласно (1.3), как некие «обобщенные коэффициенты Фурье» функции g, то надо было бы придать какой-то смысл интегралам

$$\int g(x)\, e^{-2\pi i \nu x} dx.$$

Здесь нет таких «абсолютных» противопоказаний, как с интегралом $\int g(x)\,dx$. Однако возможность достаточно разумной интерпретации сомнительна. Во всяком случае, два наиболее распространенных обобщения — A-интеграл и интеграл Данжуа (даже широкий) — отпадают. Первый отпадает ввиду (1.4), а второй — по следующей причине: из построения нетрудно усмотреть, что $\int\limits_\Delta g(x)\,dx = \infty$ для любой дуги $\Delta \subset \mathbf{S}^1$, так что функция $g(x)\cos 2\pi\nu x$ или $g(x)\sin 2\pi\nu x$ не интегрируема (ни в каком «разумном» смысле) ни на какой дуге, где косинус или синус сохраняют знак. Все же имеется некоторая возможность считать g_ν если не обобщенными, то хотя бы «пиквикскими» коэффициентами Фурье:

ТЕОРЕМА 4. *Пусть уравнение* (1.2) *с* $f \in L^1$ *имеет измеримое решение* $g(x)$. *Введем срезку*

$$g_t(x) = \begin{cases} g(x), & \text{когда } |g(x)| \leqslant t, \\ t \operatorname{sign} g(x), & \text{когда } |g(x)| > t. \end{cases}$$

Тогда

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_{\mathbf{S}^1} g_t(x)\, e^{-2\pi i \nu x} dx = g_\nu \quad (\nu \neq 0).$$

Впрочем, как бы мы ни интерпретировали числа g_ν, предполагая измеримое решение g существующим, неясно, можно ли извлечь из них какую-то пользу. Хотелось бы найти какие-нибудь простые условия, когда уравнение (1.2) не имеет измеримых решений. Поскольку существование измеримых решений не накладывает никаких ограничений на рост (!) g_ν, кажется сомнительным, чтобы g_ν могли пригодиться для указанной цели.

Теореме 4 можно придать «абстрактный» вид, подобно теореме 1. Но так как она и в конкретной-то форме не слишком привлекательна, я скажу об этом только несколько слов в конце п. 8.

Благодарю Е. А. Сидорова за беседы, стимулировавшие появление настоящей работы (см. п. 2).

2. Простейший пример, где возникает уравнение (1.2), — это цилиндрический каскад, т. е. каскад на цилиндре $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}$ с координатами $x \bmod 1$ и $y \in \mathbf{R}$, получающийся итерированием преобразования

$$T(x, y) = (x + \alpha,\ y + f(x)). \tag{2.1}$$

Впервые он фактически рассматривался А. Пуанкаре (именно, в конце [5] речь идет о потоке

$$\dot{x}_1 = \alpha, \quad \dot{x}_2 = 1, \quad \dot{y} = f(x_1, x_2)$$

в пространстве $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}$; на цинлиндре $x_2=0$ возникает отображение последования, и оно как раз типа (2.1). Пуанкаре, однако, рассуждает в терминах исходного потока). Для топологической транзитивности каскада $\{T^n\}$ необходимо и (при нашем условии на f) достаточно, чтобы уравнение (1.2) не имело непрерывных решений ([6]). Е. А. Сидоров показал ([13]), что при этом всюду плотные траектории, в зависимости от f и α, могут образовывать как множество полной меры, так и множество меры нуль. Его построение, иллюстрирующее вторую возможность, дает непрерывную f. Я заметил, что простая модификация этого построения приводит к части теоремы 2. Затем мне удалось найти другой способ, доказывающий также и все остальное; он и излагается в настоящей статье (пп. 6, 7). Как мы сейчас увидим, при этом тоже получается, что у соответствующего каскада (2.1) всюду плотные траектории образуют множество меры нуль. Подобное явление, следовательно, возможно и при аналитических f.

Все дело в том, что $g(x) \geqslant 0$ почти всюду. Обозначим через A множество тех точек $x \in \mathbf{S}^1$, для которых равенство (1.2) или неравенство $g(x) \geqslant 0$ не имеют места (сюда относятся, в частности, все те x, для которых $g(x)$ или $g(x+\alpha)$ не определена. На самом деле в нашем случае из построения g нетрудно усмотреть, что только такие x и входят в A, но это несущественно). Пусть $B = \bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty} (A + n\alpha)$. Ясно, что $\operatorname{mes} B = 0$ и что когда $x_0 \notin B$, то при каждом y_0 траектория $(x_n, y_n) = T^n (x_0, y_0)$ обладает следующими свойствами: при всех n

$$x_n \notin B, \quad g(x_n) \geqslant 0,$$
$$g(x_{n+1}) = g(x_n) + f(x_n),$$
$$y_{n+1} = y_n + f(x_n).$$

Вычитая из последнего равенства предпоследнее, получим:

$$y_{n+1} - g(x_{n+1}) = y_n - g(x_n) = \ldots = y_0 - g(x_0),$$

откуда $y_n \geqslant y_0 - g(x_0)$ при всех n. Следовательно, рассматриваемая траектория не может быть всюду плотной, т. е. все всюду плотные траектории целиком содержатся в множестве $B \times \mathbf{R}$, имеющем меру нуль.

Преобразование (2.1) сохраняет естественную меру на цилиндре, и возникает вопрос об условиях его эргодичности. Очевидное необходимое условие состоит в том, чтобы у (1.2) не существовало измеримых решений. Было бы интересно выяснить, не является ли это условие также и достаточным. Если f только непрерывна, то ответ отрицательный — см. ниже.

3. Другой пример, где возникает уравнение (1.2), — это задача о спектре потока на торе

$$\dot{x} = \alpha F(x, y), \quad \dot{y} = F(x, y), \tag{3.1}$$

где x, y — циклические координаты, отсчитываемые по mod 1, а функция F положительна и непрерывна. Если поток (3.1) имеет собственную функцию $\varphi(x, y)$, которая отвечает собственному значению $2\pi\lambda$ и которую можно считать всюду равной 1 по абсолютной величине, то функция $\varphi(x)=\varphi(x, 0)$ удовлетворяет мультипликативному гомологическому уравнению (связанному с поворотом окружности $x \mapsto x+\alpha$)

$$\varphi(x+\alpha) = e^{2\pi i\lambda\tau(x)}\varphi(x), \tag{3.2}$$

где *

$$\tau(x) = \int_0^1 \frac{d\eta}{F(x+\alpha\eta, \eta)} \tag{3.3}$$

— время, за которое решение (3.1), вышедшее в начальный момент из точки $(x, 0)$, снова попадет на окружность $y\equiv 0$ mod 1. Обратно, если $\varphi(x)$ — нетривиальное решение (3.2), то *

$$\varphi(x, y) = \varphi(x)\exp\left(2\pi i\lambda\int_0^y \frac{d\eta}{F(x+\alpha\eta, \eta)}\right) \tag{3.4}$$

— собственная функция потока (3.1) отвечающая собственному значению $2\pi\lambda$. Допустим, что собственная функция непрерывна и k есть степень непрерывного отображения

$$S^1 \longrightarrow S^1 \quad x \mapsto \varphi(x)$$

(для аргументов функции у нас аддитивная запись, а для значений — мультипликативная); тогда $\varphi(x)=e^{2\pi i(kx+\lambda g(x))}$, где g — некоторая непрерывная функция на окружности. Из (3.2) следует, что

$$\left.\begin{cases}\text{при каждом } x \text{ разность}\\ k(x+\alpha)+\lambda g(x+\alpha)-(\lambda\tau(x)+k(x)+\lambda g(x))\\ \text{является целым числом;}\end{cases}\right\} \tag{3.5}$$

ввиду ее непрерывности оно не зависит от x. Обозначим его через l и положим

$$\tau_0 = \int_{S^1}\tau(x)\,dx, \quad \tilde{\tau}(x) = \tau(x)-\tau_0.$$

Тогда

$$g(x+\alpha)-g(x) = \tilde{\tau}(x)+\tau_0+\frac{l+k\alpha}{\lambda}. \tag{3.6}$$

Отсюда

$$g(x+\alpha)-g(x) = \tau(x), \tag{3.7}$$

$$\lambda = -\frac{l+k\alpha}{\tau_0}. \tag{3.8}$$

---

* В этой формуле мы рассматриваем F не как функцию на торе $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$, а как функцию на накрывающей плоскости $\mathbf{R}^2$.

Обратно, если g — решение (3.7), то, определив λ согласно (3.8) (с произвольными целыми k и l), получим последовательно, что выполняются (3.6) и (3.2), т. е. (3.4) — собственная функция потока (3.1) с собственным значением $2\pi\lambda$; для этого обратного заключения непрерывность g совершенно не нужна и оно остается в силе, если g всего лишь измерима. Более того: измеримое решение уравнения (3.7) позволяет весьма просто построить преобразование тора, сохраняющее меру и осуществляющее сопряжение потока (3.1) с аналогичным потоком, для которого $F=\text{const}$ ([4]), ([7]). Таким образом в этом случае спектр обязан быть дискретным и иметь ровно две базисные частоты (нетрудно даже убедиться, что все собственные числа и собственные функции получаются так, как описано выше). Однако при непрерывной F может случиться так, что у потока (3.1) имеются собственные функции, а у (3.7) нет измеримых решений. Такой пример построил А. Б. Крыгин. (Для гладких F вопрос не выяснен. Неизвестно, всегда ли дискретный спектр имеет две базисные частоты? Вообще говоря, у эргодической системы класса C^∞ число базисных частот спектра может быть никак не связано с размерностью фазового пространства ([8]), хотя такая связь существует, когда собственные функции непрерывны ([9]). Возможно, непрерывность спектра потока (3.1) эквивалентна эргодичности цилиндрического каскада (2.1) с $f(x)=\tilde{\tau}(x)$.) В примере Крыгина спектр смешанный.

Дж. Нейман ([10]) и А. Н. Колмогоров (([4]), доказательства восстановлены в ([11])) построили примеры потока (3.1) с непрерывной, соответственно аналитической F, имеющие непрерывный спектр. Согласно сказанному, у соответствующих уравнений (3.7) нет даже измеримых решений. (Конечно, это довольно окольный и, вероятно, не самый простой способ строить примеры неразрешимых уравнений (1.2).)

Предположение, упомянутое в п. 1 (сразу перед теоремой), состояло в том, что при аналитической F неразрешимость уравнения (3.7) в L^2 достаточна для непрерывности спектра потока (3.1). Дабы удостовериться, что это противоречит теореме 3, надо убедиться в том, что, задав произвольно функцию $\tau(x)>0$, мы при любом иррациональном α сможем подобрать такую функцию $F(x, y)>0$, для которой выполняется (3.3). Иными словами, здесь нужна следующая лемма, доказательство которой приводится в п. 5.

ЛЕММА. *Для любой положительной аналитической функции $\varphi(x)\equiv\varphi(x+1)$ вещественного переменного x существует такая положительная аналитическая функция $f(x, y)$ с периодом 1 по x и y, что*

$$\varphi(x)=\int_0^1 f(x+\alpha\eta, \eta)\, d\eta. \tag{3.9}$$

4. Доказательство теоремы 1. Пользуясь введенными при ее формулировке обозначениями, будем рассуждать от противного. Пусть, для определенности, $\int_X f d\mu>0$; тогда из эргодической теоремы Биркго-

фа следует, что множество

$$M=\left\{x:\varliminf_{n\to\infty}\sum_{0}^{n-1}f(T^{j}x)>0\right\}$$

измеримо и имеет положительную меру. Выкинем из X множество меры нуль, на котором может не иметь места (1.1) (где, в частности, $g(x)$, $f(x)$ или $g(Tx)$ не определены), и все его прообразы. Тогда при всех x

$$g(T^{k}x)=g(x)+\sum_{j=0}^{k-1}f(T^{j}x). \tag{4.1}$$

Положим

$$M_{n}=\left\{x:\sum_{0}^{k-1}f(T^{j}x)>2 \text{ при всех } k\geqslant n\right\}=\bigcap_{k=n}^{\infty}\left\{x:\sum_{0}^{k-1}f(T^{j}x)>2\right\}. \tag{4.2}$$

Ясно, что все M_n измеримы, $M_1\subset M_2\subset\ \ldots$ и $M\subset\bigcup M_n$; поэтому существует n, для которого $\mu M_n>0$. Представив такое M_n как объединение непересекающихся множеств

$$M_{n,l}=\{x: x\in M_n,\ l\leqslant g(x)<l+1\}, \tag{4.3}$$

получим, что $\mu M_{n,l}>0$ при некотором l. По теореме Пуанкаре о возвращении, существуют сколь угодно большие k, для которых $\mu(T^{-k}M_{n,l}\cap M_{n,l})>0$. Но если при $k>n$ точка x лежит в таком пересечении, то из (4.1), (4.2) и (4.3) следует, что

$$l\leqslant g(x)<l+1,\quad l\leqslant g(T^{k}x)<l+1,\quad g(T^{k}x)\geqslant g(x)+2,$$

и мы приходим к противоречию.

5. Начиная отсюда, я буду проводить все рассуждения в терминах периодических функций с периодом 1 на $\mathbf{R}$ (вместо функций на окружности) или периодических функций двух переменных $(x, y)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ с периодом 1 по x и y (вместо функций на торе).

Доказательство леммы из п. 3. Если бы в лемме речь шла о непрерывных функциях, то можно было бы взять какое-нибудь число m, для которого $0<m<\min\varphi(x)$, какую-нибудь непрерывную неотрицательную функцию $\psi:[0,1]\to\mathbf{R}$, для которой $\psi(y)\equiv 0$, когда y близко к 0 или 1, а $\int_0^1\psi(y)\,dy=1$, и положить при $0\leqslant y\leqslant 1$

$$f(x, y)=m+\psi(y)(\varphi(x-\alpha y)-m).$$

Когда y близко к 0 или 1, то $f(x, y)=m$; поэтому при периодическом продолжении f действительно получается непрерывная функция. Заметим, что всюду $f(x, y)>m$ и что если φ — гладкая функция (а ψ тоже взята гладкой), то и f будет гладкой функцией. Однако аналитической f так получить нельзя.

Если нам дана аналитическая φ, то сперва мы построим, как описано выше, такую периодическую функцию f, для которой имеет место

(3.9) и которая является гладкой, скажем, класса C^{10}. Аппроксимируем эту f тригонометрическим полиномом g так, что $\|f-g\|_{C^{10}}<\varepsilon$ (требуемая малость ε будет уточнена позднее). Тогда

$$g(x, y)>m-\varepsilon, \tag{5.1}$$

и если $\psi(x)=\int\limits_0^1 g(x+\alpha\eta, \eta)\,d\eta$, $\chi(x)=\varphi(x)-\psi(x)$, то χ — аналитическая вещественная функция с периодом 1 и

$$\|\chi\|_{C^{10}}<\varepsilon. \tag{5.2}$$

Будем теперь, следуя лекциям А. Н. Колмогорова, искать решение уравнения

$$\int\limits_0^1 h(x+\alpha\eta, \eta)\,d\eta=\chi(x) \tag{5.3}$$

в виде ряда Фурье

$$h(x, y)=\sum_{k,l} h_{k,l}e^{2\pi i(kx+ly)}. \tag{5.4}$$

Формальная подстановка в (5.3) дает:

$$\chi(x)=h_{0,0}+\sum_{k\neq 0}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi ik\alpha}-1}{2\pi i(l+k\alpha)}h_{k,l}\,e^{2\pi ikx}. \tag{5.5}$$

Обозначим целое число, ближайшее к $k\alpha$, через $-l_k$, так что $l_0=0$ и при $k\neq 0$ имеем $k\alpha=-l_k+\alpha_k$, где $|\alpha_k|<\frac{1}{2}$. Идея А. Н. Колмогорова состоит в том, чтобы для каждого k в (5.4) оставить ненулевым только один из коэффициентов $h_{k,l}$,— именно, тот, у которого $l=l_k$. Тогда если $\chi(x)=\Sigma\chi_k e^{2\pi ikx}$, то из (5.5) следует, что $h_{0,0}=\chi_0$ и при $k\neq 0$

$$h_{k,l_k}=\frac{2\pi i(l_k+k\alpha)}{e^{2\pi ik\alpha}-1}\chi_k=\frac{2\pi i\alpha_k}{e^{2\pi i\alpha_k}-1}\chi_k.$$

Ясно, что $l_k=-l_{-k}$ и $\alpha_k=-\alpha_{-k}$, так что $h_{-k,-l_k}=h_{-k,l_{-k}}=\overline{h_{k,l_k}}$, т. е. условие вещественности h выполняется. Далее,

$$|h_{k,l_k}|=\frac{\pi|\alpha_k|}{\sin\pi|\alpha_k|}|\chi_k|. \tag{5.6}$$

Но $\frac{\sin\varphi}{\varphi}$ достигает своего минимума на отрезке $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$ в точке $\varphi=\frac{\pi}{2}$ и этот минимум, следовательно, равен $\frac{2}{\pi}$. Действительно, при $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$

$$\frac{d}{d\varphi}\frac{\sin\varphi}{\varphi}=\frac{\varphi\cos\varphi-\sin\varphi}{\varphi^2}\leqslant 0,$$

ибо числитель обращается в нуль при $\varphi=0$, а его производная по φ равна $-\varphi\sin\varphi\leqslant 0$. В (5.6) $\pi|\alpha_k|<\frac{\pi}{2}$, значит, $|h_{k,l_k}|\leqslant\frac{\pi}{2}|\chi_k|$. Ввиду аналитичности, χ коэффициенты χ_k с ростом $|k|$ убывают экспоненциально; следовательно и h_{k,l_k} тоже. А так как l_k имеет порядок k, то получастся, что в (5.4) все $h_{k,l}$ экспоненциально убывают с ростом $|k|+|l|$, т. е. этот ряд Фурье сходится к аналитической функции. При этом для любых $x, y\in\mathbf{R}$

$$|h(x,y)|\leqslant\sum|h_{k,l}|\leqslant|\chi_0|+\sum_{k\neq 0}\frac{\pi}{2}|\chi_k|.$$

Но из (5.2) следует, что

$$|\chi_0|\leqslant\varepsilon,\quad |\chi_k|\leqslant\frac{\varepsilon}{|k|^{10}}\text{ при } k\neq 0.$$

Поэтому при всех $x, y\in\mathbf{R}$

$$|h(x,y)|\leqslant\varepsilon+\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{|k|^{10}}=C\varepsilon,$$

где $C=1+\pi\sum_{k=1}^{\infty}|k|^{-10}$. Вместе с (5.1) это дает: $g(x,y)+h(x,y)>m-\varepsilon-C\varepsilon$ и, таким образом, $g(x,y)+h(x,y)$ можно принять за искомую функцию f, если ε достаточно мало.

6. Доказательство теорем 2, 3. Функция $g(x)$ будет иметь вид

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(q_{k_n}x),\tag{6.1}$$

где ψ_n суть некоторые тригонометрические полиномы с периодом 1 (порядок ψ_n отнюдь не предполагается равным n), а q_{k_n} — некоторая последовательность положительных целых чисел (они будут знаменателями подходящих дробей $\frac{p_n}{q_n}$ числа α, но, как подсказывают обозначения, мы не обязательно будем брать знаменатели всех подходящих дробей). Оставляя конкретный выбор чисел q_{k_n} до п. 7, рассмотрим пока условия, при выполнении которых можно гарантировать, что ряд (6.1) сходится почти всюду и $g\notin L^1$ или даже имеет место (1.4)*.

Сперва отметим, что независимо от выбора q_{k_n}

$$\int_0^1\psi_n(q_{k_n}x)\,dx=\int_0^1\psi_n(x)\,dx,\tag{6.2}$$

* Для функции $g(x)\equiv g(x+1)$, естественно, за норму в L^1 принимается $\int_0^1|g(x)|dx$ и в (1.4) тоже подразумевается, что рассматриваемые x берутся из некоторого отрезка единичной длины. В качестве такового в последнем случае удобнее взять $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

$$\operatorname{mes}\{x: 0 \leqslant x \leqslant 1, \psi_n(q_{k_n}x) > t\} = \operatorname{mes}\{x: 0 \leqslant x \leqslant 1, \psi_n(x) > t\}. \tag{6.3}$$

Потребуем, чтобы ψ_n удовлетворяли условиям:

$$\psi_n(x) \geqslant 0 \text{ при всех } x, \tag{6.4}$$

$$\operatorname{mes}\left\{x: |x| \leqslant \frac{1}{2}, \psi_n(x) > \frac{1}{2^n}\right\} < \frac{1}{2^n}. \tag{6.5}$$

Из (6.5), (6.3) и леммы Бореля — Кантелли* следует, что в почти каждой точке x лишь для конечного числа номеров n может нарушаться неравенство $\psi_n(q_{k_n}x) \leqslant \frac{1}{2^n}$. Отсюда и из (6.4) следует сходимость ряда (6.1) почти всюду. Из (6.2) и (6.4) видно, что

$$\int_0^1 |g(x)|\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \psi_n(x)\,dx, \tag{6.6}$$

так что если этот ряд расходится, то $g \notin L^1$. Далее, если при всех достаточно больших t

$$\max_n \operatorname{mes}\left\{x: |x| \leqslant \frac{1}{2}, \psi_n(x) > t\right\} > h(t), \tag{6.7}$$

то вместе с (6.4) это, конечно, влечет (1.4).

Обозначим через $\Delta(x, c)$ периодическую (с периодом 1) функцию от x, которая зависит от параметра $c \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ и на отрезке $|x| \leqslant \frac{1}{2}$ равна

$$\Delta(x, c) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|x|}{c}, & \text{когда } |x| \leqslant c, \\ 0, & \text{когда } c \leqslant |x| \leqslant \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Очевидно, $\int_0^1 \Delta(x, c)\,dx = c$; заметим также, что, как нетрудно подсчитать,

$$\int_0^1 \Delta(x, c)\, e^{-2\pi i \nu x} dx = \frac{\sin^2 \pi\nu c}{2\pi^2\nu^2 c}.$$

Определим $\psi_n(x)$ как тригонометрический полином, аппроксимирующий с точностью до $\frac{1}{2^{n+1}}$ в метрике C функцию

---

* Она гласит: если $\Sigma \operatorname{mes} A_n < \infty$, то почти каждая точка принадлежит, самое большее, конечному числу множеств A_n.

$$\frac{1}{2^{n+1}}+B_n\Delta\left(x,\ \frac{1}{2^{n+1}}\right), \tag{6.8}$$

так что $\psi_n(x)\geqslant B_n\Delta\left(x,\frac{1}{2^{n+1}}\right)$ при всех x, а когда $\frac{1}{2^{n+1}}\leqslant|x|\leqslant\frac{1}{2}$, то $|\psi_n(x)|\leqslant\frac{1}{2^n}$. Заметим еще для дальнейшего, что первый коэффициент Фурье функции $\psi_n(x)$

$$|\psi_{n,1}|\geqslant B_n\frac{2^n}{\pi^2}\sin^2\frac{\pi}{2^{n+1}}-\frac{1}{2^{n+1}}\geqslant B_n\frac{2^n}{16}\left(\frac{2}{\pi}\,\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)^2-\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{B_n-8}{2^{n+4}}. \tag{6.9}$$

Тогда (6.4) и (6.5) выполняются при любых $B_n>0$, а чтобы расходился ряд (6.6), достаточно взять $B_n\geqslant 2^{n+1}$.

Сложнее подобрать такие B_n, чтобы при всех достаточно больших t выполнялось (6.7). Удобно считать, что $\sup h(t)>1$; этого всегда можно достичь, переопределив $h(t)$ при малых t. Тогда из монотонности $h(t)$ следует, что существуют такие a_n, для которых $h(a_n)=\frac{1}{2^n}$ или, по крайней мере (если h разрывна), $h(a_n-0)\geqslant\frac{1}{2^n}\geqslant h(a_n+0)$; при этом $a_n\leqslant a_{n+1}$ (несколько a_n могут и совпасть, если мы попали на разрыв h). Случай, когда $h(t)$ при достаточно больших t обращается в 0, тривиален; значит, можно считать, что $a_n\to\infty$. Положив $b_n=2a_{n+2}$, имеем: когда $a_{n+1}<t\leqslant a_{n+2}$, то

$$b_n=\frac{\frac{1}{2^n}a_{n+2}}{\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n+1}}}\geqslant\frac{\frac{1}{2^n}t}{\frac{1}{2^n}-h(t)},$$

т. е. $h(t)\leqslant\frac{1}{2^n}\left(1-\frac{t}{b_n}\right)$. Итак,

$$h(t)\leqslant\max_n\frac{1}{2^n}\left(1-\frac{t}{b_n}\right)\quad\text{при } t>a_2. \tag{6.10}$$

Если теперь, по-прежнему определяя ψ_n посредством аппроксимации функции (6.8), взять $B_n\geqslant b_n$, то получим:

$$\psi_n(x)\geqslant b_n(1-2^{n+1}|x|),\quad |x|\leqslant\frac{1}{2},$$

откуда

$$\operatorname{mes}\left\{x:|x|\leqslant\frac{1}{2},\ \psi_n(x)>t\right\}\geqslant$$
$$\geqslant\operatorname{mes}\left\{x:|x|\leqslant\frac{1}{2},\ b_n(1-2^{n+1}|x|)>t\right\}=\frac{1}{2^n}\left(1-\frac{t}{b_n}\right).$$

Отсюда и из (6.10) следует, что при $t>a_2$ выполняется (6.7).

7. Обозначая вещественные числа буквами x и y, а комплексные — z и w, положим для $r>0$ и $R>0$:

$$\omega_n(r)=\max_{\substack{|y|\leqslant r\\ x\in\mathbf{R}}}|\psi_n(x+y)-\psi_n(x)|,$$

$$\omega_{n,R}(r)=\max_{\substack{|w|\leqslant r\\ |\operatorname{Im} z|\leqslant R}}|\psi_n(z+w)-\psi_n(z)|$$

($\operatorname{Im} z$ — мнимая часть z). Положим также

$$\varphi_n(x)=\psi_n(q_{k_n}(x+\alpha))-\psi_n(q_{k_n}x) \tag{7.1}$$

(и аналогично для комплексных z). Заметим, что тогда ν-ый коэффициент Фурье функции φ_n

$$\varphi_{n,\nu}=(e^{2\pi i\nu\alpha}-1)\,\psi_{n,\frac{\nu}{q_{k_n}}}, \tag{7.2}$$

где $\psi_{n,\mu}$ равно μ-му коэффициенту Фурье функции $\psi_n(x)$, если μ целое, и нулю, если μ нецелое.

Пусть $\frac{p_n}{q_n}$ — подходящие дроби иррационального числа α; как известно, $\alpha=\frac{p_n}{q_n}+\frac{\vartheta_n}{q_nq_{n+1}}$, где $|\vartheta_n|<1$. Потребуем, чтобы подпоследовательность q_{k_n} была такова, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n\left(\frac{1}{q_{k_n+1}}\right)<\infty. \tag{7.3}$$

Очевидно, $q_{k_n}(x+\alpha)=q_{k_n}x+p_{k_n}+\frac{\vartheta_{k_n}}{q_{k_n+1}}$ и

$$|\varphi_n(x)|=\left|\psi_n\left(q_{k_n}x+\frac{\vartheta_{k_n}}{q_{k_n+1}}\right)-\psi_n(q_{k_n}x)\right|. \tag{7.4}$$

При любом $x\in\mathbf{R}$ это не превосходит $\omega_n\left(\frac{1}{q_{k_n+1}}\right)$; стало быть, при выполнении (7.3) ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)$ равномерно сходится, причем при почти всех x он равен разности сходящихся рядов $\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(q_{k_n}(x+\alpha))$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(q_{k_n}x)$. При этом коэффициент Фурье

$$f_\nu=\sum_n\varphi_{n,\nu}=(e^{2\pi i\nu\alpha}-1)\sum_n\psi_{n,\frac{\nu}{q_{k_n}}}$$

(см. (7.2)), причем последний ряд фактически является конечной суммой.

Если q_{k_n} удовлетворяют условию

$$q_{k_n} > q_{k_{n-1}} \cdot (\text{порядок } \psi_{n-1}), \tag{7.5}$$

то, определяя g_ν согласно (1.3), находим, что

$$|g_{q_{k_n}}| = |\psi_{n,1}| \geqslant \frac{B_n - 8}{2^{n+4}}. \tag{7.6}$$

Значит, (1.5) заведомо будет иметь место, если $B_n \geqslant 4^{n+4}$.

Резюмирую: на B_n были наложены условия:

$$B_n \geqslant 2^{n+1}, \quad B_n \geqslant 4^{n+4}, \quad B_n \geqslant b_n,$$

последнее из которых зависит от функции $h(t)$, а остальные вообще ни от чего не зависят. Если B_n выбраны, то определены функции (6.8), а затем можно построить и $\psi_n(x)$ как надлежащие аппроксимации последних. Далее, ψ_n однозначно определяют $\omega_n(r)$, и остается только взять такие k_n, чтобы выполнялись условия (7.3) и (7.5). Тогда описанные выше построения дают нам f и g, обладающие, как мы видели, всеми требуемыми свойствами, и теорема 2 доказана.

При попытке обеспечить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z)$ в некоторой окрестности вещественной оси на плоскости комплексного переменного, скажем, в области $|\operatorname{Im} z| \leqslant 1$, мы приходим к гораздо более ограничительному условию. В (7.4) вместо x мы должны подставить комплексное число z с $|\operatorname{Im} z| \leqslant 1$. Но тогда в аргументе у ψ_n будет стоять число $q_{k_n} z$, о мнимой части которого можно сказать только то, что $|\operatorname{Im} q_{k_n} z| \leqslant q_{k_n}$. Приходится требовать, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega_{n, q_{k_n}}\left(\frac{1}{q_{k_{n+1}}}\right) < \infty. \tag{7.7}$$

Поскольку здесь фигурируют q_{k_n} и $q_{k_{n+1}}$, то нет смысла иметь дело с подпоследовательностью k_n. Проще при построении α принять $k_n = n$ — все равно ведь в теореме 3 число α не задано, а строится, т. е. мы не имеем заданной заранее последовательности q_n, из которой надо выбрать подходящую подпоследовательность q_{k_n}, а должны построить саму эту последовательность q_n. Соответственно, (7.5) и (7.7) мы заменим условиями:

$$q_n > q_{n-1} \cdot (\text{порядок } \psi_{n-1}), \quad \omega_{n-1, q_{n-1}}\left(\frac{1}{q_n}\right) < \frac{1}{2^n}. \tag{7.8}$$

Новым по сравнению с теоремой 2 является то, что мы хотим обеспечить выполнение (1.6). Согласно (7.6), для этого (предполагая выполненным (7.5), т. е. первое из условий (7.8)), достаточно, чтобы

$$B_n \geqslant 2^{n+4} n m_{q_n} + 8. \tag{7.9}$$

Остальные два условия на B_n остаются без изменения:

$$B_n \geqslant 2^{n+1}, \quad B_n \geqslant b_n. \tag{7.10}$$

Построение теперь производится несколько иначе. Зададим произвольно числа a_0 (т. е. целую часть α, которая, очевидно, вообще не играет роли), q_1 (тогда как $q_0=1$) и возьмем $B_1=\max(32\, m_{q_1}+8{,}4,\ b_1)$; после этого можно построить $\psi_1(x)$. На n-м шаге индуктивного процесса мы уже имеем коэффициент a_{n-1} цепной дроби, q_{n-1}, B_{n-1} и $\psi_{n-1}(x)$, так что, в частности, можно говорить о порядке ψ_{n-1} и об $\omega_{n-1,q_{n-1}}$. Выберем сперва q_n, удовлетворяющее (7.8) и такое, что q_n-q_{n-2} делится на q_{n-1}, т. е. $q_n=a_nq_{n-1}+q_{n-2}$, затем — B_n, удовлетворяющее (7.9) и (7.10), и, наконец, построим $\psi_n(x)$. Таким путем определяются a_n, q_n, B_n и $\psi_n(x)$ для всех n. После этого, с одной стороны, ряд (6.1) дает нам измеримую функцию g, для которой $g \notin L^1$ или даже имеет место (1.4). С другой стороны, последовательность a_n определяет бесконечную цепную дробь, изображающую некоторое иррациональное число α. Имея ψ_n, q_n и α, определяем $\varphi_n(z)$ согласно (7.1); как мы видели, тогда ряд $\Sigma\varphi_n(z)$ равномерно сходится в полосе $|\mathrm{Im}\, z|<1$ к некоторой аналитической функции f. При почти всех вещественных x справедливо (1.2) (ибо это так даже при выполнении более слабых условий). Кроме того, имея f и α, мы можем говорить о g_ν, определенных согласно (1.3); как мы видели, наши условия обеспечивают, что $|g_{q_n}|>nm_{q_n}$, так что выполняется (1.6). Тем самым теорема 3 доказана.

8. Доказательство теоремы 4. Отображение $\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$

$$y \mapsto y_t = \begin{cases} y, & \text{когда } |y| \leqslant t, \\ t \operatorname{sign} y, & \text{когда } |y| > t, \end{cases}$$

не увеличивает расстояний между точками. Поэтому для функции

$$f^t(x)=g_t(x+\alpha)-g_t(x) \tag{8.1}$$

имеем: $|f^t(x)|\leqslant|g(x+\alpha)-g(x)|=|f(x)|$ (при почти всех x, потому что (1.2) имеет место при почти всех x). Ясно также, что когда $t\to\infty$, то $f^t(x)\to f(x)$ почти всюду. Из теоремы Лебега об интегрировании последовательности функций следует, что при этом коэффициенты Фурье

$$f_\nu^t=\int_0^1 f^t(x)\,e^{-2\pi i\nu x}dx \to \int_0^1 f(x)\,e^{-2\pi i\nu x}dx=f_\nu.$$

Но $g_t \notin L^1$, поэтому к (8.1) законно применение тех рассуждений, которые при формальном применении к (1.2) приводят к формуле (1.3), а в нашем случае — к формуле

$$\int_0^1 g_t(x)\,e^{-2\pi i\nu x}dx=\frac{f_\nu^t}{e^{2\pi i\nu\alpha}-1}.$$

Тем самым теорема 4 доказана.

Можно предложить «более абстрактный» вариант этой теоремы. Пусть T — эндоморфизм пространства с конечной мерой (X, μ), U — соответствующий изометрический оператор в $L^p(X, \mu)$, $1 \leqslant p < \infty$, т. е. $(Uf)(x) = f(Tx)$, а U^* — сопряженный оператор в сопряженном пространстве. Если $f \in L^p(X, \mu)$ и уравнение (1.1) имеет измеримое решение $g(x)$, а функционал φ таков, что $\varphi = (U^* - 1)\psi$, то, сохраняя прежнее обозначение (и определение!) для срезки, имеем *:

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(g_t) = \psi(f).$$

Действительно, обозначая $f^t(x) = g_t(Tx) - g_t(x)$, находим: $|f^t(x)| \leqslant |f(x)|$, $f^t(x) \to f(x)$ почти всюду и

$$\varphi(g_t) = (U^*\psi - \psi)(g_t) = \psi(Ug_t - g_t) = \psi(f^t) \to \psi(f).$$

(При $p = \infty$ рассуждение не проходит — нельзя утверждать, что $\psi(f^t) \to \psi(f)$. Впрочем, если $\psi \in L^1$, то это препятствие отпадает.)

Поступило
14.II.1973

Литература

[1] Кириллов А. А., Динамические системы, факторы и представления групп, Успехи матем. наук, 22, № 5 (1967), 67—80.

[2] Проблемы Гильберта, Сб. под ред. П. С. Александрова, М., «Наука», 1969.

[3] Wintner A., The linear difference equation of first order for angular variables, Duke Math. J., 12, № 3 (1945), 445—449.

[4] Колмогоров А. Н., О динамических системах с интегральным инвариантом на торе, Докл. АН СССР, 93, № 5 (1953), 763—766.

[5] Пуанкаре А., О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, М.—Л., ОГИЗ, 1947.

[6] Gottschalk W. H., Hedlund G. A., Topological dynamics, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, v. 36, Providence, 1955.

[7] Sternberg S., On differential equations on the torus, Amer. J. Math., 79 № 2 (1957), 397—402.

[8] Аносов Д. В., Каток А. Б., Новые примеры в гладкой эргодической теории. Эргодические диффеоморфизмы, Тр. Моск. матем. об-ва, 23 (1970), 3—36.

[9] Avez A., Spectre discret des systemes ergodiques classiques, Compt. Rend. Acad. Sci. Paris, 264, № 1 (1967), A 49—A 52.

[10] Neumann J., Zur Operatorenmethode in der Klassischen Mechanik, Ann. Math., 33, № 3 (1932), 587—642.

[11] Шкловер М. Д., О классических динамических системах на торе с непрерывным спектром, Изв. вузов, Математика, № 10 (1967), 113—124.

[12] Лившиц А. Н., Когомологии динамических систем, Изв. АН СССР. Сер. матем., 36 (1972), 1296—1320.

[13] Сидоров Е. А., Топологически транзитивные цилиндрические каскады, Матем. заметки, т. 14, № 3 (1973), 441—452.

* Так как $\mu(X) < \infty$, то $g_t \in L^p(X, \mu)$.