Б. Л. Фейгин, Б. Л. Цыган, Аддитивная $K$-теория и кристальные когомологии, *Функц. анализ и его прил.*, 1985, том 19, выпуск 2, 52–62

*Функциональный анализ и его приложения,*
1985, т. 19, вып. 2, 52—62

УДК 512.66

# АДДИТИВНАЯ $K$-ТЕОРИЯ И КРИСТАЛЬНЫЕ КОГОМОЛОГИИ

Б. Л. Фейгин, Б. Л. Цыган

В последние годы появилось много работ, посвященных вычислению когомологий различных бесконечномерных алгебр Ли. В работах И. М. Гельфанда и Д. Б. Фукса находятся когомологии алгебр Ли векторных полей на многообразиях. Оказалось, что их основное техническое средство — теория инвариантов — может быть применено для вычисления когомологий алгебр токов на многообразиях со значениями в алгебре Ли бесконечных финитных матриц. В этой работе изучаются когомологии алгебры токов, причем кольцо функций на многообразии заменяется на произвольное (возможно, некоммутативное) кольцо. Для нас очень важна аналогия этой задачи с алгебраической $K$-теорией.

Алгебраическая $K$-теория относит каждому кольцу $A$ последовательность абелевых групп $K_i(A)$. Линейные пространства $K_i(A)\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q}$ могут быть определены следующим образом [6]. Пусть $GL_\infty(A)$ — группа обратимых матриц над A вида $1+m$, где $m$ — финитна. Пространство $H_*(GL_\infty(A);\mathbf{Q})$ есть алгебра Хопфа, и $K_i(A)\oplus_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q}$ изоморфно пространству ее примитивных элементов степени $i$.

Пусть теперь $A$ есть $k$-алгебра, где $k$ — поле характеристики ноль. По аналогии можно определить аддитивный $K$-функтор [8, 12] как пространство примитивных элементов в алгебре $H_*(\mathfrak{gl}_\infty(A);k)$ гомологий алгебры Ли бесконечных финитных матриц над $A$ с коэффициентами в единичном модуле. Пусть $C_*(A)$ — стандартный комплекс алгебры Ли $\mathfrak{gl}_\infty(A)$.

Рассмотрим стандартную бимодульную резольвенту $R_*$ [9] $\ldots\to A\otimes\otimes A\otimes A\xrightarrow{\delta}A\otimes A\xrightarrow{\delta}A\to 0$ с дифференциалом $\delta(a_1\otimes\ldots\otimes a_k)=\sum\limits_{i=1}^{k-1}(-1)^i a_1\otimes\otimes\ldots\otimes a_ia_{i+1}\otimes\ldots\otimes a_k$. Определим отображение $\varphi\colon C_*(A)\to R_*$ следующим образом:

$$\varphi((m_1\otimes a_1)\wedge\ldots\wedge(m_k\otimes a_k))=\sum\operatorname{sgn}(i)\operatorname{tr}(m_{i_1}\ldots m_{i_k})a_{i_1}\otimes\ldots\otimes a_{i_k}.$$

Здесь $m_i$ — финитные матрицы над $k$ и суммирование по всем перестановкам $(i_1,\ldots,i_k)$. Легко показать, что $\varphi$ — гомоморфизм комплексов. Образ отображения $\varphi$ есть подкомплекс $\bar R_*\subset R_*$, состоящий из цепей, инвариантных относительно отображения $g\colon R_*\to R_*$,

$$g(a_1\otimes\ldots\otimes a_k)=(-1)^{k-1}a_k\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_{k-1}.$$

В работах [8, 12] доказано, что $\varphi$ индуцирует изоморфизм $K_i^+(A)$ с группой $i$-мерных гомологий комплекса $\bar R_*(A)$. Гомологии $K_*^+$ двойственны когомологиям, независимо введенным А. Конном [2].

Заметим, что $K_1^+(A)\simeq A/[A,A]$. Таким образом, пространство, двойственное к $K_1^+(A)$, есть пространство следов алгебры $A$, т. е. линейных функционалов, аннулирующих коммутаторы. Пространства же, сопряженные к $K_i^+(A)$, суть пространства высших следов. Именно таким образом они появляются в работе Конна [2].

В этой работе мы покажем, что $K_*^+(A)$ — высшие производные функторы функтора $K_1^+$, на категории алгебр. Не пользуясь техникой производных функторов от неабелевых объектов, этот результат можно сформулировать так.

Назовем резольвентой алгебры $A$ свободную градуированную алгебру $R = \bigoplus_{i=0}^{\infty} R_i$ с понижающим дифференциалом $\partial_i : R_i \to R_{i-1}$, отображающуюся на $A$; гомологии $H_i(R) = \ker \partial_i / im\partial_{i-1}$ равны нулю при $i > 0$; $H_0(R) \simeq A$. Дифференциал $\partial$ сохраняет пространство коммутаторов $[R, R]$ и, значит, индицирует дифференциал на $R/[R, R] = K_1^+(R)$. Оказывается, что гомологии комплекса $R/([R, R] + k)$ изоморфны пространству примитивных элементов в алгебре относительных гомологий

$$H_*(\mathfrak{gl}_\infty(A), \mathfrak{gl}_\infty(k); k).$$

Теперь мы перейдем к изложению содержания отдельных параграфов работы. Отметим, что конструкция характеристических классов (§ 2) независимо предложена М. Каруби [13]. В § 1 мы определяем относительные $K^+$-функторы $K_*^+(B, A)$ на категории стрелок $A \xrightarrow{f} B$ как производные функторы от $K_0^+(B, A) = B/([B, B] + \mathrm{imf})$ и изучаем их свойства. Абсолютный $K^+$-функтор есть $K^+$-функтор стрелки $A \to 0$. Имеется точная последовательность:

$$\ldots \to K_{i+1}^+(C, B) \to K_i^+(B, A) \to K_i^+(C, A) \to K_i^+(C, B) \to \ldots$$

стоящаяся по паре стрелок $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$. Отметим, что такое определение аддитивного $K$-функтора аналогично определению Джерстена и Суона (см. [6]) обычного $K$-функтора как производного от функтора $GL$.

Во втором параграфе мы строим характеры Чжэня $K_n(A) \to K_{n+2i+1}^+(A)$, $i \in \mathbf{Z}_+$. При $n = 1$ наша конструкция совпадает с конструкцией Конна ([2]).

Для любого $i \geqslant 2$ существует морфизм «периодичности Ботта»: $K_i^+(A) \to K_{i-2}^+(A)$. Поэтому группы $K_i^+$ с фиксированной четностью $i$ образуют обратную систему. Определим когомологии алгебры $A$ формулами

$$H^{\mathrm{odd}}(A) = \varprojlim K_{2i}^+(A) \oplus R^1 \varprojlim K_{2i+1}^+(A)$$

и

$$H^{\mathrm{ev}}(A) = \varprojlim K_{2i+1}^+(A) \oplus R^1 \varprojlim K_{2i}^+(A),$$

где $R_1 \varprojlim$ — первый производный от функтора $\varprojlim$. Пусть $A$ — коммутативная алгебра. В третьем параграфе мы покажем, что пространство $H^{\mathrm{odd}}(A) \oplus H^{\mathrm{ev}}(A)$ изоморфно кристальным когомологиям спектра $A$. Кроме того, для каждого $n$ мы строим морфизм

$$K_n^+(A) \to \bigoplus_N H^*(X_{\mathrm{cris}}, \mathcal{O}_X/J^N).$$

Если $R$ — свободная коммутативная дифференциальная градуированная алгебра, допускающая эпиморфный квазиизоморфизм $R \to A$, то через $\Omega_R^*$ обозначим комплекс де Рама $R$: $R \xrightarrow{d} \Omega_R^1 \to \ldots$ Тогда $K_*^+(A, k) \simeq H_*(\Omega_R^*/(k + d\Omega_R^*))$. Во многих случаях это позволяет вычислять функторы $K_*^+$. Если $\mathrm{Spec}\, A$ — неособое многообразие, мы получаем результат Конна [3].

Отметим кроме того, что, как обычно, дифференциальные алгебры можно во всех конструкциях заменить симплициальными. Это дает возможность

говорить о функторах $K^+$ как о производных функторах на категории $k$-алгебр.

Все объекты данной работы рассматриваются над полем характеристики нуль. Если рассматривается объект некоторой категории, мы без дальнейших оговорок считаем его (постоянным) симплициальным объектом, точно так же, алгебру $A$ над $k$ мы считаем, не напоминая об этом, дифференциальной градуированной ($A_0 = A$; $A_i = 0$, $i > 0$; $\partial = 0$).

Авторы благодарны А. А. Бейлинсону, И. М. Гельфанду, Ю. И. Манину и В. В. Шехтману за внимание к работе и ценные обсуждения.

## § 1. Относительные аддитивные $K$-функторы как производные функторы

Пусть $A \xrightarrow{f} B$ — гомоморфизм ассоциативных алгебр с единицей, $C(f)$ — категория диаграмм вида

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{i} & R \\ \Big| & & \Big\downarrow p, \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array} \qquad (*)$$

где $R$ — дифференциальная градуированная алгебра с понижающим дифференциалом, а отображение $p$ — сюрьективный квазиизоморфизм. Через $\mathcal{H}_n$ обозначим ковариантный функтор из категории $C(f)$ в категорию векторных пространств, сопоставляющий диаграмме вида $(*)$ пространство $n$-мерных гомологий $H_n(R/([R, R] + \operatorname{Im} i))$.

Определение. $K_n^+(B, A) = \varprojlim_{C(f)} \mathcal{H}_n$.

Группа $K_n^+(B, A)$ может быть реализована так. Рассмотрим какую-нибудь диаграмму вида $(*)$, такую, что $R$ свободна над $A$ [10]. В этом случае $R$ называется свободной резольвентой $B$ над $A$.

Теорема 1. *Имеется естественный изоморфизм*

$$K_n^+(B, A) \simeq H_n(R/([R, R] + \operatorname{Im} i)). \qquad (1)$$

Для доказательства теоремы 1, а также для дальнейшего изложения понадобится конструкция свободной резольвенты в важном частном случае $B = 0$.

Пусть $k[t]$ — кольцо многочленов одной переменной, на котором рассматриваются такая градуировка, что $\deg t^n = n$, и дифференцирование (нечетное), переводящее $t$ в единицу. Если $R$ — произвольная дифференциальная градуированная алгебра, то свободное произведение $R$ и $k[t]$ в категории дифференциальных градуированных алгебр мы обозначаем через $R\langle t\rangle$.

Ясно, что $A\langle t\rangle$ является свободной резольвентой алгебры 0, рассматриваемой как $A$-алгебра с тривиальным действием $A$. Действительно, оператор левого умножения на $t$ является стягивающей гомотопией в $A\langle t\rangle$. Легко видеть, что

$$(A\langle t\rangle/([A\langle t\rangle, A\langle t\rangle] + A))_n \simeq \overset{n}{\otimes} A/\operatorname{Im}(g - 1),$$

где

$$g\colon \overset{n}{\otimes} A \to \overset{n}{\otimes} A,\ g(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) = (-1)^{n-1} a_2 \otimes \ldots \otimes a_n \otimes a_1; \qquad (2)$$

дифференциал на $A\langle t\rangle/([A\langle t\rangle, A\langle t\rangle] + A)$, индуцируемый дифференциалом $A\langle t\rangle \to A\langle t\rangle$,

$$a_1 \otimes \ldots \otimes a_n \mapsto a_2 \otimes \ldots \otimes a_n a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i a_1 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_n. \qquad (3)$$

Положим по определению

$$K_n^+(A) = H_n(A\langle t\rangle/([A\langle t\rangle, A\langle t\rangle] + A)).$$

$K_*^+$ — аддитивный $K$-функтор, введенный в работах [2, 12]. Из теоремы 1 будет следовать, что $K_n^+(A) \simeq K_n^+(0, A)$.

Л е м м а 1. *Пусть $R$ — дифференциальная градуированная алгебра, $H(R)$ — алгебра ее гомологий. Имеются две спектральные последовательности, сходящиеся к одному и тому же пределу; их вторые члены равны соответственно*

$$'E_{ij}^2 = (K_i^+(H(R)))_j; \quad ''E_{ij}^2 = H_i(K_j^+(R)).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим комплекс $R\langle t\rangle/([R\langle t\rangle, R\langle t\rangle] + R)$ как бикомплекс с двумя дифференциалами, происходящими из $R$ и из $k[t]$; две спектральные последовательности, ассоциированные с ним, имеют вторые члены, указанные в лемме. Это легко видеть из того, что над полем характеристики нуль факторизация по образу $g - 1$, где $g$ — циклическая перестановка тензорных сомножителей, перестановочна с взятием гомологий.

З а м е ч а н и е. Во введении отмечалось, что конструкция аддитивного $K$-функтора допускает некоторую аналогию с конструкцией алгебраического $K$-функтора, данной Суоном и Джерстеном; в рамках этой аналогии утверждению леммы 1 отвечает свойство точности плюс-конструкции, приводимое в работе [1].

Из леммы 1 следует, что по диаграмме вида (*) из $C(f)$ строится спектральная последовательность

$$E_2^{ij} = H_i(K_j^+(R)) \Rightarrow K_{i+j}^+(B).$$

Л е м м а 2. *Пусть $R$ — алгебра, свободная над $A$. Тогда*

$$K_i^+(A) \xrightarrow{\sim} K_i^+(R), \quad i \geqslant 2; \quad K_1^+(R) \simeq R/[R, R].$$

Доказательство фактически содержится в [12].

Применяя лемму 2 к свободной резольвенте алгебры $B$ над $A$, получаем спектральную последовательность: $E_{i1}^2 = H_i(R/[R, R])$; $E_{0,j}^2 = K_j^+(A)$, $j \geqslant 2$; $E_{ij}^2 = 0$, $i > 0$, $j > 1$. Это значит, что отображение $R\langle t\rangle/(R + [R\langle t\rangle, R\langle t\rangle] + A\langle t\rangle) \xrightarrow{\varphi} (R/([R, R] + A))$ [1] является квазиизоморфизмом, где

$$\varphi\colon r_1tr_2t\ldots r_ntr_{n+1} \mapsto \begin{cases} r_1r_2 \operatorname{mod}([R, R] + A), & n = 1, \\ 0, & n > 1. \end{cases}$$

С другой стороны,

$$R\langle t\rangle/(R + [R\langle t\rangle, R\langle t\rangle] + A\langle t\rangle) \leftarrows$$
$$\leftarrows \operatorname{Cone}(A\langle t\rangle/[A\langle t\rangle, A\langle t\rangle] + A) \to R\langle t\rangle/([R\langle t\rangle, R\langle t\rangle] + R) \rightleftarrows$$
$$\simeq \operatorname{Cone}(A\langle t\rangle/([A\langle t\rangle, A\langle t\rangle] + A)) \to B\langle t\rangle/(B\langle t\rangle/([B\langle t\rangle, B\langle t\rangle] + B)).$$

Окончательно получаем

$$(R/([R, R] + A))[1] \leftarrows$$
$$\leftarrows \operatorname{Cone}(A\langle t\rangle/([A\langle t\rangle, A\langle t\rangle] + A) \to B\langle t\rangle/([B\langle t\rangle, B\langle t\rangle] + B))$$

в производной категории векторных пространств; если $R_1$, $R_2$ — две свободные резольвенты $B$ над $A$, $h: R_1 \to R_2$ — отображение, отвечающее морфизму в категории $C(f)$, то $\psi_{R_2}\circ\tilde{h}[1] = \psi_{R_1}$, где $\tilde{h}: R_1/([R_1, R_1] + A) \to R_2/([R_2, R_2] + A)$ — отображение, индуцированное $h$.

Отсюда видно, во-первых, что группы в правой части утверждения теоремы 1 канонически изоморфны при разных выборах свободных резольвент. Кроме того, категория диаграмм вида (*), где $R$ — свободная резольвента $B$ над $A$, есть начальная подкатегория в $C(f)$. Отсюда следует теорема 1. Кроме того, из изоморфизма $\varphi$ в комбинации с аксиомой октаэдра немедленно следует

Теорема 2. *Пусть* $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ — *последовательность гомоморфизмов алгебр с единицей. Имеет место точная последовательность* $\ldots \to K_i^+ \times$ $\times (C, B) \to K_{i-1}^+(B, A) \to K_{i-1}^+(C, A) \to K_{i-1}^+(C, B) \to \ldots \to K_0^+(C, B) \to 0.$

Нашей следующей задачей является описание некоторой стандартной фильтрации на группах $K_n^+(B, A)$, подобно тому, как это сделано в [3, 5, 12].

Если $A \to R$ — гомоморфизм алгебр, через $\Omega_A^1(R)$ мы обозначаем факторбимодуль свободного $R$-бимодуля с образующими $dr$, $r \in R$, по бимодулю, порожденному элементами

$$d(r_1, r_2) - (dr_1)r_2 - r_1\,dr_2,\ r_1, r_2 \in R;$$

$$d(ar) - a\,dr,\ d(ra) - dr\cdot a,\ r \in R,\ a \in A.$$

Пусть $R$ — свободная резольвента $B$ над $A$. Рассмотрим последовательность комплексов

$$\ldots \xrightarrow{\beta} R/([A, R] + A) \xrightarrow{\gamma} \Omega_A^1(R)/[R, \Omega_A^1(R)] \xrightarrow{\beta} R/([A, R] + A), \qquad (4)$$

где $\gamma(r) = dr$, $\beta(r_1\,dr_2) = [r_1, r_2]$.

Легко видеть, что отображения $\beta$ и $\gamma$ определены корректно. Например, $d(r_1r_2) - r_1\,dr_2 - (dr_1)\,r_2 \equiv d(r_1r_2) - r_1\,dr_2 - (-1)^{\deg r_1\cdot\deg r_2} r_2\,dr_1 \pmod{[R, \Omega_A^1(R)]}$; правая часть последнего сравнения переводится отображением $\gamma$ в $-[r_1, r_2] - (-1)^{\deg r_1\cdot\deg r_2}[r_2, r_1] = 0$.

Лемма 3. *Последовательность* (4) *точна во всех членах, кроме последнего.*

Доказательство. Пусть $\{t_\alpha\}$ — множество свободных образующих алгебры $R$ над $A$. Тогда класс смежности в $R/(A + [A, R])$ имеет канонического представителя вида $\sum a_1 t_{\alpha_1} a_2 t_{\alpha_2} \ldots a_n t_{\alpha_n}$; при этом $\beta$ и $\gamma$ действуют так:

$$\gamma\colon a_1t_{\alpha_1}\ldots a_nt_{\alpha_n} \mapsto \sum_{i=1}^{n} (-1)^{\sum_1^i \deg t_{\alpha_k}\cdot \sum_{i+1}^{n} \deg t_{\alpha_k}} a_{i+1}t_{\alpha_{i+1}}\ldots a_nt_{\alpha_n}a_1t_{\alpha_1}\ldots a_i\,dt_{\alpha_i};$$

$$\beta\colon a_1t_{\alpha_1}\ldots a_n\,dt_{\alpha_n} \mapsto a_1t_{\alpha_1}\ldots a_nt_{\alpha_n} - (-1)^{\deg t_{\alpha_n}\cdot\sum_1^{n-1}\deg t_{\alpha_k}} a_nt_{\alpha_n}a_1t_{\alpha_1}\ldots a_{n-1}t_{\alpha_{n-1}}.$$

Таким образом, оба рассматриваемых комплекса изоморфны тензорной алгебре градуированного пространства $T = \bigoplus_\alpha At_\alpha$. В этой реализации ограничения $\gamma$ и $\beta$ на $\overset{n}{\otimes} T$ есть просто операторы $\sum_{i=0}^{n-1} g^i$ и $1 - g$, где $g$ — циклическая перестановка сомножителей в $\overset{n}{\otimes} T$, взятая с естественным знаком.

Легко видеть, что $n$-мерная группа гомологий комплекса $R/([R, A] +$ $+ A)$ изоморфна $n$-мерной группе Хохшильда $H_n(A, A \to B)$, где $A \to B$ рассматривается как объект производной категории категории $A$-бимодулей. Группу $H_n(\Omega_A^1(R)/[R, \Omega_A^1(R)])$, изоморфную группе $H_n(\Omega_A^1(R) \underset{R\otimes R^0}{\otimes} B)$, обозначим через $\widetilde{H}_{n+1}(B, A; B)$. Комплекс $\Omega_A^1(R) \underset{R\otimes R^0}{\otimes} B$ есть очевидный некоммутативный аналог кокасательного комплекса [11]. Если, скажем,

$A = k$, то

$$\tilde{H}_{n+1}(B, k; B) \cong H_{n+1}(B, B),\ n > 1; \quad \tilde{H}_1(B, k; B) \cong \Omega^1_A(B)/[B, \Omega^1_A(B)].$$

Теорема 3. *Существует спектральная последовательность с первым членом:*

$$E^1_{ij} = H_j\,(A, A \to B) \quad \text{при } i \text{ четном},$$
$$E^1_{ij} = \tilde{H}_{j+1}\,(B, A; B) \quad \text{при } i \text{ нечетном},$$

*сходящаяся к* $K^+_{i+j}\,(B, A)$.

Это непосредственное следствие леммы 3.

Обозначим через $L_R$ бикомплекс, из которого эта последовательность получается. Так как он периодичен с периодом 2 по горизонтали, то имеется естественный гомоморфизм $L_R \to L_R\,[2]$, индуцирующий гомоморфизм переноса $b$: $K^+_i\,(B, A) \to K^+_{i-2}\,(B, A)$.

Теперь положим $L_{ij} = (R/([R, A] + A))_j$ при $i$ четном и $L_{ij} = (\Omega^1_A\,(R)/[R, \Omega^1_A\,(R)])_j$ при $i$ нечетном, $i \in \mathbf{Z}$, $j \in \mathbf{Z}_+$. Рассмотрим бикомплекс $L_{ij}$:

$$\ldots \to \Omega^1_A(R)/[R, \Omega^1_A(R)] \xrightarrow{-\beta} R/([A, R] + A) \xrightarrow{\gamma} \Omega^1_A(R)/[R, \Omega^1_A(R)] \to \ldots$$

обозначим этот бикомплекс через $L$. На $L$ имеется убывающая фильтрация: $\operatorname{filt}_n L = \bigoplus_{i \leqslant -n} L_{ij}$; пусть $\hat{L} = \varprojlim L/\operatorname{filt}_n L$. Ясно, что $H_i\,(\hat{L}) = H_{i+2}\,(\hat{L})$, $i \in \mathbf{Z}$; положим $H^{\mathrm{ev}}\,(B, A) = H_1\,(\hat{L})$ и $H^{\mathrm{odd}}\,(B, A) = H_0\,(\hat{L})$. Тогда

$$H^{\mathrm{odd}}(B, A) \cong \varprojlim K^+_{2i}(B, A) \oplus R^1 \varprojlim K^+_{2i+1}(B, A);$$
$$H^{\mathrm{ev}}(B, A) \cong \varprojlim K^+_{2i+1}(B, A) \oplus R^1 \varprojlim K^+_{2i}(B, A).$$

Кроме того, фильтрация filt определяет фильтрацию на $H^{\mathrm{odd}}\,(B, A)$ и $H^{\mathrm{ev}}\,(B, A)$. Положим

$$H^{2n}(B, A) = \operatorname{filt}_{2n} H^{\mathrm{ev}}(B, A)/\operatorname{filt}_{2n+2} H^{\mathrm{ev}}(B, A),$$
$$H^{2n+1}(B, A) = \operatorname{filt}_{2n+1} H^{\mathrm{odd}}(B, A)/\operatorname{filt}_{2n+3} H^{\mathrm{odd}}(B, A).$$

Положим $H^*\,(B, A) = H^{\mathrm{odd}}\,(B, A) \oplus H^{\mathrm{ev}}\,(B, A)$ и $H^*\,(A) = H^*\,(0, A)$. Конн показал в [3], что так введенные когомологии совпадают с дерамовскими, если $A$ — координатное кольцо неособого алгебраического многообразия. В § 3 мы вычисляем $H^*\,(A)$ для произвольных коммутативных колец.

## § 2. Когомологии групповой алгебры и характер Чженя алгебраического $K$-функтора

Если $n \in \mathbf{Z}$, то $H^{\varepsilon_n}$ будет означать $H^{\mathrm{odd}}$ при $n$ нечетном и $H^{\mathrm{ev}}$ при $n$ четном.

Теорема 4. *Пусть $G$ — группа, $k\,[G]$ — ее групповая алгебра. Существуют функториальные по $G$ гомоморфизмы*

$$c_n\colon H_n\,(G, k) \to \operatorname{filt}_n H^{\varepsilon_n}\,(k\,[G]) \tag{5}$$

*такие, что сквозные отображения*

$$H_n(G, k) \xrightarrow{c_n} \operatorname{filt}_n H^{\varepsilon_n}(k\,[G]) \to \operatorname{filt}_n H^{\varepsilon_n}(k\,[G])/\operatorname{filt}_{n+2} H^{\varepsilon_n}(k\,[G]) \tag{6}$$

*являются мономорфизмами.*

Следствие 1. *Существуют функториальные по $G$ гомоморфизмы*

$$c_{n,l}\colon H_n\,(G, k) \to K^+_{n+1+2l}\,(k\,[G]),\ l > 0,\ n > 0, \tag{7}$$

*такие, что* $b \circ c_{n,l} = c_{n,l-1}$.

Доказательство. Пусть сначала $A \xrightarrow{f} B$ — произвольный гомоморфизм алгебр; пусть $A \xrightarrow{i} R \xrightarrow{p} B$ — морфизмы симплициальных алгебр, такие, что $R$ — симплициальная свободная алгебра над $A$, $p$ — расслоение и слабая эквивалентность в категории симплициальных алгебр.

Лемма 4. *$K_*^+(B, A) \cong H_*(R/([R, R]+A)) \cong L_R$, где $L_R$ — бикомплекс*

$$\ldots \xrightarrow{-\beta_R} R/([R, A]+A) \xrightarrow{\gamma_R} \Omega_A^1(R)/[R, \Omega_A^1(R)] \xrightarrow{-\beta_R} R/([R, A]+A) \to 0.$$

Первый изоморфизм устанавливается стандартными методами с использованием эквивалентности Дольда — Пуппе [4] для алгебр над полем характеристики нуль; второй очевиден, так как строки бикомплекса $L_R$ имеют ненулевые гомологии только в размерности нуль.

Далее, отметим, что если $k \to A$ — расщепимый гомоморфизм алгебр, то $K_i^+(A) \cong K_{i-1}^+(A, k) \oplus K_i^+(k)$.

Пусть теперь $G$ — группа, $\overline{G}$ — свободная симплициальная группа, допускающая отображение $\overline{G} \xrightarrow{\pi} G$, где $\pi$ — расслоение и слабая эквивалентность в категории симплициальных групп. Тогда $k[\pi]\colon \Gamma \to k[G]$ — расслоение и слабая эквивалентность в категории симплициальных алгебр (через $\Gamma$ обозначается групповая алгебра группы $\overline{G}$).

Для дальнейшего нам понадобится следующее обозначение. Если $G$ — группа и $M$ — бимодуль над $G$, то $M$ превращается в левый $G$-модуль следующим образом: $g \cdot m = gmg^{-1}$. Этот модуль мы будем обозначать через $M_a$.

Для любой симплициальной алгебры $C$ через $I_C$ обозначим симплициальную абелеву группу $\ker(C \otimes C \to C)$, $\Phi(c_1 \otimes c_2) = c_1c_2$. Гомоморфизм $c_1(dc_2)c_3 \mapsto c_1 \otimes c_2c_3 - c_1c_2 \otimes c_3$ индуцирует изоморфизм $\Omega_k^1(C) \cong I_C$ [9].

Пусть теперь $\varepsilon$ — аугментация на $\Gamma$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\Gamma \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\psi"'] & k \arrow[d] \\
\Gamma \otimes \Gamma \arrow[r, "\Phi"] & \Gamma
\end{tikzcd},$$

где $\psi(g) = g^{-1} \otimes g$. Пусть $\bar{I}_G = \ker \varepsilon$; $\psi$ индуцирует отображение $\psi'\colon \bar{I}_G \to I_G$; далее, $\psi(gg_0) = g_0^{-1}\psi(g)\,g_0$; значит, $\psi$ определяет гомоморфизмы $\psi_0$ и $\psi_1$, делающие следующую диаграмму коммутативной

$$\begin{tikzcd}
\bar{I}_\Gamma \arrow[r] \arrow[d, "\psi_1"] & \Gamma \underset{\Gamma}{\otimes} \Gamma_a \arrow[r, equal] \arrow[d, "\psi_0"] & \Gamma \arrow[d] \\
I_\Gamma \arrow[r] & (\Gamma \otimes \Gamma) \underset{\Gamma\otimes\Gamma^\circ}{\otimes} \Gamma \arrow[r, equal] & \Gamma.
\end{tikzcd}$$

Рассмотрим теперь коммутативную диаграмму (8)

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & I_R \otimes_{R\otimes R^\circ} R \arrow[r, "\gamma_R"] \arrow[d, "\varphi_1"] & R/k \arrow[r, "\beta_R"] \arrow[d, "\varphi_0"] & I_R \otimes_{R\otimes R^\circ} R \arrow[r, "\gamma_R"] \arrow[d, "\varphi_1"] & R/k \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_0"] & 0 \\
& I_\Gamma \otimes_{\Gamma\otimes\Gamma^\circ} \Gamma \arrow[r] & \Gamma/k \arrow[r] & I_\Gamma \otimes_{\Gamma\otimes\Gamma^\circ} \Gamma \arrow[r] & \Gamma/k \arrow[r] & 0 \\
& \bar{I}_\Gamma \otimes_\Gamma \Gamma_a \arrow[r, "\bar{\gamma}_\Gamma"] \arrow[u, "\psi_1"] & \Gamma/k \arrow[r, "\bar{\beta}_\Gamma"] \arrow[u, "\mathrm{id}"] & \bar{I}_\Gamma \otimes_\Gamma \Gamma_a \arrow[r, "\bar{\gamma}_\Gamma"] \arrow[u, "\psi_1"] & \Gamma/k \arrow[r] \arrow[u, "\mathrm{id}"] & 0 \\
& \bar{I}_\Gamma \otimes_\Gamma k \arrow[r] \arrow[u, "\mathrm{id}_{\bar{I}_\Gamma} \otimes j"] & 0 \arrow[r] \arrow[u] & \bar{I}_\Gamma \otimes_\Gamma k \arrow[r] \arrow[u, "\mathrm{id}_{\bar{I}_\Gamma} \otimes j"] & 0 \arrow[r] \arrow[u] & 0,
\end{tikzcd}$$

где $\gamma_\Gamma\colon I_\Gamma \otimes_{\Gamma\otimes\Gamma^0} \Gamma \to (\Gamma\otimes\Gamma) \underset{\Gamma\otimes\Gamma^0}{\otimes} \Gamma$ — гомоморфизм, индуцированный вложением $I_\Gamma \to \Gamma\otimes\Gamma$; $\beta_\Gamma(g) = (1\otimes g - g\otimes 1)\otimes 1$; $\overline{\beta}_\Gamma(g) = (g-1)\otimes g$; $\varphi_0$, $\varphi_1$ — отображения, определяемые гомоморфизмом $\varphi\colon R\to\Gamma$ над $k[G]$; $j$ — модульное вложение $k$ в $\Gamma_a$.

Изменив знаки $\beta$, $\beta_\Gamma$ или $\overline{\beta}_\Gamma$ на противоположные, мы превращаем каждую строку диаграммы (8) в бикомплексы, обозначаемые через $L_R$, $L_\Gamma$, $\overline{L}_\Gamma$ и $L_\Gamma^0$. Вертикальные стрелки при этом индуцируют гомоморфизмы этих бикомплексов. Мы обозначим их через: $\varphi\colon L_R \to L_\Gamma$, $\psi\colon \overline{L}_\Gamma \to L_\Gamma$ и $i\colon L_\Gamma^0 \to \overline{L}_\Gamma$.

Лемма 5. 1) $\varphi$ — *квазиизоморфизм*; 2) $\overline{\psi}$ — *изоморфизм*; 3) $i$ — *вложение в качестве прямого слагаемого.*

Доказательство. Пункт 2) есть простое следствие стандартных фактов о гомологиях свободных групп, содержащихся в [9]. Действительно, для любой свободной группы $G$ с групповой алгеброй $\Gamma$ и множеством образующих $\Xi$ $\overline{I}_\Gamma$ есть свободный $\Gamma$-модуль с множеством образующих $\Xi$, а $I_\Gamma$ — свободный $\Gamma$-бимодуль с множеством образующих $\Xi$.

Для доказательства утверждения пункта 1) достаточно показать, что $\varphi_1$ — квазиизоморфизм. Для этого заметим, что $I_R \otimes_{R\otimes R^0} R$, $I_\Gamma \underset{\Gamma\otimes\Gamma^0}{\otimes} \Gamma$ слабо эквивалентны соответственно $I_R \otimes_{R\otimes R^0} k[G]$, $I_\Gamma \otimes_{\Gamma\otimes\Gamma^0} k[G]$;

$$H_i(I_R \otimes_{R\otimes R^0} k[G]) \cong H_{i+1}(k[G], k[G]),\quad i \geqslant 1.$$

Вспомним теперь, что для любого $G$-бимодуля $M$

$$H_i(I_R \otimes_{R\otimes R^0} M) \cong H_{i+1}(k[G], M) \cong H_{i+1}(G, M_a) \cong H_i(\overline{I}_G \otimes_\Gamma M_a),\quad i \geqslant 1.$$

Первый и третий изоморфизмы содержатся в [10], второй в [9]. Далее, имеется коммутативная диаграмма с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to H_1(k[G], M) & \to & H_0(I_R \otimes_{R\otimes R^0} M) & \to & k[G] \to 0 \\ \wr\downarrow & & \downarrow & & \| \\ 0 \to H_1(G, M_a) & \longrightarrow & H_0(\overline{I}_G \underset{\Gamma}{\otimes} M) & \longrightarrow & k[G] \to 0, \end{array}$$

и окончание доказательства пункта 1) следует из леммы о пяти гомоморфизмах.

Пункт 3) очевиден.

Теперь мы можем построить бикомплексы $\hat{L}_R$, $\hat{L}_\Gamma$, $\hat{\overline{L}}_\Gamma$ в точности так же, как это сделано в § 1. Ясно, что $\hat{\overline{L}}_\Gamma$ квазиизоморфен $\hat{L}_R$; кроме того, $i$ индуцирует вложение $\overline{I}_\Gamma \otimes_\Gamma k \to \hat{\overline{L}}_\Gamma$ [1]. Это и дает гомоморфизм $c_n\colon H_n(G, k) \to \to \mathrm{filt}_n H^{\varepsilon_n}(k[G])$. Кроме того, $i$ определяет вложения $\overline{I}_\Gamma \otimes_\Gamma k \to L_R[2l+1]$, $l \in \mathbf{Z}_+$, а следовательно — отображения $c_{n,l}$ из следствия 1. Остальные утверждения теоремы 4 и следствия I очевидны.

Теперь заметим, что для любого кольца $A$ вложение $A \xrightarrow{\eta} M_\infty(A)$ индуцирует изоморфизм $K_*^+(A) \cong K_*^+(M_\infty(A))$, где $M_\infty(A)$ — алгебра, полученная присоединением единицы из алгебры матриц $(a_{ij})$, $i, j \in \mathbf{Z}_+$, $a_{ij} \in A$, таких, что $a_{ij} = 0$ для всех, кроме, быть может, конечного числа пар $(i, j)$. Действительно, $\eta$ индуцирует изоморфизм уже на гомологиях Хохшильда, и поэтому спектральные последовательности из теоремы 3 становятся изоморфными с первого члена.

Пусть теперь $\mathrm{GL}_\infty(A)$ — общая линейная группа над $A$, $B\mathrm{GL}_\infty(A)^+$ — квилленизация ее классифицирующего пространства [6], $K_n(A)$ — квилленовские алгебраические $K$-функторы. Сквозное отображение

$$K_n(A) \cong \pi_n(B\mathrm{GL}_\infty(A)^+) \xrightarrow{\rho} H_n(\mathrm{GL}_\infty(A), k) \xrightarrow{c_n}$$
$$\xrightarrow{c_n} H^{\varepsilon_n}(k[\mathrm{GL}_\infty(A)]) \xrightarrow{\nu_*} H^{\varepsilon_n}(M_\infty(A)) \cong H^{\varepsilon_n}(A)$$

назовем характером Чженя и обозначим $\mathrm{ch}_n$. Здесь $\rho$ — гомоморфизм Гуревича, $\nu_*$ индуцировано естественным отображением $\nu$: $k\,[\mathrm{GL}_\infty(A)] \to M_\infty(A)$. Очевидным образом определяется также характер $\mathrm{ch}_{n,\,l}$: $K_n(A) \to \overset{+}{K}_{n+2l+1}(A)$, $l \geqslant 0$; $b \circ \mathrm{ch}_{n,\,l} = \mathrm{ch}_{n,\,l-1}$.

Замечание. Конечно, $H^{\varepsilon_n}(A) \cong \bigoplus_{i \equiv n(2)} H^i(A)$, так как $\mathrm{char}\, k = 0$; тем не менее этот изоморфизм не функториален. Следовательно, мы можем говорить, скажем, о функториальном отображении $K_n(A) \to H^n(A)$, но не об отображении $K_n(A) \to H^{n+2}(A)$. Тем не менее в случае, когда $A$ коммутативно, такая возможность представляется, так как тогда имеется специальное отождествление $H^{\varepsilon_n}(A) \cong \bigoplus_{i \equiv n(2)} H^i(A)$ (см. § 3).

## § 3. Когомологии коммутативных колец

Пусть $V$ — аффинное алгебраическое многообразие. Если $i$ — какое-нибудь замкнутое вложение $V$ в неособое аффинное многообразие $Y$, то через $\Omega_Y^*$ мы обозначаем комплекс де Рама $Y$, через $I$ — идеал в $k\,[Y]$, отвечающий многообразию $V$, а через $F$ — фильтрацию Ходжа на $\Omega_Y^*$

$$F_i\Omega_Y^j = I^{i-j}\Omega_Y^j, \quad i \geqslant j; \quad F_i\Omega_Y^j = \Omega_Y^j, \quad i < j.$$

Когомологии комплекса $\Omega_Y^*/F_n\Omega_Y^*$ (как известно, они не зависят от выбора $Y$ и способа вложения) будем обозначать через $H_n^*(V)$, а когомологии комплекса $\varprojlim_n \Omega_Y^*/F_n\Omega_Y^*$ через $H_{\mathrm{cris}}(V)$ [7].

Теорема 5. *Пусть $A$ — координатное кольцо аффинного алгебраического многобразия $V$.*

а) *Существует естественное отображение*

$$\theta\colon\ K_i^+(A) \to \bigoplus_{i=2n-1-j} H_n^j(V), \quad i \geqslant 1.$$

*Если $V$ — локально полное пересечение, то $\theta$ является изоморфизмом.*

б) $\theta$ *индуцирует изоморфизм*

$$H^i(A) \cong H_{\mathrm{cris}}^i(V).$$

Доказательство. Как известно из [10], существуют свободная кососкоммутативная дифференциальная градуированная алгебра $P$ и эпиморфизм $\pi$: $P \to A$, индуцирующий изоморфизм в гомологиях. Применим к алгебре $P$ лемму 1. Для этого воспользуемся следующим утверждением, фактически содержащимся в [3] и [5].

Лемма 6. *Пусть $P$ — свободная градуированная кососкоммутативная алгебра. Тогда*

$$K_j^+(P) \cong \Omega_P^{j-1}/d\Omega_P^{j-2} \oplus K_j^+(k), \quad j > 0. \tag{9}$$

Из леммы 6 следует существование спектральной последовательности

$$E_{ij}^2 = H_i(\Omega_P^{j-1}/d\Omega_P^{j-2} \oplus K_j^+(k)) \Rightarrow K_{i+j}^+(A). \tag{10}$$

Лемма 10. *Спектральная последовательность* (10) *вырождается во втором члене. Следовательно,*

$$K_m^+(A) \cong \bigoplus_{i+j=m} H_i(\Omega_P^{j-1}/d\Omega_P^{j-2} \oplus K_j^+(k)), \quad m > 0. \tag{11}$$

Доказательство. Следующий треугольник отмеченный: $\to k\langle t\rangle/[k\langle t\rangle,\ k\langle t\rangle] \to P\langle t\rangle/[P\langle t\rangle,\ P\langle t\rangle] \xrightarrow{\alpha} \oplus\,(\Omega_P^l/d\Omega_P^{l-1})\ [l]$, $\alpha$: $tr_0t\ldots$ $\ldots tr_l \mapsto r_0\,dr_1\ldots dr_l$ (см. [3 и 5]).

Если $\Omega_P^*$ — комплекс де Рама для $P$, то положим

$$G^i(\Omega_P^*) = \oplus (\Omega_P^j)_{-i+j}, \quad j \geqslant 0, \quad i \in \mathbf{Z};$$

пусть $\delta$: $(\Omega_P^*)_l \to (\Omega_P^*)_{l-1}$; ясно, что дифференциал $(-1)^j d + \delta$ переводит $G^i(\Omega_P^*)$ в $G^{i+1}(\Omega_P^*)$; кроме того, $G^i(\Omega_P^*)\, G^j(\Omega_P^*) \subseteq G^{i+j}(\Omega_P^*)$. Заметим, что комплекс $G^*(\Omega_P^*)$ занумерован целыми числами. Тем не менее он полуограничен: если $i > \dim P_0$, то $G^i(\Omega_P^*) = 0$ (в силу нётеровости $AP$ может быть выбрано так, что $\dim P_0 < \infty$).

Обозначим алгебру $P_0$ через $B$. Положим также $\mathcal{J} = \ker(\Omega_P^* \to P)$, $\mathcal{Y} = \ker(\Omega_P^* \to A)$; $\mathcal{J}$ и $\mathcal{Y}$ — дифференциальные идеалы в алгебре $G^*(\Omega_P^*)$ с дифференцированием $(-1)^j d + \delta$, которую мы в дальнейшем будем обозначать просто через $\Omega^*$. Пусть $I = \ker(B \to \mathrm{A})$.

Формулу (10) можно переписать следующим образом:

$$K_j^+(A) \cong \bigoplus_n H^{2n+1-j}(\Omega^*/\mathcal{J}^{n+1}); \tag{12}$$

таким образом естественная проекция $\Omega^*(\mathcal{J}^n) \to \Omega^*(\mathcal{J}^{n-1})$ индуцирует отображение $K_j^+(A) \to K_{j-2}^+(A)$. Можно показать, что оно совпадает с гомоморфизмом переноса $b$ и что в терминах разложения (12)

$$H^*(A) \simeq H^*(\varprojlim_n \Omega/\mathcal{J}^n). \tag{12'}$$

Мы не будем доказывать этих утверждений; заметим лишь, что гомологии $K_*^+$ вместе с фильтрацией $\mathrm{filt}_n$ и гомоморфизмом переноса $b$ можно определять с помощью конструкции, подобной только что изложенной, где вместо $P$ берется свободная некоммутативная резольвента $A$ над $k$, а вместо $\Omega_P^*$ — ее универсальная дифференциальная алгебра [3]. При этом (12) и (12′) становятся очевидными.

Заметим далее, что $\Omega^*/\mathcal{Y}^m \cong \Omega_B^*/F^m\Omega_B^*$; поэтому естественная проекция $\Omega^*/\mathcal{J}^n \to \Omega^*/\mathcal{Y}^n$ определяет отображение $\theta$ из пункта а) теоремы 5. Теперь утверждение пункта а) в полном объеме легко следует из тривиальности гомологий Харрисона—Квиллена локально полных пересечений [11].

Для доказательства пункта б) теоремы 5 осталось установить, что $\varprojlim_n \Omega^*/\mathcal{J}^n \to \varprojlim_m \Omega^*/\mathcal{Y}^m$ — квазиизоморфизм.

Сначала отметим, что $\varprojlim_m \Omega^*/(\mathcal{Y}^m + \mathcal{J}^n) = (\Omega^*/\mathcal{J}^n)^\wedge$, где пополнение в правой части означает обычное пополнение $B$-модуля в $I$-адической топологии. Но комплекс $\Omega^*/\mathcal{J}^n$ состоит из свободных $B$-модулей конечного ранга, и поэтому

$$H_*((\Omega^k/\mathcal{J}^n)^\wedge) \cong H_*((\Omega^k/\mathcal{J}^n) \otimes_B \widehat{B}) \cong (H_*(\Omega/\mathcal{J}^n))^\wedge;$$

далее, легко видеть, что

$$I^n H_*(\Omega^k/\mathcal{J}^n) = 0, \quad k > 0.$$

Это следует из того, что

$$IH_*(\Omega_P^k) \cong IH_*(\Lambda^k \mathbf{L}_A) \cong 0,$$

где $\mathbf{L}$ означает кокасательный комплекс кольца $A$ [11]. Отсюда вытекает, что

$$H^*(\varprojlim_m \Omega^*/(\mathcal{Y}^m + \mathcal{J}^n)) \cong H^*(\Omega^*/\mathcal{J}^n), \ \forall n. \tag{13}$$

Заметим также, что проекции

$$\varprojlim_m \Omega^*/(\mathcal{J}^{n+1}+\mathcal{Y}^m)\to\varprojlim_m \Omega^*(\mathcal{J}^n+\mathcal{Y}^m)$$

по-прежнему эпиморфизмы (они суть не что иное как естественные отображения $\hat{\Omega}^*/\widehat{\mathcal{J}^{n+1}}\to\hat{\Omega}^*/\hat{\mathcal{J}}^n$). Рассмотрим теперь комплекс $\varprojlim_n\varprojlim_m \Omega^*/(\mathcal{J}^n+\mathcal{Y}^m)$.

С одной стороны,

$$H^*(\varprojlim_n\varprojlim_m \Omega^*/(\mathcal{J}^n+\mathcal{Y}^m))=H^*(\varprojlim_m\varprojlim_n \Omega^*(\mathcal{J}^n+\mathcal{Y}^m))=H^*(\Omega^*/\mathcal{Y}^m);$$

с другой стороны, существует спектральная последовательность

$$E_2^{ij}=R^i\varprojlim_n(H^j\varprojlim_m(\Omega^*/(\mathcal{J}^n+\mathcal{Y}^m))\Rightarrow H^{i+j}(\varprojlim_n\varprojlim_m \Omega^*/(\mathcal{J}^n+\mathcal{Y}^m)),$$

$i=0, 1$; $j\leqslant \dim B$. Очевидно, что эта спектральная последовательность вырождается во втором члене, и мы получаем:

$$H^n_{\mathrm{cris}}(V)=H^n(\varprojlim \Omega^*/\mathcal{Y}^m)\simeq\varprojlim H^j(\Omega^*/\mathcal{J}^n)\oplus R'\varprojlim H^{j-1}(\Omega^*/\mathcal{J}^n).$$

Теорема 5 доказана.

## ЦИТИРУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Anderson D. W.* Relationship among $K$-theories.— Lect. Notes Math. 1973, v. 341, p. 57—72.
2. *Connes A.* Non-commutative differential geometry, Part I. Preprint I. H. E. S., Paris, 1982, oct.
3. *Connes A.* Non-commutative differential geometry, Part II. Preprint I. H. E. S., Paris, 1983, mars.
4. *Dold A., Puppe D.* Homologie nicht-additiven Funktoren.— Ann. Inst. Fourier, 1961, v. 11, p. 201—312.
5. *Фейгин Б. Л., Цыган Б. Л.* Когомологии алгебры Ли обобщенно-якобиевых матриц.— Функцион. анализ и его прил. 1983, т. 17, вып. 2, с. 86—87.
6. *Gersten S. M.* Higher $K$-theory of rings.— Lect. Notes Math., 1973, v. 341, p. 3—42.
7. *Grothendieck A.* Crystals and the de Rham cohomology of schemes. In: Dix Exposés sur la Cohomologie de Schemas. Amsterdam: North Holland, 1968.
8. *Loday J. L., Quillen D. G.* Homologie cyclique et homologie de l'algebre de Lie des matrices.— C. R. Acad. Sci. Paris, v. 296, p. 295—297.
9. *Маклейн С.* Гомологии. М.: Мир, 1966.
10. *Quillen D. G.* Homotopical Algebra.— Lect. Notes Math., 1967, v. 43.
11. *Quillen D. G.* On the homologies of commutative rings. Mimeographed Notes M. I. T., 1970.
12. *Цыган Б. Л.* Гомологии матричных алгебр Ли над кольцами и гомологии Хохшильда.— УМН, 1983, т. 38, вып. 2, с. 225—226.
13. *Karoubi M.* Homologie cyclique et $K$-theorie algebraique I et II.— C. R. A. S. Paris, 1983, Ser. 1, t. 297, p. 447—450; 513—516.
14. *Karoubi M.* Homologie cyclique et régulateurs en $K$-theorie algebrique.— C. R. A. S. Paris, 1983, Sér. 1, t. 297, p. 557—560.
15. *Karoubi M.* Homologie cyclique de groupes et algebras.— C. R. A. S. Paris, 1983, Sér. 1, t. 297, p. 381—384.

Институт физики твердого тела
АН СССР
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило в редакцию
27 октября 1983 г.