Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

G. Z. Dzhanelidze, The fundamental theorem of Galois theory, *Mat. Sb. (N.S.)*, 1988, Volume 136(178), Number 3(7), 361–376

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
http://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 95.216.226.236
November 9, 2019, 02:55:32

УДК 512.58+512.7+512.66

Фундаментальная теорема теории Галуа

Джанелидзе Г. З.

§ 0. Введение

Под фундаментальной теоремой теории Галуа подразумевается ее более категорная форма, которая, например, в случае конечных расширений полей выглядела бы так:

0.1. Пусть K/k — конечное расширение Галуа с группой Галуа G, тогда категория накрытий поля k, распадающихся над K, антиэквивалентна категории конечных G-множеств (здесь накрытия, распадающиеся над K — это просто конечные произведения подрасширений расширения K/k).

Наряду с 0.1 хорошо известно множество его аналогов и обобщений для различного рода накрытий в различных категориях. Сюда относится и классическая теория накрытий «хороших» пространств, восходящая к А. Пуанкаре, и более современные результаты, упомянутые, например, в работе М. Барра [1]; отметим в частности теорию этальных накрытий А. Гротендика [2] и теорему Э. Мэгида (имеется ввиду основная теорема IV.31 из [3]), играющую фундаментальную роль в теории Галуа коммутативных колец с бесконечным числом идемпотентов.

Оказалось, что все подобные результаты являются весьма частными случаями чисто теоретико-категорного утверждения — назовем его общей формой фундаментальной теоремы теории Галуа,— имеющего следующий вид:

0.2. Пусть I: $C \to X$ — функтор и c — I-нормальный объект в C, тогда категория $\mathrm{Spl}_I(c)$, распадающихся над c относительно I объектов категории C, эквивалентна категории $X^{\mathrm{gal}_I(c)}$, где $\mathrm{gal}_I(c)$ — группоид Галуа объекта c (необходимые определения и более точная формулировка приведены в § 1).

Целью настоящей статьи является доказательство этой теоремы и разбор двух примеров, исходя из чего она разделена на три параграфа. В первом примере (§ 2) в качестве C взята категория, двойственная категории коммутативных R-алгебр с единицей (R — произвольное коммутативное кольцо с единицей), в качестве X — категория проконечных топологических пространств, а I сопоставляет R-алгебре ее булев спектр; в этом случае I-нормальные объекты в C — это в точности нормальные квазисепарабельные расширения кольца R в смысле теории Галуа коммутативных колец. Во втором примере (§ 3) $C = (\mathrm{Var}\ (\Omega,\ \Phi) \downarrow G)$, где $\mathrm{Var}\ (\Omega,\ \Phi)$ — многообразие мультиоператорных групп, X — подмногообразие в $\mathrm{Var}\ (\Omega,\ \Phi)$, I индуцировано левым сопряженным к функтору вложения и I-нормальные объекты в C — это в точности R-центральные расширения Ω-группы G в смысле А. Фрелиха [4], где R определяется из условия $I((A,\ \alpha)) = A/R(A)$ в очевидных обозначениях; этот пример объясняет

аналогию между теорией накрытий и теорией центральных расширений групп.

Отметим:

1. Ситуацию 0.1 можно рассматривать как частный случай нашего первого примера, т. е. ситуации, рассмотренной во втором параграфе, поэтому мы не останавливаемся на 0.1 подробно, хотя с исторической точки зрения это безусловно наиболее важный пример для 0.2. Вторая по исторической важности ситуация — это, конечно, накрытия топологических пространств — кратко рассмотрена в [5]. Вообще представляется интересным более подробное исследование всех перечисленных и нахождение новых примеров.

2. Теорема 0.2 возникла при попытке теоретико-категорного осмысления теоремы Э. Мэгида, и первоначально рассматривалась просто как ее теоретико-категорная переформулировка — это видно из [6], где анонсированы основные результаты §§ 1 и 2.

3. Если в 0.2 категория X есть категория проконечных топологических пространств и c «связно», т. е. $I(c)$ одноэлементно (или даже без этого последнего), то (в некотором смысле) функтор I исчезает, ибо он представим. Это дает другой подход, более близкий к подходу А. Гротендика к теории этальных накрытий. Можно считать, что этот другой подход, с привлечением теории топосов, которая делает его весьма естественным, развит в работах М. Барра [1], [7]; тем самым можно считать, что § 1 обобщает некоторые результаты М. Барра.

4. Первый параграф играет не только вспомогательную роль. В частности, в нем имеются (не использованные в дальнейшем) обозначения, которые станут необходимыми при более глубоком исследовании примеров, чем это сделано в §§ 2 и 3, где просто расшифрованы определения I-нормального и распадающегося над c относительно I объекта из § 1 применительно к рассматриваемым в этих параграфах частным случаям.

5. Во избежание сильного увеличения объема статьи опущены стандартные с точки зрения теории категорий (§ 1) или с точки зрения теории Галуа коммутативных колец (§ 2) фрагменты доказательств; в то же время во избежание недоразумений некоторые совсем простые детали разъяснены подробно, особенно в § 3. Необходимые сведения из теории категорий имеются в IV и VI главах книги С. Маклейна [8] (за исключением простейших понятий теории внутренних категорий, которые изложены, например, в соответствующей главе книги П. Джонстоуна [9]), из теории Галуа коммутативных колец — в книгах Э. Мэгида [3] и С. Чейза — М. Свидлера [10].

6. Мы называем (внутренним) функтором то, что в [9] названо внутренней диаграммой. Внутренние группоиды рассматриваем как частные случаи внутренних категорий, т. е. мы не выделяем морфизм «обращения», а требуем его существование.

7. В статье принята единая нумерация для теорем, лемм, следствий, замечаний и примеров; в конце каждого из них (после доказательства, если таковое имеется) становится знак □.

§ 1. Общая ситуация

Пусть X — категория с конечными пределами и x — объект в X. Пренебрегающий функтор из $(X\downarrow x)$ в X обозначим через U^x; функтор U^x морфизму α: $(y, \varphi)\to(z, \psi)$ сопоставляет морфизм α: $y\to z$, и мы будем пи-

сать просто $U^x(\alpha)=\alpha$. Кроме того, мы будем пользоваться стандартными обозначениями, связанными с декартовыми квадратами и произведениями в X и в $(X\downarrow x)$, например, $U^x((y,\varphi)\times(z,\psi))=y\times_x z$ — при этом из контекста всегда будет ясно, какие φ и ψ подразумеваются в $y+_x z$.

Пусть $g=(g_0, g_1, \delta_g, \rho_g, \eta_g, \mu_g)$ — (внутренняя) категория в X; здесь также обозначения стандартны: g_0 — «объект объектов», g_1 — «объект морфизмов», δ_g — «область определения», ρ_g — «область значений», η_g — единица и μ_g — умножение. Функторы $g\to X$ будет записывать в виде $f=(f_0, \pi_f, \xi_f)$, где ξ_f: $g_1\times_{g_0}f_0\to f_0$ — действие. Пренебрегающий функтор из категории X^g в категорию $(X\downarrow g_0)$ является монадическим функтором, и возникающая здесь монада имеет весьма простой вид, допускающий нижеследующее аксиоматическое описание.

Определение 1.1. Пусть (T, η, μ) — монада над $(X\downarrow x)$ и τ: $U^xT\to U^x$ — функторный морфизм. Будем говорить, что монада (T, η, μ) расщепляется (морфизмом τ), если выполнены следующие условия:

(a) для любого объекта (y, φ) категории $(X\downarrow x)$ диаграмма

$$\begin{tikzcd}
U^xT((y,\varphi)) \arrow[r, "\tau_{(y,\varphi)}"] \arrow[d, "T(\varphi)"'] & y \arrow[d, "\varphi"] \\
U^xT((x,1_x)) \arrow[r, "\tau_{(x,1_x)}"'] & x
\end{tikzcd}$$

является декартовым квадратом;

(b) имеют место равенства $\tau(U^x\mu)=\tau(\tau T)$ и $\tau(U^x\eta)=1_{U^x}$. □

Теорема 1.2. *Если монада (T, η, μ) расщепляется морфизмом τ: $U^xT\to U^x$, то существует (единственная) внутренняя категория $g=(g_0, g_1, \delta_g, \rho_g, \eta_g, \mu_g)$ со следующими свойствами:*

(a) $g_0=x$;

(b) $(g_1, \rho_g)=T((x, 1_x))$;

(c) $\delta_g=\tau_{(x,1_x)}$;

(d) $\eta_g=\eta_{(x,1_x)}$;

(e) *коммутативна диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
g_1\times_{g_0}g_1 \arrow[r, "\mu_g"] & g_1 \arrow[d, equal] \\
U^xT^2((x,1_x)) \arrow[u, "\langle T(\rho_g),\tau_{(g_1,\rho_g)}\rangle", "\approx"'] \arrow[r, "\mu_{(x,1_x)}"'] & U^xT((x,1_x)),
\end{tikzcd}$$

где левая вертикальная стрелка определена корректно и является изоморфизмом в силу условий (b) *и* 1.1 (a);

(f) *пусть (T^g, η^g, μ^g) — монада над $(X\downarrow g_0)=(X\downarrow x)$, порожденная категорией g. Тогда морфизмы*

$$\langle T(\varphi), \tau_{(y,\varphi)}\rangle:\ U^xT((y,\varphi))\to g_1\times_{g_0}y=U^xT^g((y,\varphi)),$$

для всех (y,φ), определяют изоморфизм монад $(T,\eta,\mu)=(T^g,\eta^g,\mu^g)$.

Доказательство получается непосредственным, хотя и громоздким вычислением — достаточно в качестве g взять систему $(g_0, g_1, \delta_g, \rho_g, \eta_g, \mu_g)$, однозначно определенную из условий (a) — (e). □

Следствие 1.3. *В условиях теоремы 1.2 категория алгебр $(X\downarrow x)^{(T,\eta,\mu)}$ канонически изоморфна категории X^g; при этом изоморфизме (T, η, μ)-алгебра $((y,\varphi), \xi)$ и соответствующий ей функтор f: $g\to X$ связаны равенствами $(f_0, \pi_f)=(y,\varphi)$ и $\xi_f\langle T(\varphi), \tau_{(y,\varphi)}\rangle=\xi$.* □

На самом деле нам понадобится не само аксиоматическое описание монад, порожденных внутренними категориями, которое дается услови-

ем (f) теоремы 1.2, а лишь следствие 1.3, дающее интерпретацию категории $(X{\downarrow}x)^{(T,\eta,\mu)}$ в виде X^g, что явится одним из звеньев доказательства общей формы фундаментальной теоремы теории Галуа. Поэтому мы не будем более подробно останавливаться на связи между внутренними категориями и порожденными ими монадами, а вместо этого перейдем к описанию ситуации, в которой будет сформулирована «фундаментальная теорема».

Пусть C — категория с конечными произведениями и c — объект в C. Правый сопряженный пренебрегающего функтора U^c: $(C{\downarrow}c)\to C$ обозначим через P^c; можно считать, что P^c задается правилом $a\mapsto(c\times a, \pi_1)$, где π_1 — проекция на первый сомножитель. Пусть X — то же, что и выше, и I: $C\to X$ — функтор. Индуцированный функтор из $(C{\downarrow}c)$ в $(X{\downarrow}I(c))$ обозначим через I^c, а его правый сопряженный, если таковой существует,— через H^c; единицу и коединицу сопряжения обозначим через η^c и ε^c соответственно.

Определение 1.4. (a) Объект c назовем I-допустимым, если функтор I^c обладает правым сопряженным H^c и коединица ε^c является изоморфизмом.

(b) Будем говорить, что объект a категории C распадается над c относительно I, если морфизм $\eta^c_{P^c(a)}$: $P^c(a)\to H^cI^cP^c(a)$ является изоморфизмом; соответствующую полную подкатегорию в C обозначим через $\mathrm{Spl}_I(c)$. □

Пример 1.5. Пусть t — терминальный объект в C. Объект (a, α) категории $(C{\downarrow}t)$ вполне определяется объектом a категории C, и последний тогда и только тогда распадается над t относительно I, когда морфизм $\eta^t_{(a,\alpha)}$: $(a, \alpha)\to H^tI^t((a, \alpha))$ является изоморфизмом. В частности, в случае, когда t I-допустимо, функтор I индуцирует эквивалентность категорий $\mathrm{Spl}_I(t)\sim(X{\downarrow}I(t))$. □

Поскольку функтор I^c можно отождествить с функтором

$$(I^c)^{(c,1_c)}: ((c\downarrow c)\downarrow(c, 1_c))\to((X\downarrow I(c))\downarrow I^c((c, 1_c))),$$

а объект $(c, 1_c)$ является терминальным объектом категории $(C{\downarrow}c)$, получаем

Лемма 1.6. (a) *Объект a категории C тогда и только тогда распадается над c относительно I, когда объект $P^c(a)$ категории* $(C{\downarrow}c)$ *распадается над* $(c, 1_c)$ *относительно* I^c;

(b) *Объект c тогда и только тогда I-допустим, когда объект* $(c, 1_c)$ *I^c-допустим*;

(c) *Если объект c I-допустим, то функтор I^c индуцирует эквивалентность категорий* $\mathrm{Spl}_{I^c}((c, 1_c))\sim(X{\downarrow}I(c))$. □

Эта лемма позволяет обобщить утверждение об эквивалентности категорий из примера 2.2 с терминального t на произвольное c. Обобщение состоит в том, что категорию $\mathrm{Spl}_I(c)$ удается представить в виде категории алгебр над расщепляющейся (в смысле определения 1.1) монадой над $(X{\downarrow}I(c))$ (см. теорему 1.8 и следствие 1.9 ниже), что явится следующим звеном «фундаментальной теоремы». Необходимые при этом ограничения на объект c приведены в нижеследующем определении.

Определение 1.7. Объект c назовем I-нормальным, если выполнены следующие условия:

(a) объект c I-допустим;

(b) функтор P^c является монадическим функтором;

(c) объект $U^cH^c((y, \varphi))$ распадается над c относительно I для любого объекта (y, φ) категории $(X{\downarrow}I(c))$. □

Теорема 1.8. *Пусть c — I-нормальный объект. Тогда существует диаграмма*

$$\begin{array}{ccccc} C & \underset{P^c}{\overset{U^c}{\leftrightarrows}} & (C \uparrow c) & \underset{H^c}{\overset{I^c}{\leftrightarrows}} & (X \downarrow I(c)) \\ {\scriptstyle U}\uparrow & & {\scriptstyle U}\uparrow & & \| \\ \mathrm{Spl}_I(c) & \underset{\check P^c}{\overset{\check U^c}{\leftrightarrows}} & \mathrm{Spl}_{I^c}((c, 1_c)) & \underset{\check H^c}{\overset{\check I^c}{\leftrightarrows}} & (X \downarrow I(c)), \end{array}$$

в которой:

(a) *функторы $\check U^c$, $\check P^c$, $\check I^c$ и $\check H^c$ получаются ограничением функторов U^c, P^c, I^c и H^c соответственно;*

(b) *функтор $\check P^c$ является монадическим функтором;*

(c) *четверка $(\check I^c, \check H^c, \check\eta^c, \check\varepsilon^c)$, в которой $\check\eta^c$ и $\check\varepsilon^c$ индуцированы η^c и ε^c соответственно, является сопряженной эквивалентностью между $\mathrm{Spl}_{I^c}((c, 1_c))$ и $(X{\downarrow}I(c))$.* □

Отметим, что 1.8 (c) конечно лишь повторяет 1.6 (c) и приведено по очевидным техническим причинам.

Нам понадобятся еще несколько обозначений.

Пусть для I-нормального c

$$\vartheta^c\colon\ 1_{\mathrm{Spl}_{I^c}((c,1_c))} \to \check P^c \check U^c,\quad \zeta^c\colon\ \check U^c \check P^c \to 1_{\mathrm{Spl}_I(c)}$$

— единица и коединица соответственно, т. е.

$$\vartheta^c_{(a,\alpha)} = \langle \alpha, 1_a\rangle\colon\ (a, \alpha) \to (c\times a, \pi_1),\quad \zeta^c{}_a = \pi_2\colon\ c\times a \to a$$

в очевидных обозначениях, и пусть $\bar\vartheta^c$, $\bar\zeta^c$ обозначают соответственно композиции

$$1_{(X\downarrow I(c))} \xrightarrow{(\check\varepsilon^c)^{-1}} \check I^c \check H^c \xrightarrow{\check I^c\vartheta^c\check H^c} \check I^c \check P^c \check U^c \check H^c,$$
$$\check U^c \check H^c \check I^c \check P^c \xrightarrow{\check U^c(\check\eta^c)^{-1}\check P^c} \check U^c \check P^c \xrightarrow{\zeta^c} 1_{\mathrm{Spl}_I(c)};$$

кроме того, положим $\bar P^c = \check I^c \check P^c$ и $\bar U^c = \check U^c \check H^c$.

Из теоремы 1.8 получаем

Следствие 1.9. *Пусть c — I-нормальный объект. Четверка*

$$(\bar U^c, \bar P^c, \bar\vartheta^c, \bar\zeta^c)\colon\ (X \downarrow I(c)) \to \mathrm{Spl}_I(c)$$

является сопряжением, в котором функтор $\bar P^c$ является монадическим функтором. □

Возникающую отсюда монаду обозначим через $(\bar T^c, \bar\vartheta^c, \bar\nu^c)$. Допуская некоторую вольность обозначений, для произвольного объекта (y, φ) категории $(X{\downarrow}I(c))$ положим $H^c((y, \varphi)) = (\tilde y, \tilde\varphi)$, и проекции, участвующие в диаграммах произведений $c\times c$ и $c\times\tilde y$, обозначим через π_1, π_2 и π_1', π_2' соответственно. После этого будем иметь

$$\bar T^c((y, \varphi)) = (I(c\times\tilde y), I(\pi_1')),$$
$$\bar\vartheta^c_{(y,\varphi)} = I(\langle\tilde\varphi, 1_{\tilde y}\rangle)(\varepsilon^c_{(y,\varphi)})^{-1}\colon\ y \to I(c\times\tilde y),$$
$$\bar\nu^c_{(y,\varphi)} = I(c\times\pi_2'(\eta^c_{(c\times\tilde y,\pi_1)})^{-1})\colon\ I(c\times\widetilde{I(c\times\tilde y)}) \to I(c\times\tilde y).$$

и композицию

$$U^{I(c)}\overline{T}^c((y,\varphi)) = I(c\times\widetilde{y}) \xrightarrow{I(\pi_2')} I(\widetilde{y}) = U^{I(c)}I^c((\widetilde{y},\widetilde{\varphi})) =$$
$$= U^{I(c)}I^cH^c((y,\varphi)) \xrightarrow{\varepsilon^c_{(y,\varphi)}} U^{I(c)}((y,\varphi))$$

обозначим через $\tau^c_{(y,\varphi)}$. Тем самым, имеем функторный морфизм τ^c: $U^{I(c)}\overline{T}^c \to U^{I(c)}$.

Очередным звеном «фундаментальной теоремы» является

Теорема 1.10. *Монада* $(\overline{T}^c, \overline{\vartheta}^c, \overline{\nu}^c)$ *расщепляется морфизмом* τ^c.

Доказательство, как и в случае теоремы 1.2, получается непосредственным, но громоздким вычислением (единственный нетривиальный момент разъяснен в [6]), и мы его опустим.

Возникающую отсюда внутреннюю категорию обозначим через $g = (g_0, g_1, \delta_g, \rho_g, \eta_g, \mu_g)$. По 1.2 (b) имеем $g_1 = I(c\times\widetilde{I(c)})$, где $\widetilde{I(c)}$ — первая компонента пары $(\widetilde{I(c)}, \widetilde{1}_{I(c)}) = H^c((I(c), 1_{I(c)}))$; однако функтор H^c обязан сохранять терминальный объект и потому имеем изоморфизм

$$I(c\times\widetilde{1}_{I(c)}):\ g_1 \to I(c\times c).$$

Положим $g^* = (g_0^*, g_1^*, \delta_{g^*}, \rho_{g^*}, \eta_{g^*}, \mu_{g^*})$, где $g_0^* = g_0 = I(c)$, $g_1^* = I(c\times c)$ и $(\delta_{g^*}, \rho_{g^*}, \eta_{g^*}, \mu_{g^*})$ получено из $(\delta_g, \rho_g, \eta_g, \mu_g)$ переносом структуры с помощью изоморфизма $I(c\times\widetilde{1}_{I(c)})$. Снова непосредственным вычислением, доказывается

Теорема 1.11. *В предыдущих обозначениях имеем* $\delta_{g^*} = I(\pi_2)$: $I(c\times c) \to I(c)$, $\rho_{g^*} = I(\pi_1)$: $I(c\times c) \to I(c)$, $\eta_{g^*} = I(\langle 1_c, 1_c\rangle)$: $I(c) \to I(c\times c)$ *и коммутативна диаграмма*

$$\begin{tikzcd} I(c\times c)\times_{I(c)} I(c\times c) \arrow[r, "\mu_{g^*}"] & I(c\times c) \arrow[d, equal] \\ I((c\times c)\times_c (c\times c)) \arrow[u] \arrow[r, "I(\mu_c)"'] & I(c\times c), \end{tikzcd}$$

где μ_c *обозначает умножение в «антидискретном» внутреннем группоиде с* c *в качестве «объекта объектов», а вертикальная стрелка — канонический морфизм, являющийся изоморфизмом, и, тем самым, эта диаграмма вполне определяет* μ_{g^*}. □

Следствие 1.12. *Категория* g *является группоидом.* □

Сравним группоиды g и g^*. Первый из них строится с помощью сопряжения $(I^c, H^c, \eta^c, \varepsilon^c)$, а второй — с помощью одного функтора I. В частности, зафиксировав I^c, можно так подобрать H^c, чтобы было $g^* = g$, а именно, надо, чтобы было $H^c(I(c), 1_{I(c)}) = (c, 1_c)$. Поэтому g^* можно рассматривать как «каноническую форму» для g, что приводит к нижеследующему определению.

Определение 1.13. В предыдущих обозначениях положим $\mathrm{gal}_I(c) = g^*$, и этот (внутренний) группоид будем называть группоидом Галуа I-нормального объекта c. □

Теорема 1.11, дающая описание группоида $\mathrm{gal}_I(c)$ является заключительным звеном «фундаментальной теоремы». Собрав все наши «звенья» вместе, приходим к следующему. Исходя из функтора I и I-нормального объекта c, нами построена категория $\mathrm{Spl}_I(c)$, эквивалентная в силу следствия 1.9 категории алгебр над монадой $(\overline{T}^c, \overline{\vartheta}^c, \overline{\nu}^c)$, а эта монада расщепляется по теореме 1.10, и потому в силу следствия 1.3 категория

алгебр, в свою очередь, эквивалентна (изоморфна) категории X^g. В сочетании с теоремой 1.11, дающей простое описание группоида $\mathrm{gal}_I(c)\approx g$, это дает хорошее описание категории $\mathrm{Spl}_I(c)$, которое мы и назовем общей формой фундаментальной теоремы теории Галуа.

Теорема 1.14. *Для любого I-нормального объекта c имеет место эквивалентность категорий* $\mathrm{Spl}_I(c)\sim X^{\mathrm{gal}_I(c)}$; *эквивалентность задает функтор «сравнения»* K^c: $\mathrm{Spl}_I(c)\to X^{\mathrm{gal}_I(c)}$ *по правилу* $K^c(a)=(I(c\times a),$ $\pi_a,\ \xi_a)$, *где π_a индуцировано проекцией $c\times a\to c$, а ξ_a определяется, аналогично ситуации теоремы* 1.11, *из коммутативной диаграммы*

$$\begin{array}{ccc} I(c\times c)\times_{I(c)} I(c\times a) & \xrightarrow{\xi_a} & I(c\times a) \\ \approx\uparrow & & \| \\ I((c\times c)\times_c (c\times a)) & \longrightarrow & I(c\times a). \end{array}$$

Доказательство эквивалентности $\mathrm{Spl}_I(c)\sim X^{\mathrm{gal}_I(c)}$ уже проведено выше. Тот факт, что функтор K^c, являющийся композицией функтора сравнения $\mathrm{Spl}_I(c)\to (X\downarrow I(c))^{(\overline{T^c},\overline{\vartheta^c},\overline{\nu^c})}$ и канонического изоморфизма $(X\downarrow I(c))\approx X^{\mathrm{gal}_I(c)}$, строится по правилу $a\mapsto(I(c\times a),\ \pi_a,\ \xi_a)$, проверяется, как и теорема 1.11, непосредственным вычислением.

Замечание 1.15. Из монадичности функтора P_c: $C\to(C\downarrow c)$ легко следует (нужно лишь вычислить соответствующий функтор сравнения), что терминальный объект t категории C является коядром пары $(\pi_1,\ \pi_2)$ проекций из $c\times c$ в c. Поэтому, если предположить, что в категории X существуют коядра, то поскольку функтор I^c обладает правым сопряженным, отсюда последует, что объект $I(t)$ является коядром пары $(I(\pi_1),$ $I(\pi_2))$, т. е. «объектом связных компонент» группоида $\mathrm{gal}_I(c)$ служит $I(t)$. □

Пусть $\mathrm{Spl}_I^*(c)$ — полная подкатегория в $\mathrm{Spl}_I(c)$, порожденная всеми такими объектами a, для которых существует морфизм из c в a. Поскольку $K^c(a)$ является «свободным» над $I(c)$ внутренним функтором $\mathrm{gal}_I(c)\to X$, из теоремы 1.14 получаем

Следствие 1.16. *Функтор K^c индуцирует эквивалентность категорий между* $\mathrm{Spl}_I^*(c)$ *и полной подкатегорией в* $X^{\mathrm{gal}_I(c)}$, *порожденной всеми такими внутренними функторами* $f=(f_0,\ \pi_f,\ \xi_f)$: $\mathrm{gal}_I(c)\to X$, *в которых морфизм* π_f: $f_0\to I(c)$ *обладает правым обратным.* □

Это утверждение также можно рассматривать как общую форму фундаментальной теоремы теории Галуа.

§ 2. Нормальные расширения коммутативных колец

Обозначения: CR — категория коммутативных колец с единицей (морфизмы сохраняют единицу); R — объект в CR; A — объект в $(R\downarrow\mathrm{CR})$, мы будем говорить просто, что A — R-алгебра, т. е. все рассматриваемые алгебры будут предполагаться коммутативными и обладающими единицей; $B(A)$ — булево кольцо идемпотентов кольца A; $\mathrm{Spec}\,B(A)$ — булев спектр кольца A, т. е. пространство всех простых (=максимальных) идеалов кольца $B(A)$ с топологией Зарисского; для $x\in\mathrm{Spec}\,B(A)$ через $x\cap R$ обозначим образ элемента x при каноническом отображении $\mathrm{Spec}\,B(A)\to\mathrm{Spec}\,B(R)$; $A_x=A/xA$ — булева локализация A по x (определена при $x\in\mathrm{Spec}\,B(A)$ или при $x\in\mathrm{Spec}\,B(R)$). Большинство

этих обозначений, а также нужные свойства булевой локализации заимствованы нами из работы Р. Пирса [11].

Исходными объектами исследования § 1 были функтор $I\colon C\to X$ и объект c категории C. В этом параграфе мы рассмотрим случай, когда в качестве C взято $(R\downarrow \mathrm{CR})^{\mathrm{op}} = (\mathrm{CR}^{\mathrm{op}}\downarrow R)$, в качестве X взята категория Prof проконечных топологических пространств и функтор I определен по правилу $I(A) = \operatorname{Spec} B(A)$; по очевидным техническим причинам обозначение c заменим на C.

Теорема 2.1. *Любой объект C категории $(R\downarrow \mathrm{CR})^{\mathrm{op}}$ является I-допустимым объектом.*

Доказательство. Для любого объекта (Y, φ) категории $(\mathrm{Prof}\downarrow \operatorname{Spec} B(C))$ положим

$$H^c((Y, \varphi)) = \mathrm{hom}((Y, \varphi), P(C)),$$

где hom взято в комма-категории (топологические пространства $\downarrow \operatorname{Spec} B(C)$) и $P(C)$ обозначает пучок над $\operatorname{Spec} B(C)$ со слоями C_x ($x \in \operatorname{Spec} B(C)$), соответствующий кольцу C [11]; эта формула определяет функтор $H^c\colon (\mathrm{Prof}\downarrow \operatorname{Spec} B(C)) \to ((R\downarrow \mathrm{CR})^{\mathrm{op}}\downarrow C) = (C\downarrow \mathrm{CR})^{\mathrm{op}}$, сопряженный справа к функтору I^c [12]. Из результатов [11] и [12] легко следует также, что коединица сопряжения является изоморфизмом. □

Лемма 2.2. *Для любой R-алгебры A следующие условия эквивалентны:*

(a) *A распадается над R относительно I;*

(b) *для любого $x \in \operatorname{Spec} B(A)$ канонический гомоморфизм $R_{x\cap R}\to A_x$ является изоморфизмом.*

Доказательство. (a)⇒(b) очевидно из леммы 3.6 из [12] или непосредственно. Рассмотрим канонический гомоморфизм $\eta_A{}^R\colon H^R I^R(A)\to A$. По теореме 2.1 отображение $I_A{}^R(\eta_A{}^R)\colon \operatorname{Spec} B(A)\to \operatorname{Spec} B(H^R I^R(A))$ является гомеоморфизмом, и потому для того чтобы $\eta_A{}^R$ было изоморфизмом, по основной теореме из [11], необходимо и достаточно, чтобы для любого $x \in \operatorname{Spec} B(A)$ индуцированный гомоморфизм $H^R I^R(A)_y\to A_x$, где y — элемент, соответствующий элементу x при гомеоморфизме $I_A{}^R(\eta_A{}^R)$, был изоморфизмом. Теперь остается заметить, что $H^R I^R(A)$ распадается над R относительно I, и применить к нему (a)⇒(b). □

Теорема 2.3. *Следующие условия эквивалентны:*

(a) *A распадается над C относительно I;*

(b) *для любого $z \in \operatorname{Spec} B(C\otimes_R A)$ канонический гомоморфизм $C_{z\cap C}\to (C\otimes_R A)_z$ является изоморфизмом;*

(c) *пусть $x \in \operatorname{Spec} B(C)$, $y \in \operatorname{Spec} B(A)$, D — связная (т. е. $B(D) = \{0, 1\}$) R-алгебра и $\alpha\colon A_y\to D$, $\gamma\colon C_x\to D$ — R-алгебрные гомоморфизмы. Тогда существует R-алгебрный гомоморфизм $\beta\colon A_y\to C_x$ со свойством $\gamma\beta = \alpha$.*

Доказательство. Условия (a) и (b) эквивалентны в силу 2.2 и 1.6(a).

(b)⇒(c). Пусть x, y, D, α и γ взяты как в (c) и пусть $\varphi\colon C\otimes_R A\to D$ — R-алгебрный гомоморфизм по правилу $\varphi(c\otimes a) = \gamma(c + xC)\alpha(a + yA)$. В качестве $z \in \operatorname{Spec}(C\otimes_R A)$ возьмем образ единственного элемента пространства $\operatorname{Spec} B(D)$ при отображении, индуцированном гомоморфизмом φ. Получится $z\cap C = x$, $z\cap A = y$, и в качестве β можно взять композицию $A_y\to (C\otimes_R A)_z \approx C_x$ в очевидных обозначениях.

(c)$\Rightarrow$(b). Пусть $z\in\operatorname{Spec} B(C\otimes_R A)$, $x=z\cap C$, $y=z\cap A$. Положим $D=(C\otimes_R A)_z$, и в качестве α и γ возьмем канонические гомоморфизмы. Далее, выбрав β: $A_y\to C_x$ как в (c), рассмотрим гомоморфизм ψ: $C\otimes_R A\to C_x$ по правилу $\psi(c\otimes a)=(c+xC)\beta(a+yA)$. Имеем $\gamma\psi(c\otimes a)=\gamma(c+xC)\alpha(a+yA)$, так что $\gamma\psi$ совпадает с каноническим гомоморфизмом $C\otimes_R A\to(C\otimes_R A)_z$. Отсюда следует, что ψ индуцирует гомоморфизм ψ': $(C\otimes_R A)_z\to C_x$ со свойством $\gamma\psi'=1_{C_x}$; при этом $\psi'\gamma(c+xC)=\psi'(c\otimes 1+z(C\otimes_R A))=c+xC$, и потому ψ' является обратным к γ. Тем самым доказано, что γ есть изоморфизм. □

Следствие 2.4. *Следующие условия эквивалентны*:

(a) *A распадается над C относительно I*;

(b) *A_y распадается над C_x относительно I для любых $x\in\operatorname{Spec} B(C)$, $y\in\operatorname{Spec} B(A)$ со свойством $x\cap R=y\cap R$.* □

Отметим, что в условии 2.4 (b) можно, конечно, опустить требование $x\cap R=y\cap R$.

Нам понадобятся некоторые понятия, хорошо известные в теории Галуа коммутативных колец (они введены рядом авторов от М. Ауслендера и О. Голдмена [13] до Э. Мэгида [3]), и мы перечислим их в нижеследующем определении.

Определение 2.5. (a) R-алгебра A называется расширением кольца R, если канонический гомоморфизм $R\to A$ инъективен;

(b) расширение A кольца R называется сепарабельным, если A является проективным $A\otimes_R A$-модулем;

(c) сепарабельное расширение A кольца R называется строго сепарабельным, если A является проективным R-модулем;

(d) расширение кольца R называется локально строго сепарабельным, если каждое его конечное подмножество содержится в R-подалгебре, являющейся строго сепарабельным расширением кольца R;

(e) расширение A кольца R называется квазисепарабельным, если A_x является локально строго сепарабельным расширением кольца $R_{x\cap R}$ для любого $x\in\operatorname{Spec} B(A)$;

(f) кольцо R называется сепарабельно замкнутым, если для любого квазисепарабельного расширения A кольца R существует R-алгебрный гомоморфизм $A\to R$;

(g) сепарабельное замыкание $\overline{R}$ кольца R — это единственное (с точностью до изоморфизма) сепарабельно замкнутое квазисепарабельное расширение кольца R, такое, что любой R-алгебрный гомоморфизм $\overline{R}\to A$, где A — квазисепарабельное расширение кольца R, инъективен;

(h) квазисепарабельное расширение A кольца R называется нормальным, если для любого $x\in\operatorname{Spec} B(R)$ и любых R-алгебрных гомоморфизмов α, β: $A\to\overline{R}_x$ имеет место равенство $\alpha(A)=\beta(A)$. □

Отметим, что некоторые пункты этого определения несколько отличаются по форме от соответствующих определений Э. Мэгида, однако логически эквивалентны им и этими различиями можно пренебречь.

Теорема 2.6. *Следующие условия эквивалентны*:

(a) *C является I-нормальным объектом в $(R\downarrow\mathrm{CR})^{\mathrm{op}}$*;

(b) *C является нормальным расширением кольца R.*

Доказательство. Пусть (a) выполнено. Для доказательства (b) нам понадобятся несколько вспомогательных утверждений.

2.6.1. Для любых x, $y\in\operatorname{Spec} B(C)$, таких, что $x\cap R=y\cap R$, существует $z\in\operatorname{Spec} B(C\otimes_R C)$ со свойством $\rho(z)=x$ и $\delta(z)=y$, где ρ и δ определяют-

ся как в $\mathrm{gal}_I(C)$, т. е. индуцированы гомоморфизмами $C\to C\otimes_R C$ соответственно по правилам $c\mapsto c\otimes 1$ и $c\mapsto 1\otimes c$.

Это утверждение следует из 1.15: достаточно заметить, что коядро пары (ρ, δ) в категории Prof вычисляется так же, как и в категории множеств — последнее доказано, в частности, в доказательстве леммы V.9 из [3].

2.6.2. В условиях 2.6.1 $C_x\approx C_y$ как R-алгебры.

Действительно, в силу теоремы 2.3, выбрав z как в 2.6.1, будем иметь $C_x\approx (C\otimes_R C)_z\approx C_y$.

2.6.3. Функтор $C_x\otimes_R—$: $(R_{x\cap R}\downarrow \mathrm{CR})\to(C_x\downarrow \mathrm{CR})$ отражает изоморфизмы для любого $x\in \mathrm{Spec}\, B(C)$.

Этим свойством обладает функтор $C\otimes_R—$: $(R\downarrow \mathrm{CR})\to(C\downarrow \mathrm{CR})$, а следовательно, и функтор $C_{x\cap R}\otimes_R—$: $(R_{x\cap R}\downarrow \mathrm{CR})\to(C_{x\cap R}\downarrow \mathrm{CR})$. Теперь остается заметить, что в силу 2.6.2 все булевы локализации кольца $C_{x\cap R}$ изоморфны C_x, и применить основной результат из [11] (здесь имеется в виду «модульный вариант» — теорема 7.5).

2.6.4. Объекту C_x категории $\mathrm{Spl}_I(C)$ соответствует «внутренний hom-функтор» $\mathrm{hom}(x, —)$: $\mathrm{gal}_I(C)\to\mathrm{Prof}$, т. е. $K^C(C_x)\approx \mathrm{hom}(x, —)$.

В силу 2.4 C_x лежит в $\mathrm{Spl}_I(C)$, и в силу 1.14 достаточно доказать, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}\, B(C\otimes_R C_x) & \to & \{x\} \\ \downarrow & & \downarrow\cap \\ \mathrm{Spec}\, B(C\otimes_R C) & \xrightarrow[\delta]{} & \mathrm{Spec}\, B(C) \end{array}$$

(в очевидных обозначениях) является декартовым квадратом; это однако следует из 1.6 (с) и того факта, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} C\otimes_R C_x & \leftarrow & C_x \\ \uparrow & & \uparrow \\ C\otimes_R C & \leftarrow & C \end{array}$$

(также в очевидных обозначениях) является кодекартовым квадратом в $(\mathrm{Spl}_{IC}(C))^{\mathrm{op}}$ (последнее корректно, поскольку с точки зрения принадлежности категории $\mathrm{Spl}_{IC}(C)=\mathrm{Spl}_{IC}((C, 1_C))$ неважно, какой из двух канонических структур C-алгебры наделены $C\otimes_R C$ и $C\otimes_R C_x$).

2.6.5. Пусть N — открытый нормальный делитель проконечной группы $\mathrm{aut}(x)$ «автоморфизмов объекта x» группоида $\mathrm{gal}_I(C)$. В силу 2.6.4 группа $\mathrm{aut}(x)$ канонически действует на $K^C(C_x)$; через $K^C(C_x)_N$ обозначим универсальный фактор-объект объекта $K^C(C_x)$, на который N действует тривиально. Кроме того, через $N^{\#}$ обозначим $R_{x\cap R}$-алгебру Хопфа всех отображений $\mathrm{aut}(x)/N\to R_{x\cap R}$, и через C_x^N обозначим объект в $\mathrm{Spl}_I(C)$, соответствующий объекту $K^C(C_x)_N$. Тогда C_x^N имеет каноническую структуру $N^{\#}$-объекта Галуа в смысле С. Чейза — М. Свидлера [10] в категории $(R_{x\cap R}\downarrow \mathrm{CR})^{\mathrm{op}}$.

В силу 2.6.3 и того обстоятельства, что канонический гомоморфизм $R_{x\cap R}\to C_x$ проходит через C_x^N, C_x^N является точным в смысле [10] объектом в $(R_{x\cap R}\downarrow \mathrm{CR})^{\mathrm{op}}$. После этого мы приходим к задаче, которая может быть сформулирована внутри категории $\mathrm{Spl}_I(C)$. Эта задача инвариантна при переходе от $\mathrm{Spl}_I(C)$ к $(\mathrm{Prof})^{\mathrm{gal}_I(C)}$ и с учетом 2.6.4 легко решается в категории $(\mathrm{Prof})^{\mathrm{gal}_I(C)}$.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству утверждения (b). Для любого $x\in \mathrm{Spec}\, B(C)$ имеем $C_x\approx \varinjlim C_x^N$ — предел направлен-

ного спектра по всем открытым $N \lhd \mathrm{aut}(x)$. Этот предел взят в $(\mathrm{Spl}_I(C))^{\mathrm{op}}$ и получен переходом из $(\mathrm{Prof})^{\mathrm{gal}_I(C)}$, где изоморфизм легко проверяется. Однако (прямые) пределы направленных спектров в $(\mathrm{Spl}_I(C))^{\mathrm{op}}$, очевидно, вычисляются так же как и в $(R\downarrow\mathrm{CR})$, и потому можно считать, что изоморфизм имеет место и в $(R\downarrow\mathrm{CR})$. Далее из 2.6.5 и результатов [10] и [14] следует, что каждое C_x^N является строго сепарабельным расширением кольца $R_{x\cap R}$, и, тем самым, C_x является локально строго сепарабельным расширением кольца $R_{x\cap R}$ (гомоморфизмы, участвующие в вышеуказанном спектре, очевидно, инъективны). Кроме того, C является расширением кольца R, ибо $C\otimes_R$— отражает изоморфизмы. Таким образом, C является квазисепарабельным расширением кольца R и его нормальность следует теперь из импликации (a)$\Rightarrow$(c) в теореме 2.3: достаточно положить $D=\overline{R}_x$ и заметить, что α и β из 2.5 (h) обязаны проходить через какие-нибудь C_u и C_v, где $u, v \in \mathrm{Spec}\, B(C)$.

Пусть теперь выполнено условие (b); докажем (a). Требуется доказать, что C удовлетворяет условиям (a), (b) и (c) из определения 1.7. Условие 1.7 (a) выполнено тривиальным образом согласно теореме 2.1. Условие 1.7 (b) выполнено в силу известной теоремы Бека, ибо квазисепарабельное расширение кольца R всегда является строго плоским R-модулем. Наконец, 1.7 (c) следует из результатов третьей главы [3] и 2.4. □

Отсюда, из 2.4 и из «связной» теории Галуа получается

Следствие 2.7. *Пусть C — I-нормальный объект в $(R\downarrow\mathrm{CR})^{\mathrm{op}}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) *A распадается над C относительно I;*

(b) *для любых $x\in\mathrm{Spec}\,B(C)$ и $y\in\mathrm{Spec}\,B(A)$* со свойством $x\cap R=y\cap R$ *существует (инъективный) гомоморфизм $A_y\to C_x$ и A_y является локально строго сепарабельным расширением кольца $R_{y\cap R}$.* □

Отсюда, в свою очередь, получается

Следствие 2.8. *Пусть C — I-нормальный объект в $(R\downarrow\mathrm{CR})^{\mathrm{op}}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) *A является объектом категории* $\mathrm{Spl}_I^*(C)$;

(b) *A является квазисепарабельным расширением кольца R, существует гомоморфизм $A\to C$, и для любых $x\in\mathrm{Spec}\,B(C)$ и $y\in\mathrm{Spec}\,B(A)$ со свойством $x\cap R=y\cap R$ существует (инъективный) гомоморфизм $A_y\to C_x$.* □

Пример 2.9. Сепарабельное замыкание $\overline{R}$ кольца R является, как легко следует из теоремы 2.6, I-нормальным объектом в $(R\downarrow\mathrm{CR})^{\mathrm{op}}$, и его группоид Галуа $\mathrm{gal}_I(\overline{R})$ есть фундаментальный группоид кольца R в смысле Э. Мэгида [3]. Из 2.8 легко следует, что объектами категории $\mathrm{Spl}_I^*(\overline{R})$ служат в точности квазисепарабельные расширения кольца R. Таким образом, из теоремы 1.14 следует, что категория квазисепарабельных расширений кольца R антиэквивалентна полной подкатегории в $(\mathrm{Prof})^{\mathrm{gal}_I(\overline{R})}$, порожденной всеми такими внутренними функторами $f=(f_0, \pi_f, \xi_f)\colon \mathrm{gal}_I(\overline{R})\to\mathrm{Prof}$, в которых π_f обладает непрерывным сечением. Последнее в силу экстремальной несвязности пространства $\mathrm{Spec}\,B(\overline{R})$, доказанной в [3], эквивалентно сюръективности π_f, и потому это утверждение совпадает с основным результатом (теорема IV.31) работы Э. Мэгида [3]. □

§ 3. Центральные расширения мультиоператорных групп

Пусть $\mathrm{Var}(\Omega, \Phi)$ — многообразие (мультиоператорных) Ω-групп. Подразумевается, что задана некоторая область операторов $\Omega = \coprod_{n=0}^{\infty} \Omega_n$ и $\mathrm{Var}(\Omega, \Phi)$ есть полная подкатегория категории всех универсальных алгебр, сигнатура которых состоит из сигнатуры группы и Ω; объекты этой подкатегории — это все такие алгебры, которые удовлетворяют набору тождеств Φ, а также аксиомам теории групп и тождествам вида $\omega(1, \ldots, 1) = 1$ для всех $\omega \in \Omega$. Ниже мы будем рассматривать два таких многообразия с наборами тождеств Φ и Ψ соответственно. При этом будем считать, что $\Phi \subset \Psi$, и через R обозначать функтор $\mathrm{Var}(\Omega, \Phi) \to \mathrm{Var}(\Omega, \Phi)$ такой, что $R(A) \lhd A$ ($R(A)$ является идеалом в A) и правило $A \mapsto A/R(A)$ определяет функтор $\mathrm{Var}(\Omega, \Phi) \to \mathrm{Var}(\Omega, \Psi)$, сопряженный слева к функтору вложения; канонический гомоморфизм $A \to A/R(A)$ будем обозначать через ϑ_A.

В этом параграфе мы исследуем случай, когда в качестве функтора I: $C \to X$ из § 1 взят функтор $(\mathrm{Var}(\Omega, \Phi) \downarrow G) \to \mathrm{Var}(\Omega, \Psi)$ по правилу $(A, \alpha) \mapsto A/R(A)$, где G — фиксированный объект в $\mathrm{Var}(\Omega, \Phi)$; обозначение c заменим на (E, σ).

Теорема 3.1. *Функтор $E^{(E,\sigma)}$ всегда обладает правым сопряженным $H^{(E,\sigma)}$ и следующие условия эквивалентны*:

(a) *объект (E, σ) категории $(\mathrm{Var}(\Omega, \Phi) \downarrow G)$ является I-допустимым объектом*;

(b) $R(R(E)) = R(E)$.

Доказательство. Для любого объекта (Y, φ) категории $(\mathrm{Var}(\Omega, \Psi) \downarrow E/R(E))$ составим декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\pi_2} & Y \\ \pi_1\downarrow & & \downarrow\varphi \\ E & \xrightarrow[\nu_E]{} & E/R(E) \end{array}$$

и положим $H^{(E,\sigma)}((Y, \varphi)) = (D, \pi_1)$. Очевидно, что так построенный функтор $H^{(E,\sigma)}$ сопряжен справа к функтору $I^{(E,\sigma)}$. При этом условие (a) означает, что π_2 индуцирует изоморфизм $D/R(D) \approx Y$, т. е. что $R(D) = \mathrm{Ker}\,\pi_2$. Гомоморфизм π_1 индуцирует изоморфизм $\mathrm{Ker}\,\pi_2 \approx R(E)$ и потому это в свою очередь означает, что $R(\pi_1)$: $R(D) \to R(E)$ есть изоморфизм. После этого импликация (a) $\Rightarrow$ (b) очевидна: достаточно в качестве Y взять тривиальную группу. (b) $\Rightarrow$ (a). Имеем $R(\mathrm{Ker}\,\pi_2) \subset R(D) \subset \mathrm{Ker}\,\pi_2$, но $\mathrm{Ker}\,\pi_2 \approx R(E)$, и потому условие (b) превращает эти включения в равенства; в частности, $R(D) = \mathrm{Ker}\,\pi_2$, что как отмечалось выше, эквивалентно условию (a). □

Лемма 3.2. *Для любого объекта (A, α) категории $(\mathrm{Var}(\Omega, \Phi) \downarrow G)$ следующие условия эквивалентны*:

(a) *(A, α) распадается над $(G, 1_G)$ относительно I*;

(b) *гомоморфизм $R(\alpha)$: $R(A) \to R(G)$ является изоморфизмом.*

Доказательство. Достаточно заметить, что условие (a) означает, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\nu_A} & A/R(A) \\ \alpha\downarrow & & \downarrow\alpha/R(\alpha) \\ G & \xrightarrow[\nu_G]{} & G/R(G) \end{array}$$

является декартовым квадратом. □

Отметим, что условие (b) просто перефразирует тот факт, что $R(\pi_1)$: $R(D)\to R(E)$ (из доказательства теоремы 3.1) является изоморфизмом.

Теорема 3.3. *Если* (E, σ) *является I-допустимым объектом, то следующие условия эквивалентны*:

(a) (A, α) *распадается над* (E, σ) *относительно* I;

(b) *канонический гомоморфизм* $R(E\times_G A)\to R(E)$ *является изоморфизмом*;

(c) *для любого объекта* F *категории* $\mathrm{Var}(\Omega, \Phi)$ *и любых гомоморфизмов* φ: $F\to A$ *и* ψ: $F\to E$ *со свойством* $\alpha\varphi=\alpha\psi$ *существует гомоморфизм* χ: $R(E)\to R(A)$ *со свойствами* $\chi R(\psi)=R(\varphi)$, *и* $R(\alpha)\chi=R(\sigma)$.

Доказательство. Условия (a) и (b) эквивалентны в силу 3.2 и 1.6 (a).

(b)$\Rightarrow$(c). Достаточно в качестве χ взять композицию $R(E)\approx \approx R(E\times_G A)\to R(A)$ в очевидных обозначениях.

(c)$\Rightarrow$(b). Положим $F=E\times_G A$ и в качестве φ и ψ возьмем канонические гомоморфизмы. Далее, выбрав χ: $R(E)\to R(A)$ как в (c), рассмотрим гомоморфизм γ: $R(E)\to E\times_G A$ по правилу $\gamma(e)=(e, \chi(e))$.

По теореме 3.1 имеем $R(R(E))=R(E)$ и потому γ индуцирует гомоморфизм γ': $R(E)\to R(E\times_G A)$, который очевидно является обратным к каноническому гомоморфизму $R(E\times_G A)\to R(E)$. □

Замечание 3.4. (a) Как видно из доказательства теоремы 3.3, импликации (a)$\Leftrightarrow$(b)$\Rightarrow$(c) (из 3.3) остаются в силе и без предположения об I-допустимости объекта (E, σ).

(b) Гомоморфизм χ из 3.3 (c) не зависит от выбора φ и ψ.

(c) Из 3.3 следует, что если (A, α) распадается над (E, σ) относительно I, то и $(R(A), \alpha')$ (где $\alpha'(a)=\alpha(a)$ для всех $a\in R(A)$) распадается над $(R(E), \sigma')$ относительно I. Обратное верно, конечно, если предположить, что (A, α) и (E, σ) — I-допустимы (ибо тогда $R(R(A))= =R(A)$ и $R(R(E))=R(E)$ в силу 3.1), но, вообще говоря, неверно, если потребовать лишь I-допустимость объекта (E, σ). Для того чтобы получить контрпример, достаточно выбрать Φ, Ψ (можно считать, что $\Omega=\varnothing$) и A так, чтобы было $R(A)\neq 0=R(R(A))$, и положить $G= =E=0$. □

Следуя А. Фрелиху [4], примем

Определение 3.5. Будем говорить, что (E, σ) является R-центральным расширением Ω-группы G, если σ сюръективно и для любого объекта F категории $\mathrm{Var}(\Omega, \Phi)$ и любых гомоморфизмов φ, ψ: $F\to E$ имеет место импликация $\sigma\varphi=\sigma\psi\Rightarrow R(\varphi)=R(\psi)$. □

Теорема 3.6. *Следующие условия эквивалентны*:

(a) (E, σ) *является I-нормальным объектом в* $(\mathrm{Var}(\Omega, \Phi)\downarrow G)$;

(b) $R(R(E))=R(E)$ *и* (E, σ) *является R-центральным расширением* Ω-*группы* G.

Доказательство. Условие (a) означает, что (E, σ) удовлетворяет условиям (a), (b) и (c) определения 1.7. В силу 3.1 условие 1.7 (a) эквивалентно условию $R(R(E))=R(E)$. Из теоремы Бека легко следует, что условие 1.7 (b) эквивалентно сюръективности гомоморфизма σ.

Наконец, из 3.3 легко следует, что для допустимого (E, σ), (E, σ) тогда и только тогда распадается над (E, σ) относительно I (это частный случай 1.7 (c), когда в качестве (y, φ) в 1.7 (c) взят терминальный объект), когда выполнено условие определения 3.5 (без сюръективности σ). Поэтому (a)$\Rightarrow$(b) очевидно, а для доказательства (b)$\Rightarrow$(a)

остается доказать следующее: если (E, σ) распадается над (E, σ) относительно I, то в обозначениях, введенных в доказательстве теоремы 3.1, $(D, \sigma\pi_1)$ распадается над (E, σ) относительно I. Это однако следует из импликации (c)$\Rightarrow$(a) в теореме 3.3 (мы очевидно имеем право пользоваться I-допустимостью объекта (E, σ)), поскольку, как отмечалось в доказательстве теоремы 3.1, гомоморфизм $R(\pi_1)$: $R(D) \to R(E)$ является изоморфизмом. □

Теорема 3.7. *Пусть* (E, σ) — *I-нормальный объект в* $(\mathrm{Var}(\Omega, \Phi) \downarrow G)$. *Тогда следующие условия эквивалентны*:

(a) (A, α) *является объектом категории* $\mathrm{Spl}_I^*((E, \sigma))$;

(b) (A, α) *является R-центральным расширением Ω-группы G, и существует гомоморфизм* β: $E \to A$ *со свойством* $\alpha\beta = \sigma$.

Доказательство. (a)$\Rightarrow$(b). Нужный гомоморфизм β: $E \to A$ существует по определению, более того, имеет место:

3.7.1. $R(\beta)$ сюръективно.

Действительно, применяя функтор R к коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl, equal] \arrow[d, "\langle 1_E, \beta\rangle"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ E & E \times_G A \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & A \end{tikzcd}$$

(в очевидных обозначениях), заключаем (ибо $R(\pi_1)$ является изоморфизмом в силу 3.3), что $R(\beta)$ отличается на изоморфизм от $R(\pi_2)$. Поэтому 3.7.1 следует из сюръективности σ и того обстоятельства, что функтор R сохраняет сюръекции.

После этого, для данных φ, ψ: $F \to A$ со свойством $\alpha\varphi = \alpha\psi$, выбрав сюръективный гомоморфизм π: $F' \to F$ так, чтобы F' было проективным объектом в $\mathrm{Var}(\Omega, \Phi)$, получим следующее: пусть φ', ψ': $F' \to E$ — гомоморфизмы со свойством $\beta\varphi' = \varphi\pi$, $\beta\psi' = \psi\pi$. Тогда $\sigma\varphi' = \alpha\beta\varphi' = \alpha\varphi\pi = \alpha\psi\pi = \alpha\beta\psi' = \sigma\psi'$ и потому $R(\varphi') = R(\psi')$; отсюда $R(\varphi)R(\pi) = R(\beta\varphi') = R(\beta\psi') = R(\psi)R(\pi)$, и, следовательно, $R(\varphi) = R(\psi)$.

(b)$\Rightarrow$(a). Достаточно доказать, что (A, α) удовлетворяет условию 3.3 (c), а для этого, в свою очередь, достаточно положить $\chi = R(\beta)$, поскольку (A, α) является R-центральным расширением и $\alpha\varphi = \alpha(\beta\psi)$, будем иметь $R(\varphi) = R(\beta\psi) = \chi R(\psi)$. □

Рассмотрим кратко проблему «вычисления» группоида Галуа $\mathrm{gal}_I((E, \sigma))$ и функтора $K^{(E,\sigma)}$, которая, как видно из теорем 1.11 и 1.14, в основном сводится к проблеме вычисления Ω-групп вида $E \times_G A/R(E \times_G A)$, играющих роль объектов $I(c \times a)$ из 1.14.

Диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}\,\alpha \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] & G \\ \mathrm{Ker}\,\alpha \arrow[u, equal] \arrow[r] \arrow[d] & E \times_G A \arrow[u] \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[u, "\sigma"'] \arrow[d] \\ \mathrm{Ker}\,\alpha/R(\mathrm{Ker}\,\alpha) \arrow[r] & E \times_G A/R(E \times_G A) \arrow[r] & E/R(E) \end{tikzcd}$$

показывает, что справедлива

Теорема 3.8. (a) (A, α) *тогда и только тогда является объектом категории* $\mathrm{Spl}_I((E, \sigma))$, *когда диаграмма*

$$0 \to \mathrm{Ker}\,\alpha \to (E \times_G A)/R(E \times_G A) \to E/R(E)$$

является точной последовательностью групп;

(b) *В условиях* (a) (*т. е. когда* (A, α) *является объектом категории* $\mathrm{Spl}_I((E, \sigma)))$ *гомоморфизм* α *тогда и только тогда сюръективен, когда таковым является гомоморфизм* $(E\times_G A)/R(E\times_G A)\to E/R(E)$;

(c) *В условиях* (a) (A, α) *тогда и только тогда является объектом категории* $\mathrm{Spl}_I^*((E,\sigma))$, *когда гомоморфизм* $(E\times_G A)/R(E\times_G A)\to E/R(E)$ *обладает правым обратным.* □

Отметим, что в этой теореме можно не предполагать I-нормальности объекта (E, σ), хотя, конечно, в (b) σ должно быть сюръективным.

Замечание 3.9. Теорема 3.8 по-видимому означает, что Ω-группу $(E\times_G A)/R(E\times_G A)$ удается вычислить лишь в одном из следующих трех случаев:

(a) группа E «R-совершенна» (=«R-связна»), т. е. $R(E)=E$;

(b) α сюръективно и в многообразии $\mathrm{Var}(\Omega, \Psi)$ развита «теория расширений»;

(c) (A, α) лежит в $\mathrm{Spl}_I^*((E, \sigma))$, и в многообразии $\mathrm{Var}(\Omega, \Psi)$ развита «теория полупрямых произведений».

Вопреки 3.9 (c) отметим, что 3.8 всегда позволяет удовлетворительным образом описать группоид $\mathrm{gal}_I((E, \sigma))$. Именно, пусть M — Ω-группа, K и L — идеалы в M; через

$$\mathrm{Gr}(M, K, L)=(M/L,\ K\times(M/L),\ \delta_{M,K,L},\ \rho_{M,K,L},\ \eta_{M,K,L},\ \mu_{M,K,L})$$

обозначим внутренний группоид в многообразии Ω-групп, в котором: M/L имеет каноническую структуру Ω-группы; $K\times(M/L)$ имеет структуру «полупрямого произведения», т. е.

$$\omega((k_1, m_1L), \ldots, (k_n, m_nL))=(\omega(k_1m_1, \ldots, k_nm_n)(\omega(m_1, \ldots, m_n))^{-1},$$
$$\omega(m_1, \ldots, m_n)L),$$
$$(k_1, m_1L)(k_2, m_2L)=(k_1m_1k_2m_1^{-1},\ m_1m_2L),$$

и при этом для корректности необходимо и достаточно, чтобы было

$$\omega(k_1m_1l_1, \ldots, k_nm_nl_n)=$$
$$=\omega(k_1m_1, \ldots, k_nm_n)(\omega(m_1, \ldots, m_n))^{-1}\omega(m_1l_1, \ldots, m_nl_n),$$
$$kl=lk,$$

в очевидных обозначениях;

$$\delta_{M,K,L}((k, mL))=kmL;\quad \rho_{M,K,L}((k, mL))=mL;$$
$$\eta_{M,K,L}(mL)=(1, mL);\quad \mu_{M,K,L}((k, mL), (k', m'L))=(k'k, mL).$$

С помощью 3.8 получается

Теорема 3.10. $\mathrm{gal}_I((E, \sigma))\approx\mathrm{Gr}(E, \mathrm{Ker}\,\sigma, R(E))$. □

Пример 3.11. В ситуации 3.9 (a) имеем

$$\mathrm{Spl}_I((E, \sigma))=\mathrm{Spl}_I^*((E, \sigma)),\ \mathrm{gal}_I((E, \sigma))\approx\mathrm{Ker}\,\sigma,$$

и категория внутренних функторов $\mathrm{gal}_I((E, \sigma))\to\mathrm{Var}(\Omega, \Psi)$ канонически изоморфна комма-категории $(\mathrm{Ker}\,\sigma\downarrow\mathrm{Var}(\Omega, \Psi))$. □

Отметим, что тот результат, который получается из теоремы 1.14 в ситуации 3.9 (a) и 3.11 по-видимому следует рассматривать как простое хорошо известное утверждение теории центральных расширений мультиоператорных групп, которой посвящен ряд работ A. S.-T. Lue и J. Furtado-Coelho.

Рассмотрим частный случай, когда $\Omega=\varnothing$. Пусть K и F — группы, $\varphi\colon K\to F$ — гомоморфизм и $\xi\colon F\times K\to K$ — действие группы F на группу K (мы будем писать $\xi(f, k)={}^{f}k$). Через

$$\mathrm{Gr}(K, F, \varphi, \xi)=(F, K\rtimes F, \delta_{K,F}, \rho_{K,F}, \eta_{K,F}, \mu_{K,F})$$

обозначим внутренний группоид в категории групп, в котором: $K\rtimes F$ есть полупрямое произведение групп K и F с действием ξ,

$$\delta_{K,F}((k, f))=\varphi(k)f,\ \rho_{K,F}((k, f))=f,$$

$$\eta_{K,F}(f)=(1, f),\ \mu_{K,F}((k, f), (k', f'))=(k'k, f);$$

при этом для корректности необходимо и достаточно, чтобы было

$$\varphi({}^{f}k)=f\varphi(k)f^{-1},\quad {}^{\varphi(k_1)}k_2=k_1k_2k_1^{-1}.$$

Пусть тройка (M, K, L) образована как и выше, но с $\Omega=\varnothing$. Положим $F=M/L$, $\varphi(k)=kL$ и ${}^{mL}k=mkm^{-1}$ — получится $\mathrm{Gr}(M, K, L)=\mathrm{Gr}(K, F, \varphi, \xi)$ и потому имеет место

Следствие 3.11. *В предыдущих обозначениях имеем*

$$\mathrm{gal}_I((E, \sigma))=\mathrm{Gr}(\mathrm{Ker}\,\sigma, E/R(E), \varphi, \xi).\ \square$$

Поскольку $\mathrm{Ker}\,\sigma$ и $E/R(E)$ лежат в $\mathrm{Var}(\Omega, \Psi)$, это утверждение уже можно рассматривать как вычисление группоида $\mathrm{gal}_I((E, \sigma))$. В классической ситуации, когда $\mathrm{Var}(\Omega, \Phi)$ есть многообразие всех групп, $\mathrm{Var}(\Omega, \Psi)$ есть многообразие всех абелевых групп и I-нормальные объекты (E, σ) — это в точности центральные расширения группы G в обычном смысле; полученные в этом параграфе результаты тесно связаны с формулой универсальных коэффициентов для двумерных когомологий групп с тривиальными коэффициентами.

Литература

1. *Barr M.* Abstract Galois theory//JPAAA. 1980. V. 19. P. 21—42.
2. *Grothendieck A.* Séminaire de Géométrie Algébrique. I. Revêtements étale et groupe fondamental (1960/61). Heidelberg: Springer, 1971.
3. *Magid A. R.* The separable Galois theory of commutative rings. New York: Marsel Dekker, 1974.
4. *Fröhlich A.* Baer-invariants of algebras//Trans. AMS. 1963. V. 109. P. 221—244.
5. *Janelidze G.* A generalization of the theory of covering spaces//Abstracts of the IV Internat. Conf. in Topology and its Applications. Dubrovnik, 1985.
6. *Джанелидзе Г. З.* Теорема Мэгида в категориях//Сообщ. АН ГССР. 1984. 114. № 3. С. 477—500.
7. *Barr M.* Abstract Galois Theory II//JPAAA. 1982. V. 25. P. 227—247.
8. *Mac Lane S.* Categories for the working mathematician. Berlin: Springer, 1971.
9. *Jornstone P. T.* Topos theory. New York: Academic Press, 1977.
10. *Chase S. U., Sweedler M. E.* Hopf algebras and Galois theory. Berlin: Springer, 1969.
11. *Pierce R. S.* Modules over commutative regular rings//Mem. AMS. 1967. V. 70.
12. *Джанелидзе Г. З.* Расширения Галуа коммутативных колец, с помощью проконечных семейств групп//Тр. МИ АН ГССР. 1983. Т. 74. С. 39—51.
13. *Auslander M., Goldman O.* The Brauer group of a commutative ring//Trans. AMS. 1960. V. 97. P. 367—409.
14. *Chase S. U., Harrison D. K., Rosenberg A.* Galois theory and cohomology of commutative rings//Mem. AMS. 1965. V. 52. P. 15—33.

Математический институт
им. А. М. Размадзе АН ГССР
Тбилиси

Поступила в редакцию
15.X.1986