

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. B. Givental', Global properties of the Maslov index and Morse theory, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 1988, Volume 22, Issue 2, 69–70

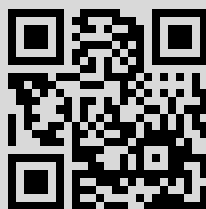
Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 95.216.226.236

November 9, 2019, 00:31:49



ГЛОБАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ИНДЕКСА МАСЛОВА И ТЕОРИЯ МОРСА

А. Б. Гивенталь

На лагранжевом подмногообразии в $T^*\mathbb{R}^n$, лагранжево изотопном нулевому сечению, определена целозначная функция, сопоставляющая точке общего положения индекс Маслова пути из этой точки на бесконечность. В работе доказано существование точки индекса нуль в каждом слое расслоения $T^*\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (рис. 1, а). Я благодарен В. И. Арнольду, сообщившему мне эту гипотезу, принадлежащую В. П. Колокольцову. Доказательство опирается на одну теорему Сикорава (лемма 4) — один из глубоких результатов современной симплектической топологии.

1. Основной результат. Пусть M — связное гладкое многообразие без края, $L \subset T^*M$ — лагранжево подмногообразие, изотопное нулевому сечению в классе лагранжевых подмногообразий, совпадающих с ним вне компакта. Индексом регулярной точки проекции $L \rightarrow M$ назовем индекс Маслова [1; 2] ориентированного пути на L , соединяющего эту точку с отмеченной. В рассматриваемой ситуации индекс корректно

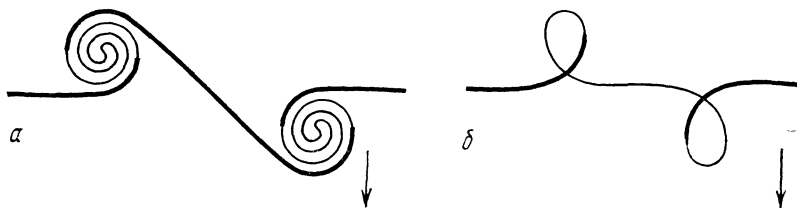


Рис. 1. Лагранжевы кривые в $T^*\mathbb{R}$. Выделены точки индекса нуль. Стрелка — направление проекции $T^*\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

определен (не зависит от пути) с точностью до общего для всех точек слагаемого, определяемого выбором отмеченной точки.

Т е о р е м а 1. При подходящем выборе отмеченной точки прообраз каждого регулярного значения проекции $L \rightarrow M$ содержит точку индекса нуль.

2. Производящие семейства. Производящим семейством лагранжевой иммерсии $i: L \rightarrow T^*M$ называется гладкая функция $S: \mathbb{R}^N \times M \rightarrow \mathbb{R}: (x, q) \mapsto S(x, q)$ со свойствами:

1) $S_x: \mathbb{R}^N \times M \rightarrow \mathbb{R}^N$ трансверсально к $\{0\} \subset \mathbb{R}^N$;

2) $i(L) = \{(p, q) \in T^*M \mid \exists x \in \mathbb{R}^N: S_x(x, q) = 0, p = S_q(x, q)\}$.

Говорят, что производящее семейство квадратично на бесконечности, если выполнено

3) $\forall q \in M$ функция $S(\cdot, q): \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ совпадает вне некоторого шара с невырожденной квадратичной формой.

Т е о р е м а 2. Если лагранжева иммерсия $L \rightarrow T^*M$ связного многообразия L задается производящим семейством, квадратичным на бесконечности, то при подходящем выборе отмеченной точки прообраз каждого регулярного значения проекции $L \rightarrow M$ содержит точку индекса нуль.

З а м е ч а н и я. 1) Функция S со свойствами 1, 2) производит лагранжеву иммерсию в T^*M многообразия $L \subset \mathbb{R}^N \times M$ критических точек семейства функций $S(\cdot, q)$ (см. [3]). Индекс Маслова замкнутого пути на L равен нулю (см. лемму 1 ниже). Поэтому индексы регулярных точек корректно определены, если L связно.

2) Для произвольных лагранжевых иммерсий $\mathbb{R}^n \rightarrow T^*\mathbb{R}^n$ теорема 2 не верна (рис. 1б).

3. Доказательство теоремы 2.

Л е м м а 1. Индекс Маслова ориентированного пути на L равен разности индексов Морса критических точек функций из производящего семейства, отвечающих концам пути.

По существу, это одно из определений индекса Маслова (см. [3]). Для лагранжевой иммерсии $L \rightarrow T^*M$ и пути на L общего положения индекс Маслова определяется как число точек складки проекции $L \rightarrow M$ на этом пути, взятых с учетом знаков. Пусть $F: (\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ — росток производящего семейства $(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (T^*\mathbb{R}^n, 0)$ лагранжевой иммерсии в точке складки. Тогда функция $F(\cdot, 0)$ имеет в нуле вырожденную

критическую точку с одномерным ядром второго дифференциала. Индекс Морса (т. е. число отрицательных квадратов второго дифференциала) критической точки функции $F(\cdot, q)$ изменяется на единицу при переходе через складку. Знак этого изменения и определяет вклад точки складки в индекс Маслова.

Теорема 2 вытекает теперь из следующего утверждения теории Морса.

Л е м м а 2. Пусть $S: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$ — функция Морса, совпадающая с невырожденной квадратичной формой S_∞ вне некоторого шара. Тогда S имеет критическую точку, индекс Морса которой равен индексу этой квадратичной формы.

Действительно, группы относительных гомологий $H_*(\mathbf{R}^N, \{S \ll 0\})$ равны гомологиям комплекса (C_*, ∂) , базисные i -мерные цепи которого биективно соответствуют критическим точкам индекса i функции Морса S (см. [4]). С другой стороны, $\mathbf{R}^N / \{S \ll 0\} \simeq S^k$, где k — индекс S_∞ . Поэтому $\tilde{H}_k(S^k) = \mathbf{Z}$ влечет $C_k \neq 0$.

4. Теорема 2 \Rightarrow теорема 1.

Л е м м а 3. Лагранжево подмногообразие $L \subset T^*M$, лагранжево изотопное нулевому сечению, гамильтоново изотопно лагранжеву сечению.

Под лагранжевой понимается изотопия в классе лагранжевых подмногообразий, совпадающих с нулевым сечением вне компакта. Гамильтонова изотопия задается семейством симплектоморфизмов, определяемых глобальным неавтономным гамильтонианом с компактным носителем. C^1 -близкое к L лагранжево подмногообразие можно рассматривать как лагранжево сечение расслоения T^*L . Это сечение гамильтоново изотопно L , если соответствующая ему 1-форма на L точна. Пусть $i_t: M \rightarrow T^*M$ — лагранжева изотопия L в нулевое сечение: $i_0 M = L$, $i_1 M = M \subset T^*M$. Пусть $\alpha_t = i_t^* \alpha$, где α — каноническая 1-форма на T^*M , s_t — соответствующее α_t лагранжево сечение T^*M . Композиция i_t с послойным сдвигом в T^*M на векторы сечения $s_0 - s_t$ дает такую лагранжеву изотопию L в s_0 , при которой интегралы канонической 1-формы α по циклам на L сохраняются. Поэтому L гамильтоново изотопно лагранжеву сечению s_0 .

Мы можем принять это лагранжево сечение за нулевое. Поэтому теорема 1 вытекает из теоремы 2 и следующей замечательной теоремы Сикорава.

Л е м м а 4 [5]. Лагранжево подмногообразие $L \subset T^*M$, совпадающее с нулевым сечением вне компакта и гамильтоново изотопное ему, можно задать производящим семейством, квадратичным на бесконечности.

Из теоремы Сикорава следует, в частности, гипотеза Арнольда о лагранжевых пересечениях [2]. Подобно ряду других новейших достижений симплектической топологии, эта теорема доказывается конечномерной аппроксимацией «производящего семейства» функций, определенных на пространстве путей с помощью функционала действия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маслов В. П. Теория возмущений и асимптотические методы. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1965.
2. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1974.
3. Арнольд В. И., Гивенталь А. Б. // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 4. М.: ВИНТИ, 1985. С. 5—139.
4. Фоменко А. Т. Дифференциальная геометрия и топология. Дополнительные главы. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983.
5. Sikorav J.-C. // C. R. Acad. Sci. Ser. 1. — 1986. V. 302, № 3. — P. 119—122.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило в редакцию
23 июня 1986 г.