А. А. Феликсон, О сигнатуре Терстона, VMH, 1997, том 52, выпуск 4(316), 217–218

DOI: https://doi.org/10.4213/rm877
Впервые [4] В. Терстон рассмотрел пространство \( E(a_1, \ldots, a_n) \) таких евклидовых метрик на сфере \( S^2 \), у которых особенности являются коническими точками с заданными кривизнами \( 2\pi a_j, 0 < a_i < 1, i = 1, \ldots, n, n > 3 \). Числа \( a_i \) называют сигнатурами евклидовой метрики с особенностями.

Хорошо известно, что \( \sum a_i = 2 \). Нормируя метрики с данной сигнатуруй, условием равенства одинаковых площадей сферы, В. Терстон оформили условия на сигнатуру, при которых пространство \( E(a_1, \ldots, a_n) \) окладывается комплексными гиперболическим орбифолом конечного объема, т.е. фактор- пространство \( B^n / \Gamma \) компактного шара \( B^n \) по дискретной решетке его автоморфизмов. Эти условия таковы:

1. \( a_i \in \mathbb{Q}, 0 < a_i < 1, i = 1, \ldots, n, (a_i - p_i/q_i, p_i < q_i \in \mathbb{N}); \)
2. \( \sum_{i=1}^n a_i = 2; \)
3. \( a_i + a_j < 1, a_i \neq a_j \Rightarrow \frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_j} \in \mathbb{Z} \) (т.е. \( a_i + a_j = 1 - \frac{1}{k_{ij}} \) и \( k_{ij} \in \mathbb{Z} \));
4. \( a_i + a_j < 1, a_i \neq a_j, i \neq j \Rightarrow \frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_j} \in \frac{1}{2} \mathbb{Z} \) (т.е. \( a_i + a_j = 1 - \frac{1}{k_{ij}} \) и \( k_{ij} \in \mathbb{Z} \)).

Возникает естественная задача: какую кривизну имеют такие сигнатуры? Два, \( n = 4 \) существует бесконечное число сигнатуров Терстона (см. [2], [4]). Для \( n \geq 5 \) список таких сигнатуров конечен. Он перечислен в книге [5], но был недоступен. Позднее он был упущен Терстоном, сделавшим полный компьютерный перебор для значений \( a_i \), и в которых наименьший общий знаменатель не превышает 256. Но не было доказано, что нет таких сигнатуров с общим знаменателем, большим 256. Основной результат данной работы — доказательство их отсутствия, основанное на элементарных теоремах-и-численике соображений.

Автор благодарит за помощь В. Б. Шварцмана.

**Обозначения.** Перепишем условие (2), сокращив в равные слагаемые и разделив их по основанию:

\[ l_1 a_1 + \cdots + l_r a_r + a_{r+1} + \cdots + a_{r+s} = 2, \]

где \( a_i \neq a_j \) при \( i \neq j, l_i > 1, l_i \in \mathbb{N}; a_1 < a_2 < \ldots < a_r; a_{r+1} < \cdots < a_{r+s}. \)

Все буквы, кроме \( a_i \), в дальнейшем означают натуральные числа.

**Ограничение числа слагаемых.**

**Лемма 1.** Пусть \( a_1 < a_2 < a_3 \) и набор \( a_i \) является решением задачи. Тогда либо \( a_1 + a_2 + a_3 > 1 \), либо \( (a_1, a_2, a_3) = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \) и \( a_4 \leq 6 \) (а значение, \( n \leq 12 \)).

**Доказательство.** Пусть \( a_1 < a_2 < a_3 \) — наименьшие различные числа в наборе. Пусть \( a_1 + a_2 + a_3 \leq 1 \). Тогда \( a_i + a_j < 1 \) (при \( i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j \Rightarrow a_i + a_j = 1 - \frac{1}{k_{ij}}, a_1 + a_3 = 1 - \frac{1}{k_2}, a_2 + a_3 = 1 - \frac{1}{k_2} \)).

Так как \( a_1 + a_2 < a_1 + a_3 \) и \( a_1 + a_3 \), то \( k_1 \leq k_2 \leq k_3 \).

Так как \( a_1 + a_2 + a_3 \leq 1 \), то \( 3 - \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_3} \leq 2, \text{ t.e. } 1 \leq \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_1} \).

Так как \( k_1 < k_2 < k_3 \), то тройка \((k_1, k_2, k_3)\) имеет одно из следующих значений: a) \((2, 3, 4),\)
b) \((2, 3, 5)\), с) \((2, 3, 6)\).

Выражай \((a_1, a_2, a_3)\) через \((k_1, k_2, k_3)\), получим:

В случае a) \((\frac{1}{k_1}, \frac{1}{k_2}, \frac{1}{k_3})\), в случае b) \((\frac{1}{k_1} - \frac{2}{k_2}, \frac{2}{k_2}, \frac{1}{k_3})\), в случае c) \((\frac{1}{k_1}, \frac{1}{k_2}, \frac{1}{k_3})\).

В случаях a) и b) по условию (4) \( l_1 - 1 > l_2 - 1 \). Значит, \( a_5 \geq a_4 \geq a_3 \). В случае a) \( a_5 < 2 - (a_1 + a_2 + 2a_3) = \frac{1}{k_1} < a_3 \) — противоречие.

В случае b) противоречий условий (1)-(4) убеждается, что \( a_4 \neq a_3 \). Но тогда \( a_1 + a_2 + a_4 > 1 \) (вследуем иначе \( a_1 + a_2 + a_4 = 1 \)).

Т.е. \( a_3 = 1 - \frac{k_1}{2}, a_2 + a_3 = 1 - \frac{k_1}{2}, a_1 + a_2 + a_3 = 1 - \frac{k_1}{2} \Rightarrow a_5 = \frac{31}{m} - \frac{1}{m} > \frac{11}{m} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m} \Rightarrow k \leq 6 \Rightarrow k = 5 \) (инчо же не удовлетворяют уравнению \( \frac{2}{k} - \frac{1}{k} \) — противоречие.

В случае c) выше только показано, что \( r + s < 4 \) (тогда \( a_4 = 2 - \sum_{i=1}^3 l_ia_i \) и \( a_4 \leq 6 \).

Действительно, если \( a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 \), то \( a_4 + a_5 > 1 \) и \( \sum a_i > 2 \).
Замечание 1. В дальнейшем можно считать, что \( a_1 < a_2 < a_3 \Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 > 1 \).

Лемма 2. \( r \leq 2 \). \( \sum_{i=1}^{r} l_i \leq 12 \).

Доказательство. Пусть \( r \geq 3 \). Тогда \( \sum_{i=1}^{r} l_i \geq 1 \), что невозможно по лемме 1 (с учетом замечания). Значит, \( r < 3 \).

Так как при \( i \leq r \) либо \( a_i \geq \frac{1}{2} \), либо \( a_i = \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2} \leq \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \), то \( \sum_{i=1}^{r} l_i \leq 12 \).

Лемма 3. \( r + s < 6 \).

Доказательство. Пусть \( r + s \geq 6 \). По лемме 1 \( a_1 + a_2 + a_3 > 1 \) и \( a_4 + a_5 + a_6 > 1 \), что противоречит тому, что \( \sum_{i=1}^{6} a_i \leq 2 \).

Ограничение знаменателей.

Для каждого из возможных значений \( r + s \) надо показать, что \( q_i < 200 \). Метод доказательства продемонстрирован на примере простого случая - \( r + s = 5 \).

Лемма 4 (рекурсивная). Пусть \( \frac{1}{r} \geq \frac{1}{12} + \frac{1}{m} \) или \( \frac{1}{r} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{m} \).

1) Пусть \( \frac{1}{r} = \frac{1}{12} + \frac{1}{m} \). Тогда с точностью до перестановок пройдя \( (k, l, m) \) при

является одно из следующих значений: \( (6, 6, 1), (5, 5, 10), (4, 8, 8), (4, 6, 12), (4, 5, 20), (3, 12, 12), (3, 10, 15), (3, 9, 18), (3, 8, 24), (3, 7, 42) \).

2) Пусть \( \frac{1}{r} = \frac{1}{2} + \frac{1}{m} \) и \( k < l \leq m \). Тогда пройдя \( (k, l, m) \) при

является одно из следующих значений: \( (6, 10, 15), (6, 9, 18), (6, 8, 24), (6, 7, 42), (5, 12, 20), (5, 10, 30), (5, 9, 45), (5, 8, 120), (4, 21, 28), (4, 20, 30), (4, 18, 36), (4, 16, 48), (4, 16, 60), (4, 14, 84), (4, 13, 156) \).

Доказательство. Докажем первое утверждение леммы. Пусть \( k \leq l \leq m \). Тогда \( \frac{1}{r} \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{3} \).

При каждом допустимом значении \( k \) имеем \( \frac{1}{k} \geq \frac{1}{r} \geq \frac{1}{12} + \frac{1}{m} \). Проверка для всех допус

тимых пар \( (k, l) \) (их конечное число) условие \( \frac{1}{r} > \frac{1}{k} \) и \( \frac{1}{r} > \frac{1}{m} \) сводится к видимым решениям.

Второе утверждение леммы доказывается аналогично.

Лемма 5. Пусть \( r + s = 5 \). Тогда \( q_i \leq 84 \).

Доказательство. Пусть \( a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 \). Пусть \( r > 0 \). Тогда по лемме 1

\( a_1 + a_2 + a_3 > 1 \) и \( a_4 + a_5 > 1 \), что противоречит тому, что \( \sum_{i=1}^{5} a_i \leq 2 \). Значит, \( r = 0 \).

Так как суммы любых трех различных слагаемых больше единицы, то сумма двух оставшихся \( \leq \frac{1}{3} \), удовлетворяют условию \( \frac{1}{r} > \frac{1}{k} \), \( \frac{1}{r} > \frac{1}{m} \) и \( \frac{1}{r} > \frac{1}{12} \).

Так как \( 4 - 2(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6) \), то \( \frac{1}{r} > \frac{2}{m} + \frac{1}{12} \). Так как \( \frac{1}{r} > \frac{2}{m} + \frac{1}{12} \) - наиболее из строго убывающих слагаемых, то \( \frac{1}{r} > \frac{3}{k} \), т.е. \( k = 3 \) или \( k = 4 \).

Аналогично, при разбиении \( 4 - 2(a_1 + a_3) + (a_2 + a_4) + (a_5 + a_6) \) получаем, что \( w < 3 \) или \( w = 4 \). Так как \( k \leq w \), то \( k = 3 \), \( w = 4 \). Итак, \( \frac{1}{r} > \frac{1}{m} + \frac{1}{12} \) и \( \frac{1}{r} = \frac{1}{m} + \frac{1}{12} \) не превосходит 42. Выражение \( a_3 + a_4 + a_5 \) и \( a_2 + a_4 + a_5 \) через эти числа \( k \) и \( w \), получаем, что общий знаменатель чисел \( a_2, a_3, a_4 \) и \( a_5 \) не превосходит 84. Но тогда \( nq_i \geq 84 \).

Список литературы


Примечание после статьи

02.07.1997