В. И. Арнольд, О характеристическом классе, входящем в условия квантования, *Функц. анализ и его прил.*, 1967, том 1, выпуск 1, 1–14

Функциональный анализ и его приложения,
т. 1, вып. 1, 1967, 1—14.

О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОМ КЛАССЕ, ВХОДЯЩЕМ В УСЛОВИЯ КВАНТОВАНИЯ

В. И. Арнольд

Недавно В. П. Маслов дал математически строгую трактовку многомерных асимптотических методов «квазиклассического» типа в целом, т. е. при любом числе сопряженных точек [1], [2]. Оказалось, что в асимптотических формулах участвуют некоторые целые числа, отражающие гомологические свойства кривых на поверхностях фазового пространства и тесно связанные с индексами Морса соответствующих вариационных задач. В частности, Маслов определил одномерный класс целочисленных когомологий, значения которого на базисных циклах входят в так называемые «условия квантования».

В настоящей заметке даются новые формулы для вычисления этого класса когомологий. Характеристическим этот класс является в категории вещественных векторных пучков, комплексификация которых тривиальна и тривиализована, а также в некоторых более широких категориях.

§ 1. Обозначения

1.1. Фазовое пространство. *Фазовым пространством* назовем $2n$-мерное вещественное арифметическое пространство

$$\mathbf{R}^{2n} = \{x\}, \quad x = q,\ p; \quad q = q_1, \ldots, q_n; \quad p = p_1, \ldots, p_n.$$

В $\mathbf{R}^{2n}$ будут рассматриваться следующие три структуры:

1. *Евклидова структура*, заданная скалярным квадратом

$$(x,\ x) = p^2 + q^2.$$

2. *Комплексная структура*, заданная оператором

$$I\colon\ \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n},\ I(p,\ q) = (-q,\ p); \quad z = p + iq, \quad \mathbf{C}^n = \{z\}.$$

3. *Симплектическая структура*, заданная кососкалярным произведением

$$[x,\ y] = (Ix,\ y) = -[y,\ x]. \tag{1}$$

Группы автоморфизмов $\mathbf{R}^{2n}$, сохраняющих эти структуры, называются соответственно *ортогональной группой* $\mathbf{O}(2n)$, *комплексной линейной группой* $\mathbf{GL}(n,\ \mathbf{C})$ и *симплектической группой* $\mathbf{Sp}(n)$. Из формулы (1) вытекает

Лемма 1.1. *Автоморфизм, сохраняющий две из трех структур, сохраняет и третью, так что*

$$\mathbf{O}(2n) \cap \mathbf{GL}(n,\ \mathbf{C}) = \mathbf{GL}(n,\ \mathbf{C}) \cap \mathbf{Sp}(n) = \mathbf{Sp}(n) \cap \mathbf{O}(2n) = \mathbf{U}(n).$$

Автоморфизмы, сохраняющие две (и, значит, все три) структуры, образуют *унитарную группу* $\mathbf{U}(n)$. Определитель det унитарного автоморфизма есть комплексное число с модулем 1. Таким образом, возникает отображение $\mathbf{U}(n)$ на окружность,

$$\mathbf{SU}(n) \to \mathbf{U}(n) \xrightarrow{\det} \mathbf{S}^1, \tag{2}$$

которое, очевидно, является расслоением (слой — группа $\mathbf{SU}(n)$ унитарных автоморфизмов с определителем 1).

1.2. Лагранжев грассманиан $\Lambda(n)$. Рассмотрим n-мерную плоскость $\mathbf{R}^n \subset \mathbf{R}^{2n}$. Она называется *лагранжевой*, если кососкалярное произведение любых двух векторов из $\mathbf{R}^n$ равно нулю. Например, плоскости $p=0$ и $q=0$ лагранжевы *).

Многообразие всех (неориентированных) лагранжевых подпространств $\mathbf{R}^{2n}$ назовем *лагранжевым грассманианом* $\Lambda(n)$.

С комплексной точки зрения лагранжевы плоскости можно назвать вещественно-подобными, так как справедлива

Лемма 1.2. *Унитарная группа* $\mathbf{U}(n)$ *действует на* $\Lambda(n)$ *транзитивно, со стационарной подгруппой* $\mathbf{O}(n)$.

Доказательство. Пусть λ — лагранжева плоскость. Ввиду (1) это значит, что плоскость $I\lambda$ ортогональна λ. Пусть $\lambda' \in \Lambda(n)$ и ξ, ξ' — ортонормальные реперы в λ, λ'. Тогда автоморфизм $\mathbf{R}^{2n}$, переводящий ξ в ξ' и $I\xi$ в $I\xi'$, унитарен.

Из доказанной леммы вытекает, что $\Lambda(n)$ есть многообразие, $\Lambda(n) = \mathbf{U}(n)/\mathbf{O}(n)$; итак, построено расслоение

$$\mathbf{O}(n) \to \mathbf{U}(n) \to \Lambda(n). \tag{3}$$

1.3. Отображение Det^2: $\Lambda(n) \to S^1$. Определитель ортогонального автоморфизма $A \in \mathbf{O}(n) \subset \mathbf{U}(n)$ равен ± 1. Поэтому *квадрат* определителя унитарного автоморфизма, переводящего плоскость $p=0$ в лагранжеву плоскость λ, зависит только от λ. Тем самым построено отображение

$$\mathrm{Det}^2\colon \Lambda(n) \to S^1.$$

Обозначим через $S\Lambda(n)$ множество лагранжевых плоскостей $\lambda \in \Lambda(n)$ с $\mathrm{Det}^2 \lambda = 1$. На этом множестве транзитивно действует группа $\mathbf{SU}(n)$ унитарных унимодулярных автоморфизмов, и стационарная подгруппа любой точки изоморфна группе вращений $\mathbf{SO}(n)$. Поэтому $S\Lambda(n) = \mathbf{SU}(n)/\mathbf{SO}(n)$ есть многообразие.

Таким образом, мы получили диаграмму из шести расслоений (очевидным образом коммутативную):

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{SO}(n) & \to & \mathbf{O}(n) & \xrightarrow{\det} & S^0, \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathbf{SU}(n) & \to & \mathbf{U}(n) & \xrightarrow{\det} & S^1, \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow z^2 \\
S\Lambda(n) & \to & \Lambda(n) & \xrightarrow{\mathrm{Det}^2} & S^1,
\end{array}$$

где z^2 — отображение окружности ($z = e^{i\varphi} \to e^{2i\varphi} = z^2$).

1.4. Класс когомологий $\alpha \in H^1(\Lambda(n), \mathbf{Z})$.

Лемма 1.4.1. *Фундаментальная группа* $\Lambda(n)$ — *свободная циклическая.*

$$\pi_1(\Lambda(n)) = \mathbf{Z},$$

и ее образующая переходит в образующую S^1 *при отображении, индуцированном* Det^2.

*) Название происходит от «скобок Лагранжа» в классической механике.

Доказательство получается из точных гомотопических последовательностей левого столбца и нижней строки диаграммы из п. 1.3.

Следствие 1.4.2. *Группы одномерных гомологий и когомологий* $\Lambda(n)$ — *свободные циклические*:

$$H_1(\Lambda(n),\ \mathbf{Z}) \simeq H^1(\Lambda(n),\ \mathbf{Z}) \simeq \pi_1(\Lambda(n)) \simeq \mathbf{Z}.$$

За образующую α *группы когомологий* $H^1(\Lambda(n),\ \mathbf{Z})$ *примем число оборотов* Det^2, *т. е. коцикл, значение которого на замкнутой кривой* $\gamma\colon S^1 \to \Lambda(n)$ *равно степени сквозного отображения*

$$S^1 \xrightarrow{\gamma} \Lambda(n) \xrightarrow{\mathrm{Det}^2} S^1.$$

(Здесь S^1 — окружность $e^{i\varphi}$, ориентированная в сторону возрастания φ.)

Пример 1.4.3. Пусть λ — лагранжева плоскость: $\lambda \in \Lambda(n)$. Рассмотрим автоморфизмы $e^{i\varphi}E \in \mathbf{U}(n)$. Лагранжевы плоскости $e^{i\varphi}\lambda$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$ образуют замкнутую кривую $\gamma\colon S^1 \to \Lambda(n)$, так как $e^{i\pi}E = -E$.

Значение класса α *на кривой* γ *равно* n.

Действительно, $\det(e^{i\varphi}E) = e^{in\varphi}$, поэтому $\mathrm{Det}^2 e^{i\varphi}\lambda = e^{2in\varphi}\,\mathrm{Det}^2\,\lambda$.

1.5. Лагранжевы многообразия. Пусть M есть n-мерное подмногообразие фазового пространства $\mathbf{R}^{2n}$. Многообразие M называется *лагранжевым*, если его касательная плоскость в каждой точке лагранжева. Например, в случае $n = 1$ всякая кривая M на фазовой плоскости $\mathbf{R}^2$ лагранжева.

Пусть M — лагранжево многообразие. Рассмотрим тангенциальное отображение

$$\tau\colon\ M \to \Lambda(n),$$

переводящее каждую точку $x \in M$ в подпространство $\tau x \in \Lambda(n)$, параллельное касательной плоскости к M в x.

Введенный выше класс когомологий $\alpha \in H^1(\Lambda(n),\ \mathbf{Z})$ индуцирует на M класс одномерных когомологий

$$\alpha^* = \tau^*\alpha \in H^1(M,\ \mathbf{Z}).$$

Значение α^* на ориентированной замкнутой кривой $\gamma\colon S^1 \to M$ определяется как число оборотов квадрата определителя касательной плоскости, т. е. как степень сквозного отображения

$$S^1 \xrightarrow{\gamma} M \xrightarrow{\tau} \Lambda(n) \xrightarrow{\mathrm{Det}^2} S^1.$$

Целью настоящей заметки является доказательство следующего утверждения.

Теорема 1.5. *Класс когомологий* $\alpha^* \in H^1(M, \mathbf{Z})$ *совпадает с «индексом замкнутых кривых на лагранжевом многообразии* M» ind, *введенным Масловым в* [1].

§ 2. Доказательство теоремы 1.5

Индекс Маслова определяется им как индекс пересечения с некоторым двусторонним $(n-1)$-мерным циклом на M^n — циклом особенностей.

2.1. Цикл особенностей. Пусть M есть n-мерное лагранжево многообразие. Рассмотрим проекцию $f\colon M \to \mathbf{R}^n$ многообразия M на плоскость $p = 0$: $f(p,\ q) = q$. Множество Σ точек M, где ранг дифференциала f меньше n, называется *особенностью* отображения f. Относительно особенности Σ Маслов формулирует следующие утверждения 1 — 5 (доказательства даны ниже, в § 3 и 4).

Теорема 2.1. *Сколь угодно малым унитарным поворотом многообразие M можно привести в «общее положение» относительно проектирования f, так что будут справедливы следующие утверждения*:

Утверждение 1. *Особенность Σ состоит из открытого $(n-1)$-мерного многообразия Σ^1, где df имеет ранг $n-1$, и границы $(\Sigma-\Sigma^1)$ размерности строго меньше $n-2$, так что Σ определяет $(n-1)$-мерный (неориентированный) цикл в M.*

Утверждение 2. *Этот цикл Σ лежит в M двусторонне.*

Выбор положительной стороны Σ можно провести следующим образом.

Утверждение 3. *В окрестности точки $x\in\Sigma^1$ лагранжево многообразие M задается n уравнениями вида*

$$q_k = q_k(p_k,\ q_{\hat{k}}),\ p_{\hat{k}}\ (p_k,\ q_{\hat{k}}),$$

где $\hat{k}=1,\ 2,\ \ldots,\ k-1,\ k+1,\ \ldots,\ n$ при некотором k, $1\leqslant k\leqslant n$.

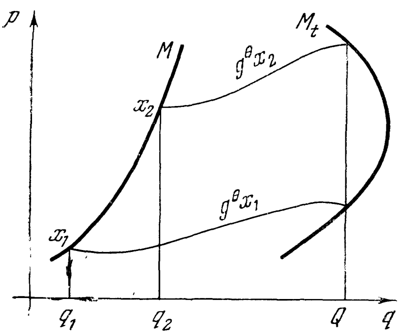

Рис. 1.

Очевидно, в окрестности такой точки x особенность Σ^1 задается уравнением $\dfrac{\partial q_k}{\partial p_k}=0$.

Утверждение 4. *При переходе через Σ^1 величина $\dfrac{\partial q_k}{\partial p_k}$ меняет знак.*

Оказывается, за положительную сторону Σ^1 можно принять ту, где $\dfrac{\partial q_1}{\partial p_1}>0$.

Утверждение 5. *Такое определение положительной стороны корректно, т. е. не зависит от того, какой из координатных систем $p_k, q_{\hat{k}}$ $(k=1,\ \ldots,\ n)$ мы пользуемся.*

2.2. Индекс Маслова, $\operatorname{ind}\in H^1(M,\ \mathbf{Z})$. Пусть на лагранжевом многообразии M «общего положения» в смысле теоремы 2.1 дана кривая γ, трансверсальная циклу Σ, причем начало и конец γ неособые:

$$\partial\gamma = x_1 - x_0,\ x_1\notin\Sigma,\ x_0\notin\Sigma.$$

Индексом $\operatorname{ind}\gamma$ кривой γ Маслов называет ее индекс пересечения с Σ, т. е. число ν_+ точек перехода с отрицательной стороны на положительную минус число ν_- точек перехода с положительной стороны на отрицательную:

$$\operatorname{ind}\gamma = \nu_+ - \nu_-.$$

Пример. Пусть $n=1$, M — кривая на плоскости $p,\ q$ (рис. 1). Для M в общем положении Σ состоит из отдельных точек $a,\ b,\ c,\ \ldots$. Индексы кривых γ_i $(\partial\gamma_i = x_i - x_0)$ равны соответственно 0, 1, 0, 1, 2.

Теорема 2.2. *Индекс замкнутой ориентированной кривой γ на лагранжевом многообразии общего положения M зависит только от класса гомологий γ и является значением некоторого одномерного класса целочисленных когомологий M на цикле γ: $\operatorname{ind}\in H^1(M,\ \mathbf{Z})$.*

2.3. Индекс кривых на грассманиане $\Lambda(n)$. Доказательства сформулированных теорем (1.5, 2.1, 2.2) основаны на следующей конструкции.

В многообразии лагранжевых плоскостей $\Lambda(n)$ выделяются множества $\Lambda^k(n)$ плоскостей, имеющих k-мерное пересечение с фиксированной плоскостью $\sigma\in\Lambda(n)$ (а именно, плоскостью $q=0$). Оказывается, замыкание $\overline{\Lambda^1(n)}$ определяет цикл (неориентированный) коразмерности 1, см. п. 3.2.2.

В п. 3.5 доказывается

Основная лемма. *$\Lambda^1(n)$ лежит в $\Lambda(n)$ двусторонне, т. е. существует непрерывное векторное поле, трансверсальное к $\Lambda^1(n)$ и касательное к $\Lambda(n)$.*

Такое векторное поле строится с помощью орбит действия $S^1 = \{e^{i\theta}\}$ на $\Lambda(n)$. В § 3 доказана

Лемма 3.5.1. *Все окружности*

$$\theta \to e^{i\theta}\lambda, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \qquad \lambda \in \Lambda(n), \tag{4}$$

трансверсальны к $\Lambda^1(n)$.

За *положительную сторону* $\Lambda^1(n)$ выберем ту, куда обращены векторы скорости кривых (4).

Двусторонность $\Lambda^1(n)$ позволяет определить

$$\mathrm{Ind} \in H^1(\Lambda(n), \mathbf{Z})$$

как индекс пересечения ориентированных замкнутых кривых на $\Lambda(n)$ с $\overline{\Lambda^1(n)}$ (определение 3.6.1).

Индекс Ind связывает индекс Маслова ind и класс когомологий α из п. 1.4. А именно, оказывается, что выбор положительной стороны $\Lambda^1(n)$ с помощью кривых (4) согласован с определением положительной стороны Σ^1 из п. 2.1. В § 4 доказывается

Лемма 4.3.1. *Индекс* Ind *порождает индекс Маслова* ind *при тангенциальном отображении* τ: $M^n \to \Lambda(n)$; $\mathrm{ind} = \tau^*\mathrm{Ind}$, *т. е. для каждой кривой* γ: $S^1 \to M$ *имеем* $\mathrm{ind}\,\gamma = \mathrm{Ind}\,\tau\gamma$.

Доказательство теоремы 1.5. Вычисление индекса кривых (4) (см. пример 3.6.2) дает $\mathrm{Ind}\,\gamma = n = \alpha(\gamma)$ (пример 1.4.3). Но $H^1(\Lambda(n), \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$ (следствие 1.4.2). Значит, $\mathrm{Ind} = \alpha$. По лемме 4.3.1 $\mathrm{ind} = \tau^*\mathrm{Ind}$, а по определению 1.5 $\alpha^* = \tau^*\alpha$. Итак, $\mathrm{ind} = \alpha^*$, что и требовалось доказать.

§ 3. Доказательство основной леммы

В этом параграфе доказывается двусторонность цикла особенности $\overline{\Lambda^1(n)}$ и определяется индекс $\mathrm{Ind} \in H^1(\Lambda(n), \mathbf{Z})$.

3.1. Производящие функции. Пусть M — многообразие в фазовом пространстве, которое в односвязной окрестности точки $q = q_0$, $p = p_0$ задается уравнением вида $p = p(q)$.

Лемма 3.1.1. *Чтобы многообразие M было лагранжевым, необходимо и достаточно существование «производящей функции» $s(q)$ такой, что*

$$p = \frac{\partial s}{\partial q}. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $s(q) = \int\limits_{q_0}^{q} p(q)\,dq$. Независимость интеграла от пути эквивалентна обращению в 0 на M производной $d(p\,dq) = dp \wedge dq$. Но значение $dp \wedge dq$ на бивекторе $\xi \wedge \eta$ равно как раз кососкалярному произведению $[\xi, \eta]$, так что равенство $dp \wedge dq$ нулю на M эквивалентно лагранжевости M. Функция $s(q)$ удовлетворяет (5), что и доказывает лемму.

Замечание 3.1.2. Функция $s(q)$ определена с точностью до постоянного слагаемого. В частном случае, когда M — подпространство, это слагаемое можно выбрать так, что $s(q)$ — квадратичная форма. Отсюда вытекает

Следствие 3.1.3. *Множество лагранжевых подпространств вида $p = p(q)$* (т. е. трансверсальных плоскости $q = 0$) *составляет в многообразии $\Lambda(n)$ открытую клетку $\Lambda^0(n)$, диффеоморфную линейному прост-*

ранству D всех вещественных симметрических матриц порядка n. Диффеоморфизм устанавливается отображением

$$\varphi\colon\ D \to \Lambda^0(n),\quad \varphi(S) = \lambda_S \quad (S \in D,\ \lambda_S \in \Lambda^0(n)),$$

где λ_S означает плоскость $p = Sq$.

Доказательство получается из (5) при $s(q) = \frac{1}{2}(Sq,\ q)$.

Пространство симметрических матриц D есть $\mathbf{R}^{n(n+1)/2}$. Поэтому доказано Следствие 3.1.4. *Многообразие $\Lambda(n)$ имеет размерность*

$$\dim \Lambda(n) = n(n+1)/2.$$

3.2. Цикл особенностей $\overline{\Lambda^1(n)}$.

Обозначение 3.2.0. Пусть σ — лагранжева плоскость $q = 0$. Обозначим через $\Lambda^k(n)$ *множество всех лагранжевых плоскостей $\lambda \in \Lambda(n)$, пересечение которых с плоскостью σ k-мерно.*

Лемма 3.2.1. *Множество $\Lambda^k(n)$ является открытым многообразием коразмерности $k(k+1)/2$ в лагранжевом грассманиане $\Lambda(n)$.*

Доказательство. Сопоставим с каждой плоскостью $\lambda \in \Lambda^k(n)$ ее пересечение с плоскостью σ. Возникает отображение $\Lambda^k(n)$ на многообразие Грассмана $G_{n,k}$ всех k-мерных подпространств n-мерного пространства σ. Легко проверить, что это отображение определяет расслоение

$$\Lambda^0(n-k) \to \Lambda^k(n) \to G_{n,k}.$$

По следствию 3.1.4 $\dim\Lambda^0(n-k) = \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$. Так как $\dim G_{n,k} = k(n-k)$, то находим

$$\dim \Lambda^k(n) = \frac{(n-k)(n-k+1)}{2} + k(n-k) = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{k(k+1)}{2} = \dim \Lambda(n) - \frac{k(k+1)}{2},$$

что и требовалось доказать.

Следствие 3.2.2. *$\overline{\Lambda^1(n)}$ определяет цикл (неориентированный) коразмерности 1 в $\Lambda(n)$.*

Доказательство. Многообразие $\Lambda(n)$ можно считать алгебраическим. Замыкание $\overline{\Lambda^1(n)} = \bigcup_{k\geqslant 1} \Lambda^k(n)$ — его алгебраическое подмногообразие коразмерности 1 ($k(k+1)/2 \geqslant 1$ при $k \geqslant 1$). Поэтому $\overline{\Lambda^1(n)}$ определяет некоторую (неориентированную) цепь. Особенность алгебраического многообразия $\overline{\Lambda^1(n)}$ есть алгебраическое подмногообразие $\overline{\Lambda^2(n)} = \bigcup_{k\geqslant 2} \Lambda^k(n)$ коразмерности 3 в $\Lambda(n)$, так как $k(k+1)/2 \geqslant 3$ при $k \geqslant 2$. Итак, гомологическая граница цепи $\overline{\Lambda^1(n)}$ равна 0, что и требовалось доказать.

3.3. Координаты на $\Lambda(n)$. Рассмотрим лагранжеву плоскость $\lambda \in \Lambda(n)$. Пусть $\lambda \in \Lambda^k(n)$, т. е. пересечение $\lambda \cap \sigma$ k-мерно. Введем координаты на $\Lambda(n)$ в окрестности λ.

Обозначение 3.3.0. Пусть K — подмножество множества $1, 2, \ldots, n$. Обозначим через σ_K лагранжеву координатную плоскость

$$\sigma_K = \{p,\ q\colon\ p_k = 0, \quad q_l = 0 \quad \forall\, k \in K,\ \forall\, l \in K\}.$$

Лемма 3.3.1. *Плоскость $\lambda \in \Lambda^k(n)$ трансверсальна одной из C_n^k координатных плоскостей σ_K, где K имеет k элементов.*

Доказательство. Пересечение $\lambda \cap \sigma = \lambda_0$ k-мерно. Следовательно, плоскость λ_0 в σ трансверсальна одной из C_n^k $(n-k)$-мерных координатных плоскостей $\tau = \sigma_K \cap \sigma$, т. е. при некотором K будет $\lambda_0 \cap \sigma_K \cap \sigma = 0$. Докажем, что плоскость σ_K трансверсальна λ: $\sigma_K \cap \lambda = 0$.

По условию, $\lambda_0 + \tau = \sigma$. Из лагранжевости λ и σ_K вытекает $[\lambda, \lambda_0] = 0$ (так как $\lambda_0 \subset \lambda$) и $[\sigma_K, \tau] = 0$ (так как $\tau \subset \sigma_K$). Значит, $[\lambda \cap \sigma_K, \lambda_0 + \tau] = 0$, т. е. $[\lambda \cap \sigma_K, \sigma] = 0$. Но наибольшее число попарно косоортогональных независимых векторов в $\mathbf{R}^{2n}$ равно n. Поэтому n-мерная плоскость σ — максимальная себе косоортогональная плоскость, значит, $(\lambda \cap \sigma_K) \subset \sigma$. Итак, $(\lambda \cap \sigma_K) \subseteq (\lambda \cap \sigma \cap \sigma_K) = (\lambda_0 \cap \tau) = 0$, что и требовалось доказать.

Из доказанной леммы вытекает, что каждая плоскость $\lambda \in \Lambda(n)$ трансверсальна одной из 2^n координатных плоскостей σ_K. Это позволяет составить атлас $\Lambda(n)$ из 2^n карт.

Одна из карт построена в п. 3.1.1: область $\Lambda^0(n)$ диффеоморфна пространству симметрических матриц $D = \mathbf{R}^{n(n+1)/2}$, причем диффеоморфизм φ: $D \to \lambda^0(n)$ определен как

$$\varphi(S) = \lambda_S = \{p, q : p = Sq\} \quad \forall S \in D.$$

Обозначение 3.3.2. Обозначим через I_K оператор умножения на i переменных $z_\varkappa = p_\varkappa + iq_\varkappa$, $\varkappa \in K$:

$$I_K\colon \ \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n},$$

и для $\eta = I_K \xi$

$$q_\varkappa(\eta) = +p_\varkappa(\xi), \quad p_\varkappa(\eta) = -q_\varkappa(\xi), \quad \forall \varkappa \in K,$$

$$q_\nu(\eta) = q_\nu(\xi), \quad p_\nu(\eta) = p_\nu(\xi), \quad \forall \nu \bar{\in} K.$$

Оператор I_K унитарен, поэтому лагранжевы плоскости он переводит в лагранжевы. В частности, $I_K \sigma = \sigma_K$. Таким образом, I_K переводит множество $\Lambda^0(n)$ плоскостей, трансверсальных σ, в множество плоскостей $I_K \Lambda^0(n)$, трансверсальных σ_K. Итак, формула

$$\varphi_K(S) = I_K \lambda_S \in \Lambda(n), \quad S \in D, \tag{6}$$

задает диффеоморфизм φ_K: $D \to I_K \Lambda^0(n)$, где $I_K \Lambda^0(n)$ есть множество всех лагранжевых плоскостей, трансверсальных σ_K.

По лемме 3.3.1 2^n областей $I_K \Lambda^0(n)$ покрывают $\Lambda(n)$ целиком, так что формулы (6) доставляют атлас $\Lambda(n)$ из 2^n карт.

Лемма 3.3.3. *Множество $\Lambda^k(n)$ покрыто C_n^k картами $\varphi_K D$ (K из k элементов) и в координатах $S = \varphi_K^{-1}\lambda$ задается $k(k+1)/2$ линейными уравнениями $S_{\mu\nu} = 0$ ($\forall \mu \in K$, $\forall \nu \in K$).*

Доказательство. Пусть $\dim \lambda \cap \sigma = k$. По лемме 3.3.1 $\lambda \cap \sigma_K = 0$ при некотором K из k элементов. Поэтому плоскость $I_K \lambda = I_K^{-1} \lambda$ трансверсальна σ и имеет уравнение $p = Sq$. Пересечение $(I_K \lambda) \cap \sigma_K = I_K(\lambda \cap \sigma)$ имеет размерность k. Но на σ_K имеем $q_l = 0$ ($\forall l \bar{\in} K$), $p_m = 0$ ($\forall m \in K$). Поэтому на k-мерном подпространстве $q_l = 0$ ($l \bar{\in} K$) плоскости $p = 0$ k функций p_μ ($p = Sq$, $\mu \in K$) должны тождественно обращаться в нуль. Это эквивалентно уравнениям $S_{\mu\nu} = 0$, что и требовалось доказать.

3.4. Унитарная параметризация. Через координаты S, введенные выше, можно выразить унитарные преобразования, переводящие «чисто мнимую» плоскость $p = 0$ в плоскость $\lambda_S \in \Lambda^0(n)$. Очевидна

Лемма 3.4.1. *Пусть S, U — квадратные $n \times n$ матрицы с комплексными элементами. Тогда*

$$\left(U = \frac{E - iS}{E + iS} \right) \Leftrightarrow \left(S = -i \frac{E - U}{E + U} \right), \tag{7}$$

и для S, U, связанных формулами (7),

самосопряженность S эквивалентна унитарности U,

симметричность S эквивалентна симметричности U.

Итак, формулы (7) устанавливают диффеоморфизм между пространством D вещественных симметрических матриц S и многообразием унитарных симметрических неособых матриц U. (Унитарная матрица U неособая, если среди ее собственных чисел нет -1; для вещественных симметрических S всегда $\det(E + iS) \neq 0$.)

Из неособых унитарных матриц можно извлекать квадратный корень, определяя его по непрерывности, начиная с $\sqrt{E} = E$.

Лемма 3.4.2. *Пусть $\lambda_S \in \Lambda^0(n)$ — плоскость $p = Sq$. Тогда матрица*

$$\sqrt{U} = \frac{E - iS}{\sqrt{E + S^2}}$$

задает унитарное преобразование, переводящее плоскость $p = 0$ в плоскость λ_S.

Доказательство. Так как S симметрична и вещественна, то $\sqrt{E + S^2}$ вещественен, и $\sqrt{U}$ переводит плоскость $p = 0$ туда же, куда и $E - iS$. Последнее преобразование переводит точку

$$(0, q) \in \mathbf{R}^{2n}, \quad \text{т. е.} \quad iq \in i\mathbf{R}^n \subset \mathbf{C}^n,$$

в точку

$$iq + Sq \in \mathbf{C}^n, \quad \text{т. е.} \quad (Sq, q) \in \lambda_S \subset \mathbf{R}^{2n},$$

что и требовалось доказать.

Следствие 3.4.3. *Отображение* Det^2: $\Lambda(n) \to S^1$ *из* п. 1.3 *задается формулой*

$$\mathrm{Det}^2 \lambda_S = \det \frac{E - iS}{E + iS}.$$

Следствие 3.4.4. *Симметрическая неособая унитарная матрица U, для которой $\sqrt{U}$ переводит плоскость $p = 0$ в плоскость λ, определена этой плоскостью $\lambda \in \Lambda^0(n)$ однозначно.*

В самом деле, по 3.4.1 U однозначно определяется по S, а по 3.4.2 S однозначно определяется по λ.

3.5. Двусторонность цикла особенностей. Пусть λ — лагранжева плоскость. Тогда каждая из плоскостей $e^{i\theta}\lambda$ — лагранжева.

Лемма 3.5.1. *Если $\lambda \in \Lambda^1(n)$, то кривая γ: $S^1 \to \Lambda(n)$, $e^{i\theta} \to e^{i\theta}\lambda$ трансверсальна к циклу $\Lambda^1(n)$ в точке $\theta = 0$.*

Таким образом, векторы скорости $v(\lambda) = \left.\frac{d}{d\theta}\right|_{\theta=0} (e^{i\theta}\lambda)$ образуют трансверсальное оснащение $\Lambda^1(n)$, откуда вытекает

Основная лемма. *Цикл особенностей $\overline{\Lambda^1(n)}$ лежит в $\Lambda(n)$ двусторонне.*

Доказательство леммы 3.5.1 проведем в три этапа.

А. *Пусть сначала $\lambda \in \Lambda^0(n)$, $\lambda = \lambda_S$,* где $S \in D$ — вещественная симметрическая матрица. Сосчитаем координаты вектора скорости кривой $e^{i\theta}\lambda$ в этой системе координат.

Лемма 3.5.2. *Для любой матрицы* $S \in D$

$$\frac{d}{d\theta}\Big|_{\theta=0} \varphi^{-1} e^{i\theta} \lambda_S = -(E+S^2).$$

Доказательство леммы 3.5.2. Согласно п. 3.4 плоскости λ однозначно соответствует неособая унитарная симметрическая матрица U, так что

$$\lambda = \lambda_{S(U)}, \qquad S(U) = -i\frac{E-U}{E+U},$$

и $\sqrt{U}$ переводит плоскость $p=0$ в λ.

Пусть $U(\theta) = e^{2i\theta}U$. Матрица $U(\theta)$ унитарна, симметрична и при малых $|\theta|$ неособая, так что $\sqrt{U(\theta)} = e^{i\theta}\sqrt{U}$. Поэтому $\sqrt{U(\theta)}$ переводит плоскость $p=0$ в $e^{i\theta}\lambda$, так что

$$\lambda_{S(U(\theta))} = e^{i\theta}\lambda_{S(U)}, \text{ или } \varphi^{-1}e^{i\theta}\lambda_{S(U)} = S(U(\theta)). \tag{8}$$

Вектор $\frac{d}{d\theta}\Big|_{\theta=0} \varphi^{-1}e^{i\theta}\lambda$ лежит в касательном пространстве к линейному пространству симметрических матриц D; это касательное пространство естественно отождествляется с самим D. При таком отождествлении, по формулам п. 3.4.1,

$$-\frac{d}{d\theta}\Big|_{\theta=0} S(U(\theta)) = \frac{d}{d\theta}\Big|_{\theta=0} i\frac{E-e^{2i\theta}U}{E+e^{2i\theta}U} = \frac{4U}{(E+U)^2} = E+S^2,$$

что вместе с формулами (8) доказывает лемму 3.5.2.

Б. *Пусть теперь* $\lambda \in \Lambda^1(n)$. По лемме 3.3.3 точка $\lambda \in \Lambda^1(n)$ принадлежит одной из n карт $\varphi_K D$, где K состоит из одного элемента $\varkappa$, $1 \leqslant \varkappa \leqslant n$. Иными словами, в обозначениях п. 3.3.2

$$\lambda = I_K\lambda_S, \text{ где } S \in D, \qquad \lambda_S \in \Lambda^0(n).$$

Нетрудно сосчитать вектор скорости кривой γ: $S^1 \to \Lambda(n)$, $e^{i\theta} \to e^{i\theta}\lambda$ при $\theta = 0$ в системе координат $\varphi_K^{-1}\lambda = S$.

Лемма 3.5.3. *Для любой матрицы* $S \in D$, $\lambda = I_K\lambda_S$,

$$\frac{d}{d\theta}\Big|_{\theta=0} \varphi_K^{-1}e^{i\theta}\lambda = -(E+S^2).$$

Действительно, по определению 3.3.2, $\varphi_K = I_K\varphi$, и I_K коммутирует с $e^{i\theta}$. Поэтому

$$\varphi_K^{-1}e^{i\theta}\lambda = \varphi^{-1}I_K^{-1}e^{i\theta}I_K\lambda_S = \varphi^{-1}e^{i\theta}\lambda_S,$$

и лемма 3.5.3 вытекает из леммы 3.5.2.

В. Цикл особенности $\Lambda^1(n)$ в координатах $S = \varphi_K^{-1}\lambda$ имеет уравнение $S_{\varkappa\varkappa} = 0$ (лемма 3.3.3). Вектор скорости $v = \frac{d}{d\theta}\Big|_{\theta=0} \varphi_K^{-1}e^{i\theta}\lambda$ по лемме 3.5.3 есть отрицательно определенная матрица, $-v_{\varkappa\varkappa} \geqslant 1$. Значит, v и $\Lambda^1(n)$ трансверсальны, что и доказывает лемму 3.5.1.

Замечание 3.5.4. *Одновременно доказано, что вектор v направлен в ту сторону от $\Lambda^1(n)$, где $-S_{\varkappa\varkappa} > 0$.*

3.6. Индекс Ind **кривых на** $\Lambda(n)$. Пусть γ — ориентированная кривая в $\Lambda(n)$, трансверсальная $\overline{\Lambda^1(n)}$, и $v(\lambda)$ — поле скоростей из леммы 3.5.1.

Определение 3.6.1. *Через* $\operatorname{Ind}\gamma$ *будем обозначать индекс пересечения кривой* γ *с циклом* $\overline{\Lambda^1(n)}$, *оснащенным полем* $v(\lambda)$.

Иначе говоря, $\operatorname{Ind}\gamma = \nu_+ - \nu_-$, где ν_+ — число точек пересечения γ с $\Lambda^1(n)$, в которых векторы $\dot\gamma$ и v лежат по одну сторону $\Lambda^1(n)$, а ν_- — по разные стороны.

Индекс замкнутой кривой γ, как всякий индекс пересечения, определяется классом гомологий γ и может рассматриваться как класс одномерных когомологий

$$\operatorname{Ind} \in H^1(\Lambda(n), \mathbf{Z}).$$

Пример 3.6.2. *Индекс замкнутой кривой* γ: $S^1 \to \Lambda(n)$, *образованной* $e^{i\theta}\lambda$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, *есть* n:

$$\operatorname{Ind}\gamma = n.$$

Доказательство. Имеем $\dim \Lambda^2(n) = \dim \Lambda^1(n) - 2$ (лемма 3.2.1). Поэтому для почти всех λ кривая $e^{i\theta}\lambda$ не пересекается с $\overline{\Lambda^2(n)}$. Такая кривая трансверсальна $\Lambda^1(n)$ во всех точках пересечения (лемма 3.5.1). При этом $\operatorname{Ind}\gamma$ есть просто число этих точек пересечения (определение 3.6.1).

Пусть $\lambda \in \Lambda^0(n)$. По лемме 3.4.4 имеем $\lambda = \lambda_{S(U)}$, где U — унитарная симметрическая неособая матрица. Мы можем считать плоскость λ такой, что все собственные числа матрицы U

$$e^{i\alpha_k}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \quad |\alpha_k| < \pi,$$

различны.

Но

$$e^{i\theta}\lambda = \lambda_{S(e^{2i\theta}U)}$$

по формуле (8) из п. 3.5.2, и

$$(\lambda_{S(e^{2i\theta}U)} \,\overline{\in}\, \Lambda^0(n)) \Leftrightarrow (\det(E + e^{2i\theta}U) = 0)$$

по лемме 3.4.2. Иными словами, в точках пересечения γ с $\Lambda^1(n)$

$$\theta \equiv \frac{\pi - \alpha_k}{2} \pmod{\pi}.$$

Таких θ на отрезке $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ ровно n. Значит, $\operatorname{Ind}\gamma = n$, что и требовалось доказать.

§ 4. Доказательства теорем об общем положении

Здесь доказаны теоремы 2.1 и 2.2 из § 2.

4.1. Трансверсальность.

Обозначения 4.1.1. Пусть A — гладкое многообразие, а $a \in A$. Через TA_a обозначим касательное пространство к A в точке a. Если f: $A \to B$ — гладкое отображение, то через f_*: $TA_a \to TB_{f(a)}$ обозначим дифференциал f в a.

Пусть f: $A \to B$, h: $C \to B$ — два гладких отображения. Отображения f, h называются *трансверсальными* в точке $b \in B$, если

$$f_* TA_a + h_* TC_c = TB_b$$

для каждой пары точек $a \in A$, $c \in C$, для которых $f(a) = h(c) = b$. Отображения f и h трансверсальны, если они трансверсальны в каждой точке $b \in B$.

В частном случае, когда f или h — вложения, можно говорить о трансверсальности отображения подмногообразию или о трансверсальности двух подмногообразий.

Понятие трансверсальности распространяется и на тот случай, когда A есть объединение нескольких многообразий $A = \bigcup A_k$ (например, $\overline{\Lambda^1(n)} = \bigcup\limits_{k\geqslant 1} \Lambda^k(n)$ в § 3) — в этом случае ограничение f на каждое A_k должно быть трансверсально h.

Легко доказывается (см., например, [3]) принадлежащая М. Морсу и А. Сарду

Лемма 4.1.2. *Пусть f: $A \to B$ — гладкое отображение. Тогда мера множества точек $b \in B$, не трансверсальных f, равна* 0 (точка $b \subsetneq B$ есть нульмерное подмногообразие B).

Из леммы 4.1.2 выводится (см., например, [4])

Лемма 4.1.3. *Пусть B — однородное пространство, на котором транзитивно действует группа Ли G ($\forall\, g \in G$, g: $B \to B$ — диффеоморфизм). Пусть $C \subsetneq B$ — гладкое подмногообразие B, и f: $A \to B$—гладкое отображение. Тогда мера множества точек $g \in G$, для которых отображение*

$$f_g\colon A \to B, \quad f_g(a) = gf(a)$$

не трансверсально C, равна нулю.

Для полноты приведем доказательство леммы 4.1.3.

Замечание 4.1.4. Так как сумма счетного числа множеств меры нуль имеет меру нуль, то лемму 4.1.3 достаточно доказать применительно к окрестности A_0 точки $a_0 \in A$, окрестности C_0 точки $c_0 \in C$ и окрестности единицы e в группе G.

Из транзитивности действия G легко вытекает

Утверждение 4.1.5. *Существует диффеоморфизм произведения шаров*

$$u : D_1 \times D_2 \to G,$$

$$D_i = \{x \in \mathrm{R}^{\nu_i},\ |x| < 1\}, \quad \nu_1 = \dim B - \dim C, \quad \nu_2 = \dim G - \nu_1,$$

такой, что $u(0, 0) = e$, и отображение

$$\beta\colon D_1 \times D_2 \times C_0 \to B \times D_2,$$

заданное формулой

$$\beta(x, y, c) = (u(x, y)\, c,\ y), \forall x \in D_1,\ y \in D_2,\ c \in C_0,$$

есть диффеоморфизм $D_1 \times D_2 \times C_0$ на некоторую окрестность E точки $(c_0, 0)$ в $B \times D_2$.

Определим теперь проекцию $E \subset B \times D_2$ на $D_1 \times D_2$

$$\Phi\colon E \to D_1 \times D_2 \text{ по формуле } \Phi(\beta(x, y, c)) = (x, y).$$

Далее, определим отображение

$$\hat f\colon A \times D_2 \to B \times D_2 \text{ формулой } \hat f(a, y) = (f(a), y).$$

Применим лемму 4.1.2 к сквозному отображению

$$\Theta = \Phi \circ \hat f\colon A_0 \times D_2 \to D_1 \times D_2.$$

Утверждение 4.1.6. *Пусть $x, y \in D_1 \times D_2$ — точка, трансверсальная отображению Θ. Тогда отображение*

$$f_g\colon A_0 \to B,\ g = (u(x, y))^{-1},$$

трансверсально вложению $C_0 \subsetneq B$.

Доказательство утверждения 4.1.6. Рассмотрим $\Phi^{-1}(x, y)$ $(x \in D_1,\ y \in D_2)$. Очевидно, $\Phi^{-1}(x, y) = (C_{x,y}, y)$, где $C_{x,y} = u(x, y)\, C_0 \subsetneq B$. Ядро дифференциала Φ_*: $T(B \times D_2)_{b,y} \to T(D_1 \times D_2)_{x,y}$ есть в точности касательное пространство к $(C_{x,y}, y)$:

$$\ker \Phi_* = T(C_{x,y}, y)_{b,y}.$$

Поэтому трансверсальность отображения $\Theta = \Phi \circ \hat{f}$ точке x, y влечет

$$\hat{f}_* T (A_0 \times D_2)_{a,y} + T (C_{x,y}, y)_{f(a),y} = T (B \times D_2)_{b,y}$$

для всех $a \in A_0$, для которых $f(a) = b \in C_{x,y}$. Итак, отображение f: $A_0 \to B$ трансверсально вложению $C_{x,y} \subset B$. Действуя диффеоморфизмом $g = (u(x, y))^{-1} \in G$, убеждаемся, что gf: $A_0 \to B$ трансверсально $gC_{x,y} = C_0$, что и требовалось.

Доказательство леммы 4.1.3. Применим к Θ лемму 4.1.2. Множество точек x, $y \in D_1 \times D_2$, не трансверсальных Θ, имеет меру нуль. Соответствующее множество точек $g = (u(x, y))^{-1} \in G$ имеет меру нуль в G. Для остальных g, близких к e, отображение f_g трансверсально C_0 согласно 4.1.6. Это доказывает лемму 4.1.3 в соответствии с замечанием 4.1.4.

4.2. Доказательство теоремы 2.1. Применим лемму 4.1.3 к случаю, когда A — лагранжево многообразие M^n, B — лагранжев грассманиан $\Lambda(n)$, f — тангенциальное отображение τ: $M^n \to \Lambda(n)$, C — подмногообразие $\Lambda^k(n) \subset \Lambda(n)$, G — унитарная группа $\mathbf{U}(n)$.

Из леммы 4.1.3 вытекает тогда, что для почти всех $u \in \mathbf{U}(n)$ многообразие uM^n таково, что его тангенциальное отображение τ трансверсально всем $\Lambda^k(n) \subset \Lambda(n)$, $k = 1, 2, \ldots$. Покажем, что такое многообразие uM^n находится в «общем положении» в смысле теоремы 2.1.

Утверждение 1 из теоремы 2.1 вытекает из теоремы о неявной функции и лемм 3.2.1, 3.2.2. Утверждение 2 вытекает из основной леммы п. 3.5. Утверждение 3 выводится из леммы 3.3.1. Утверждение 4 получается из леммы 3.3.3 при $k = 1$. Наконец, утверждение 5 вытекает из леммы 3.5.1 и замечания 3.5.4. Теорема 2.1 доказана.

4.3. Доказательство теоремы 2.2. Пусть M^n — лагранжево многообразие в общем положении, и γ: $S^1 \to M^n$ — ориентированная замкнутая кривая, трансверсальная циклу особенностей Σ.

Лемма 4.3.1. *Пусть $\tau \circ \gamma$: $S^1 \to \Lambda(n)$ — тангенциальное изображение M^n на кривой γ. Тогда*

$$\operatorname{ind} \gamma = \operatorname{Ind} \tau \circ \gamma.$$

Действительно, $\Sigma^1 = \tau^{-1} \Lambda^1(n)$ (определения из п. 2.1 и 3.2). Далее, положительная (в смысле п. 2.1) сторона Σ^1 при отображении τ переходит в положительную (в смысле определения 3.6.1) сторону $\Lambda^1(n)$ — это вытекает из замечания 3.5.4. Значит, каждая точка пересечения γ с Σ^1 дает в ind такой же вклад, как соответствующая точка пересечения $\tau \circ \gamma$ с $\Lambda^1(n)$ в Ind, что и доказывает лемму 4.3.1.

Одновременно доказана и теорема 2.2, так как $\operatorname{Ind} \tau \circ \gamma$ не меняется при замене γ гомологичной кривой γ' (последнее вытекает из того, что $\dim \overline{\Lambda^2(n)} = \dim \Lambda^1(n) - 2$).

§ 5. Квазиклассическая асимптотика

Здесь будут приведены без доказательств асимптотические формулы Маслова, в которых участвует индекс, для простейшего примера.

5.1. Асимптотика при $h \to 0$ решений уравнения Шредингера

$$ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2} \Delta \psi + U(q) \psi, \quad \psi = \psi(q, t), \ q \in \mathbf{R}^n \tag{9}$$

с начальным условием

$$\psi|_{t=0} = \varphi(q) e^{\frac{i}{h} f(q)}, \text{ где } \varphi(q) \text{ — финитная функция.} \tag{10}$$

Уравнению Шредингера соответствует *классическая динамическая система*, заданная в $2n$-мерном фазовом пространстве $\mathbf{R}^{2n}$ уравнениями Гамильтона

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \qquad H = \frac{1}{2} p^2 + U(q).$$

Решения уравнений Гамильтона определяют однопараметрическую группу канонических *) диффеоморфизмов фазового пространства — *фазовый поток* $g^t\colon \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$.

Начальным условиям (10) соответствует функция $\varphi(q)$ на *поверхности* M^n, заданной в фазовом пространстве $\mathbf{R}^{2n}$ уравнениями

$$M = \left\{p, q\colon\ p(q) = \frac{\partial f}{\partial q}\right\}.$$

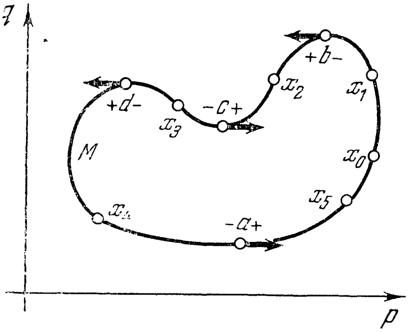

Рис. 2.

Поверхность M однозначно проектируется на плоскость q. Она лагранжева по лемме 3.1.1. Фазовый поток g^t переводит M в другую лагранжеву поверхность $g^t M = M_t$. Поверхность M_t уже не обязательно однозначно проектируется на плоскость q. Возникает отображение $Q(q) = q(g^t(p(q), q))$ (рис. 2).

Пусть $x_j = (p_j, q_j)$ — точки M такие, что $g^t x_j = (P_j, Q) \in M_t$. Предположим, что якобиан $\left.\frac{DQ}{Dq}\right|_{q=q_j} \neq 0$.

Маслов доказал следующую асимптотическую формулу для решений уравнения (9) с условием (10).

Теорема 5.1. *При* $h \to 0$

$$\psi(Q, t) = \sum_j \varphi(q_j) \left| \frac{DQ}{Dq_j} \right|^{-1/2} e^{\frac{i}{h} S_j(Q,t) - \frac{i\pi}{2}\mu_j} + O(h),$$

где $S_j(Q, t)$ — *действие вдоль траектории* $g^\theta x_j$:

$$S_j(Q, t) = f(q_j) + \int_0^t L\, d\theta, \qquad L = \frac{\dot{q}^2}{2} - U(q); \qquad (p(\theta),\ q(\theta)) = g^\theta x_j,$$

а μ_j — *индекс Морса траектории* $g^\theta x_j$, *т. е. число точек* $q(g^\theta x_j)$, $0 < \theta < t$, *фокальных* M.

5.2. Связь между индексами Маслова и Морса. В теореме 5.1 участвует индекс Морса μ. Индекс Морса есть частный случай индекса Маслова; справедлива

Теорема 5.2. *Рассмотрим в* $(2n+2)$-*мерном фазовом пространстве* $\mathbf{R}^{2n+2} = \{\hat{p}, \hat{q}\}$, $\hat{p} = p_0, p$; $\hat{q} = q_0, q$; $(p, q) \in \mathbf{R}^{2n}$, $(n+1)$-*мерное многообразие*

---

*) Диффеоморфизм $g\colon \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$ называется каноническим, если для всякой замкнутой кривой $\gamma\colon\ S^1 \to \mathbf{R}^{2n}$ имеем $\oint_\gamma p\, dq = \oint_{g\gamma} p\, dq$. Дифференциал g_* в каждой точке имеет тогда симплектическую матрицу: при каноническом преобразовании 2-форма $dp \wedge dq$ переходит в себя. Поэтому лагранжевы многообразия при каноническом диффеоморфизме переходят в лагранжевы.

$\hat{M}$: $(p, q) \in M_t$, $q_0 = t$, $p_0 = -H(p, q)$. *Тогда многообразие* $\hat{M}$ *лагранжево, и индекс Морса траектории* $g^\theta x$, $0 < \theta < t$ *есть индекс Маслова кривой* $(\theta, -H, g^\theta x)$ *на многообразии* $\hat{M}$.

Доказательство легко вытекает из определений индексов μ и ind: так как $\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}\xi, \xi\right) > 0$, то простая фокальная точка дает в ind вклад $+1$.

Следствие. *Для любой кривой* γ *на* M

$$\operatorname{ind} g^t\gamma - \operatorname{ind}\gamma = \mu(g^\theta\gamma^+) - \mu(g^\theta\gamma^-),$$

где $g^\theta\gamma^+$, $g^\theta\gamma^-$ $(0 \leqslant \theta \leqslant t)$ — *траектории концов* γ, $\partial\gamma = \gamma^+ - \gamma^-$.

Действительно, четырехугольник γ, $g^\theta\gamma^+$, $(g^t\gamma)^{-1}$, $(g^\theta\gamma^{-1})^{-1}$ на $\hat{M}$, очевидно, гомологичен нулю, поэтому его индекс Маслова равен нулю (теорема 2.2), что в силу теоремы 5.2 доказывает искомое соотношение.

5.3. Условия квантования. В теореме 5.1 участвуют индексы незамкнутых кривых. Индексы замкнутых кривых входят в асимптотические формулы для стационарных задач.

Пусть M — инвариантное лагранжево многообразие фазового потока g^t, лежащее на гиперповерхности $H = E$ (такие инвариантные многообразия имеются не только у интегрируемых систем: см. [5]).

Масловым доказана

Теорема 5.3. *Уравнение*

$$\frac{1}{2}\Delta\psi = \lambda^2(U(q) - E)\psi$$

имеет серию собственных чисел $\lambda_N \to \infty$ *с асимптотикой* $\lambda_N = \mu_N + O(\mu_N^{-1})$, *если для всех* $\gamma \in H_1(M, \mathbf{Z})$

$$\frac{2\mu_N}{\pi}\oint_\gamma p\,dq \equiv \operatorname{ind}\gamma \pmod 4. \tag{11}$$

При этом собственные функции ψ_N также связаны с многообразием M (в некотором, точно определенном в [1] смысле и при некоторых предположениях типа простоты спектра).

В частном случае $n = 1$ индекс окружности равен 2, и формула (11) превращается в классическое «условие квантования»

$$\mu_N\oint_\gamma p\,dq = 2\pi(N + {}^1/_2).$$

Московский государственный
университет

Поступило в редакцию
28 сентября 1966 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Маслов В. П., Теория возмущений и асимптотические методы, изд. МГУ, 1965.
2. Маслов В. П., Метод ВКБ в многомерном случае, приложение к книге Хединга «Введение в метод фазовых интегралов», Библиотека сб. «Математика», «Мир», 1965.
3. Понтрягин Л. С., Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий, Труды Матем. ин-та им. В А. Стеклова АН СССР, т. 45, 1955.
4. Абрахам Р., Приложение в книге Лэнга «Дифференцируемые многообразия», Библиотека сб. «Математика», «Мир», 1966.
5. Arnold V., Avez A., Problèmes ergodiques de la mécanique classique, G.— V., 1966