В. А. Ефремович, Ю. Б. Рудяк, К понятию эйлеровой характеристики, *УМН*, 1976, том 31, выпуск 5(191), 239–240

К ПОНЯТИЮ ЭЙЛЕРОВОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

В. А. Ефремович, Ю. Б. Рудяк

Цель работы — показать, что эйлерова характеристика конечного CW-комплекса X однозначно с точностью до мультипликативной константы определяется как топологически инвариантная аддитивная функция множества.

Топологическое пространство X назовем *допустимым*, если оно гомеоморфно объединению открытых клеток некоторого конечного CW-комплекса. Например, R^n — допустимое пространство. Возникающее представление допустимого пространства в виде конечного объединения открытых клеток будем называть разложением. Обычным образом определяется понятие подразложения.

Пусть $\Phi(X)$ — функция, сопоставляющая каждому допустимому пространству целое число и обладающая следующими свойствами:

1. Если пространства X и Y гомеоморфны, то $\Phi(X) = \Phi(Y)$ (топологическая инвариантность).

2. Если X — разложенное допустимое пространство и A и B — такие его подразложения, что $A \cup B = X$, $A \cap B = \varnothing$, то $\Phi(X) = \Phi(A) + \Phi(B)$ (аддитивность).

Теорема. *На множестве конечных CW-комплексов функция Φ пропорциональна эйлеровой характеристике χ, т. е. для конечного CW-комплекса X* $\Phi(X) = \mathrm{const}\cdot\chi(X)$.

Доказательство. Положим Φ(точки) $= c$ и вычислим $\Phi(B^n)$, где B^n — открытый n-мерный шар (B^0 — точка). Выколов среднюю точку из интервала $(0, 1)$, разобьем его на 2 интервала $(0, 1/2)$ и $(1/2, 1)$, что дает уравнение

$$\Phi(B^1) + \Phi(B^0) + \Phi(B^1) = \Phi(B^1).$$

Следовательно, $\Phi(B^1) = -c$.

Выбросив из шара B^n экваториальное сечение B^{n-1}, разобьем его на два пространства, гомеоморфных B^n, что дает уравнение

$$\Phi(B^n) + \Phi(B^{n-1}) + \Phi(B^n) = \Phi(B^n),$$

т. е.

$$\Phi(B^n) = -\Phi(B^{n-1}).$$

Так как $\Phi(B^1) = -c$, то

$$\Phi(B^n) = (-1)^n c.$$

Пусть X — n-мерный конечный CW-комплекс, и пусть α_i — число его i-мерных клеток. Тогда

$$X = e_1^0 \cup \ldots \cup e_{\alpha_0}^0 \cup \ldots \cup e_1^n \cup \ldots \cup e_{\alpha_n}^n,$$

где e_j^i — (открытая) i-мерная клетка. Так как клетка e_j^i гомеоморфна открытому шару B^i, заключаем, что

$$\Phi(X) = \alpha_0\Phi(B^0) + \alpha_1\Phi(B^1) + \ldots + \alpha_n\Phi(B^n) = c(\alpha_0 - \alpha_1 + \ldots + (-1)^n\alpha^n) = c\chi(X),$$

ч. и т. д.

Комбинаторно определенными топологическими инвариантами занимался Уолл [1], однако условие аддитивности им не налагалось.

Докажем существование инварианта, удовлетворяющего свойствам 1, 2. Пусть H_*^F — функтор гомологий с замкнутыми носителями (см. [2]). Рассмотрим функцию $\chi^F(X) = \sum_l (-1)^l \operatorname{rk} H_l^F(X)$. Эта функция гомотопически не инвариантна, но инвариантна относительно собственных гомотопических эквивалентностей. Чтобы отличить функцию $\chi^F(X)$ от обычной эйлеровой характеристики, назовем ее характеристикой Декарта — Эйлера. Название мотивируется тем, что известная теорема о выпуклых многогранниках ($\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2$) была впервые доказана Декартом, но потом этот факт был забыт.

Ясно, что функция $\Phi(X) = \chi^F(X)$ удовлетворяет условиям 1, 2.

Дадим одно применение теоремы. Пусть k — любое поле. Определим эйлерову k-характеристику χ_k пространства X как $\chi_k(X) = \sum_l (-1)^l \dim_k H_l(X; k)$.

С л е д с т в и е. *Пусть* X — *конечный* CW-*комплекс. Тогда* $\chi_k(X) = \chi(X)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функцию $\Phi(X) = \sum_l (-1)^l \dim_k \overline{H}_l^F(X; k)$ — k-характеристику Декарта — Эйлера. Она удовлетворяет условиям 1, 2 и Φ (точки) $= 1$, поэтому для конечного CW-комплекса X $\Phi(X) = \chi(X)$. С другой стороны, из определения $\Phi(X)$ следует, что для конечного CW-комплекса X $\Phi(X) = \chi_k(X)$, и поэтому $\chi_k(X) = \chi(X)$. Обычное доказательство этого факта использует формулу универсальных коэффициентов; см., например, [3].

ЛИТЕРАТУРА

[1] C. T. C. W a l l, Arithmetic invariants of subdivision of complexes, Canad. J. Math 18:1 (1966), 92—96.

[2] Ф. Ф а м, Введение в топологическое исследование особенностей Ландау, М., «Мир» 1970.

[3] A. D o l d, Lectures on Algebraic Topology, Springer-Verlag, Berlin-Hiedelberg-New York, 1972.

Поступило в Правление общества 16 марта 1976 г.