Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Э. Б. Винберг, В. Л. Попов, Теория инвариантов, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления*, 1989, том 55, 137–309

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 95.216.226.236
9 ноября 2019 г., 07:17:55

УДК 512.745

II. ТЕОРИЯ ИНВАРИАНТОВ

Э. Б. Винберг, В. Л. Попов

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Задачи, решаемые теорией инвариантов, — это далеко идущие обобщения и расширения задач о «приведении к каноническому виду» различных объектов линейной алгебры или, что почти одно и то же, проективной геометрии.

Теория инвариантов имеет полуторавековую историю, в течение которой чередовались периоды расцвета и застоя, изменялись постановки задач, методы их решения и области приложений.

В последние два десятилетия теория инвариантов переживает очередной период расцвета, вызванный к жизни предшествовавшим развитием теории алгебраических групп и коммутативной алгебры. Сейчас она рассматривается как раздел теории алгебраических групп преобразований (а при более широком толковании отождествляется с этой теорией).

Мы будем свободно пользоваться теорией алгебраических групп, изложение которой можно найти, например, в первой статье настоящего тома. Кроме того, мы будем считать известными основные понятия и простейшие теоремы коммутативной алгебры и алгебраической геометрии; в тех случаях, когда будут необходимы более глубокие сведения из этих разделов математики, они будут приводиться в тексте или будут даваться соответствующие ссылки.

Ради простоты и краткости изложения мы ограничились теорией инвариантов над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики. Полезно, однако, иметь в виду, что многие результаты справедливы и доказываются в оригинальных работах, на которые мы ссылаемся, и для полей положительной характеристики, а иногда и для незамкнутых полей. Кроме того, в случае незамкнутого поля переход к его алгебраическому замыканию позволяет использовать результаты, полученные для замкнутых полей; но, конечно, могут потребоваться и дополнительные соображения.

Желая все же как-то компенсировать указанный пробел в изложении, мы привели некоторые работы по теории инвариантов над незамкнутыми полями и полями положительной характеристики в списке литературы (см. аннотацию к этому списку). Там же приведены работы по некоторым другим темам, не затронутым в настоящей статье.

Статья разбита на параграфы, параграфы — на пункты. Пункты, а также формулы, теоремы, предложения и леммы имеют два номера, первый из которых — это номер соответствующего параграфа. Начало и конец доказательства обозначаются знаками ◀ и ▶.

СОГЛАШЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Основное поле k предполагается алгебраически замкнутым и нулевой характеристики. Алгебраические многообразия отождествляются с множествами своих k-точек. Подмногообразием называется локально замкнутое подмножество с индуцированной структурой алгебраического многообразия.

Выражение «свойство (P) справедливо для точек общего положения алгебраического многообразия X» означает, что существует такое плотное открытое подмножество $X_0 \subset X$, что свойство (P) имеет место для всех точек $x \in X_0$.

Под алгебраической группой понимается линейная алгебраическая группа, т. е. алгебраическая группа, являющаяся аффинным алгебраическим многообразием (и, следовательно, допускающая точное линейное представление). Алгебраические группы обозначаются прописными латинскими буквами, а их касательные алгебры (алгебры Ли) — соответствующими строчными готическими буквами.

Касательное пространство векторного пространства V в любой точке каноническим образом отождествляется (как векторное пространство) с самим пространством V. Соответственно этому касательное пространство любого алгебраического многообразия $X \subset V$ отождествляется с (линейным) подпространством пространства V.

Топологические термины, если не оговорено противное, относятся к топологии Зарисского.

Используются следующие обозначения:

A^* — группа обратимых элементов кольца A,

QA — полное кольцо отношений коммутативного кольца A (если A — целостное кольцо, то QA — поле),

$\operatorname{tr} \deg A$ — степень трансцендентности целостного кольца A,

$A[S]$ — подкольцо расширения B кольца A, порожденное над A подмножеством $S \subset B$,

$A[x_1, \ldots, x_n]$ — подкольцо расширения B кольца A, порожденное над A элементами $x_1, \ldots, x_n \in B$, либо если такого рас-

ширения не указано, кольцо многочленов от $x_1, \ldots, x_n$ с коэффициентами из A,

$K(S)$ — подполе расширения L поля K, порожденное над K подмножеством $S \subset L$,

$K(x_1, \ldots, x_n)$ — подполе расширения L поля K, порожденное над K элементами $x_1, \ldots, x_n \in L$, либо, если такого расширения не указано, поле рациональных дробей от $x_1, \ldots, x_n$ с коэффициентами из K,

V^* — векторное пространство, сопряженное к пространству V,

PV — проективное пространство, ассоциированное с векторным пространством V (т. е. множество одномерных подпространств пространства V),

$\langle S \rangle$ — линейная оболочка подмножества S векторного пространства V,

$L(V)$ — (ассоциативная) алгебра линейных преобразований пространства V,

$\mathrm{GL}(V)$ — группа невырожденных линейных преобразований пространства V,

$\mathrm{SL}(V) \subset \mathrm{GL}(V)$ — подгруппа унимодулярных линейных преобразований,

$L_n(K)$ — (ассоциативная) алгебра матриц порядка n над полем K,

$\mathrm{GL}_n(K)$ — группа невырожденных матриц порядка n над полем K,

$\mathrm{SL}_n(K) \subset \mathrm{GL}_n(G)$ — подгруппа унимодулярных матриц,

L_n, GL_n, $\mathrm{SL}_n = L_n(k)$, $\mathrm{GL}_n(k)$, $\mathrm{SL}_n(k)$ соответственно,

$\mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_n)$ — диагональная матрица порядка n с элементами $x_1, \ldots, x_n$ на диагонали,

$k[X]$ — алгебра регулярных функций на алгебраическом многообразии X,

$k(X)$ — алгебра рациональных функций на алгебраическом многообразии X (если X неприводимо, то $k(X)$ — поле),

$T_x(X) = T_x$ — касательное пространство многообразия X в точке x,

$d_x\varphi : T_x(X) \to T_{\varphi(x)}(Y)$ — дифференциал морфизма $\varphi : X \to Y$ в точке $x \in X$,

$\mathcal{O}_x(X) = \mathcal{O}_x$ — локальная алгебра точки x многообразия X,

$\mathfrak{m}_x(X) = \mathfrak{m}_x$ — (единственный) максимальный идеал алгебры $\mathcal{O}_x$ (состоящий из функций, обращающихся в точке x в нуль),

$\mathrm{Aut}\, X$ — группа автоморфизмов многообразия X,

$\mathrm{Bir}\, X$ — группа бирациональных автоморфизмов многообразия X,

$X(K)$ — множество точек многообразия X над расширением K поля k,

M^G — множество неподвижных точек для действия группы G на множестве M,

$N_G(H) = N(H)$ — нормализатор подгруппы H в группе G,

$Z_G(H)=Z(H)$ — централизатор подмножества H в группе G,

$N_G(\mathfrak{h})=N(\mathfrak{h})$ — нормализатор подпространства $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}$ в алгебраической группе G,

$Z_G(\mathfrak{h})=Z(\mathfrak{h})$ — централизатор подмножества $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}$ в алгебраической группе G,

$\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})=\mathfrak{n}(\mathfrak{h})$ — нормализатор подпространства $\mathfrak{h}$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$,

$\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})=\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ — централизатор подмножества $\mathfrak{h}$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$,

G^0 — связная компонента алгебраической группы G, содержащая единицу,

k — аддитивная группа поля k,

k^* — мультипликативная группа поля k,

$(a)_n=(a)$ — циклическая группа порядка n, порожденная элементом a,

id — тождественное отображение,

$|M|$ — число элементов множества M.

Введение

0.1. Предмет теории инвариантов. Без преувеличения можно сказать, что идея инварианта пронизывает всю математику, ибо построение инвариантов требуется всякий раз, когда мы пытаемся классифицировать математические объекты того или иного типа.

Пусть M — совокупность объектов, подлежащих классификации по некоторому отношению эквивалентности. *Инвариантом* этого отношения называется любое постоянное на классах эквивалентности отображение $f: M\to Q$, где Q — какое-либо множество. Поскольку из $f(m_1)\neq f(m_2)$ следует неэквивалентность m_1 и m_2, инварианты служат средством различения классов эквивалентности. Система инвариантов называется *полной*, если она различает любые два класса эквивалентности. В задачу классификации входит построение полной системы инвариантов и указание в каждом классе эквивалентности какого-либо представителя (принимаемого за «каноническую», или «нормальную», форму объектов из данного класса).

В частности, M может быть множеством, отношение эквивалентности в котором определяется действием некоторой группы G, так что классы эквивалентности — это орбиты группы G. Инварианты в этой ситуации называют *инвариантами группы G*.

Пример 1°. Пусть M — совокупность ориентируемых замкнутых поверхностей, и пусть эквивалентными считаются гомеоморфные поверхности. Тогда отображение $f: M—\mathbf{Z}$, сопоставляющее каждой поверхности ее эйлерову характеристику, есть инвариант, образующий полную систему, а в качестве нормальной формы может быть взята «сфера с ручками».

Пример 2⁰. Пусть $M=\mathbf{C}$ — комплексная плоскость, а отношение эквивалентности определяется (дискретной) группой ее преобразований, порожденной параллельными переносами на ω_1 и ω_2 ($\omega_1, \omega_2 \in \mathbf{C}$, $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbf{R}$). Мероморфные функции, являющиеся инвариантами этой группы, называются, как известно, *эллиптическими функциями* (с периодами ω_1 и ω_2). Они образуют поле. В качестве образующих этого поля и, одновременно, полной системы инвариантов могут быть взяты функция Вейерштрасса $\wp$ и ее производная, а в качестве канонических представителей орбит — точки (любого) параллелограмма со сторонами ω_1 и ω_2.

Пример 3⁰. Пусть M — множество нераспадающихся кривых второго порядка на евклидовой плоскости, отношение эквивалентности в котором определяется естественным действием группы движений плоскости, т. е. две кривые считаются эквивалентными, если одна из них может быть переведена в другую движением. Для кривой Γ, задаваемой в какой-либо декартовой системе координат уравнением

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0,$$

положим

$$f_1(\Gamma)=(a+c)\Delta^{-1/3}, \quad f_2(\Gamma)=(ac-b^2)\Delta^{-2/3},$$

где $\Delta=\begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}$.

Можно показать, что $f_1(\Gamma)$ и $f_2(\Gamma)$ не зависят от выбора системы координат и уравнения кривой (определенного с точностью до пропорциональности) и что функции f_1 и f_2 принимают одинаковые значения на эквивалентных кривых и образуют полную систему инвариантов. Нормальные формы кривых — это эллипсы, гиперболы и параболы, заданные известными каноническими уравнениями в фиксированной декартовой системе координат.

Ясно, что задача классификации в общей постановке не может быть предметом какой-либо одной теории. Тот раздел математики, который традиционно называется теорией инвариантов (или, точнее, алгебраической теорией инвариантов), в действительности имеет дело со специальной ситуацией. Так, из приведенных выше примеров к теории инвариантов относится только третий.

В трактовке, наиболее близкой к классической, теория инвариантов занимается классификацией элементов конечномерного векторного пространства V над полем k относительно действия некоторой алгебраической линейной группы $G \subset \mathrm{GL}(V)$. При этом инвариантами называются не произвольные функции на V, постоянные на орбитах группы G, а лишь *полиномиальные* (т. е. записываемые в координатах как многочлены)

или, более общо, *рациональные*. (Пример 3^0 вписывается в эту схему, если в качестве V рассмотреть пространство всех полиномиальных функций степени $\leqslant 2$ на плоскости, а в качестве группы G взять прямое произведение группы движений плоскости, естественно действующей в V, и группы гомотетий пространства V).

Полиномиальные (в отличие от рациональных, их называют также целыми) инварианты группы G образуют подалгебру в алгебре $k[V]$ всех полиномиальных функций на V. Эта подалгебра называется *алгеброй инвариантов* и обозначается через $k[V]^G$. В задачу теории инвариантов входит построение образующих алгебры $k[V]^G$ (которая не обязательно будет полной системой инвариантов: см. приводимые ниже примеры) и нахождение определяющих соотношений (называемых также *сизигиями*) между ними.

Аналогично, рациональные инварианты образуют подполе $k(V)^G$ в поле $k(V)$ всех рациональных функций на V.

В классических работах в основном рассматривался тот случай, когда V — это пространство тензоров фиксированного типа над некоторым векторным пространством U (или прямая сумма нескольких таких пространств тензоров), а G — унимодулярная (соотв., ортогональная или симплектическая) группа линейных преобразований пространства U, естественным образом действующая на V. В этом случае элементы алгебры $k[V]^G$ называются (унимодулярными) *инвариантами* (соотв., ортогональными или симплектическими инвариантами) *тензора* выбранного типа (или системы таких тензоров). Именно в этом смысле говорят, например, об инвариантах вектора, линейного оператора, формы (данной степени от данного числа переменных) и т. п.

В расширенной трактовке теории инвариантов (которую читатель настоящего введения может пока игнорировать) векторное пространство V заменяется произвольным алгебраическим многообразием X, а в качестве группы G рассматривается произвольная алгебраическая группа преобразований многообразия G.

0.2 Истоки теории инвариантов. Первыми результатами, которые можно отнести к теории инвариантов, были аффинная и метрическая классификация (вещественных) квадратичных форм, полученная в работах Эйлера, Лагранжа, Гаусса, Коши и Якоби в связи с задачами механики (отыскание осей инерции твердого тела, исследование «векового» возмущения планет), геометрии (приведение к каноническому виду уравнений коник и квадрик) и теории чисел (представление целых чисел квадратичными формами). Теория квадратичных форм была в основном завершена к 1830 г. Было обнаружено, в частности, что дискриминант квадратичной формы (определитель симметричной матрицы, составленной из ее коэффициентов) является

инвариантом группы $SL_n(\mathbf{R})$ унимодулярных линейных подстановок, а коэффициенты характеристического многочлена (этой матрицы) — инвариантами группы O_n ортогональных линейных подстановок. Был найден канонический вид, к которому можно привести квадратичную форму линейной подстановкой из группы $SL_n(\mathbf{R})$ или O_n.

Теория инвариантов как таковая возникла в середине XIX в., когда было начато исследование общей проблемы построения инвариантов формы или системы форм любой степени. Эти изыскания были тесно связаны с развитием теории определителей (основные факты которой были известны уже в начале XIX в.). Наибольший вклад в создание теории инвариантов внесли Буль, Кэли, Сильвестр, Сальмон, Якоби, Госсе и Эрмит; затем эстафета перешла к Аронгольду, Клебшу и Гордану. Усилия специалистов в этот период концентрировались вокруг разработки формальных алгебраических приемов построения (целых) инвариантов и нахождения в различных конкретных случаях конечной системы образующих и определяющих соотношений алгебры инвариантов. Законченные результаты были получены, однако, лишь в немногих случаях, в основном, для бинарных форм.

Особый вес в глазах современников теория инвариантов приобрела благодаря тому, что сформировалось мнение о ее тождественности проективной геометрии, считавшейся одним из важнейших разделов математики. Действительно, каждой форме F от n переменных соответствует гиперповерхность S в $(n-1)$-мерном проективном пространстве, задаваемая в однородных координатах уравнением $F=0$. Инварианты формы F — это те свойства гиперповерхности S, которые не зависят от выбора системы координат и, тем самым, могут считаться геометрическими. Аналогично, инварианты системы форм — это геометрические свойства взаимного расположения гиперповерхностей. Соотношения между инвариантами в такой трактовке — это теоремы проективной геометрии. Если же вместо группы унимодулярных линейных подстановок рассмотреть подходящую ее подгруппу, то таким образом можно получить теоремы аффинной, евклидовой или какой-либо другой геометрии. Наиболее последовательно и ясно эта точка зрения была изложена в знаменитой «Эрлангенской программе» Клейна в 1872 г. [181], [183]. (См. по этому поводу также п. 0.10.)

В это же время, около 1870 г., Вейерштрасс и Жордан решили проблему классификации матриц с точностью до подобия (теория приведения к жордановой нормальной форме). Эта проблема также связана с проективной геометрией, поскольку равносильна классификации проективных преобразований; в такой форме она рассматривалась, начиная примерно с 1830 г.

Таковы в самых общих словах основные достижения «наивного» периода теории инвариантов, конец которому был поло-

жен работами Гильберта 1890—1893 гг. [154], [155]. Об этих работах и дальнейшем развитии их идей будет рассказано в последующих параграфах (см. в особенности § 3 и § 5).

В близком родстве с теорией инвариантов находится теория Галуа, одной из двух основных задач которой является как раз отыскание инвариантов заданной конечной группы (в то время как другой задачей является отыскание конечной группы с заданными инвариантами). Вначале, однако, теория инвариантов конечных групп развивалась независимо от теории инвариантов непрерывных групп.

0.3. Геометрические методы. В настоящее время, наряду с расширением класса рассматриваемых групп преобразований (даже линейных), расширенным образом толкуются и основные задачи теории инвариантов. Помимо описания алгебры инвариантов и указания канонических представителей орбит, ставятся задачи вычисления стабилизаторов, изучения алгебро-геометрических свойств самих орбит и их взаимного расположения, построения различного рода «сечений» и «факторов». Все это можно назвать геометрией действия. Начало этому направлению было положено работой Гильберта [155] (остававшейся, однако, в забвении более 70 лет). Помимо того, что геометрия действия может представлять интерес сама по себе (например, в связи с теорией особенностей), она является мощным инструментом для доказательства многих важных теорем, непосредственно относящихся к задаче классификации. Кроме того, даже сама формулировка многих из этих теорем (например, о параметризации множества орбит с помощью инвариантов) требует геометрического языка. Таким образом, современная теория инвариантов — это, в сущности, теория алгебраических групп преобразований.

Мы перейдем теперь к рассмотрению ряда конкретных примеров, чтобы на эвристическом уровне проиллюстрировать суть некоторых идей, методов и приложений теории инвариантов. (Систематическому изложению этой теории будут посвящены последующие параграфы).

В большинстве этих примеров будет обыгрываться следующая, в значительной степени геометрическая, идея «сечения», позволяющая сводить описание алгебры инвариантов линейной группы $G\subset \mathrm{GL}(V)$ к описанию алгебры инвариантов более простой группы, действующей в пространстве меньшего числа измерений.

Пусть $L\subset V$ — линейное многообразие. На нем естественным образом действует группа $W=N(L)/Z(L)$, где $N(L)=\{g\in G \mid gL=L\}$, а $Z(L)=\{g\in G \mid g|_L=\mathrm{id}\}$. Ограничение функций на L определяет гомоморфизм алгебр инвариантов

$$\rho : k[V]^G \to k[L]^W \qquad (0.1)$$

Предположим, что орбиты точек общего положения пересекают L. Тогда ρ — вложение. Предположим еще, что каким-то образом удалось установить, что для некоторой подгруппы $W' \subset W$ и некоторых инвариантов $f_1, \ldots, f_s \in k[V]^G$ многочлены $\rho(f_1), \ldots, \rho(f_s)$ порождают алгебру $k[L]^{W'}$. Тогда, очевидно, $f_1, \ldots, f_s$ порождают алгебру $k[V]^G$ (и $k[V]^G \simeq k[L]^W = k[L]^{W'}$).

Если $k[V]^G = k[f_1, \ldots, f_s]$, то многообразия уровня алгебры инвариантов (т. е. максимальные подмножества, на которых все инварианты постоянны) суть слои отображения

$$\pi: V \to k^s, \quad v \mapsto (f_1(v), \ldots, f_s(v)). \tag{0.2}$$

Отметим еще, что инварианты можно трактовать как неподвижные элементы для естественного действия группы G в пространстве (целых или рациональных) функций на V, определяемого формулой $(gf)(v) = f(g^{-1}v)$.

Далее до конца этого параграфа мы ради простоты будем считать, что $k = \mathbf{C}$.

0.4. Инварианты симметрической группы. Пусть $G = S_n$ — симметрическая группа, естественно действующая на $V = \mathbf{C}^n$ перестановками координат:

$$\delta(x_1, \ldots, x_n) = (x_{\delta^{-1}(1)}, \ldots, x_{\delta^{-1}(n)}), \quad \delta \in S_n.$$

Тогда $\mathbf{C}[V]^G$ — это алгебра симметрических многочленов. Пусть $f_i \in \mathbf{C}[V]^G$ — i-я элементарная симметрическая функция. Тогда, согласно классической теореме о симметрических многочленах, функции $f_1, \ldots, f_n$ порождают алгебру $\mathbf{C}[V]^G$ и не связаны никакими нетривиальными алгебраическими соотношениями (это верно для любого поля k). Множество координат любой точки $v \in \mathbf{C}^n$ — это в точности множество корней многочлена $t^n - f_1(v)t^{n-1} + \ldots + (-1)^n f_n(v)$. Отсюда следует, во-первых, что слой отображения π (см. (0.2)), содержащий точку v, совпадает с ее орбитой, и, во-вторых, что образом π является все $\mathbf{C}^n$. Таким образом, с помощью π осуществляется «параметризация» множества всех орбит точками пространства $\mathbf{C}^n$, которое, тем самым, естественно считать «многообразием орбит» действия группы G на V.

Тот факт, что в этом примере инварианты разделяют орбиты, справедлив в действительности для любой конечной группы G. В самом деле, если Gv и Gu — две разные орбиты, то найдется многочлен $f \in \mathbf{C}[V]$, обращающийся в 0 на Gv и в 1 на Gu, а тогда многочлен $\prod_{g \in G} gf$ будет инвариантом, равным 0 на Gv и 1 на Gu.

0.5. Ортогональные инварианты вектора. Пусть $G = \mathrm{O}_n(\mathbf{C})$ — ортогональная группа, сохраняющая невырожденную квадратичную форму f в пространстве V. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — координаты в базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$, в котором f имеет вид $x_1^2 + \ldots + x_n^2$.

Согласно определению, $f \in \mathbf{C}[V]^G$. Пусть $L = \langle e_1 \rangle$. Любая гиперповерхность $f = c$, $c \neq 0$, является орбитой, пересекающей прямую L. Поэтому гомоморфизм (0.1) является вложением. Ясно, что W — группа второго порядка, действующая на L умножением на -1. Поэтому $\mathbf{C}[L]^W$ — это алгебра всех четных многочленов на L. Ясно, что $\rho(f)$ — это квадрат координаты на L. Значит, $\mathbf{C}[L]^W = \mathbf{C}[\rho(f)]$. Следовательно, $\mathbf{C}[V]^G = \mathbf{C}[f]$.

В рассмотренном примере все слои отображения (0.2), кроме «нулевого слоя» $\pi^{-1}(\pi(0))$, образованного изотропными векторами, являются орбитами. По теореме Витта, в нулевом слое имеется, кроме нуля, еще ровно одна орбита.

Таким образом, по сравнению с предыдущим примером мы сталкиваемся с новым явлением — существованием орбит, которые не разделяются инвариантами. Мы увидим в дальнейшем (см. п. 2.3), что на самом деле это явление общего характера: для любой бесконечной группы G, действующей на V эффективно, многообразие уровня алгебры инвариантов, содержащее нуль, содержит еще хотя бы одну орбиту.

Отметим, что алгебра инвариантов группы $\mathrm{SO}_n(\mathbf{C}) = \{g \in \mathrm{O}_n(\mathbf{C}) \mid \det g = 1\}$ также совпадает с $\mathbf{C}[f]$ при $n \geqslant 2$. Это доказывается с помощью тех же рассуждений, что и для группы $\mathrm{O}_n(\mathbf{C})$.

0.6. Инварианты линейного оператора. Пусть U — n-мерное векторное пространство. Группа $G = \mathrm{GL}(U)$ действует на векторном пространстве $V = L(U)$ сопряжениями: $g(v) = gvg^{-1}$. Зафиксировав в U базис, отождествим G с $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$, а V с $L_n(\mathbf{C})$. Тогда орбиты — это в точности классы подобных матриц.

Пусть $(-1)^i f_i \in \mathbf{C}[V]$ — коэффициент при t^{n-i} характеристического многочлена $\det(tE - v)$, $v \in V$ (здесь E — единичная матрица). Поскольку характеристические многочлены подобных матриц совпадают, $f_i \in \mathbf{C}[V]^G$.

Рассмотрим в V линейное подпространство L, образованное диагональными матрицами. Как следует из теории жордановой формы, орбита любой матрицы, собственные числа которой различны, пересекает L. Поскольку у матрицы общего положения собственные числа различны, мы получаем, что гомоморфизм (0.1) является вложением.

Мономиальные матрицы лежат в $N(L)$ и действуют на L перестановками диагональных элементов. Поэтому, если отождествить естественным образом L с $\mathbf{C}^n$, то группа S_n, действующая на $\mathbf{C}^n$, как в п. 0.4, отождествится с некоторой подгруппой в W (на самом деле $S_n = W$, но нам это не понадобится). Из определения ясно, что $\rho(f_i)$ — это в точности i-я элементарная симметрическая функция. Ввиду п. 0.4, отсюда следует, что $\mathbf{C}[V]^G = \mathbf{C}[f_1, \ldots, f_n]$ и что между $f_1, \ldots, f_n$ нет никаких нетривиальных алгебраических соотношений.

Мы видим, что в рассматриваемом случае $\pi(V)=\mathbf{C}^n$, а слои отображения π — это многообразия матриц, имеющих одинаковые собственные числа. Поэтому эффект неразделения орбит инвариантами выражен в этом примере еще в большей степени, чем в предыдущем: имеются слои, отличные от нулевого, содержащие больше одной орбиты. Поскольку орбиты, лежащие в одном слое, — это (согласно теории жордановой формы) в точности орбиты жордановых матриц, имеющих одинаковую диагональ, в каждом слое имеется лишь конечное число орбит. Среди них есть ровно одна, состоящая из *полупростых матриц* (т. е. таких, жорданова форма которых диагональна). Эта орбита может быть охарактеризована в топологических терминах как единственная замкнутая орбита в слое.

Чтобы объяснить это, напомним, что любая матрица $v\in V$ допускает «аддитивное разложение Жордана»

$$v=v_s+v_n, \quad v_s v_n=v_n v_s, \tag{0.3}$$

где v_s — полупростая, а v_n — нильпотентная матрица из V. Действительно, достаточно установить существование такого разложения для жордановой матрицы v, а в этом случае в качестве v_s можно взять диагональ матрицы v.

Легко видеть, что для любого $t\in\mathbf{C}^*$ матрицы v_s+tv_n и v подобны. Следовательно, орбита матрицы v_s лежит в замыкании орбиты матрицы v. Таким образом, если матрица v неполупроста, то ее орбита Gv незамкнута. Напротив, если v полупроста, то Gv замкнута, поскольку, как легко видеть, в этом случае Gv есть подмножество в слое $\pi^{-1}(\pi(v))$, заданное уравнением $m=0$, где m — минимальный многочлен матрицы v.

Таким образом, отображение π осуществляет параметризацию множества замкнутых орбит группы G в V точками многообразия $\pi(V)=\mathbf{C}^n$ (которое, тем самым, можно рассматривать как «многообразие замкнутых орбит»).

Поучительно еще рассмотреть нулевой слой $\pi^{-1}(\pi(0))$. Он состоит в точности из всех нильпотентных матриц, которые могут быть также охарактеризованы как те векторы пространства V, орбиты которых содержат в своем замыкании нуль. То же самое справедливо и в примере п. 0.5.

Отмеченные свойства не случайны. Как мы увидим в дальнейшем (см. п. 4.4), для любой редуктивной группы G каждое многообразие уровня алгебры инвариантов содержит единственную замкнутую орбиту, а многообразие уровня, содержащее нуль, состоит в точности из тех векторов, орбиты которых содержат нуль в своем замыкании.

Отметим еще, что матрицы общего положения полупросты и поэтому их орбиты разделяются целыми инвариантами. То же явление наблюдается и в примерах пп. 0.4 и 0.5. Это также не случайно: мы увидим в дальнейшем (см. п. 3.2), что целые инварианты любой полупростой группы G разделяют орбиты

общего положения. В частности, отсюда следует, что орбиты общего положения имеют одинаковую коразмерность, равную максимальному числу алгебраически независимых инвариантов (почти во всех примерах этого параграфа в этом легко убедиться непосредственно).

0.7. Унимодулярные инварианты квадратичной формы. Пусть U — n-мерное векторное пространство, $G=\mathrm{SL}(U)$ и V — векторное пространство квадратичных форм на U, на котором G действует естественным образом (см. п. 0.3). Зафиксировав в U базис, отождествим G с $\mathrm{SL}_n(\mathbf{C})$, а V — с пространством симметрических матриц порядка n (матриц квадратичных форм в этом базисе). Тогда действие G на V задается формулой $g(v)=gvg^T$.

Пусть $L=\langle E\rangle$. Поскольку всякая квадратичная форма приводится в некотором базисе к сумме квадратов, орбита любой невырожденной матрицы пересекается с L. Поэтому гомоморфизм (0.1) является вложением. Легко видеть, что W действует на L умножениями на корни n-й степени из 1, и, значит, $\mathbf{C}[L]^W$ — кольцо многочленов от n-й степени координатной функции на L. Из унимодулярности группы G следует, что дискриминант квадратичной формы, т. е. функция $D(v)=\det v$ является инвариантом. Ясно, что ее ограничение на L является n-й степенью координатной функции на L. Следовательно $\mathbf{C}[V]^G=\mathbf{C}[D]$.

Таким образом, слоями отображения (0.2) являются гиперповерхности $D=c$. Если $c\neq 0$, то слой является орбитой (которая тем самым замкнута). При $c=0$ мы получаем нулевой слой. Он является объединением n орбит $\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_{n-1}$: орбиту $\mathcal{O}_i$ образуют все формы ранга i. Очевидно, $\mathcal{O}_{i-1}$ лежит в замыкании $\mathcal{O}_i$, $i=1, \ldots, n-1$.

0.8. Ортогональные инварианты квадратичной формы. Сохраним обозначения п. 0.7, заменив G на ортогональную группу $\mathrm{O}_n(\mathbf{C})$.

Пусть $V(\mathbf{R})$ — вещественное подпространство в V, образованные вещественными матрицами. Так как $\mathrm{O}_n(\mathbf{C})$ — алгебраическая оболочка O_n, то $\mathbf{C}[V]^{\mathrm{O}_n(\mathbf{C})}=\mathbf{C}[V]^{\mathrm{O}_n}$. Поскольку $V(\mathbf{R})$ инвариантно относительно O_n и является вещественное формой V, то образующие алгебры $\mathbf{R}[V(\mathbf{R})]^{\mathrm{O}_n}$ будут и образующими алгебры $\mathbf{C}[V]^{\mathrm{O}_n}$ (если координатные функции на $V(\mathbf{R})$ естественно продолжить на V). Чтобы описать образующие алгебры $\mathbf{R}[V(\mathbf{R})]^{\mathrm{O}_n}$, рассмотрим в $V(\mathbf{R})$ линейное подпространство L, образованное диагональными матрицами. Согласно классическому результату линейной алгебры, каждая O_n-орбита в $V(\mathbf{R})$ пересекает L. Поэтому гомоморфизм (0.1) (в котором в качестве G и V следует взять соответственно O_n и $V(\mathbf{R})$) является вложением.

Поскольку $g^T=g^{-1}$ для $g\in\mathrm{O}_n(\mathbf{C})$, а мономиальные матрицы с ненулевыми элементами ± 1 леат в O_n, те же рассуждения,

что и в п. 0.6, показывают, что коэффициенты $f_1, \ldots, f_n$ характеристического многочлена матрицы $v \in V(\mathbf{R})$ являются (как функции от v) образующими алгебры $\mathbf{R}[V(\mathbf{R})]^{\mathrm{O}_n}$. Следовательно, эти же коэффициенты (как функции от $v \in V$) являются образующими алгебры $\mathbf{C}[V]^G$. Эти образующие не связаны никакими нетривиальными алгебраическими соотношениями.

Отметим, что рассмотренное действие группы G приводимо. Его ограничение на инвариантное подпространство, образованное матрицами $v \in V$ с нулевым следом, неприводимо. Очевидно, алгебра инвариантов этого ограничения порождена многочленами $f_2, \ldots, f_n$.

При $n \geqslant 2$ те же результаты получаются и для группы $\mathrm{SO}_n(\mathbf{C})$.

Группа O_n является максимальной компактной подгруппой в $\mathrm{O}_n(\mathbf{C})$. Переход к такой подгруппе в произвольной редуктивной группе G не меняет алгебры инвариантов. Этот прием известен под названием унитарного трюка Г. Вейля. Как мы видим, он может быть полезен.

0.9. Инварианты системы векторов. Пусть V — n-мерное векторное пространство и $G = \mathrm{SL}(V)$. Группа G естественно действует на прямой сумме m экземпляров пространства V, которую мы обозначим через V_m.

Пусть $m < n$. Тогда, очевидно, множество $\{(v_1, \ldots, v_m) \in V_m \mid \dim\langle v_1, \ldots, v_m\rangle = m\}$ является открытой плотной в V_m орбитой. Поэтому $\mathbf{C}[V_m]^G = \mathbf{C}$.

Пусть $m = n$. Обозначим через $\det$ ненулевую кососимметрическую n-линейную форму на V (она определена однозначно с точностью до постоянного множителя). Тогда функция $\det_{12\ldots n} \in \mathbf{C}[V_n]$, значение которой в точке $(v_1, \ldots, v_n) \in V_n$ равно, по определению, $\det(v_1, \ldots, v_n)$, является инвариантом. Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис в V. Рассмотрим в V_n линейное многообразие $L = \{(te_1, \ldots, e_n) \mid t \in \mathbf{C}\}$. Орбита любой точки $(v_1, \ldots, v_n) \in V_n$, для которой $\langle v_1, \ldots, v_n\rangle = n$, пересекает L. Поэтому гомоморфизм (0.1) (в котором в качестве V следует взять V_n) является вложением. Поскольку $\rho(\det_{12\ldots n})$ — координата на L, мы имеем $\mathbf{C}[V_n]^G = \mathbf{C}[\det_{12\ldots n}]$.

Пусть $m > n$. Заметим, что, помимо действия группы G, на V_m имеется еще действие группы $\mathrm{GL}_m(\mathbf{C})$, при котором матрица $A \in \mathrm{GL}_m(\mathbf{C})$ действует по правилу $(v_1, \ldots, v_m) \mapsto (v_1, \ldots, v_m)A^{-1}$. Тем самым, возникает действие группы $\mathrm{GL}_m(\mathbf{C})$ на $\mathbf{C}[V_m]$ и, поскольку оно перестановочно с действием G, то и действие группы $\mathrm{GL}_m(\mathbf{C})$ на $\mathbf{C}[V_m]^G$. Согласно общим результатам теории представлений редуктивных групп, любое $\mathrm{GL}_m(\mathbf{C})$-инвариантное подпространство в $\mathbf{C}[V_m]$ имеет $\mathrm{GL}_m(\mathbf{C})$-инвариантное дополнение, и в любом неприводимом $\mathrm{GL}_m(\mathbf{C})$-инвариантном подпространстве имеется единственный с точностью до скалярного множителя ненулевой инвариант группы $UT_m(\mathbf{C})$ верхних унитреугольных матриц. Заметим, что

действие группы $UT_m(\mathbf{C})$ на точку $(v_1, \ldots, v_m)$ состоит в том, что к каждому из векторов $v_1, \ldots, v_m$ прибавляется произвольная линейная комбинация предыдущих. Следовательно, значение $UT_m(\mathbf{C})$-инварианта в точке общего положения $(v_1, \ldots, v_m)$ совпадает с его значением в точке $(v_1, \ldots, v_n, 0, \ldots, 0)$. Это означает, что $UT_m(\mathbf{C})$-инварианты в $\mathbf{C}[V_m]$ не зависящая от $v_{n+1}, \ldots, v_m$.

Рассмотрим теперь произвольный набор индексов $i_1, \ldots, i_n$, взятых из $1, \ldots, m$, и инвариант $\det_{i_1, \ldots, i_n} \in \mathbf{C}[V_m]^G$, значение которого в точке $(v_1, \ldots, v_m)$ равно, по определению, $\det(v_{i_1}, \ldots, v_{i_n})$. Пусть A — подалгебра в $\mathbf{C}[V_m]^G$, порожденная всеми такими инвариантами. Она инвариантна относительно $GL_m(\mathbf{C})$ и, поскольку $\mathbf{C}[V_n]^G = \mathbf{C}[\det_{12\ldots n}]$, содержит $\mathbf{C}[V_n]^G$, а значит, и все $UT_m(\mathbf{C})$ — инварианты алгебры $\mathbf{C}[V_m]^G$. Это показывает, что $A = \mathbf{C}[V_m]^G$. Таким образом, инварианты $\det_{i_1 \ldots i_n}$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_n \leqslant m$, порождают алгебру $\mathbf{C}[V_m]^G$.

Рассмотрим теперь строение многообразий уровня алгебры $\mathbf{C}[V_m]^G$ при $m \geqslant n$. Зафиксировав в V базис, отождествим V с $\mathbf{C}^n$, G — с $SL_n(\mathbf{C})$, а V_m — с пространством $L_{n\times m}(\mathbf{C})$ матриц размера $n \times m$ (n строк, m столбцов). Действие $SL_n(\mathbf{C})$ на $L_{n\times m}(\mathbf{C})$ осуществляется умножением матрицы из $L_{n\times m}(\mathbf{C})$ слева на матрицу из $SL_n(\mathbf{C})$. Согласно сказанному выше, указанные многообразия уровня — это слои отображения

$$\pi: L_{n\times m}(\mathbf{C}) \to \mathbf{C}^N, \quad v \mapsto (\ldots, \det_{i_1 \ldots i_n}(v), \ldots).$$

Отсюда видно, что нулевой слой $\mathfrak{N} = \pi^{-1}(\pi(0))$ состоит в точности из всех матриц ранга, меньшего n. Все орбиты в $\mathfrak{N}$ содержат в своем замыкании нуль.

Пусть $v \in L_{n\times m}(\mathbf{C}) \setminus \mathfrak{N}$. Будем рассматривать строки матриц из $L_{n\times m}(\mathbf{C})$ как элементы пространства $\mathbf{C}^m$. При действии элемента $g \in G$ они подвергаются линейной замене с матрицей g. В частности, их линейная оболочка $L(v)$ при этом не меняется. Числа $p_{i_1 \ldots i_n} = \det_{i_1 \ldots i_n}(v)$ — это плюккеровы (или грассмановы) координаты подпространства $L(v)$ в $\mathbf{C}^m$. Классическая теорема линейной алгебры утверждает [94], [159], что они однозначно определяют подпространство $L(v)$. Отсюда следует, что отличные от $\mathfrak{N}$ слои отображения π являются орбитами (которые, тем самым, замкнуты). Кроме того, проективизация образа отображения π является канонически вложенным в $P\mathbf{C}^N$ с помощью *плюккеровых координат* грассмановым многообразием $Gr_{m,n}$ n-мерных подпространств m-мерного векторного пространства, а алгебра $\mathbf{C}[V_m]^G$ — координатной алгеброй многообразия $Gr_{m,n}$.

При $m \geqslant n+2$ между образующими $\det_{i_1 \ldots i_n}$ алгебры $\mathbf{C}[V_m]^G$ имеются нетривиальные алгебраические соотношения. С геометри-

ческой точки зрения они являются уравнениями, задающими $\mathrm{Gr}_{m,n}$ в PC^N. Среди них имеются *соотношения Плюккера*:

$$\sum_{s=0}^{n}(-1)^s \det{}_{i_0\ldots\hat{i}_s\ldots i_n}\det{}_{i_s j_1\ldots j_{n-1}}=0, \tag{0.4}$$

где $i_0, \ldots, i_n$, $j_1, \ldots, j_{n-1}$ — любой набор индексов (справедливость (0.4) вытекает из того, что левая часть, как функция от $v_{i_0}, \ldots, v_{i_n}$ при фиксированных $v_{j_1}, \ldots, v_{j_{n-1}}$ является $(n+1)$-линейной кососимметрической функцией на n-мерном векторном пространстве V). Классический результат алгебраической геометрии утверждает, что соотношения (0.4) являются определяющими, т. е. все прочие соотношения являются их линейными комбинациями с полиномиальными коэффициентами [94] [159].

Относительно группы $\mathrm{GL}(V)$ функции $\det_{i_1\ldots i_n}$ на V_m являются не инвариантами, а так называемыми *полуинвариантами* веса -1. Это означает, что под действием преобразования $g\in\mathrm{GL}(V)$ они умножаются на $(\det g)^{-1}$. Тем самым их отношения являются рациональными инвариантами группы $\mathrm{GL}(V)$.

0.10. Приложения к проективной геометрии. Все эти факты находят — в духе Кэли—Клейна — свое приложение в проективной геометрии.

Пусть $P=PV$, $v_1, \ldots, v_m\in V\setminus\{0\}$, и $p_i\in P$ — точка, соответствующая v_i. Взаимное расположение точек $p_1, \ldots, p_m$ (но не их положение в P!) описывается алгебраическими условиями (равенствами и неравенствами), имеющими инвариантный смысл, т. е. не меняющимися, если подвергнуть набор $(p_1, \ldots, p_m)$ проективному преобразованию, или, что равносильно, набор $v=(v_1, \ldots, v_m)\in V_m$ — линейному преобразованию. Теоремы проективной геометрии, касающиеся взаимного расположения точек $p_1, \ldots, p_m$, суть утверждения о том, что одни из этих условий являются следствиями других.

Пусть, например, $n=2$, $m=4$ и никакие три из точек p_1, p_2, p_3 p_4 не совпадают. Отношение $\dfrac{\det_{13}(v)}{\det_{23}(v)}:\dfrac{\det_{14}(v)}{\det_{24}(v)}$ (быть может, равное ∞) зависит лишь от точек p_i и не меняется, если подвергнуть набор v линейному преобразованию. Это — известное *двойное отношение* $[p_1, p_2; p_3, p_4]$ точек p_1, p_2, p_3, p_4 на проективной прямой P. Оно полностью определяет их взаимное расположение: две упорядоченные четверки точек переводятся друг в друга проективным преобразованием в точности тогда, когда их двойные отношения равны.

Пусть теперь $n=3$, т. е. P — проективная плоскость. Очевидно, что условие «точки p_1, p_2, $p_3\in P$ лежат на одной прямой» равносильно условию «$\det(v_1, v_2, v_3)=0$».

Пусть $p_0 \in P$ — точка, соответствующая вектору $v_0 \in V$, и $l \subset P$ — прямая, не проходящая через p_0 и являющаяся проективизацией двумерного подпространства $U \subset V$. Так как $\det(v_0, v_1, v_2)$ является кососимметрической билинейной функцией от v_1 и v_2, то при $v_1, v_2 \in U$ имеем $\det(v_0, v_1, v_2) = c \det(v_1, v_2)$ $(c \neq 0)$, где det в правой части обозначает двумерный определитель. Отсюда следует, что для любых точек $p_1, p_2, p_3, p_4 \in l$

$$[p_1, p_2, p_3, p_4] = \frac{\det_{013}(v)}{\det_{023}(v)} : \frac{\det_{014}(v)}{\det_{024}(v)}.$$

Выражение, стоящее в правой части этого равенства, можно рассматривать и тогда, когда точки p_1, p_2, p_3, p_4 не лежат на одной прямой (и оно будет проективным инвариантом системы точек p_0, p_1, p_2, p_3, p_4). Покажем, что оно не меняется при замене точки p_1 на любую точку p_5, лежащую на прямой p_0p_1. Имеем соотношение Плюккера: $\det_{013}\det_{405} - \det_{413}\det_{005} + \det_{403}\det_{105} - \det_{401}\det_{305} = 0$. Учитывая, что $\det_{005} = 0$ и $\det_{105}(v) = 0$ (поскольку точки p_0, p_1, p_5 лежат на одной прямой), получаем, что

$$\det_{013}(v)\det_{054}(v) = \det_{014}(v)\det_{053}(v)$$

откуда и следует доказываемое утверждение.

Заменяя аналогичным образом каждую из точек p_1, p_2, p_3, p_4, получаем, что если точки $p_0, p_1, \ldots, p_8$ расположены, как на рис. 1, то $[p_1, p_2; p_3, p_4] = [p_5, p_6; p_7, p_8]$. Это одна из простейших теорем проективной геометрии.

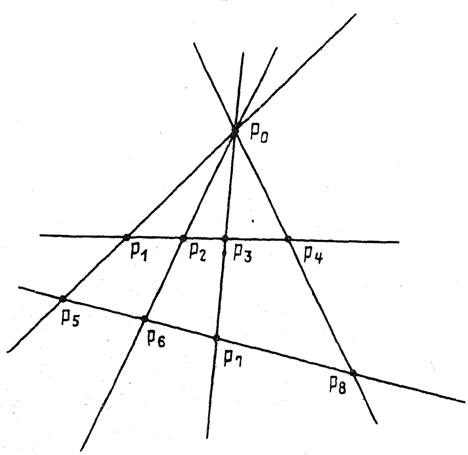


Рис. 1

В принципе, как и утверждал Клейн, методы теории инвариантов позволяют получить алгебраические доказательства всех мыслимых теорем проективной геометрии. Однако алгебраические формулировки многих простых с точки зрения геометрии теорем оказались бы весьма громоздкими, а их алгебраические

доказательства было бы чрезвычайно трудно получить, не руководствуясь геометрическими ориентирами. Поэтому тезис о том, что теория инвариантов включает в себя проективную геометрию (а также другие геометрии, сводящиеся к проективной) имеет в значительной степени формальный смысл подобно тезису о том, что геометрия включает в себя алгебру действительных чисел, поскольку действительные числа и алгебраические операции над ними допускают геометрическое истолкование.

0.11. Неупорядоченные наборы точек проективной прямой и гиперэллиптические кривые. Как известно [151], всякая гиперэллиптическая кривая рода $g \geqslant 1$ является двулистным накрытием проективной прямой P^1, ветвящимся в $2g+2$ различных точках. Любые $2g+2$ различных точек могут служить такими точками ветвления, и две гиперэллиптические кривые рода g изоморфны в точности тогда, когда наборы их точек ветвления переводятся друг в друга преобразованием из проективной группы $PGL_2(\mathbf{C})\ (=PSL_2(\mathbf{C}))$. Таким образом, алгебраические инварианты неупорядоченного набора $2g+2$ различных точек проективной прямой интерпретируются как инварианты класса изоморфных гиперэллиптических кривых рода g и поэтому их нахождение непосредственно связано с классификацией таких кривых.

Пусть, например, $g=1$ (т. е. рассматриваемые кривые — эллиптические). Согласно п. 0.10 двойное отношение ρ является единственным проективным инвариантом упорядоченной четверки точек на P^1. При всевозможных перестановках точек оно принимает значения ρ, ρ^{-1}, $1-\rho$, $1-\rho^{-1}$, $(1-\rho)^{-1}$, $(1-\rho^{-1})^{-1}$. Отсюда нетрудно вывести, что выражение $j=\frac{(\rho^2-\rho+1)^3}{\rho^2(\rho-1)^2}$ является проективным инвариантом неупорядоченной четверки различных точек и разделяет любые две орбиты в множестве таких четверок. Это так называемый *j-инвариант эллиптической кривой.*

С неупорядоченными наборами точек естественно связан еще один тип объектов — бинарные формы от однородных координат x и y на P^1. А именно, всякий набор из $2g+2$ точек прямой P^1 есть множество нулей некоторой, определенной однозначно с точностью до постоянного множителя, бинарной формы степени $2g+2$. Если бинарная форма h получается из бинарной формы f линейной заменой переменных, то нули h получаются из нулей f проективным преобразованием прямой P^1, индуцированным этой заменой. Следовательно, если P^{2g+2} — проективное пространство, ассоциированное с векторным пространством бинарных форм степени $2g+2$, а Ω — открытое подмножество в P^{2g+2}, соответствующее формам, не имеющим кратных нулей, то факторможество $\Omega/PSL_2(\mathbf{C})$ можно интерпретировать как множество классов изоморфных гиперэллиптических кривых рода g.

Таким образом, мы приходим к классической задаче теории инвариантов — нахождению инвариантов бинарных форм.

0.12. Инварианты бинарных форм. Пусть $G=\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ и $V=V_d$ — векторное пространство бинарных форм

$$u(x, y)=\sum_{i=0}^{d} \alpha_i x^{d-i} y^i \tag{0.5}$$

степени d от стандартных координат x и y пространства $\mathbf{C}^2$, на котором G действует естественным образом. Обычное действие G на функции $\mathbf{C}^2$ (см. конец п. 0.3) определяет действие G на V_d:

$$(gu)(x, y)=u(dx-by, -cx+ay), \quad g=\begin{pmatrix} ab \\ cd \end{pmatrix}\in G$$

(поскольку $g^{-1}=\begin{pmatrix} d-b \\ -c\ \ a \end{pmatrix}$). Инварианты действия G на V_d и называются *инвариантами бинарной формы* степени d.

Примером может служить *дискриминант* Δ бинарной формы:

$$\Delta(u)=\alpha_0^{2d-2}\prod_{i<j}(z_i-z_j)^2,$$

где $z_1, \ldots, z_d$ — корни многочлена $u(z, 1)$, т. е. неоднородные координаты нулей формы u (хорошо известно, что правая часть является однородным многочленом степени $2d-2$ от $\alpha_0, \ldots, \alpha_d$). Инвариантность Δ следует из инвариантности гиперповерхности $\Delta=0$ в пространстве V_d, состоящей в точности из тех форм, которые имеют кратные нули.

Рассмотрим несколько небольших значений d.

Согласно п. 0.7, $\mathbf{C}[V_2]^G=\mathbf{C}[D]$, где $D(u)=\alpha_0\alpha_2-\frac{1}{4}\alpha_1^2$ $\left(=-\frac{1}{4}\Delta(u)\right)$ — дискриминант квадратичной формы $u=\alpha_0x^2+\alpha_1xy+\alpha_2y^2$. Так как $-E$ действует на V_2 тривиально, то по существу на V_2 действует группа $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$. Поскольку это действие сохраняет невырожденную квадратичную форму $D(u)$, отсюда легко следует, что $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})\simeq\mathrm{SO}_3(\mathbf{C})$ и что рассматриваемое действие можно отождествить со стандартным действием $\mathrm{SO}_3(\mathbf{C})$ на трехмерном пространстве. Ввиду сказанного в п. 0.5, мы получаем еще одно доказательство равенства $\mathbf{C}[V_2]^G=\mathbf{C}[D]$.

Пусть $d=3$. Поскольку группа $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ транзитивно действует на тройках различных точек проективной прямой P^1, орбита любой кубической бинарной формы, нули которой различны, пересекает подпространство $L=\langle x^3+y^3\rangle$. Поэтому гомоморфизм (0.1) является вложением. Очевидно, что группа $N(L)$ содержит группу $\left\{\begin{pmatrix}\varepsilon & 0\\ 0 & \varepsilon^{-1}\end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix}0 & \delta\\ -\delta^{-1} & 0\end{pmatrix} \middle| \begin{matrix}\varepsilon^6=1\\ \delta^6=-1\end{matrix}\right\}$, действующую на L умножениями на корни 4-й степени из 1. Но в алгебре $\mathbf{C}[V_3]^G$ заведомо имеется однородный инвариант 4-й степени — это дискриминант

$$\Delta(u)=\alpha_1^2\alpha_2^2-4\alpha_0\alpha_2^3-4\alpha_1^3\alpha_3-27\alpha_0^2\alpha_3^2+18\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3.$$

Отсюда следует, что $\mathbf{C}[V_3]^G=\mathbf{C}[\Delta]$.

Пусть $d=4$. Поскольку $-E$ действует на V_4 тривиально, на V_4, так же как и на V_2, по существу действует группа $PSL_2(\mathbf{C})\simeq SO_3(\mathbf{C})$. Отображение $V_2\times V_2\to V_4$, $(u, v)\mapsto uv$, билинейно и симметрично и, следовательно, определяет линейное отображение φ симметрического квадрата пространства V_2 в V_4. Очевидно, что φ перестановочно с действием $SO_3(\mathbf{C})$, сюръективно и имеет одномерное ядро. Поэтому действие $PSL_2(\mathbf{C})$ на V_4 можно отождествить с естественным действием $SL_3(\mathbf{C})$ на пространстве симметрических матриц порядка 3 со следом 0 (см. п. 0.8). Согласно результатам п. 0.8, отсюда вытекает, что алгебра $\mathbf{C}[V_3]^G$ порождена двумя однородными инвариантами степеней 2 и 3 соответственно, не связанными никакими нетривиальными соотношениями.

С другой стороны, можно явно указать два однородных инварианта степеней 2 и 3 — это так называемые *аполяра* P и *определитель Ганкеля* H:

$$P(u)=\alpha_0\alpha_4-\frac{1}{4}\alpha_1\alpha_3+\frac{1}{12}\alpha_2^2,$$

$$H(u)=\begin{vmatrix}\alpha_0 & \alpha_1/4 & \alpha_2/6\\ \alpha_1/4 & \alpha_2/6 & \alpha_3/4\\ \alpha_2/6 & \alpha_3/4 & \alpha_4\end{vmatrix}.$$

Для проверки инвариантности P и H можно воспользоваться их описанием в терминах тензорной алгебры. А именно, если рассматривать форму u как симметрический тензор типа $(0, 4)$ над векторным пространством $\mathbf{C}^2$ и обозначить через $\det^{-1}$ кососимметрический тензор типа $(2, 0)$, то, как показывает подсчет, P (соответственно, H) оказывается равным, с точностью до ненулевого постоянного множителя, некоторой полной свертке произведения двух (соответственно, трех) экземпляров тензора u с четырьмя (соответственно, шестью) экземплярами тензора $\det^{-1}$ (схемы этих сверток приведены в примере 3° п. 9.5); следовательно, P и H — инварианты. Таким образом, $\mathbf{C}[V_4]^G=\mathbf{C}[P, H]$.

В частности, дискриминант бинарной формы 4-й степени имеет вид $\Delta=2^8(P^3-27H^2)$. Рациональный инвариант $\frac{P^3}{\Delta}$ определен на любой форме, все нули которой однократны, и зависит только от набора ее нулей (но не от самой формы). Имеем $\mathbf{C}(V_4)^{GL_2(\mathbf{C})}=\mathbf{C}\left(\frac{P^3}{\Delta}\right)$. Отсюда следует, что $\frac{P^3}{\Delta}$ есть линейная функция от j-инварианта соответствующей эллиптической кривой. (На самом деле $\frac{P^3}{\Delta}=\frac{1}{1728}j$.)

С увеличением d нахождение минимальной системы однородных образующих алгебры $\mathbf{C}[V_d]^G$ стремительно усложняется. В настоящее время эти образующие найдены еще лишь для $d=5$, 6 и 8 [283], [276]. Не указывая их явно, опишем характер ответа (индексы обозначают степени однородных элементов):

$\mathbf{C}[V_5]^G=\mathbf{C}[f_4, f_8, f_{12}, f_{18}]$, причем $f_{18}^2\in\mathbf{C}[f_4, f_8, f_{12}]$, а f_4, f_8 и f_{12} алгебраически независимы;

$\mathbf{C}[V_6]^G=\mathbf{C}[f_2, f_4, f_6, f_{10}, f_{15}]$, причем $f_{15}^2\in\mathbf{C}[f_2, f_4, f_6, f_{10}]$, а f_2, f_4, f_6, f_{10} алгебраически независимы;

$\mathbf{C}[V_8]^G=\mathbf{C}[f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9, f_{10}]$ и $f_2, \ldots, f_{10}$ связаны пятью определяющими соотношениями.

Кроме того, в [132] доказано, что минимальное число однородных образующих алгебры $\mathbf{C}[V_7]^G$ равно 30, и найдены их степени.

Для любого d нулевой слой отображения (0.2) состоит в точности из тех форм, которые имеют нуль кратности $> \frac{d}{2}$ (см. пример 1° п. 5.4). Все орбиты, лежащие в открытом множестве $\Delta\neq 0$, замкнуты в V и разделяются инвариантами (см. пример 1° п. 4.6 и п. 4.4).

0.13. Инварианты бинарных групп многогранников. Напомним сначала описание групп, о которых идет речь [182], [283].

Отождествим $P^1=PV$ с $\mathbf{C}\cup\{\infty\}$. Будем рассматривать $\mathbf{C}$ как плоскость $\langle e_1, e_2\rangle$ в евклидовом векторном пространстве $\mathbf{R}^3$ с ортонормированным базисом $\{e_1, e_2, e_3\}$. Тогда P^1 отождествляется со сферой $S=\{v\in\mathbf{R}^3 \mid |v|=1\}$ посредством стереографической проекции из конца вектора e_3. Преобразования сферы S, индуцированные элементами группы SO_3 (вращения пространства $\mathbf{R}^3$) отвечают при этих отождествлениях преобразованиям прямой P^1 из группы PSU_2, [283]. Как известно, конечные подгруппы группы SO_3 — это в точности группы вращений следующих многогранников M: правильной n-угольной пирамиды, n-угольного диэдра (правильного n-угольника, рассматриваемого как плоский многогранник), тетраэдра, куба идодекаэдра. Это дает классификацию конечных подгрупп в $PSU_2=SO_3$. Если рассмотреть их полные прообразы в SU_2 и добавить к ним подгруппы индекса 2 в прообразах групп вращений n-угольной пирамиды при нечетном n, то получатся, с точностью до сопряженности, все конечные подгруппы в SU_2; они и называются *бинарными группами многогранников*.

Пусть G — конечная подгруппа в SU_2. Рассмотрим (конечное) множество Ω, образованное всеми точками пересечения сферы S с осями вращений соответствующего G многогранника M в $\mathbf{R}^3$. Оно инвариантно относительно естественного действия G на $S=P^1$. Пусть Ω распадается на d орбит группы G. Для каждой такой орбиты $\mathcal{O}$ зафиксируем какую-либо бинар-

ную форму $f\in\mathbf{C}[V]$, нулями которой являются в точности все точки $\mathcal{O}$. Очевидно, f является полуинвариантом группы G, т. е. $gf=\lambda(g)f$ для любого $g\in G$, где $\lambda: G\to\mathbf{C}^*$ — некоторый гомоморфизм (вес f). Пусть $\varphi, \psi, \ldots, \chi$ — все плоучающиеся так полуинварианты (их d штук). Назовем их *базисными*. Перемножая их, можно получать инварианты. Рассмотрим множество $\mathfrak{E}=\{(a, b, \ldots, c)\in\mathbf{N}^d \mid \varphi^a\psi^b\ldots\chi^c\in\mathbf{C}[V]^G\}$. Очевидно, $\mathfrak{E}$ — аддитивная полугруппа. Оказывается, если $(a, b, \ldots, c)$ пробегают минимальную систему образующих полугруппы $\mathfrak{E}$, то инварианты $\varphi^a\psi^b\ldots\chi^c$ (назовем их базисными) пробегают минимальную систему образующих алгебры $\mathbf{C}[V]^G$. Это устанавливается апостериори, отдельным рассмотрением всех типов многогранников M.

Пусть, например, M — n-угольная пирамида. Тогда ось вращения только одна и Ω состоит из двух неподвижных относительно G точек (так что $d=2$). Без ограничения общности можно считать, что $\Omega=\{0, \infty\}$. Тогда $G=(\operatorname{diag}(\varepsilon, \varepsilon^{-1}))_m$, где $\varepsilon=e^{2\pi i/m}$, $m=2n$, если n четно и (в зависимости от G) $m=n$ или $2n$, если n нечетно. Полуинварианты, определенные орбитами 0 и ∞, — это, соответственно, $\varphi_1=x$ и $\psi_1=y$ (здесь и далее индекс указывает степень формы). Очевидно, $\{(m, 0), (0, m), (1, 1)\}$ — минимальная система образующих полугруппы $\mathfrak{E}$, и легко видеть, что соответствующие инварианты $f_m=\varphi_1^m$, $\tilde{f}_m=\tilde{\psi}_1^m$ и $f_2=\varphi_1\psi_1$ действительно составляют минимальную систему образующих алгебры $\mathbf{C}[V]^G$. Эти образующие не являются алгебраически независимыми; между ними есть одно соотношение: $f_m\tilde{f}_m-f_2^m=0$.

Во всех остальных случаях $d=3$ и G-орбитами в Ω являются проекции из 0 на S трех множеств: вершин многогранника M, середин его ребер и центров его граней. Пусть соответственно φ_n, ψ_m и χ_p — определенные этими орбитами базисные полуинварианты. Все случаи удается рассмотреть по одной схеме. Мы проиллюстрируем ее на примере бинарной группы тетраэдра.

Итак, пусть M — тетраэдр. Тогда $n=4$, $m=6$, $p=4$. Непосредственно проверяется, что $\{(0, 1, 0), (1, 0, 1), (3, 0, 0)\}$ — минимальная система образующих полугруппы $\mathfrak{E}$ и $f_6=\psi_6$, $f_8=\varphi_4\chi_4$, $f_{12}=\varphi_4{}^3$ — соответствующие инварианты. Так как f_6 и f_8 не имеют общих нулей на P^1, то система $f_6=0$, $f_8=0$ имеет в V только нулевое решение. Значит, алгебра $\mathbf{C}[V]$ цела над $\mathbf{C}[f_6, f_8]$ (см. [301], гл. VII, § 7). Из теоремы Безу мы получаем, что общее многообразие уровня инвариантов f_6 и f_8 состоит из $6\cdot8=48=2|G|$ точек. Это означает, что оно состоит ровно из двух G — орбит. Сравнивая степени, получаем, что $f_{12}\notin\mathbf{C}[f_6, f_8]$ и, значит, степень l уравнения целой зависимости функции f_{12} над $\mathbf{C}[f_6, f_8]$ не меньше 2. Но l равна числу различных значений, которые принимает ограничение f_{12} на об-

щее многообразие уровня инвариантов f_6 и f_8. Следовательно, $l=2$ и общее многообразие уровня функций f_6, f_8 и f_{12} является G-орбитой, так что любой инвариант есть функция от f_6, f_8 и f_{12}. Можно показать, что такая функция должна быть рациональна (см. предложение 1.9). Таким образом, $\mathbf{C}(V)^G = \mathbf{C}(f_6, f_8, f_{12})$. Сравнивая степени, мы получаем, что, после умножения f_6 и f_8 на подходящие числа, уравнение целой зависимости функции f_{12} над $\mathbf{C}[f_6, f_8]$ имеет вид $f_{12}^2+f_6^4+f_8^3=0$. Очевидно, поверхность в $\mathbf{C}^3$, заданная последним уравнением (если рассматривать f_i как координаты в $\mathbf{C}^3$), имеет единственную особую точку и, значит [189], нормальна. Таким образом, алгебра $\mathbf{C}[f_6, f_8, f_{12}]$ целозамкнута. Поскольку $\mathbf{C}[V]^G$ цела над $\mathbf{C}[f_6, f_8, f_{12}]$ и $\mathbf{C}[V]^G \subset \mathbf{C}(V)^G = \mathbf{C}(f_6, f_8, f_{12})$, мы получаем, что $\mathbf{C}[V]^G = \mathbf{C}[f_6, f_8, f_{12}]$. Отметим, что по ходу дела мы описали и вид соотношения между f_6, f_8 и f_{12}.

Приведем теперь итоговую таблицу:

Многогранник M, определяющий группу	Базисные полуинварианты	Базисные инварианты	Базисное соотношение между инвариантами
тетраэдр	$\varphi_4,\ \psi_6,\ \chi_4$	$f_6=\psi_6,\ f_8=\varphi_4\chi_4,\ f_{12}=\varphi_4^3$	$f_6^4+f_8^3+f_{12}^2=0$
куб	$\varphi_8,\ \psi_{12},\ \chi_6$	$f_8=\varphi_8,\ f_{12}=\chi_6^2,\ f_{18}= =\chi_6\psi_{12}$	$f_{12}^3+f_{12}f_8^3+f_{18}^2= =0$
додекаэдр	$\varphi_{20},\ \psi_{30},\ \chi_{12}$	$f_{12}=\chi_{12},\ f_{20}=\varphi_{20},\ f_{30}= =\psi_{30}$	$f_{12}^5+f_{20}^3+f_{30}^2=0$
n-угольный диэдр	$\varphi_n,\ \psi_n,\ \chi_2$	$f_4=\chi_2^2$ $f_{2n}=\begin{cases}\varphi_n^2, & \text{если } n \text{ четно}\\ \varphi_n\psi_n, & \text{если } n \text{ нечетно}\end{cases}$ $f_{2n+2}=\begin{cases}\chi_2\varphi_n\psi_n, & \text{если } n \text{ четно}\\ \chi_2\varphi_n^2, & \text{если } n \text{ нечетно}\end{cases}$	$f_{2n+2}^2+f_4f_{2n}^2+ +f_4^{n+1}=0$

Для любой бинарной группы многогранника G образ отображения (0.2) является поверхностью в $\mathbf{C}^3$, уравнением которой как раз и является базисное соотношение между инвариантами (если понимать в нем f_i как координаты в $\mathbf{C}^3$). Эта поверхность имеет единственную особую точку — нуль. Такие особенности поверхностей являются (в некотором точно определенном смысле [94]) простейшими. Они называются *особенностями Клейна, Дю Валя, простыми, двойными рациональ-*

ными, особенностями типов A, D, E, и играют важную роль в алгебраической геометрии [94]. Левые части базисных соотношений между инвариантами, рассматриваемые как функции от координат f_i в $\mathbf{C}^3$, образуют полный список нормальных форм функций в окрестности простой критической точки в смысле теории особенностей функций [12].

0.14. Инварианты тернарной кубической формы. Пусть $G=\mathrm{SL}_3(\mathbf{C})$ и V — векторное пространство кубических форм

$$u(x, y, z)=\sum_{i+j+k} a_{ijk}x^iy^jz^k \tag{0.6}$$

от стандартных координат $x=x_1$, $y=x_2$ и $z=x_3$ пространства $\mathbf{C}^3$, на котором G действует естественным образом.

Если рассматривать x, y, z как однородные координаты на проективной плоскости $P^2=P\mathbf{C}^3$, то уравнение $u=0$ для ненулевой формы u определяет на P^2 некоторую проективную алгебраическую кривую $X(u)$. Известно, что если кривая $X(u)$ гладкая и неприводимая, то она является эллиптической кривой, и что в подходящей однородной системе координат на P^2 ее уравнение имеет так называемую *нормальную форму Вейерштрасса* [94]. В терминах действия G на V последнее означает, что орбита формы (0.6), определяющей эллиптическую кривую, пересекает линейное многообразие $L=\{y^2z+x^3+pxz^2+qz^3 \mid p, q\in\mathbf{C}\}$. Поскольку для формы u общего положения $X(u)$ является эллиптической кривой, гомоморфизм (0.1) является вложением.

Будем рассматривать форму (0.6) как симметрический тензор типа (0,3) над $\mathbf{C}^3$ и обозначим через $\det^{-1}$ кососимметрический тензор $e_1\wedge e_2\wedge e_3$ типа (3,0), где $\{e_1, e_2, e_3\}$ — канонический базис в $\mathbf{C}^3$. Пусть S — полная свертка тензора $u\otimes u\otimes u\otimes u\otimes\det^{-1}\otimes\det^{-1}\otimes\det^{-1}\otimes\det^{-1}$ по следующим парам индексов: (1,1), (4,2), (7,3), (2,4), (5,5), (10,6), (3,7), (9,8), (11,9), (6,10), (8,11), (12,12) (слева — номер верхнего, справа — нижнего индекса); пары подобраны так, чтобы ни у каких двух из них верхний и нижний индексы одновременно не лежали в одном сомножителе сворачиваемого тензора (иначе такая свертка априори была бы нулевой). Очевидно, что $S\in\mathbf{C}[V]^G$. Аналогично, пусть $T\in\mathbf{C}[V]^G$ — полная свертка по тем же парам индексов тензора $u\otimes u\otimes u\otimes H\otimes\det^{-1}\otimes\det^{-1}\otimes\det^{-1}\otimes\det^{-1}$, где $H=\det\left(\frac{\partial^2u}{\partial x_i\partial x_j}\right)$ — *гессиан* формы (0.6). Тогда, как показывает непосредственный подсчет, $S=-\frac{8}{9}p$, $T=-32q$, если $u=y^2z+x^3+pxz^2+qz^3$. Отсюда следует, что $\mathbf{C}[V]^G=\mathbf{C}[S, T]$ (и что $W=\{e\}$).

Как известно [94], всякая эллиптическая кривая изоморфна $X(u)$ для подходящей формы (0.6) и эллиптические кривые

$X(u)$ и $X(v)$ изоморфны в точности тогда, когда u и v лежат, с точностью до пропорциональности, в одной G-орбите. Таким образом, получается еще один подход к построению многообразия модулей эллиптических кривых. В частности, j-инвариант эллиптической кривой $X(u)$ равен $j=\frac{1458S^3}{216S^3-T^2}$.

Можно показать [189], что орбита ненулевой формы u замкнута в точности тогда, когда $X(u)$ — либо эллиптическая кривая, либо объединение трех прямых, не пересекающихся в одной точке. В первом случае эта орбита совпадает со слоем морфизма (0.2) [189]. Кривые $X(u)$, отличные от эллиптических, можно рассматривать как некие вырождения эллиптических кривых; соответствующие им формы u лежат в слоях морфизма (0.2), содержащих более одной орбиты.

§ 1. Действия алгебраических групп

1.1. Регулярные и рациональные действия. Основным объектом теории инвариантов в том смысле, в каком она понимается в настоящей статье, являются действия алгебраических групп на алгебраических многообразиях.

Пусть G — алгебраическая группа и X — алгебраическое многообразие; тогда (*регулярным*) *действием* G на X называется такой гомоморфизм $\alpha: G\to\operatorname{Aut} X$, что отображение

$$G\times X\to X,\quad (g, x)\mapsto\alpha(g)x, \tag{1.1}$$

является морфизмом алгебраических многообразий (называемым морфизмом действия α). В тех случаях, когда ясно, о каком действии идет речь, вместо $\alpha(g)x$ пишут просто gx.

Более общо, *рациональным действием* группы G на многообразии X называется такой гомоморфизм $\alpha: G\to\operatorname{Bir} X$, что отображение (1.1) определено и совпадает с некоторым рациональным отображением

$$\hat{\alpha}: G\times X\to X \tag{1.2}$$

на некотором плотном открытом подмножестве. В этом случае отображение (1.1) автоматически определено и совпадает с α во всей области определения D_α отображения $\hat{\alpha}$ (хотя, вобще говоря, область определения отображения (1.1) больше, чем D_α). Рациональное действие регулярно, если $D_\alpha=G\times X$.

Группа G, рационально действующая на многообразии X, одновременно рационально действует на любом многообразии, бирационально изоморфном X, например, на любом его плотном открытом подмногообразии. Поэтому понятие рационального действия оказывается полезным в тех случаях, когда мы готовы пожертвовать «точками необщего положения», но зато

иметь дело с хорошим многообразием X, скажем, аффинным и неособым.

С другой стороны, может возникнуть желание найти «регулярную модель» рационального действия. Укажем, чего здесь можно ожидать.

Рациональное действие α назовем *хорошим*, если $(e, x) \in D_\alpha$ при любом $x \in X$. Это равносильно тому, что область определения отображения (1.1) совпадает с D_α. Пример плохого действия — действие группы параллельных переносов на плоскости с раздутой точкой. Нетрудно доказать, что множество тех $x \in X$, для которых $(e, x) \in D_\alpha$, всегда открыто и плотно в X. Поэтому любое рациональное действие можно сделать хорошим, перейдя к подходящему плотному открытому подмногообразию многообразия X.

В случае рационального действия α каждому элементу ξ касательной алгебры $\mathfrak{g}$ группы G естественным образом сопоставляется дифференцирование $d\alpha(\xi) : k(X) \to k(X)$, однако оно может не отображать в себя локальную алгебру каждой точки. Как показано в [205], локальная алгебра точки $x \in X$ инвариантна относительно всех дифференцирований $d\alpha(\xi)$, $\xi \in \mathfrak{g}$, тогда и только тогда, когда $(e, x) \in D_\alpha$.

Теорема 1.1 ([296], [55]). Пусть связная алгебраическая группа G рационально действует на алгебраическом многообразии X. Для того, чтобы многообразие X можно было включить в виде плотного открытого подмногообразия в алгебраическое многообразие, на котором группа G действует регулярно, необходимо и достаточно, чтобы действие G на X было хорошим.

Следствие. Пусть алгебраическая группа G рационально действует на алгебраическом многообразии X. Тогда существует алгебраическое многообразие, бирационально изоморфное X, на котором группа G действует регулярно.

В дальнейшем, если не будет оговорено противное, слово «действие», не сопровожденное прилагательным «рациональное», будет означать «регулярное действие».

Действие группы на произвольном алгебраическом многообразии канонически поднимается на нормализацию этого многообразия [269], поэтому при изучении действий, как правило, можно считать многообразие нормальным. Следующие теоремы Сумихиро [287] позволяют во многих случаях ограничиваться рассмотрением квазипроективных многообразий.

Пусть связная алгебраическая группа G действует на нормальном алгебраическом многообразии X.

Теорема 1.2. Многообразие X может быть покрыто G-инвариантными квазипроективными открытыми подмногообразиями.

Теорема 1.3. (Эквивариантная лемма Чжоу) Существует действие группы G на квазипроективном многообразии $\widetilde{X}$ и

G-эквивариантный собственный эпиморфизм $\widetilde{X} \to X$, являющийся бирациональным изоморфизмом. В частности, если многообразие X полно, то $\widetilde{X}$ проективно.

1.2. Теоремы вложения. Наиболее обычными примерами действий алгебраических групп являются (конечномерные) линейные и проективные представления. Другие примеры можно получить путем ограничения этих действий на различные инва~~риант~~ные подмногообразия пространства представления. Оказывается, так могут быть получены почти все действия на квазипроективных многообразиях.

Рассмотрим сначала действия на аффинных многообразиях.

Лемма 1.4. Пусть алгебраическая группа G действует на алгебраическом многообразии X. Тогда всякий элемент пространства $k[X]$ содержится в конечномерном G-инвариантном подпространстве.

◀Морфизму действия соответствует гомоморфизм алгебр

$$\alpha^* : k[X] \to k[G \times X] = k[G] \otimes k[X]$$

таким образом, что

$$(\alpha^* f)(g, x) = f(gx) \quad (f \in k[X],\ g \in G,\ x \in X).$$

Отметим, что, как видно из доказательства леммы, линейное представление группы G в любом конечномерном инвариантном подпространстве пространства $k[X]$ является полиномиальным (т. е. его матричные элементы принадлежат алгебре $k[G]$). Для заданной функции f имеем

$$\alpha^* f = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i \otimes f_i \quad (\varphi_i \in k[G],\ f_i \in k[X]),$$

т. е.

$$f(gx) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(g) f_i(x) \quad (g \in G,\ x \in X).$$

Следовательно, все сдвиги функции f содержатся в линейной оболочке функций $f_1, \ldots, f_m$. (Доказательство равенства $k[X \times Y] = k[X] \otimes k[Y]$ для произвольных многообразий X, Y см. в [255].) ▶

Теорема 1.5. Пусть алгебраическая группа G действует на аффинном многообразии X. Тогда существует такое линейное представление $T : G \to \mathrm{GL}(V)$ и такое замкнутое вложение $\mathrm{i} : X \hookrightarrow V$, что $\mathrm{i}(gx) = T(g)\mathrm{i}(x)$ при $g \in G$, $x \in X$.

◀Из леммы 1.4 следует, что существует G-инвариантное конечномерное подпространство $U \subset k[X]$, содержащее систему образующих алгебры $k[X]$. В качестве V следует взять пространство, сопряженное к U, а в качестве T — естественное линейное представление группы G в этом пространстве. Вложение $U \hookrightarrow k[X]$ продолжается до эпиморфизма алгебр $k[V] \to k[X]$

(элементы пространства U рассматриваются как линейные функции на V). Соответствующее этому эпиморфизму замкнутое вложение $\mathfrak{i}: X \hookrightarrow V$ и является искомым. ▶

Теорема 1.6. Пусть алгебраическая группа G действует на квазиаффинном многообразии X. Тогда многообразие X может быть эквивариантно вложено в виде плотного открытого подмногообразия в аффинное многообразие, на котором действует группа G.

◀ Пусть $A \subset k[X]$ — какая-либо конечно порожденная подалгебра, определяющая вложение многообразия X в виде плотного открытого подмногообразия в аффинное многообразие. В силу леммы 1.4 подалгебра A содержится в некоторой инвариантной конечно порожденной подалгебре. Соответствующее последней аффинное многообразие и будет искомым. ▶

Теорема 1.7. [168] Пусть алгебраическая группа G действует на нормальном квазипроективном многообразии X. Тогда существует такое линейное представление $T: G \to \mathrm{GL}(V)$ и такое вложение $\mathfrak{i}: X \hookrightarrow PV$, что $\mathfrak{i}(gx) = T(g)\mathfrak{i}(x)$ при $g \in G$, $x \in X$.

Предположение о нормальности многообразия X здесь существенно [72].

1.3. Орбиты. Пусть алгебраическая группа G действует на алгебраическом многообразии X. *Орбита* Gx точки $x \in X$ есть не что иное, как образ группы G при морфизме $\alpha_x: G \to X$, определяемом формулой

$$\alpha_x(g) = gx \quad (g \in G). \tag{1.3}$$

Согласно общей теореме алгебраической геометрии, этот образ содержит плотное открытое подмножество своего замыкания; но так как все точки орбиты равноправны, то она сама открыта в своем замыкании. Таким образом, всякая орбита является подмногообразием. Этим алгебраические действия выгодно отличаются от аналитических, для которых возможны орбиты типа плотной обмотки тора.

Из равноправия точек орбиты вытекает также, что орбита является неособым многообразием и что все ее неприводимые компоненты имеют одинаковую размерность. Число неприводимых компонент орбиты не превосходит числа неприводимых (или, что то же, связных) компонент группы G.

Если орбита не замкнута, то ее граница является инвариантным (замкнутым) подмногообразием меньшей размерности. Поэтому во всяком замкнутом инвариантном подмногообразии $Y \subset X$ имеется замкнутая орбита; таковой является, например, любая орбита минимальной размерности, лежащая в Y.

Дифференциал отображения α_x в точке e сопоставляет каждому элементу $\xi \in \mathfrak{g}$ вектор $\xi(x) \in T_x$. Подпространство $\mathfrak{g}(x)$, образованное этими векторами, есть касательное пространство к орбите Gx в точке x, так что

$$\dim Gx = \dim \mathfrak{g}(x).$$

Приведем примеры различного поведения орбит. Во всех этих примерах G — связная подгруппа группы GL_2, естественным образом действующая в k^2.

Пример 1^0. $G=\left\{\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}: t \in k^*\right\}$. Все орбиты, кроме нуля, одномерны и содержат в своем замыкании нуль (см. рис. 2).

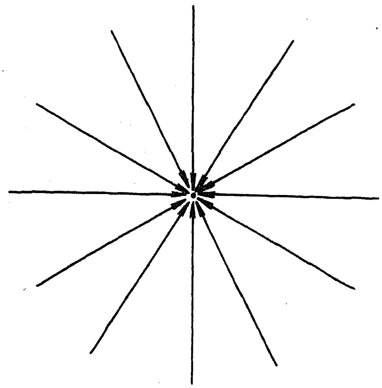


Рис. 2

Пример 2^0. $G=\left\{\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}: t \in k^*\right\}$. Орбиты общего положения одномерны и замкнуты. Кроме того, имеются две одномерные орбиты, замыкание которых содержит нуль (см. рис. 3).

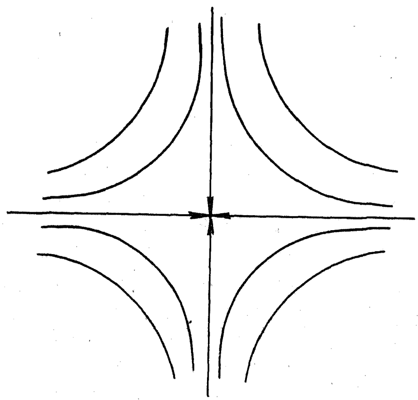


Рис. 3

Пример 3^0. $G=\left\{\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}: u \in k\right\}$. Орбиты общего положения одномерны и замкнуты. Все остальные орбиты (лежащие на оси абсцисс) суть отдельные точки (см. рис. 4).

Пример 4^0. $G=\left\{\begin{pmatrix}1 & u\\ 0 & t\end{pmatrix}: t\in k^*,\ u\in k\right\}$. Имеется открытая орбита (дополнение к оси абсцисс). Остальные орбиты суть отдельные точки.

Пример 5^0. $G=\left\{\begin{pmatrix}t & u\\ 0 & t^{-1}\end{pmatrix}: t\in k^*,\ u\in k\right\}$. Имеется всего три орбиты: двумерная (дополнение к оси абсцисс), одномерная (ось абсцисс без нуля) и нульмерная (нуль).

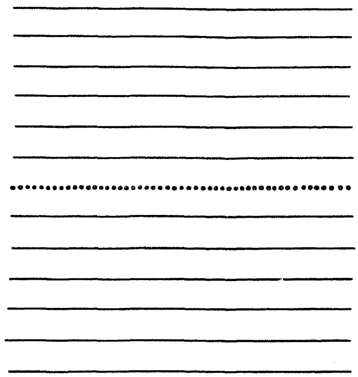


Рис. 4

Стоит обратить внимание на то, что в третьем примере (и только в нем) все орбиты замкнуты. Это имеет место для действия любой унипотентной группы G на аффинном многообразии X.

◀ В самом деле, предположим, что некоторая орбита Gx не замкнута, и пусть I — идеал алгебры $k[\overline{Gx}]$, соответствующий границе этой орбиты. Так как идеал I инвариантен относительно G, то ввиду леммы 1.4 в нем имеется ненулевое конечномерное G-инвариантное подпространство, а по теореме Ли — Колчина для линейного представления группы G в этом подпространстве имеется ненулевой инвариантный вектор. Таким образом, в идеале I имеется ненулевой G-инвариантный многочлен, что, очевидно, невозможно. ▶

В случае рационального действия $G:X$ также можно говорить об орбитах, если это действие хорошее (см. п. 1.1). А именно, назовем точки $x, y\in X$ эквивалентными (запись: $x\underset{G}{\sim}y$ или $x\sim y$), если существует такой элемент $g\in G$, что преобразование $\alpha(g)$ определено в точке x и переводит ее в точку y. Это отношение всегда рефлексивно и транзитивно, а если действие хорошее — то и симметрично. Классы эквивалентности и называются орбитами. Если, согласно теореме 1.1, включить X в виде плотного открытого подмножества в многообразие $\tilde{X}$, на котором G действует регулярно, то орбиты G на X в смысле

данного выше определения будут пересечением с X обычных орбит G на $\tilde{X}$.

1.4. Стабилизаторы. *Стабилизатор* (стационарная подгруппа) G_x точки $x \in X$ в группе G есть не что иное, как слой над x отображения α_x. Следовательно, это замкнутая подгруппа.

Очевидно, слой морфизма $X \times G \to X \times X$, $(x, g) \mapsto (x, gx)$, над точкой (x, gx) изоморфен G_x. Поэтому из теоремы о слоях морфизма [94] следует, что размерность стабилизатора точки многообразия полунепрерывна сверху.

Слои над другими точками орбиты Gx суть смежные классы по G_x и потому имеют одинаковую размерность, равную $\dim G - \dim Gx$. Итак,

$$\dim G = \dim G_x + \dim Gx.$$

Из этой формулы следует, что размерность орбиты точки многообразия X полунепрерывна снизу. В частности, если многообразие X неприводимо, то стабилизаторы точек общего положения имеют минимальную размерность, а орбиты — максимальную размерность.

Следующая теорема показывает, что внутреннее строение орбиты как алгебраического многообразия с действием группы G полностью определяется стабилизатором. (Напомним, что $\mathrm{char}\, k = 0$. Здесь это существенно.)

Теорема 1.8. Пусть алгебраическая группа G транзитивно действует на алгебраических многообразиях X и Y, причем $G_x \subset G_y$ для некоторых точек $x \in X$ и $y \in Y$. Тогда существует (единственный) морфизм $\varphi: X \to Y$, переводящий x в y и перестановочный с действием группы G. Если $G_x = G_y$, то φ — изоморфизм.

Доказательство этой теоремы основано на следующем предложении из алгебраической геометрии, доказанном, например, в [94] (ср. также теорему 4.6 из [34]).

Предложение 1.9. Пусть $\pi: Z \to X$ и $\rho: Z \to Y$ — доминантные рациональные отображения неприводимых алгебраических многообразий и пусть для некоторого непустого открытого подмножества $U \subset Z$ из $z_1, z_2 \in U$, $\pi(z_1) = \pi(z_2)$ вытекает $\rho(z_1) = \rho(z_2)$. Тогда существует такое (однозначно определенное) рациональное отображение $\varphi: X \to Y$, что $\varphi\pi = \rho$.

По теореме Шевалле [119], всякая замкнутая подгруппа H алгебраической группы G является стабилизатором некоторого одномерного линейного подпространства при некотором линейном представлении группы G. Это позволяет каноническим образом ввести на множестве смежных классов G/H структуру квазипроективного алгебраического многообразия так, что

1) естественное действие G на G/H является алгебраическим (в частности, каноническое отображение $G \to G/H$ является морфизмом алгебраических многообразий);

2) всякая орбита группы G со стабилизатором H изоморфна (как алгебраическое многообразие с действием группы G) многообразию G/H.

1.5. Наследование орбит. Для описания орбитального разложения часто бывает полезна следующая лемма, впервые появившаяся (в более слабой форме) в работе Ричардсона [244].

Лемма 1.10. *Пусть алгебраическая группа G действует на алгебраическом многообразии X. Пусть $H \subset G$ — замкнутая подгруппа и $Y \subset X$ — подмногообразие, инвариантное относительно H. Если для любой точки $y \in Y$*

$$\mathfrak{g}(y) \cap T_y(Y) = \mathfrak{h}(y), \tag{1.4}$$

то пересечение с Y любой орбиты $\mathcal{O}$ группы G есть объединение конечного числа орбит группы H, каждая из которых открыта и замкнута в $\mathcal{O} \cap Y$.

◀ Для любой точки $y \in \mathcal{O} \cap Y$ имеем:

$$\mathfrak{h}(y) \subset T_y(\mathcal{O} \cap Y) \subset \mathfrak{g}(y) \cap T_y(Y).$$

Из (1.4) следует, что на самом деле

$$T_y(\mathcal{O} \cap Y) = \mathfrak{h}(y) = T_y(Hy).$$

Поскольку орбита Hy неособа, отсюда следует, что она содержит некоторую окрестность точки y в $\mathcal{O} \cap Y$. Таким образом, все орбиты группы H, содержащиеся в пересечении $\mathcal{O} \cap Y$, открыты в нем. Так как они не пересекаются, то их может быть лишь конечное число. ▶

В качестве иллюстрации докажем, что в любой полупростой алгебре Ли $\mathfrak{g}$ имеется лишь конечное число классов сопряженности нильпотентных элементов. (Именно для этой цели Ричардсон изобрел свою лемму.)

◀ *Можно считать без ограничения общности, что* $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ — линейная алгебра Ли. Пусть $G \subset \mathrm{GL}(V)$ — соответствующая ей связная алгебраическая подгруппа. Применим лемму 1.10 к группе $\mathrm{GL}(V)$, действующей на $\mathfrak{gl}(V)$ посредством присоединенного представления, к ее подгруппе G и к G-инвариантному подпространству $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$. Ввиду полной приводимости линейных представлений алгебры Ли $\mathfrak{g}$ имеется такое разложение $\mathfrak{gl}(V) = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{m}$, что $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$. Из этого разложения для любого $\xi \in \mathfrak{g}$ получаем

$$[\mathfrak{gl}(V), \xi] \cap \mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \xi],$$

что представляет собой условие (1.4) в нашей ситуации. Следовательно, пересечение с $\mathfrak{g}$ любой орбиты группы $\mathrm{GL}(V)$ в $\mathfrak{gl}(V)$ распадается на конечное число орбит группы G.

В частности, пересечение с $\mathfrak{g}$ любого класса сопряженности нильпотентных элементов алгебры $\mathfrak{gl}(V)$ распадается на конечное число классов сопряженности нильпотентных элементов алгебры $\mathfrak{g}$. Известно (из приведения к жордановой форме), что в алгебре $\mathfrak{gl}(V)$ имеется лишь конечное число классов сопря-

женности нильпотентных элементов. Следовательно, то же верно и для алгебры $\mathfrak{g}$. ▶

Тем же методом доказывается, что в полупростой алгебре Ли любой класс сопряженности полупростых элементов замкнут.

◀ В силу предыдущего это вытекает из того, что класс сопряженности любого полупростого линейного оператора в алгебре $\mathfrak{gl}(V)$ замкнут (см. п. 0.6). ▶

§ 2. Рациональные инварианты

2.1. Введение. Вопросы, рассматриваемые в этом параграфе, относятся к бирациональной теории действий. Для того чтобы иметь возможность перехода к неинвариантным открытым подмножествам многообразия X, удобно рассматривать не только регулярные, но и любые рациональные действия. Многообразие X без ущерба можно считать неприводимым, а действие — хорошим.

Итак, пусть задано хорошее рациональное действие α алгебраической группы G на неприводимом алгебраическом многообразии X.

Обычная формула

$$(g\varphi)(x)=\varphi(g^{-1}x) \quad (g\in G,\ \varphi\in k(X),\ x\in X)$$

определяет гомоморфизм $g\mapsto(\varphi\mapsto g\varphi)$ группы G в группу автоморфизмов поля $k(X)$. Функции $\varphi\in k(X)$, для которых $g\varphi=$ $=\varphi$ при всех $g\in G$, называются *рациональными инвариантами* действия α (или группы G, если ясно, о каком действии идет речь). Они образуют подполе поля $k(X)$, называемое *полем инвариантов* действия α и обозначаемое через $k(X)^G$. Это поле всегда конечно порождено над k, так как содержится в конечно порожденном поле $k(X)$ (см., напр., [198]).

В примерах 1^0-3^0 п. 1.3 $k(X)^G=k\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$, $k(x_1x_2)$ и $k(x_2)$ соответственно. (Здесь x_1 и x_2 — координаты в k^2.) В примерах 4° и 5° $k(X)^G=k$. Во всех этих примерах рациональные инварианты разделяют орбиты «общего положения». Наша ближайшая цель — доказать, что это справедливо всегда. Однако прежде дадим точные определения.

Говорят, что рациональный инвариант φ разделяет орбиты $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$, если он определен в точках обеих этих орбит и принимает в них различные значения. Множество M рациональных инвариантов разделяет орбиты $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$, если оно содержит инвариант, разделяющий эти орбиты. Наконец, говорят, что множество M рациональных инвариантов *разделяет* орбиты общего положения, если существует такое непустое откры-

тое подмножество $X_0 \subset X$, что множество M разделяет орбиты любых двух неэквивалентных точек из X_0.

Лемма 2.1. Если конечное множество $M \subset k(X)^G$ разделяет орбиты общего положения, то оно порождает поле $k(X)^G$.

◀ Пусть Y — какая-нибудь модель[1] поля $k(X)^G$ и $Z = \operatorname{Spec} k[M]$. Вложения $k[M] \subset k(X)^G \subset k(X)$ определяют доминантные рациональные отображения

$$X \xrightarrow{\pi} Y \xrightarrow{\rho} Z.$$

По условию леммы для некоторого непустого открытого подмножества $X_0 \subset X$ из $x_1, x_2 \in X_0$, $\rho\pi(x_1) = \rho\pi(x_2)$ следует, что $x_1 \sim x_2$ и, значит, $\pi(x_1) = \pi(x_2)$ (если, конечно, π определено в точке x_1). По предложению 1.9 существует такое рациональное отображение $\varphi: Z \to Y$, что $\varphi\rho\pi = \pi$. Очевидно, что φ — отображение, обратное к ρ. Таким образом, ρ — бирациональный изоморфизм, т. е. $k(M) = k(X)^G$. ▶

2.2. **График действия.** *Графиком действия* α называется подмножество $\Gamma \subset X \times X$, состоящее из пар эквивалентных точек. Иначе говоря, это образ многообразия $G \times X$ при рациональном отображении $(g, x) \mapsto (gx, x)$. Из этого описания следует, что график содержит плотное открытое подмножество своего замыкания. Очевидно, что график инвариантен относительно действий группы G на первый и на второй множители произведения $X \times X$.

Обозначим через p_1 и p_2 проекции произведения $X \times X$ на первый и второй множители соответственно. Для любой точки $x \in X$ имеем

$$\Gamma \cap p_2^{-1}(x) = Gx \times \{x\}.$$

В частности, если график действия замкнут, то замкнуты и все орбиты. Обратное неверно. Так, если $X = k^2 \setminus \{0\}$, $G = k^*$, а действие определено как в примере 2° п. 1.3, то все орбиты одномерны и замкнуты, а график получается из трехмерного многообразия $\{(x_1, x_2, y_1, y_2) \in X \times X : x_1 x_2 = y_1 y_2\}$ выкидыванием плоскостей $x_1 = y_2 = 0$ и $x_2 = y_1 = 0$.

Лемма 2.2. Существует такое непустое инвариантное открытое подмножество $X_0 \subset X$, что индуцированное действие $G : X_0$ обладает следующими свойствами:

1) все орбиты замкнуты и имеют одинаковую размерность;
2) график замкнут.

2.3. Разделение орбит общего положения

Теорема 2.3. Для любого действия α алгебраической группы G на неприводимом алгебраическом многообразии X существует конечное множество рациональных инвариантов, разделяющее орбиты общего положения.

---

[1] Моделью конечно порожденного расширения K поля k называется любое алгебраическое многообразие Y над k, для которого $k(Y) = K$.

Впервые эта теорема была доказана, по-видимому, Розенлихтом [250]; другое доказательство имеется в [269].

◀ Перейдя к подходящему открытому подмножеству, добьемся того, чтобы многообразие X было аффинным и обладало свойствами, указанными в лемме 2.2. Обозначим через I идеал алгебры $k[X\times X]=k[X]\otimes k[X]$, соответствующий графику $\Gamma\subset X\times X$ действия α, и через J — порожденный им идеал алгебры $k(X)\otimes k[X]$.

Будем считать, что группа G действует на первый множитель произведения $X\times X$. Так как график Γ инвариантен относительно этого действия, то идеалы I и J также инвариантны.

Лемма 2.4. Пусть K — расширение поля k и G — некоторая группа его автоморфизмов. Пусть V — векторное пространство над k (не обязательно конечномерное) и W — подпространство векторного пространства $K\otimes V$ над K, инвариантное относительно естественного действия группы G. Тогда W порождается инвариантными векторами.

(Группа G действует в $K\otimes V$ по правилу

$$g(\Sigma a_i\otimes v_i)=\Sigma g a_i\otimes v_i \quad (g\in G,\ a_i\in K,\ v_i\in V).)$$

Положим теперь $K=k(X)$. По лемме 2.4 идеал J алгебры $K\otimes k[X]$ как векторное пространство над K порождается G-инвариантными элементами. Из этих элементов можно выбрать конечную систему образующих идеала J, скажем, $F_1, \ldots, F_p$. Имеем

$$F_i=\sum_s f_{is}\otimes u_{is} \quad (f_{is}\in k(X)^G,\ u_{is}\in k[X]).$$

Докажем, что инварианты f_{is} разделяют орбиты общего положения.

Заменив многообразие X подходящим главным открытым подмножеством, можно добиться выполнения следующих условий:

1) $f_{is}\in k[X]$ при всех i, s;

2) $F_i\in I$ при всех i;

3) $F_1, \ldots, F_p$ порождают идеал I в алгебре $k[X]\otimes k[X]$.

При этих условиях орбита точки $x\in X$ задается уравнениями

$$F_i(x, y)=\sum_s f_{is}(x)u_{is}(y)=0, \quad i=1, \ldots, p.$$

Следовательно, если $f_{is}(x_1)=f_{is}(x_2)$ при всех i, s, то $Gx_1=Gx_2$, т. е. $x_1\sim x_2$.▶

Следствие. Степень трансцендентности поля $k(X)^G$ равна $n-m$, где $n=\dim X$, $m=\max\limits_x \dim Gx$. В частности, $k(X)^G=k$ тогда и только тогда, когда группа G имеет открытую орбиту в X.

◀ Пусть инварианты $y_1, \ldots, y_d\in k(X)^G$ разделяют орбиты общего положения. По лемме 2.1 они порождают поле $k(X)^G$. Положим $Y=\operatorname{Spec} k[y_1, \ldots, y_d]$ и рассмотрим доминантное ра-

циональное отображение $\pi: X \to Y$, определяемое вложением $k[y_1, \ldots, y_d] \subset k(X)$. Согласно выбору функций $y_1, \ldots, y_d$ существует такое непустое открытое подмножество $X_0 \subset X$, что слои ограничения отображения π на X_0 совпадают с орбитами группы G. Следовательно, $\dim X - \dim Y = m$, но $\dim Y$ и есть степень трансцендентности поля $k(X)^G$. ▶

2.4. Рациональный фактор. Всякая модель Y поля $k(X)^G$, вместе с рациональным отображением $\pi: X \to Y$, определяемым вложением $k(X)^G \subset k(X)$, называется *рациональным фактором* действия α (или рациональным фактором многообразия X по группе G, если ясно, о каком действии идет речь).

По теореме о размерности слоев рационального отображения [94], слои общего положения отображения π являются несмешанными[1)] подмногообразиями размерности $m = \dim X - \dim Y$ (совпадающей с размерностью орбит общего положения), а все неприводимые компоненты всех вообще слоев имеют размерность $\geqslant m$. Из теоремы 2.3 следует, что существует непустое инвариантное открытое подмножество $X_0 \subset X$, орбиты точек которого разделяются отображением π (и, следовательно, имеют размерность m). Отсюда вытекает следующее свойство универсальности рационального фактора: если $\rho: X \to Z$ — рациональное отображение, постоянное на орбитах точек общего положения многообразия X, то существует такое рациональное отображение $\varphi: Y \to Z$, что $\rho = \varphi\pi$ (см. предложение 1.9).

Более точное описание слоев общего положения отображения π дает

Предложение 2.5. Пусть (Y, π) — рациональный фактор действия $G:X$. Существует непустое открытое подмножество $Y_0 \subset Y$, слой над каждой точкой которого представляет собой пересечение замыкания орбиты максимальной размерности с областью определения отображения π.

Действие $G:X$ называется *стабильным*, если в X существует непустое открытое подмножество, орбиты точек которого замкнуты. Свойство стабильности не является бирациональной характеристикой действия: при ограничении на открытое подмножество, состоящее из точек, орбиты которых имеют максимальную размерность, любое действие становится стабильным. В примерах п. 1.3 стабильными являются действия 2° и 3°.

С помощью предложения 1.9 легко доказывается

Предложение 2.6. Пусть N — алгебраическая нормальная подгруппа группы G и (Z, ρ) — рациональный фактор многообразия X по группе N. Тогда существует (единственное) рациональное действие β факторгруппы G/N на Z, для которого диаграмма

---

1) Т. е. все их неприводимые компоненты имеют одинаковую размерность.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha(g)} & X \\ \rho\downarrow & & \downarrow\rho \\ Z & \xrightarrow[\beta(gN)]{} & Z \end{array}$$

коммутативна при всех $g\in G$.

Понятие рационального фактора и вся изложенная в этом пункте теория тривиально обобщаются на ситуацию, когда многообразие X не обязательно неприводимо, но группа G транзитивно действует на множестве его неприводимых компонент (так что $k(X)^G$ — поле).

2.5. Сечения. Неприводимое подмногообразие $S\subset X$ называется (рациональным) *сечением* (соотв., *квазисечением*) действия α, если существует такое непустое открытое подмножество $X_0\subset X$, что любая орбита индуцированного действия $G:$ $:X_0$ пересекает S ровно по одной точке (соотв. по непустому конечному множеству). Так, в примере 1° п. 1.3 сечением является любая прямая, не проходящая через нуль, а в примере 2° — любая прямая, параллельная одной из координатных осей и не проходящая через нуль.

Сечение существует далеко не всегда. Например, если группа G конечна (но не тривиальна), то сечения быть не может. Действительно, предположим, что имеется сечение S; тогда отображение

$$G\times S\to X,\quad (g,s)\mapsto gs,$$

является бирациональным изоморфизмом (см. предложение 1.9), что невозможно ввиду неприводимости X. Мы покажем, что любое действие допускает квазисечение, в то время как вопрос о существовании сечения есть вопрос о тривиальности некоторого класса когомологий Галуа.

Пусть (Y,π) — рациональный фактор действия α. Для любого сечения $S\subset X$ определено ограничение отображения π на S. По теореме 2.3 оно разделяет точки общего положения и, следовательно, является бирациональным изоморфизмом. Иначе говоря, поле $k(X)^G$ естественно (путем ограничения функций на S) изоморфно полю $k(S)$. Если же S — лишь квазисечение, то поле $k(S)$ является конечным расширением поля $k(X)^G$.

Сказанное позволяет толковать сечение как рациональное отображение $\sigma: Y\to X$, для которого $\pi\sigma=\mathrm{id}$. При этом $S=\overline{\sigma(Y)}$ будет сечением в смысле первоначально данного определения.

Аналогично, квазисечение можно толковать как такое рациональное отображение σ некоторого неприводимого алгебраического многообразия Z в многообразие X, для которого отображение $\rho=\pi\sigma: Z\to Y$ является рациональным накрытием (т. е. $\overline{\rho(Z)}=Y$ и слои общего положения конечны). Можно требовать, чтобы отображение σ было рациональным вложением; тогда число листов накрытия будет равно числу точек пе-

ресечения орбиты общего положения с подмногообразием $S=\overline{\sigma(Z)}$. Однако мы не будем этого делать, оставляя за собой право заменять многообразие Z любым накрывающим его многообразием. Таким путем мы всегда сможем, во-первых, добиться того, чтобы накрытие ρ было накрытием Галуа, и, во-вторых, представить любые два квазисечения как отображения в X одного и того же многообразия Z.

Предложение 2.7. Любое рациональное действие α допускает квазисечение.

◀ Без ограничения общности можно считать, что X — аффинное многообразие. Пусть $x_1, \ldots, x_h$ — система образующих алгебры $k[X]$. Положим $k(X)^G=K$. По теореме о продолжении гомоморфизмов (см. , напр., [198], теорема 2 гл. X) существует K-гомоморфизм алгебры $K[x_1, \ldots, x_h]$ в некоторое конечное расширение L поля K. Соответствующее рациональное отображение модели Z поля L в многообразие X и будет искомым квазисечением. ▶

Опишем теперь структуру множества всех квазисечений. Для этого слегка изменим нашу точку зрения. А именно, зафиксируем алгебраическое замыкание $\overline{K}$ поля $K=k(X)^G$ и будем считать, что все рассматриваемые конечные расширения поля K вложены в $\overline{K}$. Тогда рациональные отображения в X рациональных накрытий многообразия Y суть не что иное, как $\overline{K}$-точки многообразия X, а квазисечения образуют в $X(K)$ подмногообразие Q, определенное над K. (Множество квазисечений в старом смысле есть фактор многообразия Q по группе $\mathrm{Gal}\,\overline{K}/K$.) Сечения — это K-точки многообразия Q.

Очевидно, что подмногообразие $Q\subset X(\overline{K})$ инвариантно относительно группы $G(\overline{K})$. Если $\sigma_1, \sigma_2: Z\to X$ — любые два квазисечения, то для точек $z\in Z$ общего положения точки $\sigma_1(z)$ и $\sigma_2(z)$ лежат на одной орбите группы G. Отсюда следует, что группа $G(\overline{K})$ транзитивно действует на Q.

Рассмотрим действие группы Галуа $\mathrm{Gal}\,\overline{K}/K$ на Q. Условимся считать, что группа Галуа действует справа, и обозначать это действие верхним индексом. Пусть σ — какое-либо квазисечение и $\mathfrak{H}$ — его стабилизатор в группе $G(\overline{K})$. Для любого $\gamma\in\mathrm{Gal}\,\overline{K}/K$ имеем

$$\sigma^\gamma=g(\gamma)\sigma,$$

где $g(\gamma)\in G(\overline{K})$. Элемент $g(\gamma)$ определен с точностью до умножения справа на элемент из $\mathfrak{H}$. Непосредственное вычисление показывает, что

$$g(\gamma\delta)\equiv g(\gamma)^\delta g(\delta) \pmod{\mathfrak{H}}; \tag{2.1}$$

кроме того,

$$\mathfrak{H}^\gamma=g(\gamma)\mathfrak{H}g(\gamma)^{-1}. \tag{2.2}$$

Отображение $\gamma\mapsto g(\gamma)\mathfrak{H}$, удовлетворяющее условиям (2.1) и

(2.2), естественно называть одномерным коциклом на группе $\mathrm{Gal}\,\overline{K}/K$ со значениями в $G(\overline{K})/\mathfrak{H}$.

Коцикл, определяемый другим квазисечением $\sigma' = g\sigma$ ($g \in G(\overline{K})$), имеет вид

$$g'(\gamma) = g^{\gamma} g(\gamma) g^{-1}; \qquad (2.3)$$

при этом подгруппа $\mathfrak{H}$ заменяется на сопряженную подгруппу

$$\mathfrak{H}' = g\mathfrak{H}g^{-1}. \qquad (2.4)$$

Если подгруппа $\mathfrak{H}$ фиксирована, то должно быть $g \in N(\mathfrak{H})$. Множество коциклов вида (2.3) с $g \in N(\mathfrak{H})$ будем считать по определению классом одномерных относительных когомологий Галуа поля K со значениями в $G(\overline{K})/\mathfrak{H}$. Множество всех таких классов обозначим через $H^1(K, G(\overline{K})/\mathfrak{H})$.

Таким образом, действию α сопоставляется класс когомологий Галуа

$$c = c(\alpha, \mathfrak{H}) \in H^1(K, G(\overline{K})/\mathfrak{H}),$$

где $K = k(X)^G$, а $\mathfrak{H}$ — стабилизатор какого-либо квазисечения. Важно отметить, что определение когомологий зависит от выбора подгруппы $\mathfrak{H}$ в классе сопряженных подгрупп.

Сечения выделяются среди квазисечений тем, что соответствующий им коцикл тривиален. Следовательно, действие α обладает сечением тогда и только тогда, когда $c(\alpha, \mathfrak{H}) = 0$ при подходящем выборе подгруппы $\mathfrak{H}$ в классе сопряженных подгрупп.

2.6. Специальные группы. Если стабилизатор точки общего положения многообразия X тривиален, то $\mathfrak{H} = \{e\}$, и относительные когомологии Галуа превращаются в обычные. Имеются алгебраические группы, для которых эти когомологии тривиальны для любого конечно порожденного расширения K поля k (и тогда автоматически вообще для любого расширения). Следуя [264], назовем эти группы *специальными*.

К числу специальных групп относятся, например:

1) аддитивная группа поля;
2) мультипликативная группа поля;
3) группа SL_n;
4) группа Sp_n.

◀ Специальность первых двух групп доказывается путем аддитивного усреднения соотношения, определяющего коцикл (для мультипликативной группы это так называемая теорема 90 Гильберта). Так же может быть доказана специальность группы GL_n. Специальность групп SL_n и Sp_n вытекает тогда из отсутствия нетривиальных «форм» у объектов, группами автоморфизмов которых они являются [265]. ▶

Далее, легко видеть, что если нормальная подгруппа N группы G и факторгруппа G/N специальны, то и группа G специальна. Отсюда следует, в частности, что все связные разрешимые группы специальны.

Учитывая все вышеизложенное, получаем следующую теорему о существовании сечений.

Теорема 2.8. Пусть G — связная алгебраическая группа, факторгруппа которой по радикалу есть прямое произведение групп типов SL или Sp. Тогда всякое действие группы G с тривиальным стабилизатором общего положения обладает сечением.

Все группы, не удовлетворяющие условию этой теоремы, не являются специальными [264].

Алгебраическая подгруппа H специальной алгебраической группы G специальна тогда и только тогда, когда действие H на G правыми сдвигами обладает сечением [264].

2.7. Бирациональная классификация действий. Независимо от существования сечения, система данных $(G, K, \mathfrak{H}, c)$ характеризует действие α с точностью до бирационального изоморфизма. Эти данные не связаны никакими условиями, кроме одного, обеспечивающего неприводимость многообразия X: коцикл, представляющий класс c, должен принимать значения во всех связных компонентах многообразия $G(\bar{K})/\mathfrak{H}$. (Тем самым получается бирациональная классификация всех действий на неприводимых многообразиях).

◀ Докажем это в случае тривиального коцикла c и связной группы G. Можно проверить, что объекты, существование которых утверждается теоремой Шевалле из п. 1.4, рациональны над полем определения. Это означает, что существует такое определенное над K действие группы $G(\bar{K})$ на проективном пространстве P^n и K-рациональная точка $x \in P^n$, что $\mathfrak{H} = G(\bar{K})_x$. С геометрической точки зрения это означает следующее. Ясно, что K в этом утверждении можно заменить на конечно порожденную k-алгебру $A \subset K$, полем частных которой является K. Пусть Z — аффинное многообразие, определенное алгеброй A. Тогда $\mathfrak{H}$ можно трактовать как алгебраическое семейство подгрупп в G, параметризованное многообразием Z, то есть как такое подмногообразие Y в $Z \times G$, что $\mathfrak{H}(z) := \mathrm{pr}_2(\mathrm{pr}_1^{-1}(z))$ — алгебраическая подгруппа в G (для этого уравнения с коэффициентами в K, задающие $\mathfrak{H}$ в $G(\bar{K})$, следует рассматривать как уравнения с коэффициентами в k, задающие Y в $Z \times G$). Аналогично, точку x следует трактовать как морфизм $s: Z \to P^n$. Тогда $\mathfrak{H}(z)$ — это G-стабилизатор точки $s(z)$. Обозначим через X подмногообразие в P^n, являющееся замыканием $G \cdot s(Z)$. Тогда s является сечением для действия группы G на X и паре (X, s) соответствует система данных $(G, K, \mathfrak{H}, c)$. ▶

Изложенная теория тривиальным образом может быть перенесена на ситуацию, когда многообразие X, вообще говоря, приводимо, но группа G транзитивно действует на множестве его неприводимых компонент (так что $k(X)^G$ — по-прежнему

поле). Тогда сформулированное выше условие будет излишним.

Система данных, описывающая действие, может быть значительно упрощена, если стабилизаторы точек некоторого непустого открытого подмножества $X_0 \subset X$ сопряжены какой-либо одной подгруппе $H \subset G$. (Так будет, например, если стабилизаторы точек общего положения редуктивны; см. также § 7). В этом случае подгруппа $\mathfrak{H}$ сопряжена в $G(\bar{K})$ подгруппе $H(\bar{K})$. Если считать, что $\mathfrak{H} = H(\bar{K})$, то из (2.2) следует, что $g(\gamma) \in (N(H))(\bar{K})$ при всех $\gamma \in \mathrm{Gal}\,\bar{K}/K$, и рассматриваемые когомологии сводятся к обычным когомологиям Галуа поля K со значениями в группе $(N(H)/H)(\bar{K})$.

На геометрическом языке это означает, что бирациональное описание действия группы G на многообразии X сводится к бирациональному описанию действия группы $N(H)/H$ на объединении неприводимых компонент многообразия X^H, пересекающихся с X_0: см. следующий пункт.

2.8. Относительные сечения. Пусть действие α регулярно. Несмешанное подмногообразие $S \subset X$ называется *относительным сечением* действия α, если существует такая алгебраическая подгруппа $N \subset G$ и такое плотное открытое подмножество $S_0 \subset S$, что

(S1) $\overline{GS} = X$;
(S2) $NS \subset S$;
(S3) $gS_0 \cap S_0 \neq \varnothing$ влечет $g \in N$.

При желании явно указать подгруппу N относительное сечение называют *N-сечением*[1]. Впрочем, нетрудно видеть, что N совпадает с нормализатором $N(S) = \{n \in G \mid nS = S\}$ подмногообразия S.

При $N = \{e\}$ относительное сечение является сечением в смысле п. 2.5, но обратное, вообще говоря, неверно, поскольку у точек общего положения в сечении могут быть нетривиальные стабилизаторы.

Многообразие X с действием на нем группы G с точностью до бирационального изоморфизма восстанавливается по N-сечению S с действием на нем подгруппы $N \subset G$. А именно, рассмотрим морфизм

$$\rho : G \cdot S \to X, \quad (g, s) \mapsto gs, \tag{2.5}$$

(правое) действие $N : G \times S$, определяемое формулой

$$(g, s)n = (gn, \ n^{-1}s) \tag{2.6}$$

и перестановочное с ним (левое) действие $G : G \times S$, определяемое формулой

$$g(h, s) = (gh, \ s). \tag{2.7}$$

[1] Впервые это понятие проявилось, по-видимому, в работе П. И. Кацыло [50] под названием «(G, N)-сечение».

П р е д л о ж е н и е 2.9. Группа N транзитивно действует на множестве неприводимых компонент многообразия $G\times S$ (и, тем более, на множестве неприводимых компонент многообразия S). Пара (X, ρ) является рациональным фактором многообразия $G\times S$ по действию (2.6) группы N, причем

$$\dim X = \dim S + \dim G - \dim N.$$

Действие группы G на X индуцируется посредством отображения ρ ее действием (2.7) на $G\times S$.

Из первого утверждения предложения 2.9 следует, что любая неприводимая компонента N-сечения является N_1-сечением, где N_1 — стабилизатор этой компоненты в группе N.

Рассуждение, подобное тому, которое было проведено в п. 2.5, показывает, что поле $k(X)^G$ естественно (путем ограничения функций на S) изоморфно полю $k(S)^N$.

Имеется следующий способ построения относительных сечений. Предположим, что стабилизаторы всех точек некоторого непустого открытого подмножества $X_0 \subset X$ сопряжены одной подгруппе $H = G_{x_0} \subset G$. Рассмотрим неприводимые компоненты многообразия

$$X^H = \{x \in X : hx = x \text{ для всех } h \in H\},$$

пересекающиеся с X_0. Среди них выберем компоненты максимальной размерности. Пусть S — их объединение. Очевидно, что S является $N(H)$-сечением.

В частности, если применить эту конструкцию к присоединенному представлению редуктивной алгебраической группы G, то H будет максимальным тором группы G, а $S = \mathfrak{g}^H$ — его касательной алгеброй, т. е. картановской подалгеброй алгебры $\mathfrak{g}$.

Располагая относительным сечением какого-либо одного действия, можно получать относительные сечения других действий.

П р е д л о ж е н и е 2.10 ([50]). Пусть алгебраическая группа G действует на неприводимых алгебраических многообразиях X и Y, и пусть $\tau : Y \to X$ — доминантный морфизм, перестановочный с действием группы G. Пусть, далее, S — относительное сечение действия $G : X$. Тогда объединение неприводимых компонент максимальной размерности многообразия $\tau^{-1}(S)$ будет относительным сечением действия $G : Y$ (с тем же нормализатором).

П р и м е р 1°. Покажем, как с помощью этого предложения могут быть построены некоторые относительные сечения естественного действия группы SL_2 в пространстве V_d бинарных форм степени d от переменных x, y [50], [51]. При $d \leqslant 4$ стабилизаторы точек общего положения пространства V_d не содержатся в ядре неэффективности действия и сопряжены подгруппе

$$H_d=\begin{cases}\text{группа диагональных матриц при } d=2,\\ \text{циклическая группа порядка 3 при } d=3,\\ \text{группа кватернионных единиц при } d=4.\end{cases}$$

В этих случаях подпространство

$$V_d^{H_d}=\begin{cases}\langle xy\rangle \text{ при } d=2,\\ \langle x^3, y^3\rangle \text{ при } d=3,\\ \langle x^4+y^4, x^2y^2\rangle \text{ при } d=4\end{cases}$$

является $N(H_d)$-сечением. (См. подробности в примере 1° п. 7.2). Разложение симметрического квадрата пространства V_d в сумму неприводимых подпространств (см. пример 2° п. 3.12) показывает, что при нечетном (соотв., четном) d имеется единственное с точностью до постоянного множителя ненулевое SL_2-эквивариантное квадратичное отображение $q: V_d \to V_2$ (соотв., $q: V_d \to V_4$). Можно проверить, что при $d \geqslant 3$ это отображение доминантно. Таким образом, с помощью предложения 2.10 при нечетном $d \geqslant 3$ мы получаем $N(H_2)$-сечение, а при четном $d \geqslant 4$ — $N(H_4)$-сечение действия группы SL_2 в пространстве V_d. Полезно отметить, что эти сечения являются коническими.

2.9. Проблема рациональности. Естественно задаться вопросом, каким может быть поле инвариантов $k(X)^G$ при заданном многообразии X. В частности, не будет ли оно *рационально*[1], если многообразие X рационально?

В силу известных результатов Люрота и Кастельнуово (см., например, [94]) ответ на последний вопрос положителен, если степень трансцендентности поля $k(X)^G$ равна 1 или 2. Без этого ограничения ответ в общем случае отрицателен, как показано в работе [289] (основанной на контрпримере Артина и Мамфорда к проблеме Люрота), в которой G — группа порядка 2. Более того, недавно были построены примеры конечных линейных групп, для которых поле инвариантов не рационально [253]. Однако подобных примеров связных алгебраических линейных групп не известно. Напротив, для них получены некоторые положительные результаты, которые мы сейчас приведем.

Рациональное действие α алгебраической группы G в пространстве k^n называется *треугольным*, если в подходящей системе координат все преобразования $\alpha(g)$, $g \in G$, имеют вид

$$(x_i) \mapsto (a_i x_i + f_i(x_{i+1}, \ldots, x_n)),$$

где $a_i \in k^*$, $f_i \in k(x_{i+1}, \ldots, x_n)$.

Теорема 2.11. [209]. [30]. Поле инвариантов любого треугольного действия рационально.

В силу теоремы Ли — Колчина отсюда получается

[1] Конечно порожденное расширение поля k называется рациональным, если оно изоморфно полю рациональных функций от независимых переменных. Многообразие X называется рациональным, если поле $k(X)$ рационально.

Следствие. Поле инвариантов любой связной разрешимой алгебраической линейной группы рационально.

Особенно прост случай диагональной линейной группы. В этом случае поле инвариантов порождается инвариантными одночленами $x_1^k \ldots x_n^k$, где $k_1, \ldots, k_n$ — целые (не обязательно неотрицательные) числа. Инвариантные одночлены образуют подгруппу в мультипликативной группе всех одночленов. Последняя является свободной абелевой группой ранга n. Следовательно, группа инвариантных одночленов — также свободная абелева. Ее базис и будет алгебраически независимой системой образующих поля инвариантов.

Чрезвычайно трудным кажется вопрос о рациональности полей инвариантов связных полупростых линейных групп. Решение этого вопроса сдвинулось с мертвой точки благодаря П. И. Кацыло, доказавшему следующую теорему [50], [51], [52][1].

Теорема 2.12. Поле инвариантов любого линейного представления группы $SL_2 \times (k^*)^m$ рационально.

Доказательство этой теоремы для неприводимых линий представлений состоит в исследовании относительных сечений, построение которых описано в п. 2.8. Кроме того, используется следующая теорема (автора которой сейчас уже трудно установить, см. обзор [134]):

Теорема 2.13. Пусть алгебраическая группа G линейно действует в векторном пространстве V. Если пространство V может быть разложено в прямую сумму инвариантных подпространств V_1, V_2 таким образом, что стабилизатор точки общего положения для действия $G : V_1$ тривиален и поле $k(V_1)^G$ рационально, то и поле $k(V)^G$ рационально.

Последняя теорема позволяет доказать рациональность полей инвариантов любых линейных представлений простейших неабелевых конечных групп, например группы S_4, что и используется в доказательстве теоремы Кацыло.

Если группа G линейно действует в векторном пространстве V, то она действует и в проективном пространстве PV, ассоциированном с V. При этом

$$k(PV)^G = k(V)^{G \times k^*}, \tag{2.8}$$

где группа k^* действует в V гомотетиями. Поэтому из теоремы Кацыло следует, что поле инвариантов любого проективного представления группы SL_2 рационально. Для проективного представления, ассоциированного с $(2g+3)$-мерным неприводимым линейным представлением, это означает, что пространство модулей гиперэллиптических кривых рода g рационально (см. п. 0.11 и пример 1° п. 4.6).

[1] Для нечетномерных неприводимых представлений доказательство, данное в работе [50], содержало ошибку. В работе [51] дано верное доказательство для всех таких представлений, кроме 11-мерного. Последний случай был разобран в [21].

Отметим, что если поле $k(PV)^G$ рационально, то и поле $k(V)^G$ рационально. (В частности, поле $k(V)^G$ всегда рационально, если $\dim V \leqslant 3$.) Ввиду (2.8) это вытекает из следующей леммы.

Лемма 2.14. Пусть алгебраический тор T действует на неприводимом алгебраическом многообразии Y. Если поле $k(Y)^T$ рационально, то и поле $k(Y)$ рационально.

◀Поскольку любая факторгруппа тора также является тором, можно считать, что действие эффективно. В этом случае по теореме 2.8 оно обладает сечением S. Так как $k(S) \simeq k(Y)^T$, то сечение рационально; но многообразие Y бирационально изоморфно $T \times S$ и, следовательно, также рационально. ▶

Другие результаты по проблеме рациональности см. в [254], [21], [53], [274], [275].

§ 3. Целые инварианты и коварианты

3.1. Введение. Пусть алгебраическая группа G действует на алгебраическом многообразии X. Функции $f \in k[X]$, для которых $gf = f$ при всех $g \in G$, называют инвариантами действия $G : X$ (или группы G, если ясно, о каком действии идет речь); в случае необходимости различения с рациональными инвариантами их называют *целыми*, или регулярными, инвариантами. Целые инварианты образуют подалгебру в алгебре $k[X]$, обозначаемую через $k[X]^G$ и называемую *алгеброй инвариантов* действия $G : X$ (или группы G).

Пример 1°. В примерах 1°—3° п. 1.3 $k[X]^G = k$, $k[xy]$ и $k[y]$ соответственно.

Пример 2°. Пусть H — алгебраическая подгруппа группы G. Рассмотрим действие H на G правыми сдвигами. Естественный морфизм $\pi : G \to G/H$ (см. п. 1.4) определяет изоморфизм $\pi^* : k[G/H] \to k[G]^H$.

Полезным обобщением понятия инварианта является понятие *полуинварианта*, или *относительного инварианта*. (Целым) полуинвариантом веса χ действия $G : X$ называется функция $f \in k[X]$, удовлетворяющая условию $gf = \chi(g) f$, $\chi(g) \in k^*$, при всех $g \in G$. Функция χ автоматически является характером группы G. Ясно, что инвариант — это полуинвариант веса 1.

Пример 3°. В примере 1° п. 1.3 функции x и y являются полуинвариантами одного веса (в то время как инварианты, отличные от константы, отсутствуют).

Имеется удобный геометрический критерий полуинвариантности.

Теорема 3.1. Если группа G связна, а многообразие X неприводимо, то функция $f \in k[X]$ является полуинвариантом тогда и только тогда, когда подмногообразие

$$X(f) = \{x \in X \mid f(x) = 0\} \qquad (3.1)$$

инвариантно относительно G. В частности, все элементы из $k[X]^*$ являются полуинвариантами.

◀Пусть $X(f)$ инвариантно. Заменяя X на $X \setminus X(f)$, можно считать, что $X(f) = \varnothing$, т. е. $f \in k[X]^*$. Рассмотрим функцию $F \in k[G \times X]$, определяемую по формуле $F(g, x) = f(gx)$. Так как $F \in k[G \times X]^*$, то существуют такие функции $f_1 \in k[G]^*$ и $f_2 \in k[X]^*$, что $F(g, x) = f_1(g) f_2(x)$, [251]. Можно считать, что $f_1(e) = 1$; тогда $f = f_2$ — полуинвариант веса f_1^{-1}.▶

3.2. Связь между целыми и рациональными инвариантами. Очевидно, что алгебра $k(X)^G$ рациональных инвариантов действия $G : X$ содержит алгебру отношений $Qk[X]^G$ алгебры $k[X]^G$ целых инвариантов. Вообще говоря, это включение является строгим. Так, в примере 1° п. 1.3 $k(X)^G = k\left(\frac{x}{y}\right)$, а $Qk[X]^G = k(X)^G = k$. Однако в некоторых важных случаях, указываемых ниже, все же имеет место равенство

$$k(X)^G = Qk[X]^G, \qquad (3.2)$$

т. е. каждый рациональный инвариант представим в виде отношения двух целых инвариантов.

Следующая лемма позволяет свести рассматриваемый вопрос к случаю связной группы.

Лемма 3.2. Если рациональный инвариант $f \in k(X)^G$ представим в виде отношения двух целых инвариантов (соотв. полуинвариантов) группы G^0, то он представим в виде отношения двух целых инвариантов (соотв. полуинвариантов) группы G. В частности, если группа G конечна и $k(X) = Qk[X]$, то $k(X)^G = Qk[X]^G$.

◀ Пусть $f = \frac{p}{q}$, где p и q — целые инварианты (соотв. полуинварианты) группы G^0, и пусть $g_1, \ldots, g_s$ — представители смежных классов G по G^0. Тогда $Q = \prod_i g_i q$ будет инвариантом (соотв. полуинвариантом) группы G и, умножив числитель и знаменатель дроби $\frac{p}{q}$ на $\frac{Q}{q}$, мы получим требуемое представление функции f. ▶

Вопрос о справедливости равенства (3.2) разумен, лишь если $k(X) = Qk[X]$ (например, если многообразие X квазиаффинно).

Теорема 3.3. Пусть $k(X) = Qk[X]$. Если выполнено любое из условий

(а) группа G^0 разрешима,

(б) алгебра $k[X]$ факториальна,

то всякий рациональный инвариант действия $G:X$ представим в виде отношения двух целых полуинвариантов (одного веса). Если, кроме того, группа G^0 не имеет нетривиальных характеров (что в случае (а) означает ее унипотентность), то $k(X)^G=Qk[X]^G$.

◀ Будем считать, что группа G связна. Пусть $f=\frac{p}{q}\in k(X)^G$, p, $q\in k[X]$.

(а) Линейная оболочка функций gq, $g\in G$, конечномерна (лемма 1.4). По теореме Ли—Колчина в ней существует ненулевой полуинвариант, скажем, $\sum\limits_i c_i g_i q$ ($c_i\in k$, $g_i\in G$). Для любого i имеем $f=g_i f=\frac{g_i p}{g_i q}$; следовательно, $f=\frac{\sum c_i g_i p}{\sum c_i g_i q}$.

б) Будем считать, что p и q взаимно просты. Если $g\in G$, то $\frac{p}{q}=\frac{gp}{gq}$ и, значит, $gq=\varepsilon q$, где $\varepsilon\in k[X]^*$. Имеем (см. (3.1)) $gX(q)=X(gq)=X(q)$ и, согласно теореме 3.1, q — полуинвариант. ▶

Из теоремы 2.3 и леммы 2.1 легко следует

Предложение 3.4. Пусть многообразие X неприводимо. Алгебра $k[X]^G$ разделяет орбиты общего положения тогда и только тогда, когда $k(X)^G=Qk[X]^G$, и в этом случае существует конечное множество целых инвариантов, разделяющее орбиты общего положения, и степень трансцендентности алгебры $k[X]^G$ равна коразмерности орбиты общего положения.

3.3. Базисные инварианты. Каким образом можно явно описать инварианты заданной алгебраической группы преобразований? Ясно, что достаточно указать систему образующих алгебры инвариантов (ср. пример 2° п. 3.1). Такую систему (определенную, конечно, не однозначно) называют *полной системой инвариантов*, а ее элементы — *базисными инвариантами*[1]).

Обсудим задачу отыскания базисных инвариантов в наиболее важном случае, когда $X=V$ — векторное пространство, а $G\subset \mathrm{GL}(V)$ — линейная группа. (Вплоть до 60-х гг. этого века в теории инвариантов рассматривалась только такая ситуация.)

Алгебра $A=k[V]$ обладает естественной $\mathrm{GL}(V)$ — инвариантной градуировкой $A=\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty}A_n$, где A_n — (конечномерное) пространство однородных многочленов степени n. Очевидно, что

$$A^G=\bigoplus_{n=0}^{\infty}A_n^G. \tag{3.3}$$

[1]) Это не совсем то же самое, что полная система инвариантов в смысле п. 0.1 (см., однако, предложение 3.4 и теорему 3.3).

Для каждого n подпространство A_n^G выделяется в A_n системой однородных линейных уравнений

$$gf=f \ (g\in G). \tag{3.4}$$

Эта система, вообще говоря, бесконечна, однако легко указать эквивалентную ей конечную систему. А именно, пусть $\{\xi_1, \ldots, \xi_m\}$ — базис касательной алгебры $\mathfrak{g}$ группы G и $\{g_1, \ldots, g_s\}$ — система представителей смежных классов G по G^0. Тогда система (3.4) эквивалентна объединению систем

$$\xi_i f=0 \quad (i=1, \ldots, m), \tag{3.5}$$

$$g_j f=f \quad (j=1, \ldots, s). \tag{3.6}$$

Таким образом, мы можем, по крайней мере в принципе, найти базис пространства A_n^G для любого заданного n.

В действительности система (3.5) может быть сокращена. А именно, могут быть оставлены только те уравнения, которые отвечают базисным элементам борелевской подалгебры алгебры $\mathfrak{g}$. Это следует из того, что вектор в пространстве представления связной алгебраической группы, инвариантный относительно ее борелевской подгруппы, автоматически инвариантен относительно всей группы.

Элементы алгебры $\mathfrak{g}$ действуют в $k[V]$ как (линейные) дифференциальные операторы. Поэтому уравнения (3.5) могут быть записаны как *дифференциальные уравнения.*

Пример 1°. (Ср. п. 0.12) Пусть $G=\mathrm{SL}_2$, а $V=V_d$ — пространство бинарных форм

$$u(x, y)=\sum_{i=0}^{d} \alpha_i x^{d-i} y^i \tag{3.7}$$

степени d от стандартных координат x и y тавтологического SL_2-модуля k^2. Группа SL_2 действует в V_d по формуле

$$(gu)(x, y)=u(dx-by, \ -cx+ay) \quad \left(g=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in \mathrm{SL}_2\right). \tag{3.8}$$

Базисные элементы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

ее касательной алгебры $\mathfrak{sl}_2$ действуют в V_d как дифференциальные операторы

$$-x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}, \quad -y\frac{\partial}{\partial x}, \quad -x\frac{\partial}{\partial y} \tag{3.10}$$

соответственно, а в $k[V_d]$ — как дифференциальные операторы

$$\sum_{i=0}^{d}(d-2i)\alpha_i\frac{\partial}{\partial \alpha_i}, \quad \sum_{i=0}^{d-1}(i+1)\alpha_{i+1}\frac{\partial}{\partial \alpha_i}, \quad \sum_{i=1}^{d}(d-i+1)\alpha_{i-1}\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \tag{3.11}$$

(в координатах $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_d$ пространства V_d). Первые две из матриц (3.9) составляют базис борелевской подалгебры алгебры $\mathfrak{sl}_2$. Поэтому дифференциальные уравнения для инвариантов имеют вид

$$\sum_{i=0}^{d}(d-2i)\alpha_i\frac{\partial f}{\partial\alpha_i}=0,\quad \sum_{i=0}^{d-1}(i+1)\alpha_{i+1}\frac{\partial f}{\partial\alpha_i}=0. \tag{3.12}$$

Продолжая общие рассмотрения, для каждого n обозначим через R_n пространство однородных инвариантов степени n, выражающихся (целым образом) через инварианты меньших степеней:

$$R_n=\sum_{m=1}^{n-1}A_m^G A_{n-m}^G. \tag{3.13}$$

Пусть $\{f_{n1}, \ldots, f_{np_n}\}$ — базис какого-либо подпространства в A_n^G, дополнительного к R_n. Многочлены

$$f_{ni}\quad (n=1, 2, \ldots;\quad i=1, \ldots, p_n) \tag{3.14}$$

образуют минимальную полную систему инвариантов. В ее построении имеется некоторый произвол, но, во всяком случае, числа $p_1, p_2, \ldots$ определены однозначно. Любая минимальная полная система однородных инвариантов получается таким образом.

Отметим, что число $p_1+p_2+\ldots$ (конечное или бесконечное) есть минимальное возможное число элементов в полной системе инвариантов, даже не обязательно однородных.

◀В самом деле, пусть $\{f_\alpha\}$ — такая система. Можно считать, что многочлены f_α не имеют свободных членов. Тогда они принадлежат идеалу J алгебры A^G, порожденному всеми однородными инвариантами положительных степеней, а их вычеты по модулю J^2 линейно порождают векторное пространство J/J^2. С другой стороны, вычеты инвариантов (3.14), как следует из их построения, составляют базис этого пространства. ▶

Для того чтобы описанная процедура могла быть проведена в конечное число шагов, необходимо, чтобы алгебра инвариантов была конечно порожденной. Кроме того, нужны какие-то дополнительные соображения, позволяющие определить момент окончания процедуры, т. е. наибольшую степень n, для которой нужно проводить вычисления. Этим проблемам будут посвящены пп. 3.4—3.7.

3.4. Теорема Гильберта об инвариантах. В XIX в. конечная порожденность алгебры инвариантов в каждом рассматривавшемся случае доказывалась одновременно с предъявлением конечной полной системы инвариантов. Гильберт в 1890 г. [154] предложил совершенно иной подход. В духе своего времени он рассматривал только инварианты для действия уни-

модулярной группы в пространстве форм (или систем форм). Однако идеи работы [154] фактически позволяют доказать следующий современный вариант теоремы Гильберта.

Теорема 3.5. Алгебра инвариантов действия редуктивной алгебраической группы на аффинном алгебраическом многообразии конечно порождена.

Мы приведем доказательство этой теоремы в более широком алгебраическом контексте. Для этого введем некоторые понятия.

Пусть G — алгебраическая группа и M — некоторый, вообще говоря, бесконечномерный G-модуль. Будем называть G-модуль M *алгебраическим,* если любой элемент из M содержится в некотором алгебраическом конечномерном G-подмодуле. Алгебраичность сохраняется при переходе к подмодулям, фактормодулям, прямым суммам и тензорным произведениям.

Алгебраический G-модуль, снабженный структурой коммутативной ассоциативной алгебры с единицей таким образом, что преобразования из G являются автоморфизмами этой алгебры, будем называть *алгебраической G-алгеброй.* Если группа G действует на алгебраическом многообразии X, то в силу предложения 1, $k[X]$ — алгебраическая G-алгебра (но $k(X)$, вообще говоря, не является алгебраической G-алгеброй).

Если группа G редуктивна, то во всяком алгебраическом G-модуле M существует единственный G-подмодуль M', дополнительный к M^G. Он может быть охарактеризован, например, как сумма всех нетривиальных (конечномерных) простых G-подмодулей модуля M. Проектор на M^G параллельно M' называется *оператором Рейнольдса* и обозначается через $\natural$ («бекар»). Это единственный G-эквивариантный проектор на M^G. В случае $k=\mathbf{C}$ он может быть определен также как результат усреднения по максимальной компактной подгруппе группы G. Поэтому его называют еще *оператором усреднения.* (В работе Гильберта для построения этого оператора использовался так называемый Ω-процесс Кэли [154].)

Очевидно, что если $\varphi: M \to N$ — G-эквивариантный гомоморфизм алгебраических G-модулей, то $\varphi(M^G) \subset N^G$ и $\varphi(M') \subset N'$. Отсюда следует, в частности, что

(P1) если $\varphi(M)=N$, то $\varphi(M^G)=N^G$;

(P2) φ перестановочен с $\natural$.

В алгебраической G-алгебре A умножение на любой G-инвариантный элемент является G-эквивариантным эндоморфизмом G-модуля A и потому перестановочно с $\natural$:

$$(ab)^\natural = a^\natural b \quad (a \in A,\ b \in A^G). \tag{3.15}$$

Теорема 3.5. вытекает из следующей более общей теоремы.

Теорема 3.6. Пусть G — редуктивная алгебраическая группа и A — алгебраическая G-алгебра. Если алгебра A ко-

нечно порождена, то и подалгебра A^G ее G-инвариантных элементов конечно порождена.

◀ Найдем вначале какое-либо конечномерное G-инвариантное подпространство U, порождающее алгебру A. Группа G естественно действует на симметрической алгебре SU пространства U и тождественное вложение $U \hookrightarrow A$ продолжается до G-эквивариантного эпиморфизма G-алгебр $\pi: SU \to A$. В силу (P1), $\pi((SU)^G)=A^G$. Поэтому достаточно доказать конечную порожденность алгебры $(SU)^G$. Этот случай отличается от общего тем, что в алгебре SU имеется G-инвариантная градуировка, а именно, стандартная градуировка симметрической алгебры. (В контексте теоремы 3.5 гомоморфизму π соответствует G-эквивариантное замкнутое вложение многообразия X в пространство линейного представления группы G: см. теорему 1.5.)

Ради простоты обозначений будем считать, что сама алгебра A обладает G-инвариантной градуировкой $A=\bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$, причем $A_0=k$. Пусть I — (однородный) идеал алгебры A, порожденный подпространствами A_n^G, $n>0$. По теореме Гильберта о базисе идеала (доказанной, кстати, в той же работе [154]) идеал I порождается конечным числом элементов, скажем, $b_1, \ldots, b_m$. Можно считать, что каждый из этих элементов принадлежит одному из подпространств A_n^G. Докажем, что при этом условии они порождают алгебру A^G.

Достаточно проверить, что $A_n^G \subset k[b_1, \ldots, b_m]$ при всех n. Пусть $b \in A_n^G$, $n>0$. Тогда $b \in I$ и $b=\sum_{i=1}^{m} a_i b_i$, где a_i без ограничения общности можно считать однородным элементом степени $n-\deg b_i$. Применяя оператор $\natural$, получаем в силу (3.15) $b=\sum_{i=1}^{m} a_i^\natural b_i$. Рассуждая по индукции, можно считать, что $a_i^\natural \in k[b_1, \ldots, b_m]$; но тогда и $b \in k[b_1, \ldots, b_m]$. ▶

3.5. Конструктивная теория инвариантов. Доказательство теоремы Гильберта не дает алгоритма для нахождения конечной полной системы инвариантов. Такой алгоритм мог бы быть указан для редуктивных линейных групп, если бы, например, была найдена априорная оценка сверху на степени базисных инвариантов (см. п. 3.3). Попытка найти такую оценку была предпринята Гильбертом в 1893 г. [155]. Однако им была найдена (в рассматривавшихся им случаях) лишь верхняя оценка для степеней параметров (см. п. 3.10) алгебры инвариантов. (Более подробно об этом см. [76].)

Оценка сверху на степени базисных инвариантов произвольной редуктивной линейной группы может быть легко по-

лучена, если известна такая оценка для конечных групп, для торов и для связных полупростых групп.

Для конечных групп имеется следующий результат Э. Нетер [232].

Теорема 3.7. *Алгебра инвариантов конечной линейной группы порождается инвариантами, степени которых не превосходят порядка группы.*

◀ Пусть G — конечная линейная группа порядка N. Так как пространство однородных многочленов степени n порождается степенями линейных форм, то пространство однородных инвариантов степени n порождается инвариантами вида

$$\sum_{g\in G}(gf)^n, \tag{3.16}$$

где f — линейная форма. Однако известно, что все степенные суммы от N переменных представляются в виде многочленов от степенных сумм с показателями $1, \ldots, N$. Следовательно, все инварианты (3.16), а значит, и вообще все инварианты группы G, выражаются через инварианты (3.16) с $n \leqslant N$. ▶

Соответствующая оценка для торов была получена Кемпфом [174], а для связных полупростых групп — В. Л. Поповым [76]. (См. по этому поводу также пп. 3.11 и 5.1.)

Перечисленные результаты доказывают алгоритмическую разрешимость проблемы нахождения базисных инвариантов для редуктивных линейных групп. Однако фактическое вычисление базисных инвариантов по схеме п. 3.3 с использованием этих или любых других априорных оценок без привлечения дополнительных соображений возможно лишь в крайне редких простейших случаях.

3.6. Четырнадцатая проблема Гильберта. Для нередуктивных линейных групп проблема конечной порожденности алгебры инвариантов пока не имеет удовлетворительного решения. В силу теоремы 3.6 ключевым в ее решении является случай унипотентных групп. Действительно, пусть $G \subset \mathrm{GL}(V)$ — произвольная алгебраическая линейная группа и U — ее унипотентный радикал. Тогда факторгруппа G/U редуктивна и

$$k[V]^G = (k[V]^U)^{G/U}. \tag{3.17}$$

Следовательно, если алгебра $k[V]^U$ конечно порождена, то и алгебра $k[V]^G$ конечно порождена.

В 1958 г. Нагата [218] построил пример унипотентной группы, алгебра инвариантов которой не является конечно порожденной. Это коммутативная группа, состоящая из матриц вида

$$\begin{pmatrix} E & A \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{16}),$$

где $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{16})$ пробегает множество всех реше-

ний системы уравнений $\sum_{j=1}^{16} \alpha_{ij}x_j=0, \quad i=1,\ 2,\ 3,$ с алгебраически независимыми над $\mathbf{Q}$ коэффициентами α_{ij}. Пример Нагаты до сих пор остается по существу единственным примером линейной группы, алгебра инвариантов которой не является конечно порожденной.

Проблема описания всех алгебраических линейных групп, для которых алгебра инвариантов конечно порождена, называется *14-й проблемой Гильберта* (сам Гильберт, правда, сформулировал ее в 1900 г. несколько иначе [82], [206], но после появления контрпримера Нагаты она стала рассматриваться именно в такой форме). К сожалению, доказательство Нагаты опирается на некоторые специальные свойства алгебраических кривых и совершенно не проясняет общей ситуации с конечной порожденностью.

В более широкой постановке 14-ую проблему Гильберта рассматривают как проблему конечной порожденности алгебр инвариантов произвольных действий алгебраических групп на аффинных многообразиях. Такую постановку вопроса называют обобщенной 14-ой проблемой Гильберта. В этом плане представляет интерес следующий результат В. Л. Попова [75], являющийся в некотором смысле обращением теоремы 3.5.

Теорема 3.8. Если алгебра инвариантов любого действия алгебраической группы G на аффинном алгебраическом многообразии конечно порождена, то группа G редуктивна.

Доказательство этой теоремы основано на примере Нагаты.

Некоторые положительные результаты по 14-ой проблеме Гильберта будут приведены в следующем пункте.

3.7. Подгруппы Гроссханса. В оригинальной 14-ой проблеме Гильберта речь идет об алгебре инвариантов естественного действия группы $H\subset \mathrm{GL}(V)$ на пространстве V. В отличие от действий, рассматривающихся в обобщенной 14-ой проблеме Гильберта, такое действие обладает одной важной особенностью: оно продолжается до действия на том же многообразии некоторой редуктивной группы, а именно, группы $G=\mathrm{GL}(V)$. Оказывается, с точки зрения вопроса о конечной порожденности алгебры инвариантов это обстоятельство имеет существенное значение и ответ на вопрос в значительной степени определяется свойствами пары (G, H).

Теорема 3.9. Пусть G — редуктивная алгебраическая группа и H — ее алгебраическая подгруппа. Тогда следующие свойства эквивалентны:

а) для любой конечно порожденной алгебраической G-алгебры A алгебра A^H также конечно порождена;

б) алгебра $k[G/H]$ конечно порождена.

◀ Импликация а)$\Rightarrow$б) получается, если взять $A=k[G]$ с действием группы G, определяемым правыми сдвигами (пример 2° п. 3.1). Обратная импликация вытекает из теоремы 3.6 и приводимой ниже леммы.

Лемма 3.10 ([79]). Пусть G — алгебраическая группа, H — ее алгебраическая подгруппа и A — некоторая алгебраическая G-алгебра. Тогда алгебры $(k[G/H]\otimes A)^G$ и A^H изоморфны, причем изоморфизм осуществляется ограничением на $(k[G/H]\otimes A)^G$ гомоморфизма

$$\varphi : k[G/H]\otimes A\to A, \qquad f\otimes a\to f(eH)a \tag{3.18}$$

(см. в связи с этим пример 3° п. 3.8).

Ввиду этой теоремы естественно спросить: для каких алгебраических подгрупп H редуктивной группы G алгебра $k[G/H]$ конечно порождена? Исчерпывающий ответ на этот вопрос (а именно его следовало бы считать с современных позиций решением оригинальной 14-ой проблемы Гильберта) в настоящее время не известен. Имеется, однако, переформулировка этого вопроса в геометрических терминах.

Покажем вначале, что можно ограничиться рассмотрением подгрупп H, для которых многообразие G/H квазиаффинно. Такие подгруппы (не обязательно редуктивных) алгебраических групп называются *обозримыми* (observable [107]). Ввиду теорем 1.6 и 1.5 это свойство эквивалентно тому, что H является стабилизатором какого-либо элемента какого-либо конечномерного G-модуля. Оно транзитивно: если $H\subset F\subset G$ и H обозрима в F, а F обозрима в G, то H обозрима в G [107]. Всякая редуктивная подгруппа H обозрима: в этом случае многообразие G/H аффинно (см. п. 4.7). Ввиду теоремы Шевалле (см. п. 1.4) всякая унипотентная подгруппа и, вообще, всякая подгруппа, не имеющая нетривиальных характеров, обозрима. Обозримые подгруппы редуктивных групп допускают полное описание в теоретико-групповых терминах (см. п. 4.7).

Легко видеть, что пересечение любого семейства обозримых подгрупп является обозримой подгруппой. Поэтому для любой алгебраической подгруппы H существует наименьшая содержащая ее обозримая подгруппа $\hat{H}$ (*обозримая оболочка* H). Если M — какой-либо алгебраический G-модуль, то из приведенного выше критерия обозримости следует, что $M^{\hat{H}}=M^H$. В частности, $k[G/H]=k[G/\hat{H}]$, так что, исследуя вопрос о конечной порожденности алгебры $k[G/H]$, можно считать подгруппу H обозримой.

Теорема 3.11 ([144]). Пусть H — обозримая подгруппа алгебраической группы G. Тогда следующие условия эквивалентны:

а) алгебра $k[G/H]$ конечно порождена;

б) существует такой конечномерный G-модуль V и такой элемент $v \in V$, что $G_v = H$ и $\operatorname{codim}_{\overline{Gv}}(\overline{Gv} \setminus Gv) \geqslant 2$.

Обозримые подгруппы, для которых выполнены эти эквивалентные условия, называются *подгруппами Гроссханса*. Если подгруппа H редуктивной группы G содержится в редуктивной подгруппе R, то свойства H быть подгруппой Гроссханса в G и в R эквивалентны.

Для доказательства конечной порожденности алгебры $k[G/H]$ может быть полезно изучение ее строения как G-модуля. При этом важную роль играет

Теорема 3.12 (Частный случай двойственности Фробениуса.) Кратность вхождения в $k[G/H]$ простого G-модуля W равна $\dim(W^*)^H$.

◀ Всякий элемент $\alpha \in (W^*)^H$ определяет гомоморфизм G-модулей

$$\varphi_\alpha : W \to k[G/H],$$
$$\varphi_\alpha(w)(gH) = (g\alpha)(w), \tag{3.19}$$

и всякий гомоморфизм $\varphi : W \to k[G/H]$ имеет такой вид. (См. также пример 3° п. 3.12). ▶

В частности, если G — связная редуктивная группа и $H = U$ — ее максимальная унипотентная подгруппа, то из теоремы 3.12 получаем, что G-алгебра $k[G/U] = S$ содержит каждый простой G-модуль с кратностью единица. Имеем, следовательно,

$$k[G/U] = S = \bigoplus_\lambda S_\lambda, \tag{3.20}$$

где S_λ обозначает простой G-подмодуль со старшим весом λ, а суммирование ведется по всем доминантным весам. Пользуясь явным видом (3.19) функций, составляющих S_λ, легко доказать, что

$$S_\lambda S_\mu = S_{\lambda+\mu}. \tag{3.21}$$

Отсюда следует, что алгебра S порождается подпространствами S_λ, соответствующими фундаментальным весам λ. Таким образом, U — подгруппа Гроссханса.

В сочетании с теоремой 3.9 это дает следующий результат, впервые полученный Дж. Хаджиевым [92]:

Теорема 3.13. Пусть G — связная редуктивная группа, U — ее максимальная унипотентная подгруппа. Тогда для любой конечно порожденной алгебраической G-алгебры A алгебра A^U также конечно порождена.

В случае $A = k[X]$, где X — алгебраическое многообразие, на котором действует группа G, элементы алгебры A^U имеют геометрическую интерпретацию: см. п. 3.14.

Подгруппой Гроссханса является также любая одномерная унипотентная подгруппа связной редуктивной группы G. В са-

мом деле, по теореме Морозова она включается в трехмерную простую подгруппу (локально изоморфную SL_2), в которой является максимальной унипотентной подгруппой.

В частности, отсюда получается теорема Вейценбека: алгебра инвариантов любой одномерной унипотентной линейной группы конечно порождена. (В оригинальной работе Вейценбека в 1932 г. это утверждение доказывалось, конечно, иначе.)

3.8. Сечения Шевалле. В некоторых случаях алгебру инвариантов действия $G:X$ удается эффективно вычислить благодаря тому, что она оказывается априори изоморфной алгебре инвариантов более простого действия другой группы на другом многообразии. (С подобной ситуацией на уровне рациональных инвариантов мы встречались в п. 2.8.)

В известных сейчас реальных примерах «другое многообразие» является подмногообразием S многообразия X, «другая группа» в подавляющем большинстве случаев — нормализатором этого подмногообразия, т. е. подгруппой

$$N(S)=\{g\in G\,|\,gS=S\}$$

группы G, а изоморфизм алгебр инвариантов $k[X]^G\xrightarrow{\sim}k[S]^{N(S)}$ осуществляется ограничением функций на S. В этой ситуации мы называем S *сечением Шевалле* действия $G:X$. Действие $N(S):S$ может быть неэффективно; на самом деле оно сводится к действию факторгруппы $W(S)=N(S)/Z(S)$, где

$$Z(S)=\{g\in G\,|\,gs=s \text{ для всех } s\in S\}.$$

Группу $W(S)$, рассматриваемую как группу преобразований многообразия S, назовем *группой Вейля сечения Шевалле* S. Ясно, что $k[S]^{N(S)}=k[S]^{W(S)}$.

Пример 1°. Рассмотрим присоединенное действие связной редуктивной группы G на ее касательной алгебре $\mathfrak{g}$. Если $\mathfrak{t}\subset\mathfrak{g}$ — картановская подалгебра, то $W(\mathfrak{t})=N(\mathfrak{t})/Z(\mathfrak{t})$ есть группа Вейля в обычном смысле теории редуктивных групп и, согласно классической теореме Шевалле [150], гомоморфизм ограничения функций на $\mathfrak{t}$ определяет изоморфизм алгебр инвариантов $k[\mathfrak{g}]^G\xrightarrow{\sim}k[\mathfrak{t}]^{W(\mathfrak{t})}$. Этим объясняется употребление терминов «группа Вейля» и «сечение Шевалле» в описанной выше общей ситуации.

В § 7 мы приведем одно обобщение теоремы Шевалле, позволяющее строить сечения Шевалле, для более широкого класса действий (Теорема 7.13). Здесь же мы рассмотрим другой подход к построению сечений Шевалле, принадлежащий Сешадри [268].

Считая многообразие X неприводимым, назовем *сечением Сешадри* действия $G:X$ подмногообразие $S\subset X$ со следующими свойствами:

(1) $\overline{GS_1}=X$ для каждой неприводимой компоненты S_1 многообразия S;

(2) $Gs \cap S = N(S)s$ для любой точки $s \in S$.

Сечение Сешадри S может быть приводимым, но легко видеть, что группа $N(S)$ должна транзитивно переставлять его неприводимые компоненты.

При некоторых условиях сечение Сешадри оказывается и сечением Шевалле.

Пример 2°. В примере 1° п. 1.3 сечением Сешадри S является любая прямая, не проходящая через 0, в примере 2° — любая прямая, параллельная одной из координатных осей и не проходящая через 0, в примере 3° — любая прямая, не параллельная оси абсцисс. Во всех этих случаях $N(S) = \{E\}$. В первом случае S не является сечением Шевалле, а во втором и третьем — является. Кроме того, в примере 2° сечением Сешадри и одновременно сечением Шевалле является любая прямая, не параллельная ни одной из координатных осей и проходящая через 0, но в этом случае $N(S) = \{E, -E\}$.

Пример 3°. Пусть группа G связна и пусть $H \subset G$ — алгебраическая подгруппа. Рассмотрим диагональное действие $G:(G/H) \times X$. Очевидно, что подмногообразие $S = \{eH\} \times X$ является его сечением Сешадри, причем $N(S) = H$. Для $f_0 \in k[S]^H$ положим $f(gH, x) = f_0(eH, g^{-1}x)$; тогда, пользуясь леммой 3.10, можно доказать, что $f \in k[(G/H) \times X]^G$, $f|_S = f_0$. Отсюда следует, что

$$k[(G/H) \times X]^G \simeq k[S]^H \simeq k[X]^H \tag{3.22}$$

(причем изоморфизм осуществляется ограничением функций). Таким образом, S — сечение Шевалле.

Понятие сечения Сешадри является обобщением понятия относительного сечения (п. 2.8) в следующем смысле: если S — относительное сечение, то S_0 (в обозначениях п. 2.8) — сечение Сешадри. В предыдущих примерах сечения Сешадри являются и относительными сечениями. Однако это не всегда бывает так. Дело в том, что стабилизаторы точек общего положения сечения Сешадри S могут не содержаться в $N(S)$. Так, например, бывает для сечений Вейерштрасса (см. п. 8.8).

Тем не менее, так же, как и для относительных сечений, из теоремы 2.3 и леммы 2.1 следует, что если S — сечение Сешадри действия $G:X$, то ограничение функций определяет изоморфизм полей $k(X)^G \xrightarrow{\sim} k(S)^{N(S)}$. Этот изоморфизм индуцирует вложение алгебр $k[X]^G \hookrightarrow k[S]^{N(S)}$. Поэтому вопрос о том, является ли S сечением Шевалле, приводит к следующей задаче:

Пусть $f_0 \in k[S]^{N(S)}$ и $f \in k(X)^G$ — рациональный инвариант, ограничение которого на S совпадает с f_0. Является ли инвариант f целым?

Элементарное алгебро-геометрическое рассуждение (см. лемму 4.3) показывает, что инвариант f заведомо определен

во всех нормальных точках открытого ядра $(GS)^0$ множества GS. Отсюда вытекает

Теорема 3.14. Пусть S — сечение Сешадри действия алгебраической группы G на нормальном неприводимом алгебраическом многообразии X. Если $\operatorname{codim}(X\setminus(GS)^0)\geqslant 2$, то S — сечение Шевалле.

Отметим, что сечение Шевалле из примера 1° является сечением Сешадри, но не удовлетворяет условию этой теоремы.

Пример 3° можно тривиальным образом обобщить, заменив однородное многообразие G/H любым нормальным многообразием Z, содержащим G/H в качестве открытой орбиты, дополнение к которой имеет коразмерность $\geqslant 2$: в самом деле, в этой ситуации $k[Z]=k[G/H]$. В частности, если группа G не имеет нетривиальных характеров, то в качестве Z можно взять любой конечномерный G-модуль V, содержащий открытую орбиту группы G (дополнение к этой орбите будет иметь коразмерность $\geqslant 2$ ввиду теоремы 3.1). Таким образом получается

Предложение 3.15. Пусть связная алгебраическая группа G, не имеющая нетривиальных характеров, действует на неприводимом алгебраическом многообразии X, и пусть V — конечномерный G-модуль, содержащий открытую орбиту Gv $(v\in V)$. Тогда

$$k[V\times X]^G\simeq k[X]^{G_v},$$

причем изоморфизм осуществляется ограничением функций на $\{v\}\times X$.

Пример 4°. Тавтологическое действие группы SL_2 в пространстве k^2 имеет открытую орбиту $k^2\setminus\{0\}$, стабилизатором точки $(1, 0)$ которой служит максимальная унипотентная подгруппа

$$U=\left\{\begin{pmatrix}1 & u\\ 0 & 1\end{pmatrix}\middle| u\in k\right\}$$

группы SL_2. Поэтому для естественного действия группы SL_2 в пространстве $k^2\oplus V_d$ (см. пример 1° п. 3.3) имеем

$$k\,[k^2\oplus V_d]^{SL_2}\simeq k\,[V_d]^U. \tag{3.23}$$

Этот изоморфизм играл важную роль в классической теории ковариантов бинарных форм; см. п. 3.14.

3.9. Свойства алгебры инвариантов. Перейдем к рассмотрению внутренних свойств алгебр инвариантов. Всюду в этом пункте мы будем считать, что задано действие алгебраической группы G на неприводимом алгебраическом многообразии X.

Существуют свойства алгебры $k[X]$, которые наследуются алгеброй $k[X]^G$, возможно, при тех или иных ограничениях на группу G. Примером такого свойства в случае редуктивной

группы G является конечная порожденность (теорема 3.6). Укажем другие важнейшие наследуемые свойства.

Теорема 3.16. Если алгебра $k[X]$ целозамкнута, то и алгебра $k[X]^G$ целозамкнута.

◀ Очевидно. ▶

Теорема 3.17. Если алгебра $k[X]$ факториальна, а группа G связна и не имеет нетривиальных характеров, то и алгебра $k[X]^G$ факториальна. При этом $k[X]^G$ вместе со всяким ненулевым элементом содержит все его делители в $k[X]$ (в частности, $k[X]^G \supset k[X]^*$).

◀ Факториальность алгебры $k[X]^G$ вытекает из второго утверждения теоремы, а оно легко выводится из теоремы 3.1. ▶

Теорема 3.18 (Бүто [113]). Если X — аффинное многообразие, имеющее только рациональные особенности, а группа G редуктивна, то аффинное многообразие $\operatorname{Spec} k[X]^G$ также имеет только рациональные особенности.

(Определение рациональных особенностей см., напр., в [175], [193].)

Поскольку локальная алгебра рациональной особенности является алгеброй Коэна — Маколея (определение локальной алгебры Коэна — Маколея см., напр., в [301], [196]), из теоремы 3.18 вытекает

Теорема 3.19. Если X — гладкое аффинное многообразие, а группа G редуктивна, то $k[X]^G$ — *алгебра Коэна—Маколея* (т. е. ее локализация по каждому максимальному идеалу является локальной алгеброй Коэна — Маколея).

Последняя теорема известна как теорема Хохстера — Робертса. Ее доказательство в оригинальной работе [158] этих авторов предшествовало доказательству теоремы Буто. (См. также [172], [157].)

Доказательство теоремы Буто хотя и коротко, но весьма неэлементарно. Фактически доказывается более общее утверждение, не связанное непосредственно с теорией инвариантов. А именно, используются только два свойства подалгебры $k[X]^G \subset k[X]$ — ее конечная порожденность и то, что она выделяется прямым слагаемым как подмодуль $k[X]^G$-модуля $k[X]$.

Поскольку факториальная алгебра Коэна — Маколея всегда горенштейнова [216], из теорем 3.17 и 3.19 вытекает

Теорема 3.20. Если X — гладкое аффинное многообразие, G — связная полупростая группа и алгебра $k[X]$ факториальна, то алгебра $k[X]^G$ горенштейнова.

3.10. Сведения о рядах Пуанкаре. В том случае, когда $X = V$ — векторное пространство, а действие группы G линейно, алгебра инвариантов $k[V]^G$ имеет естественную градуировку (см. п. 3.3), и полезную информацию может доставить изучение ее ряда Пуанкаре.

Вообще, *рядом Пуанкаре* градуированной алгебры $A = \bigoplus_{n=1}^{\infty} A_n$ (где $A_0=k$) называется формальный ряд

$$P(A, z)=\sum_{n=0}^{\infty}(\dim A_n) z^n. \tag{3.24}$$

Если алгебра A конечно порождена, то ряд (3.24) сходится в круге $|z|<1$ комплексной плоскости и представляет там рациональную функцию вида

$$P(A, z)=\frac{h(z)}{(1-z^{m_1})\ldots(1-z^{m_s})}, \tag{3.25}$$

где $m_1, \ldots, m_s$ — степени однородных образующих алгебры A, а $h(z)$ — многочлен с целыми коэффициентами.

Более точно, если образующие алгебры A алгебраически независимы, то $h(z)=1$, а в общем случае

$$h(z)=1-(z^{m_{11}}+\ldots+z^{m_{1r_1}})+(z^{m_{21}}+\ldots+z^{m_{2r_2}})-\ldots, \tag{3.26}$$

где $m_{11}, \ldots, m_{1r_1}$ — степени однородных определяющих соотношений между образующими (так называемых *сизигий* 1-го рода), $m_{21}, \ldots, m_{2r_2}$ — степени однородных определяющих соотношений между этими соотношениями (сизигий 2-го рода) и т. д. Теорема Гильберта о цепях сизигий [155], [285], [301] гарантирует обрыв этой цепи соотношений при условии, что каждый раз берется минимальная система определяющих соотношений (а на первом шаге — минимальная система образующих алгебры A). Если при этом обрыв происходит на h-ом шаге (т. е. последние сизигии — это сизигии h-го рода), то h называется *гомологической размерностью* алгебры A. По теореме Гильберта $h \leqslant s$.

Числа h, r_i, m_{ij} являются инвариантами градуированной алгебры A, но, как показывает следующий пример, они, вообще говоря, не определяются ее рядом Пуанкаре.

Пример 1^0. Пусть $G<\mathrm{GL}_3$ — группа порядка 8, порожденная матрицами $\mathrm{diag}(-1,-1,1)$ и $\mathrm{diag}(1,1,i)$. Алгебра $B=k[k^3]^G$ порождается многочленами $f_1=x_1^2$, $f_2=x_2^2$, $f_3=x_1x_2$ и x_3^4 с одним определяющим соотношением $f_1f_2=f_3^2$. Следовательно,

$$P(B, z)=\frac{1-z^4}{(1-z^2)^3(1-z^4)}=\frac{1}{(1-z^2)^3}.$$

Такой же ряд Пуанкаре имеет градуированая алгебра, свободно порожденная тремя однородными элементами степени 2.

Функция $P(A, z)$ имеет в точке $z=1$ полюс, порядок которого равен степени трансцендентности d алгебры A. Важны-

ми характеристиками алгебры A являются первые два коэффициента разложения $P(A, z)$ в ряд Лорана:

$$P(A, z) = \frac{\gamma_0}{(1-z)^d} + \frac{\gamma_1}{(1-z)^{d-1}} + \ldots \tag{3.27}$$

Предположим, что алгебра A конечно порождена и не имеет делителей нуля. Тогда существуют такие алгебраические независимые однородные элементы $t_1, \ldots, t_d \in A$, что алгебра A цела над подалгеброй $k[t_1, \ldots, t_d]$ или, что эквивалентно, является конечно порожденным $k[t_1, \ldots, t_d]$-модулем[1]. Такая система элементов называется *системой* (однородных) *параметров*.

Конечно порожденная градуированная алгебра A без делителей нуля называется *алгеброй Коэна — Маколея*, если выполняется любое из следующих эквивалентных условий:

1) существует такая система параметров $\{t_1, \ldots, t_d\}$, что алгебра A является свободным $k[t_1, \ldots, t_d]$-модулем;

2) для любой системы параметров $\{t_1, \ldots, t_d\}$ алгебра A является свободным $k[t_1, \ldots, t_d]$-модулем.

(Это определение согласуется с тем, которое было дано в формулировке теоремы 3.19. Доказательство эквивалентности условий 1) и 2) см., напр., в [279].)

Гомологическая размерность градуированной алгебры Коэна — Маколея равна разности между минимальным числом ее (однородных) образующих и ее степенью трансцендентности [266], [285].

Пусть A — градуированная алгебра Коэна — Маколея, $e_1, \ldots, e_d$ — степени каких-либо ее параметров $t_1, \ldots, t_d$ и $p_1, \ldots, p_r$ — степени ее базисных элементов как $k[t_1, \ldots, t_d]$-модуля (легко видеть, что эти элементы можно выбрать однородными). Тогда

$$P(A, z) = \frac{z^{p_1} + \ldots + z^{p_r}}{(1-z^{e_1})\ldots(1-z^{e_d})}. \tag{3.28}$$

Одним из базисных элементов алгебры A как $k[t_1, \ldots, t_d]$-модуля всегда является 1, так что можно считать $p_1 = 0$.

Пример 2°. Для алгебры B из примера 1° в качестве параметров могут быть взяты функции f_1, f_2 и f_4, а в качестве ее базисных элементов как $k[f_1, f_2, f_4]$-модуля — функции 1 и f_3. Согласно (3.28) имеем

$$P(B, z) = \frac{1+z^2}{(1-z^2)^2(1-z^4)} = \frac{1}{(1-z^2)^3},$$

что совпадает с формулой, полученной ранее.

---

[1] Это утверждение по существу было доказано Гильбертом в [154]. Аналогичное утверждение для неградуированных алгебр было позже доказано Э. Нетер [231] и известно как теорема Нетер о нормализации.

Хотя числа e_i, r и p_j зависят от выбора системы параметров, некоторые функции от них являются инвариантами алгебры A. Например, вычисляя первые два коэффициента ряда Лорана (3.27) функции $P(A, z)$, представленной в виде (3.28), получаем:

$$\gamma_0 = \frac{r}{e_1 \ldots e_d}, \tag{3.29}$$

$$\gamma_1 = \frac{r(e_1 + \ldots + e_d - d) - 2(p_1 + \ldots + p_r)}{2e_1 \ldots e_d}. \tag{3.30}$$

Как показал Стенли [284], градуированная алгебра Коэна — Маколея A горенштейнова тогда и только тогда, когда числитель дроби (3.28) является возвратным многочленом или, что эквивалентно, когда рациональная функция $P(A, z)$ удовлетворяет функциональному уравнению вида

$$P(A, z^{-1}) = (-1)^d z^q P(A, z). \tag{3.31}$$

При этом автоматически d — степень трансцендентности алгебры A (равная порядку полюса функции $P(A, z)$ в точке $z=1$), а q — разность степеней знаменателя и числителя функции $P(A, z)$ (порядок ее полюса в бесконечности).

Легко видеть, что если многочлен $z^{p_1} + \ldots + z^{p_r}$ возвратен, то среднее арифметическое показателей $p_1, \ldots, p_r$ равно половине степени этого многочлена. Поэтому из формул (3.29) и (3.30) следует, что для горенштейновой алгебры

$$\frac{2\gamma_1}{\gamma_0} = q - d. \tag{3.32}$$

3.11. Ряд Пуанкаре алгебры инвариантов. Для применений рядов Пуанкаре к теории инвариантов существенно, что ряд Пуанкаре алгебры инвариантов редуктивной линейной группы может быть, по крайней мере в принципе, вычислен без исследования образующих и соотношений этой алгебры.

Пусть $G \subset \mathrm{GL}(V)$ линейная группа. Обозначим через χ_n характер ее естественного линейного представления в пространстве $k[V]_n$ однородных многочленов степени n. Легко видеть, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \chi_n(g) z^n = \frac{1}{\det(1 - zg^{-1})}. \tag{3.33}$$

Если группа G конечна, то $\dim k[V]_n^G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_n(g)$, откуда

$$P(k[V]^G, z) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \frac{1}{\det(1 - zg)}. \tag{3.34}$$

(Эта формула была впервые получена Ф. Э. Молином [210] в 1897 г.)

Если G — произвольная редуктивная линейная группа над полем комплексных чисел, то имеет место аналогичная формула, с заменой суммирования интегрированием по максимальной компактной подгруппе K группы G:

$$P(k[V]^G, z) = \int_K \frac{d\mu(g)}{\det(1 - zg)} \quad (|z| < 1), \tag{3.35}$$

где μ — инвариантная мера на K, нормированная условием $\mu(K) = 1$. В случае связной группы G интегрирование по группе K с помощью формулы интегрирования Г. Вейля [46], [101], [298] можно заменить интегрированием с подходящим весом по максимальному тору T группы K. В свою очередь, если интерпретировать T как произведение окружностей в комплексной плоскости, интегрирование по T может быть сведено к вычислению вычетов.

Пример 1°. Для группы SL_2, действующей в пространстве V_d бинарных форм степени d (пример 1° п. 3.3) таким способом получается формула

$$P(k[V_d]^{SL_2}, z) = P_d(z) =$$
$$= \frac{1}{4\pi i} \oint_{|t|=1} \frac{(1-t^2)(1-t^{-2})\,dt}{t(1-zt^d)(1-zt^{d-2})\ldots(1-zt^{-d})} \quad (|z| < 1). \tag{3.36}$$

(Интеграл берется по единичной окружности в комплексной плоскости). При небольших значениях d интеграл (3.36) легко вычисляется с помощью вычетов. В частности, таким образом можно доказать, что

$$P_3(z) = \frac{1}{1-z^4}, \quad P_4(z) = \frac{1}{(1-z^2)(1-z^3)}.$$

Первое из этих равенств означает, что алгебра $k[V_3]^{SL_2}$ порождается одним инвариантом степени 4. Второе равенство показывает, что в $k[V_4]^{SL_2}$ имеются инварианты f_2 и f_3 степеней 2 и 3 соответственно и, если они алгебраически независимы, то они порождают алгебру $k[V_4]^{SL_2}$. Но легко заметить, что f_2 и f_3 действительно алгебраически независимы: в противном случае выполнялось бы соотношение $f_2^3 = cf_3^2$ $(c \in k)$, противоречащее факториальности алгебры $k[V_4]^{SL_2}$. Ср. п. 0.12, где образующие алгебр $k[V_3]^{SL_2}$ и $k[V_4]^{SL_2}$ найдены явно. Трудности вычисления интеграла (3.36) быстро растут с увеличением d. В [118] приведены результаты вычислений $P_d(z)$ с помощью компьютера для всех $d \leqslant 17$. Однако при $d > 6$ из этих формул не удается извлечь степени образующих и соотношений алгебры $k[V_d]^{SL_2}$ (ср. пример 1° п. 3.10).

Важной характеристикой алгебры инвариантов $k[V]^G$ является разность степеней знаменателя и числителя рациональной функции, представляемой ее рядом Пуанкаре. Это число мы будем обозначать через q.

Теорема 3.21 (Кемпф [172]). Если $k[V]^G \neq k$, то $q>0$, т. е. $P(k[V]^G, z)$ — правильная рациональная дробь.

Эта теорема в сочетании с формулой (3.28) показывает, что степени образующих $k[V]^G$ заведомо не превосходят суммы степеней любых ее параметров. Используя идею Гильберта оценки сверху степеней параметров алгебры инвариантов, таким образом можно получить оценки сверху степеней базисных инвариантов, о которых шла речь в п. 3.5.

Для конечной линейной группы $G \subset \mathrm{GL}(V)$, как видно из формулы Молина (3.34), на самом деле $q \geqslant \dim V$. Тем более интересен следующий результат.

Теорема 3.22 (Кноп [185]). Пусть $G \subset \mathrm{GL}(V)$ — связная полупростая линейная группа. Тогда $q \leqslant \dim V$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда коразмерность многообразия $\{v \in V \mid \dim G_v > 0\}$ в пространстве V не меньше двух.

Первое утверждение этой теоремы было ранее высказано в форме гипотезы В. Л. Поповым в работе [177]. Там же было доказано, что равенство $q = \dim V$ имеет место «почти всегда»: например, для каждой связной полупростой группы G множество простых G-модулей V, для которых $q \neq \dim V$, конечно. Это множество было впоследствии явно описано Кнопом и Литтельманом [186], которые также нашли для всех его элементов число q.

В той же работе [177] В. Л. Попов указал на следующее возможное применение неравенства $q \leqslant \dim V$ к классификации связных полупростых линейных групп $G \subset \mathrm{GL}(V)$ со свободной алгеброй инвариантов. (Более подробно об этой классификации см. § 8). Предположим, что $V^G = 0$ и что алгебра $k[V]^G$ свободно порождается инвариантами степеней $e_1, \ldots, e_d$. Тогда

$$P(k[V]^G, z) = \frac{1}{(1-z^{e_1}) \ldots (1-z^{e_d})}, \qquad (3.37)$$

так что $q = e_1 + \ldots + e_d \geqslant 2d \geqslant 2(\dim V - \dim G)$. Учитывая неравенство $q \leqslant \dim V$, получаем $\dim V \leqslant 2 \dim G$. Это очень сильное ограничение на линейную группу.

Используя формулу Молина (3.34), легко проверить, что для любой конечной линейной группы $G \subset \mathrm{SL}(V)$ рациональная функция $P(k[V]^G, z)$ удовлетворяет функциональному уравнению (3.31) и, следовательно, алгебра $k[V]^G$ является горенштейновой (ср. теорему 3.20).

С помощью той же формулы для любой конечной линейной группы $G \subset \mathrm{GL}(V)$ можно вычислить первые два коэффициента γ_0 и γ_1 разложения функции $P(k[V]^G, z)$ в ряд Лорана (3.27).

Теорема 3.23. Пусть $G \subset \mathrm{GL}(V)$ — конечная линейная группа. Тогда $\gamma_0 = \frac{1}{|G|}$, а $\frac{2\gamma_1}{\gamma_0}$ равно числу псевдоотражений (см. п. 8.1) в группе G.

Что касается связных полупростых линейных групп, то отношение $\frac{2\gamma_1}{\gamma_0}$ для них ввиду теоремы 3.20 дается формулой (3.32), а коэффициент γ_0 в общем случае не вычислен (для линейных представлений группы SL_2 см. [154]).

3.12. Коварианты. Инварианты и полуинварианты суть частные случаи ковариантов.

Пусть алгебраическая группа G действует на алгебраическом многообразии X, и пусть W — конечномерный G-модуль. *Ковариантом* действия $G:X$ со значениями в W называется G-эквивариантный морфизм алгебраических многообразий $\varphi: X \to W$. В частности, инвариант — это ковариант со значениями в тривиальном одномерном G-модуле.

Все морфизмы $\varphi: X \to W$ образуют векторное пространство $\mathrm{Mor}(X, W)$, в котором естественным образом (линейно) действует группа G:

$$(g\varphi)(x) = g(\varphi(g^{-1}x)). \tag{3.38}$$

Коварианты — это G-инвариантные элементы этого пространства. Они образуют подпространство $\mathrm{Mor}(X, W)^G$.

Пространство $\mathrm{Mor}(X, W)$ снабжается структурой $k[X]$-модуля по формуле $(f\varphi)(x) = f(x)\varphi(x)$ $(f \in k[X])$. При этом $\mathrm{Mor}(X, W)^G$ является $k[X]^G$-подмодулем. Пространство $\mathrm{Mor}(X, W)^G$, рассматриваемое как $k[X]^G$-модуль, мы будем называть *модулем ковариантов* со значениями в W.

Определение ковариантов можно перевести на алгебраический язык. А именно, задание морфизма $\varphi: X \to W$ равносильно заданию соответствующего гомоморфизма алгебр $\varphi^*: k[W] \to k[X]$. В свою очередь, гомоморфизм φ^* определяется своим ограничением на пространство W^* линейных функций на W, которое свободно порождает алгебру $k[W]$. Тем самым $\mathrm{Mor}(X, W)$ естественным образом отождествляется с пространством $L(W^*, k[X])$ всех линейных отображений W^* в $k[X]$. Действию (3.38) группы G на $\mathrm{Mor}(X, W)$ отвечает естественное действие группы G на $L(W^*, k[X])$, индуцированное ее действиями на W^* и $k[X]$. Пространство $\mathrm{Mor}(X, W)^G$ отождествляется при этом с пространством $\mathrm{Hom}(W^*, k[X])$ G-модульных гомоморфизмов W^* в $k[X]$. Структуре $k[X]$-модуля в $\mathrm{Mor}(X, W)$ отвечает естественная структура $k[X]$-модуля в $L(W^*, k[X])$, определяемая умножением значений отображений $W^* \to k[X]$ на элементы алгебры $k[X]$.

Из приведенной алгебраической интерпретации нетрудно вывести, что $\mathrm{Mor}(X, W)$ является конечно порожденным $k[X]$-модулем и алгебраическим (в смысле п. 3.4) G-модулем.

Пример 1°. Рассмотрим линейное действие группы SL_2 в

пространстве $V=V_d\oplus V_e$, $d\geqslant e$ (см. пример 1° п. 3.3). Имеем

$$k[V]=k[V_d]\otimes k[V_e]\supset V_d^*\otimes V_e^*\simeq V_{d+e}^*\oplus V_{d+e-2}^*\oplus\ldots\oplus V_{d-e}^*$$

(формула Клебша — Гордана: см., напр., [283]). Поэтому для каждого $i=0, 1, \ldots, e$ существует билинейный ковариант $\tau_i: V_d\oplus V_e\to V_{d+e-2i}$, определенный однозначно с точностью до пропорциональности. Он называется i-ым *трансвектантом*. Классики нашли для него явную формулу:

$$\tau_i(u, v)=\frac{(d-i)!}{d!}\frac{(e-i)!}{e!}\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\binom{i}{j}\frac{\partial^i u}{\partial x^{i-j}\partial y^j}\frac{\partial^i v}{\partial x^j\partial y^{i-j}}$$

(множитель перед суммой ставится по традиции).

Пример 2°. Для SL_2-модуля V_d имеем

$$k[V_d]\supset S^2V_d^*\simeq V_{2d}^*\oplus V_{2d-4}^*\oplus V_{2d-8}^*\oplus\ldots$$

Поэтому существует единственный с точностью до пропорциональности квадратичный ковариант $q: V_d\to W$, где $W=V_2$ при нечетном d и $W=V_4$ при четном d. Он задается формулой $q(v)=\tau_{d-1}(v, v)$ при нечетном d и $q(v)=\tau_{d-2}(v, v)$ при четном d.

Пример 3°. Рассмотрим действие группы G на однородном пространстве G/H. Поскольку это действие транзитивно, ковариант $G/H\to W$ однозначно определяется образом точки eH. В качестве этого образа в силу теоремы 1.8 может быть взята любая точка из W^H. Таким образом, $\mathrm{Mor}(G/H, W)^G\simeq\simeq W^H$. Предположим, что W — простой G-модуль. В силу изоморфизма $\mathrm{Mor}(G/H, W)^G\simeq\mathrm{Hom}(W^*, k[G/H])$ размерность пространства $\mathrm{Mor}(G/H, W)^G$ равна кратности вхождения G-модуля W^* в $k[G/H]$. Тем самым доказана теорема 3.12.

Теорема 3.24. Пусть редуктивная алгебраическая группа G действует на аффинном алгебраическом многообразии X, и пусть W — конечномерный G-модуль. Тогда модуль ковариантов $\mathrm{Mor}(X, W)^G$ конечно порожден над $k[X]^G$.

Эта теорема, как и теорема 3.5, справедлива в более широком алгебраическом контексте. Пусть A — алгебраическая G-алгебра (см. п. 3.4). Алгебраический G-модуль M, наделенный структурой A-модуля, будем называть *алгебраическим A-G-модулем*, если $g(am)=(ga)(gm)$ для любых $g\in G$, $a\in A$, $m\in M$.

Теорема 3.25. Пусть G — редуктивная алгебраическая группа, A — конечно порожденная алгебраическая G-алгебра и M — конечно порожденный алгебраический A-G-модуль. Тогда модуль M^G конечно порожден над A^G.

◀ Рассмотрим подмодуль AM^G модуля M. Как и всякий подмодуль модуля M, он конечно порожден. Пусть он порождается элементами $m_1, \ldots, m_s\in M^G$. Докажем, что эти же элементы порождают модуль M^G над A^G. Любой элемент $m\in M^G$

как элемент модуля AM^G представляется в виде $\sum_i a_i m_i$ $(a_i \in A)$. Применив оператор Рейнольдса (п. 3.4), получим $m = \sum a_i^\natural m_i$. ▶

Теорема 3.24 получается из теоремы 3.25, если взять $A = k[X]$, $M = \mathrm{Mor}(X, W)$.

3.13. Глобальный модуль ковариантов. Ввиду изоморфизма

$$\mathrm{Mor}(X, W)^G \simeq \mathrm{Hom}(W^*, k[X]) \tag{3.39}$$

описание ковариантов действия $G : X$ по существу эквивалентно описанию $k[X]^G$-G-модульной структуры алгебры $k[X]$. Это особенно отчетливо видно в случае редуктивной группы G.

А именно, пусть группа G редуктивна, и пусть W_ρ обозначает простой G-модуль, определяемый ее неприводимым представлением ρ. Тогда для любого алгебраического G-модуля M имеется естественный изоморфизм G-модулей

$$M \simeq \bigoplus_\rho (\mathrm{Hom}(W_\rho, M) \otimes W_\rho)$$

(Имеется в виду, что G действует на $\mathrm{Hom}(W_\rho, M)$ тривиально.) Этот изоморфизм осуществляется отображением

$$\sum_\rho f_\rho \otimes w_\rho \mapsto \sum_\rho f_\rho(w_\rho) \quad (f_\rho \in \mathrm{Hom}(W_\rho, M),\ w_\rho \in W_\rho).$$

В частности, имеем изоморфизм G-модулей

$$k[X] \simeq \bigoplus_\rho (\mathrm{Hom}(W_\rho, k[X]) \otimes W_\rho), \tag{3.40}$$

который является также изоморфизмом $k[X]^G$-модулей, если считать, что умножение на элементы $k[X]^G$ в правой части осуществляется посредством умножения на эти элементы первых сомножителей тензорных произведений.

Таким образом, алгебра $k[X]$, рассматриваемая как $k[X]^G$-модуль, является результатом некоего синтеза модулей ковариантов со значениями во всех простых G-модулях. Мы будем называть этот $k[X]^G$-модуль *глобальным модулем ковариантов* действия $G : X$.

В свойствах глобального модуля ковариантов находят отражение свойства всех «локальных» модулей ковариантов. Например, очевидна эквивалентность следующих утверждений:

(1) модуль ковариантов со значениями в любом простом G-модуле является плоским;

(2) модуль ковариантов со значениями в любом (конечномерном) G-модуле является плоским;

(3) глобальный модуль ковариантов является плоским.

(Определение плоского модуля см., напр., в [196], [208]. В градуированной ситуации плоскость равносильна свободности.)

С помощью известного размерностного критерия плоскостности конечно порожденного модуля эквивалентность $(1) \Leftrightarrow (3)$ можно интерпретировать следующим образом:

Предложение 3.26 [208]. Глобальный модуль ковариантов действия редуктивной группы G на аффинном многообразии X является плоским тогда и только тогда, когда кратность вхождения любого простого G-модуля в G-модуль $k[X]/k[X]_{\mathfrak{n}}$, где $\mathfrak{n}$ — максимальный идеал алгебры $k[X]^G$, не зависит от $\mathfrak{n}$.

(Кратность, о которой идет речь, автоматически конечна в силу теоремы 3.24.)

3.14. Алгебра ковариантов. Рассмотрим случай, когда G — связная редуктивная группа. В этом случае простые G-модули определяются своими старшими весами относительно фиксированной борелевской подгруппы B. Пусть W_λ обозначает простой G-модуль со старшим весом λ. Тогда $W_\lambda{}^* = W_{\lambda^*}$, где λ^* получается из λ с помощью автоморфизма решетки весов, индуцированного канонической инволюцией схемы Дынкина [34]. Гомоморфизм $W_\lambda \to k[X]$ определяется образом старшего вектора G-модуля W_λ, каковым может быть любой старший вектор G-модуля $k[X]$ с весом λ. Такие векторы образуют $k[X]^G$-подмодуль, который мы обозначим через $k[X]^{(\lambda)}$. Согласно (3.39) имеет место изоморфизм $k[X]^G$-модулей

$$\mathrm{Mor}\,(X, W_\lambda)^G \simeq k\,[X]^{(\lambda^*)}. \tag{3.41}$$

Развивая эти соображения, можно естественным образом из ковариантов со значениями в различных G-модулях составить алгебру. А именно,

$$\bigoplus_\lambda k\,[X]^{(\lambda)} = k\,[X]^U, \tag{3.42}$$

где U — максимальная унипотентная подгруппа группы G, содержащаяся в B. Алгебра $k[X]^U$ (содержащая алгебру инвариантов $k[X]^G = k[X]^{(0)}$) называется *алгеброй ковариантов* действия $G : X$. Если X — аффинное многообразие, то согласно теореме 3.13 эта алгебра конечно порождена. Указание ее образующих в каком-то смысле означает описание всех ковариантов.

Пример 1°. Изоморфизм (3.23) означает, что алгебра ковариантов бинарной формы степени d изоморфна алгебре инвариантов пары (форма $u \in V_d$, вектор $\xi \in k^2$). Прослеживая изоморфизмы (3.41) и (3.23), можно понять, например, что тождественному коварианту $\mathrm{id} : V_d \to V_d$ отвечает инвариант $u(\xi)$ пары (u, ξ). При $d=2$ алгебра инвариантов пары (u, ξ) свободно порождается инвариантами $u(\xi)$ и $\det u$. Отсюда следует, что алгебра ковариантов действия $\mathrm{SL}_2 : \mathrm{V}_2$ свободно порождается ковариантом id и инвариантом det.

§ 4. Факторы

4.1. Введение. Одной из основных целей изучения инвариантов является параметризация множества орбит или, выражаясь более точно, построение фактормногообразия для заданного

действия алгебраической группы. Такая задача возникает, например, при попытке параметризировать множество всех классов изоморфных алгебраических многообразий того или иного типа. Например, согласно сказанному в п. 0.11, если Ω — открытое подмножество в проективном пространстве PV_{2g+2}, состоящее из классов пропорциональных бинарных форм с отличным от нуля дискриминантом, то факторпространство Ω/PSL_2 можно интерпретировать как пространство классов изоморфных гиперэллиптических кривых рода g.

Трудность состоит в том, что наивный теоретико-множественный фактор часто оказывается весьма плохим образованием. Для того, чтобы построить хороший (в том или ином естественном смысле) фактор, приходится либо склеивать точки, отвечающие некоторым исключительным парам орбит, либо вообще отказываться от рассмотрения некоторых орбит. В приложениях, касающихся параметризации множества всех классов изоморфных алгебраических многообразий того или иного типа, дополнительно требуется выполнение некоторых условий универсальности по отношению к алгебраическим семействам многообразий рассматриваемого типа. В зависимости от вида этих условий соответствующее параметризующее многообразие называется либо тонким, либо грубым многообразием модулей (многообразий рассматриваемого типа), см. [230]. Методы теории инвариантов во многих важных случаях позволяют доказать существование грубых многообразий модулей: см. п. 4.6 (существование тонких многообразий модулей — более редкое явление).

4.2. Геометрический фактор. Напомним, что на всяком алгебраическом многообразии X стандартным образом определен пучок функций (точнее, пучок алгебр функций), алгебра сечений которого над открытым подмножеством $U \subset X$ обозначается через $k[U]$ и состоит из ограничений на U рациональных функций на X, регулярных на U. Морфизмы алгебраических многообразий — это их отображения, являющиеся морфизмами топологических пространств с пучками функций.

Пусть на алгебраическом многобразии X действует алгебраическая группа G. Рассматривая X как топологическое пространство с пучком функций, можно образовать факторпространство, которое мы будем обозначать в этом пункте через X/G. Это — фактормножество по отношению эквивалентности, определяемому действием группы G, снабженное фактортопологией и пучком, являющимся прямым образом пучка инвариантных функций на X. Пусть $\pi = \pi_{X/G} : X \to X/G$ обозначает отображение факторизации. Алгебра сечений $k[U]$ указанного пучка на X/G над открытым подмножеством $U \subset X/G$ состоит по определению из таких функций f на U, что $\pi^* f \in k[\pi^{-1}(U)]^G$. Таким образом, π^* осуществляет изоморфизм $k[U] \xrightarrow{\sim} k[\pi^{-1}(U)]^G$.

Отметим некоторые топологические свойства отображения

π. Прежде всего, по определению фактортопологии оно непрерывно. Далее, для любого подмножества $M \subset X$ имеем $\pi^{-1}(\pi(M)) = \bigcup\limits_{g \in G} gM$. Отсюда следует, что

1) π открыто;

2) если группа G конечна, то π замкнуто;

3) в любом случае π переводит G-инвариантные замкнутые подмножества в замкнутые подмножества.

Пара $(X/G, \pi_{X/G})$ обладает следующим свойством универсальности: если Y — какое-либо топологическое пространство с пучком функций и $\pi_Y : X \to Y$ — морфизм, постоянный на орбитах группы G, то π_Y «пропускается через $\pi_{X/G}$», т. е. существует (единственный) морфизм $\alpha : X/G \to Y$, такой, что $\pi_Y = \alpha \circ \pi_{X/G}$. При этом α является изоморфизмом, если выполнены условия

(F1) морфизм π_Y сюръективен;

(F2) морфизм π_Y открыт;

(F3) его слои — это в точности орбиты группы G;

(F4) для каждого открытого подмножества $U \subset Y$ гомоморфизм $\pi_Y^* : k[U] \to k[\pi_Y^{-1}(U)]^G$ является изоморфизмом.

Пространство X/G не является, вообще говоря, алгебраическим многообразием. Для того чтобы оно было многообразием, необходимо, чтобы все орбиты (а не только орбиты общего положения, как в теореме 2.3) разделялись рациональными инвариантами в следующем слабом смысле: для любых двух орбит $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$ должен существовать рациональный инвариант, определенный в точках $\mathcal{O}_1$ и не определенный в точках $\mathcal{O}_2$. Более наглядное необходимое условие состоит в том, что все орбиты должны быть замкнуты, а если X неприводимо — то иметь одинаковую размерность (ср. рассуждение в п. 2.4).

Пример 1°. Ни в одном из примеров 1°—3° п. 1.3 пространство X/G не является алгебраическим многообразием, так как имеются орбиты разных размерностей (*1* и 0). Если выкинуть неподвижные точки, то в примерах 1° и 3° пространство X/G будет алгебраическим многообразием (проективной прямой и проколотой аффинной прямой соответственно), а в примере 2° — не будет, поскольку орбиты, лежащие на осях координат, не разделяются рациональными инвариантами.

Если пространство X/G является алгебраическим многообразием, то пара $(X/G, \pi_{X/G})$, а также первый элемент этой пары, называется *геометрическим фактором* для действия $G : X$. Очевидно, что в этом случае для любого инвариантного открытого подмножества $U \subset X$ подмногообразие $U/G = \pi_{X/G}(U) \subset X/G$ является геометрическим фактором для действия $G : U$.

Наряду с конструктивным определением удобно иметь аксиоматическое определение геометрического фактора. Такое определение можно дать следующим образом.

Определение 4.1. Пара (Y, π_Y), где Y — алгебраиче-

ское многообразие, а π_Y — морфизм X в Y, называется геометрическим фактором для действия $G:X$, если выполнены условия (F1)—(F4).

Любые два геометрических фактора (Y_1, π_1) и (Y_2, π_2) изоморфны в том смысле, что существует (единственный) изоморфизм $\alpha: Y_1 \to Y_2$, такой, что $\pi_1 = \pi_2 \circ \alpha$. Кроме того, из приведенных выше свойств пары $(X/G, \pi_{X/G})$ следует, что

1) если геометрический фактор в смысле аксиоматического определения существует, то пространство X/G ему изоморфно и, значит, является алгебраическим многообразием;

2) если X/G — многообразие, то $(X/G, \pi_{X/G})$ — геометрический фактор в смысле аксиоматического определения.

Очевидно, что геометрический фактор одновременно является рациональным фактором (см. п. 2.4).

В определении 4.1 наиболее трудно проверяемыми выглядят условия (F2) и (F4). Однако, к счастью, их обычно не приходится проверять благодаря следующей теореме:

Теорема 4.2. Пусть многообразие X неприводимо и $\pi: X \to Y$ — сюръективный морфизм, слои которого совпадают с орбитами группы G. Тогда, если только многообразие Y нормально, (Y, π) — геометрический фактор для действия $G:X$.

◀ Открытость морфизма π следует из общей теоремы о том, что доминантный равноразмерный морфизм в нормальное многообразие открыт [121]. Свойство же (F4) вытекает из формулируемой ниже алгебро-геометрической леммы, которая вообще часто оказывается полезной в теории инвариантов. ▶

Лемма 4.3. [94]. Пусть $\alpha: M \to N$ — доминантный морфизм неприводимых алгебраических многообразий и $f \in k(N)$ — такая функция, что $\alpha^* f \in k[M]$. Тогда функция f определена в любой нормальной точке открытого ядра множества $\alpha(M)$.

Используя теорему 4.2, конструкцию рационального фактора и теорему 2.3, нетрудно доказать следующую теорему.

Теорема 4.4. Найдется такое непустое инвариантное открытое подмножество $X_0 \subset X$, что для действия $G: X_0$ существует геометрический фактор.

Для приложений важно, однако, явно указать такое подмножество X_0. Этим вопросом мы займемся в п. 4.6.

4.3. Категорный фактор. Факторпространство $(X/G, \pi_{X/G})$, построенное в п. 4.2, может быть охарактеризовано с точностью до изоморфизма свойством универсальности. Это свойство имеет категорную природу. Если мы заменим категорию топологических пространств с пучками функций категорией алгебраических многообразий, то естественным путем придем к следующему определению.

Определение 4.5. Пара (Y, π_Y), где Y — алгебраическое многообразие, а π_Y — морфизм X в Y, называется *категорным фактором* для действия $G:X$, если для любого морфизма алгебраических многообразий $\pi_Z: X \to Z$, постоянного на

орбитах группы G, существует единственный морфизм $\alpha : Y \to Z$, такой, что $\pi_Z = \alpha \circ \pi_Y$.

Из определения следует, что, если категорный фактор существует, то, с точностью до изоморфизма, только один. Геометрический фактор, если он существует, автоматически является и категорным фактором. Обратное, как мы увидим в следующем пункте, неверно.

Категорный фактор существует не всегда: например, можно показать, что его не существует для действия группы G из примера 4° п. 1.3 на $L_2(k)$ левыми умножениями.

4.4. Построение фактора для действия редуктивной группы на аффинном многообразии. Для действия редуктивной группы на аффинном многообразии всегда существует категорный фактор, и он обладает многими замечательными свойствами, хотя и не всегда является геометрическим фактором.

Пусть редуктивная группа G действует на аффинном многообразии X. Поскольку алгебра $k[X]^G$ конечно порождена (теорема 3.5), можно рассмотреть аффинное многообразие $\mathrm{Spec}\, k[X]^G$. Обозначим его через X/G, а морфизм $X \to X/G$, определяемый вложением $k[X]^G \hookrightarrow k[X]$, — через $\pi_{X/G}$. Ясно, что $\pi_{X/G}$ постоянен на орбитах группы G.

В координатной форме эта конструкция реализуется так. Пусть $f_1, \ldots, f_m$ — базисные инварианты для действия $G : X$. Рассмотрим морфизм

$$X \to k^m, \quad x \mapsto (f_1(x), \ldots, f_m(x)).$$

Тогда X/G можно интерпретировать как замыкание образа этого морфизма (на самом деле этот образ всегда замкнут: см. ниже), а $\pi_{X/G}$ — как сам этот морфизм, но рассматриваемый как морфизм в X/G.

Если Y — другое аффинное многообразие, на котором действует группа G, и $\varphi : Y \to X$ — G-эквивариантный морфизм, то гомоморфизм $(\varphi^*)^G : k[X]^G \to k[Y]^G$, индуцируемый φ^*, определяет морфизм $\varphi/G : Y/G \to X/G$. При этом имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi_{Y/G}"'] & X \arrow[d, "\pi_{X/G}"] \\ Y/G \arrow[r, "\varphi/G"'] & X/G \end{tikzcd} \quad . \qquad (4.1)$$

В частности, если Y — инвариантное замкнутое подмногообразие многообразия X, а φ — тождественное вложение, то φ^*, а значит, ввиду редуктивности группы G, и $(\varphi^*)^G$ — эпиморфизм. Следовательно, в этом случае φ/G — замкнутое вложение; с его помощью Y/G отождествляется с $\overline{\pi_{X/G}(Y)}$. (На самом деле $\pi_{X/G}(Y)$ замкнуто: см. ниже.)

Установим некоторые свойства пары $(X/G, \pi_{X/G})$. Для краткости будем иногда обозначать $\pi_{X/G}$ просто через π.

Теорема 4.6. Морфизм $\pi_{X/G}$ сюръективен.

◀ С помощью оператора Рейнольдса (см. п. 3.4) легко доказывается, что если A — алгебраическая G-алгебра, M — алгебраический A-G-модуль и N — любой подмодуль A^G-модуля M^G, то $(AN)^G = N$.

Возьмем $A = M = k[X]$, а в качестве N рассмотрим максимальный идеал $\mathfrak{n}_y$ алгебры $k[X]^G$, отвечающий точке $y \in X/G$. Мы получим тогда $(k[X]\mathfrak{n}_y)^G = \mathfrak{n}_y$, так что $k[X]\mathfrak{n}_y \neq k[X]$. Следовательно, $\mathfrak{n}_y$ содержится в максимальном идеале $\mathfrak{m}_x$ алгебры $k[X]$, отвечающем некоторой точке $x \in X$. Ясно, что $\pi(x) = y$. ▶

Следствие. Морфизм $\pi_{X/G}$ переводит каждое инвариантное замкнутое множество в X в замкнутое множество в X/G.

◀ См. коммутативную диаграмму (4.1). ▶

Тем самым Y/G отождествляется с $\pi_{X/G}(Y)$.

Теорема 4.7. Пусть $\{Y_\alpha\}$ — произвольное семейство инвариантных замкнутых подмножеств многообразия X. Тогда $\pi_{X/G}\left(\bigcap\limits_\alpha Y_\alpha\right) = \bigcap\limits_\alpha \pi_{X/G}(Y_\alpha)$. В частности, если $\bigcap\limits_\alpha Y_\alpha = \varnothing$, то и $\bigcap\limits_\alpha \pi_{X/G}(Y_\alpha) = \varnothing$.

◀ С помощью оператора Рейнольдса легко доказывается, что если $\{N_\alpha\}$ — произвольное семейство подмодулей алгебраического G-модуля M, то $\left(\sum N_\alpha\right)^G = \sum N_\alpha^G$.

Возьмем $M = k[X]$ и в качестве N_α рассмотрим инвариантный идеал I_α алгебры $k[X]$, отвечающий подмножеству $Y_\alpha \subset X$. Мы получим тогда $\left(\sum I_\alpha\right)^G = \sum I_\alpha^G$. Пусть теперь $f \in k[X]^G$ — инвариант, равный нулю на $\bigcap\limits_\alpha Y_\alpha$. Тогда $f^m \in \sum I_\alpha$ для некоторого m и, в силу предыдущего, $f^m \in \sum I_\alpha^G$. Это показывает, что функция f^m, а значит, и функция f, равна нулю на $\bigcap\limits_\alpha \pi(Y_\alpha)$. Следовательно, $\pi\left(\bigcap\limits_\alpha Y_\alpha\right) \supset \bigcap\limits_\alpha \pi(Y_\alpha)$. ▶

Следствие. В любом слое морфизма $\pi_{X/G}$ содержится ровно одна замкнутая орбита.

Теорема 4.8. Для любого открытого подмножества $U \subset X/G$ имеем $k[U] = k[\pi_{X/G}^{-1}(U)]^G$.

◀ Достаточно доказать это для главных открытых подмножеств $U = (X/G)_f = \{y \in X/G \mid f(y) \neq 0\}$ $(f \in k[X]^G)$, составляющих базу топологии многообразия X/G. Для такого подмножества U имеем $k[U] = (k[X]^G)_f$ и $k[\pi^{-1}(U)] = k[X]_f$ (где A_f обозначает локализацию алгебры A по мультипликативной системе, порожденной f), и утверждение теоремы сводится к очевидному равенству $(k[X]^G)_f = (k[X]_f)^G$. ▶

Из доказанных теорем с помощью несложных рассуждений получаются следующие две теоремы Мамфорда [213].

Теорема 4.9. Пара $(X/G, \pi_{X/G})$ является категорным фактором для действия $G:X$. Более того, любое открытое подмножество $U \subset X/G$ является категорным фактором для действия $G:\pi_{X/G}^{-1}(U)$.

Будет ли X/G геометрическим фактором? Вообще говоря, нет, поскольку в X могут быть незамкнутые орбиты, и тогда геометрического фактора вообще не существует. Оказывается, это единственное препятствие.

Теорема 4.10. Пара $(X/G, \pi_{X/G})$ является геометрическим фактором тогда и только тогда, когда все орбиты группы G в X замкнуты.

Интересно отметить, что, ввиду этой теоремы, для действия редуктивной группы на неприводимом аффинном многообразии замкнутость всех орбит равносильна тому, что все они имеют одинаковую размерность (ср. пример 3° п. 1.3).

Условие теоремы заведомо выполнено, если группа G конечна. Таким образом, в этом случае X/G всегда является геометрическим фактором.

Рассмотрение многообразия X/G переводит изучение алгебры инвариантов $k[X]^G$ в геометрическое русло. Особенно ценную информацию доставляет рассмотрение особенностей многообразия X/G. Простейшее наблюдение состоит в том, что число образующих алгебры $k[X]^G$ не меньше размерности касательного пространства $T_y(X/G)$ в любой точке $y \in X/G$.

◀Пространство $T_y(X/G)$ есть пространство, сопряженное $\mathfrak{n}_y/\mathfrak{n}_y^2$, где $\mathfrak{n}_y$ — максимальный идеал алгебры $k[X]^G$, отвечающий точке y. Пусть алгебра $k[X]^G$ порождается элементами $f_1, \ldots, f_m$. Можно считать, что $f_1, \ldots, f_m \in \mathfrak{n}_y$; тогда очевидно, что $\dim \mathfrak{n}_y/\mathfrak{n}_y^2 \leqslant m$. ▶

Если $X=V$ — векторное пространство, а действие группы G линейно, то, как мы фактически показали в п. 3.3, минимальное число образующих алгебры инвариантов равно размерности пространства $T_{\pi(0)}(V/G)$. Отсюда вытекает

Предложение 4.11. *Пусть редуктивная группа G линейно действует в векторном пространстве V. Алгебра $k[V]^G$ свободна тогда и только тогда, когда $\pi_{V/G}(0)$ — неособая точка многообразия V/G (и в этом случае V/G — аффинное пространство).*

4.5. Критерий Игусы. Построение фактора способом, изложенным в п. 4.4, требует предварительного описания алгебры инвариантов. Однако именно это часто вызывает серьезные затруднения. Более реальным во многих случаях оказывается, наоборот, использование геометрических соображений для описания алгебры инвариантов.

Теорема 4.12. (Игуса [162].) *Пусть задано действие алгебраической группы G на неприводимом аффинном многооб-*

разии X, и пусть Y — некоторое нормальное неприводимое аффинное многообразие и $\pi: X \to Y$ — морфизм, постоянный на орбитах группы G и удовлетворяющий следующим условиям:

(1) $\operatorname{codim}(Y \setminus \pi(X)^0) \geqslant 2$;

(2) для любой точки y из некоторого непустого открытого подмножества $Y_0 \subset Y$ слой $\pi^{-1}(y)$ содержит плотную орбиту.

Тогда $\pi^*: k[Y] \to k[X]^G$ — изоморфизм.

◀ Из условия (1) следует, что морфизм π доминантен и, значит, π^* — мономорфизм. Далее, из условия (2) следует, что любой инвариант $f \in k[X]^G$ постоянен на слоях общего положения морфизма π и потому (см. предложение 1.9) имеет вид $f = \pi^* \varphi$, где $\varphi \in k(Y)$. Ввиду леммы 4.3 функция φ определена во всех точках из $\pi(X)^0$. Однако на нормальном многообразии множество точек, где не определена рациональная функция, либо пусто, либо является подмногообразием коразмерности *1*. Поэтому из условия (1) следует, что $\varphi \in k[Y]$. ▶

Пример 1°. Пусть V — конечномерное векторное пространство, снабженное невырожденной симметрической (соотв. кососимметрической) билинейной формой B. Рассмотрим естественное линейное действие группы $G = \mathrm{O}(V)$ (соотв. $\mathrm{Sp}(V)$) на пространстве $X = V \oplus \ldots \oplus V$ (m слагаемых). Пусть Y — пространство симметричных (соотв. кососимметричных) матриц порядка m, а $\pi: X \to Y$ — морфизм, сопоставляющий набору $x = (v_1, \ldots, v_m) \in X$ его матрицу Грама $(B(v_i, v_j))$. Очевидно, что морфизм π постоянен на орбитах группы G. Предположим теперь, что $m \leqslant \dim V$. Тогда $\pi(X) = Y$ и, если $y \in Y$ — невырожденная матрица, то по теореме Витта $\pi^{-1}(y)$ — это одна орбита группы G. Согласно предыдущей теореме $\pi^*: k[Y] \to k[X]^G$ — изоморфизм, т. е. алгебра $k[X]^G$ свободно порождается инвариантами $B(v_i, v_j)$.

Как видно из доказательства, условие (2) в теореме 4.12 можно заменить условием

(2′) для любой точки y из некоторого непустого открытого подмножества $Y_0 \subset Y$ слой $\pi^{-1}(y)$ содержит ровно одну замкнутую орбиту.

Если группа G редуктивна, то условие (2′) необходимо для того, чтобы гомоморфизм π^* был изоморфизмом (следствие теоремы 4.7). Таким образом мы приходим к следующей теореме, которую называют *критерием Игусы* (хотя в оригинальной работе [162] она не была сформулирована):

Теорема 4.13. Пусть задано действие редуктивной алгебраической группы G на неприводимом аффинном многообразии X, и пусть Y — некоторое нормальное неприводимое аффинное многообразие и $\pi: X \to Y$ — морфизм, постоянный на орбитах группы G. Пара (Y, π) является категорным фактором для действия тогда и только тогда, когда выполнены условия (1) и (2′).

4.6. Построение фактора для действия редуктивной группы

на произвольном многообразии. Согласно теореме 4.10, для действия конечной группы на аффинном многообразии всегда существует геометрический фактор, также являющийся аффинным многообразием. Исходя из этого, можно получить критерий существования геометрического фактора для действия конечной группы на любом многообразии.

Напомним, что морфизм алгебраических многообразий $\varphi: X \to Y$ называется *аффинным*, если полный прообраз $\varphi^{-1}(U)$ любого аффинного открытого подмножества $U \subset Y$ является аффинным открытым подмножеством в X. Морфизм φ называется *конечным*, если он аффинный и для любого аффинного открытого подмножества $U \subset Y$ алгебра $k[\varphi^{-1}(U)]$ цела над подалгеброй $\varphi^* k[U]$ (т. е. является конечно порожденным $\varphi^* k[U]$-модулем).

Теорема 4.14. Геометрический фактор для действия конечной группы G на алгебраическом многообразии X существует тогда и только тогда, когда любая орбита группы G содержится в аффинном открытом подмножестве, и в этом случае морфизм факторизации конечен.

◀ Докажем утверждение «тогда». Прежде всего заметим, что если $U \subset X$ — какое-нибудь аффинное открытое подмножество, содержащее орбиту точки x, то $\bigcap_{g \in G} gU$ — инвариантное аффинное открытое подмножество, содержащее точку x. Следовательно, X допускает конечное покрытие инвариантными аффинными открытыми подмножествами, скажем, $U_1, \ldots, U_s$. Пусть X/G обозначает факторпространство многообразия X как топологического пространства с пучком функций (см. п. 4.2). Пространство X/G покрывается открытыми подмножествами U_i/G, являющимися аффинными многообразиями. Для того чтобы доказать, что X/G — алгебраическое многообразие, нужно проверить аксиому отделимости, т. е. доказать, что диагональ $\Delta_{X/G}$ замкнута в $(X/G) \times (X/G)$.

Достаточно доказать, что для любых i, j множество $\Delta_{X/G} \cap ((U_i/G) \times (U_j/G))$ замкнуто в $(U_i/G) \times (U_j/G)$. Поскольку X — алгебраическое многообразие, множество $\Delta_X \cap (U_i \times U_j)$ (где Δ_X — диагональ в $X \times X$) замкнуто в $U_i \times U_j$. Следовательно, его образ при морфизме факторизации

$$U_i \times U_j \to (U_i \times U_j)/(G \times G) = (U_i/G) \times (U_j/G)$$

замкнут в $(U_i/G) \times (U_j/G)$ (см. п. 4.2); но этот образ и есть $\Delta_{X/G} \cap ((U_i/G) \times (U_j/G))$. ▶

Не следует думать, что условие этой теоремы выполняется всегда: Нагата [127] построил пример действия группы $\mathbf{Z}/(2)$, для которого не существует геометрического фактора.

Можно попытаться применить к действию любой редуктивной группы ту же идею, которая использовалась в приведенном выше доказательстве. Однако реализация этой идеи в общем

случае наталкивается на две трудности. Во-первых, не у всякой точки может найтись инвариантная аффинная окрестность. Во-вторых, если выбрать инвариантные аффинные открытые подмножества наудачу, после склейки их факторов может не получиться многообразия (не будет выполнена аксиома отделимости). Тем не менее, оказывается, что, отбирая эти подмножества некоторым систематическим образом, можно получить таким способом категорные и геометрические факторы для достаточно больших инвариантных открытых подмножеств.

Предположим, что X — проективное многообразие, вложенное в проективное пространство PV таким образом, что действие группы G индуцируется ее линейным представлением в пространстве V. Тогда для любого непостоянного однородного инварианта $f \in k[V]^G$ множество

$$X_f = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$$

открыто, аффинно и инвариантно. Эти множества и следует взять за основу конструкции.

Определение 4.15. Точка $x \in X$ называется *полустабильной*, если она лежит в некотором X_f, и *стабильной*, если при этом орбита любой точки из X_f замкнута в X_f.

Множество всех полустабильных (соотв. стабильных) точек обозначается через X^{ss} (соотв., X^s). Очевидно, что X^{ss} и X^s открыты в X и $X^s \subset X^{ss}$.

Множество X^{ss} есть в точности дополнение к $X \cap P\mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N} = \pi_{V/G}^{-1}(\pi_{V/G}(0))$ — «нуль-конус» для действия $G : V$ (см. § 5), а $P\mathfrak{N}$ — его проективизация. Пусть $\hat{X} \subset V$ — конус, проективизацией которого является X. Тогда X^s — это проективизация открытого ядра множества точек конуса $\hat{X}$, орбиты которых замкнуты (в V). В частности, $X^s \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда действие $G : \hat{X}$ стабильно (см. п. 2.4, а также теорему 7.15).

Построение и последующая склейка категорных факторов X_f/G — это не что иное, как стандартная конструкция проективного спектра градуированной алгебры $k[\hat{X}]^G$. Более подробное (и несложное) исследование, опирающееся на теоремы п. 4.4, позволяет получить следующий результат.

Теорема 4.16. (Мамфорд [213]; см. также [230].) Для действия $G : X^{ss}$ существует категорный фактор X^{ss}/G, являющийся проективным многообразием. При этом

1) $\pi_{X^{ss}/G}$ — аффинный морфизм;

2) любое открытое подмножество $U \subset X^{ss}/G$ является категорным фактором для действия $G : \pi_{X^{ss}/G}^{-1}(U)$;

3) существует такое открытое подмножество $U^s \subset X^{ss}/G$, что $\pi^{-1}_{ss/G}(U^s) = X^s$ и U^s является геометрическим фактором для действия $G : X^s$.

Имеют место также аналоги теорем 4.6—4.8.

Пример 1°. Пусть $G=SL_2$ и $X=PV_{2g+2}$, $g\geqslant 1$ (см. п. 0.12). Так как стабилизатор любой точки из Ω конечен (см. п. 7.2), то все орбиты действия $G:\Omega$ имеют одинаковую размерность и, значит, замкнуты в Ω. Но $\Omega=X_f$, где f — дискриминант бинарной формы; следовательно, существует геометрический фактор Ω/G. Можно показать [230], что он является грубым многообразием модулей гиперэллиптических кривых рода g. Проективное многообразие X^{ss}/G, содержащее Ω/G в качестве открытого подмножества, может рассматриваться как некоторое явно описанное пополнение этого многообразия модулей.

Пример 2°. Пусть M_g — множество классов изоморфных (алгебраических проективных) гладких неприводимых кривых рода $g\geqslant 2$. Зафиксируем целое число $m\geqslant 3$. Тогда, [151], m-я степень канонического класса определяет вложение любой такой кривой в проективное пространство P^n, $n=2m(g-1)-g$. Многочлен Гильберта $h(x)$ образа этого вложения не зависит от кривой (и имеет вид $h(x)=(2mx-1)(g-1)$). Две кривые изоморфны в точности тогда, когда их образы в P^n переводятся друг в друга преобразованием из групп PGL_n, естественно действующей на P^n. Как известно [146], замкнутые подсхемы в P^n с многочленом Гильберта $h(x)$ параметризуются точками некоторого проективного многообразия — схемы Гильберта $\mathrm{Hilb}^h(P^n)$. Группа PGL_n естественно действует на $\mathrm{Hilb}^h(P^n)$. Можно доказать [213], что гладкие кривые рода g, вложенные в P^n указанным выше способом, параметризуются точками некоторого гладкого инвариантного неприводимого подмногообразия H_m в $\mathrm{Hilb}^h(P^n)$. Таким образом, M_g можно рассматривать как множество орбит действия группы PGL_n на H_m. Мамфорд доказал в [213], что существует такое линейное представление группы PGL_n в пространстве V и такое эквивариантное вложение многообразия $\mathrm{Hilb}^h(P^n)$ в проективное пространство PV, что $H_m\subset(\mathrm{Hilb}^h(P^n))^s$. Ввиду теоремы 4.16, существует (квазипроективный) геометрический фактор H_m/PGL_n. Таким образом, M_g снабжается структурой алгебраического многообразия. Пользуясь свойством универсальности схемы Гильберта, можно доказать [213], что это многообразие является грубым многообразием модулей гладких проективных кривых рода g.

Аналогичный подход применяется и для доказательства существования многообразий модулей многих других алгебро-геометрических объектов. При этом наибольшую трудность обычно представляет доказательство стабильности соответствующей точки схемы Гильберта. Рассмотрим, например, проективные кривые рода g, не обязательно гладкие и не обязательно неприводимые. Выделим среди них те, которые обладают следующими свойствами: а) всякая особая точка кривой является обыкновенной двойной точкой, б) всякая гладкая рациональ-

ная неприводимая компонента кривой пересекается с объединением остальных неприводимых компонент не менее чем в трех точках. Мамфорд доказал в [214], что для кривых с такими свойствами существует грубое многообразие модулей $\overline{M}_g$, являющееся неприводимым проективным многообразием, содержащим многообразие M_g из примера 2° в качестве открытого подмножества. Таким образом, многообразие $\overline{M}_g$ можно рассматривать как явно описанную естественную «компактификацию» многообразия M_g. Гизекер в [141] доказал, что точка соответствующей схемы Гильберта, определенная образом гладкой неприводимой проективной поверхности общего типа при m-кратном каноническом вложении, стабильна (если $m \gg \gg 0$) относительно подходящего эквивариантного вложения схемы Гильберта в проективное пространство. Он вывел отсюда существование (квазипроективного) грубого многообразия модулей таких поверхностей. Другие примеры и литературные указания см. в [142], [215]. При доказательстве стабильности соответствующих точек во всех этих прикладных задачах используются стандартные (для теории инвариантов) критерии замкнутости орбит, которые мы рассмотрим в § 6.

4.7. Однородные пространства. Ввиду теоремы 4.2, однородное пространство G/H алгебраической группы G по алгебраической подгруппе H (см. п. 1.5) является геометрическим (и, значит, категорным) фактором для действия H на G правыми сдвигами.

Многообразие G/H всегда квазипроективно (см. п. 1.4). Известно [34], что оно проективно тогда и только тогда, когда H является параболической подгруппой группы G (т. е. содержит борелевскую подгруппу). Естественно спросить, когда оно аффинно или квазиаффинно. Ответ на первый вопрос к настоящему времени полностью не известен. Во всяком случае, из теоремы 4.9 следует, что если подгруппа H редуктивна, то многообразие G/H аффинно. Если сама группа G редуктивна, то верно и обратное.

Теорема 4.17. Пусть G — редуктивная группа. Однородное многообразие G/H аффинно тогда и только тогда, когда подгруппа H редуктивна.

Эту теорему часто называют *критерием Мацусимы*. Она была доказана одновременно и независимо Мацусимой [207] и А. Л. Онищиком [57]. (Простое доказательство см. в [201].)

Подгруппы $H \subset G$, для которых многообразие G/H квазиаффинно, называются обозримыми (см. п. 3.7). Легко видеть, что подгруппа H обозрима в G тогда и только тогда, когда H^0 обозрима в G^0. Поэтому достаточно описать связные обозримые подгруппы связных групп. Такое описание получено А. А. Сухановым [90], [91]. Решающую роль при этом сыграли результаты Ф. А. Богомолова [20] (см. п. 5.5, в частности, следствие 2 теоремы 5.5).

Для того, чтобы сформулировать результат А. А. Суханова, нужны два определения. Алгебраическая подгруппа H алгебраической группы F называется *правильно вложенной*, если унипотентный радикал H содержится в унипотентном радикале F. Подгруппа F связной алгебраической группы G называется *квазипараболической*, если она имеет вид $F=\{p\in P|\lambda(p)=1\}$, где P — параболическая подгруппа, а λ — ее доминантный характер. Иными словами, квазипараболические подгруппы — это стабилизаторы старших векторов линейных представлений группы G.

Теорема 4.18 ([90], [91]). Связная алгебраическая подгруппа H связной алгебраической группы G обозрима тогда и только тогда, когда она правильно вложена в некоторую квазипараболическую подгруппу.

4.8. Однородные расслоения. Конструкция однородного расслоения также связана с факторизацией по действию группы. Напомним сначала эту конструкцию в абстрактной ситуации.

Пусть G — группа, H — ее подгруппа, F — множество, на котором действует H. *Однородное расслоение* $G *_H F$ есть фактормножество прямого произведения $G\times F$ по действию группы H, задаваемому формулой

$$h(g, f)=(gh^{-1}, hf); \tag{4.2}$$

на $G *_H F$ определено действие группы G, индуцированное ее действием на $G\times F$ посредством левых сдвигов первого множителя.

Условимся обозначать через $[g, f]$ образ пары (g, f) при отображении факторизации

$$\tau: G\times F\to G *_H F \tag{4.3}$$

и отождествлять $[e, f]$ с f. Отображение

$$p: G *_H F\to G/H, \quad [y, f]\mapsto gH, \tag{4.4}$$

корректно определено и G-эквивариантно; его слоями служат множества вида gF.

Пусть теперь G — алгебраическая группа, H — ее алгебраическая подгруппа и F — алгебраическое многообразие, на котором регулярно действует группа H. Тогда фактормножество $G *_H F=(G\times F)/H$ снабжается фактортопологией и пучком функций (см. п. 4.2).

Теорема 4.19. Если F — квазипроективное многообразие или, более общо, если любая конечная система точек в F со-

держится в некотором аффинном открытом подмножестве, то пространство $G^*_H F$ является алгебраическим многообразием.

Иными словами, для действия (4.2) группы H существует геометрический фактор.

Для того, чтобы объяснить суть дела, рассмотрим вначале аналогичный вопрос для комплексных групп Ли и аналитических многообразий. В этом случае проекция $\pi: G\to G/H$ является локально тривиальным (главным) расслоением. Пусть S — локальное сечение этого расслоения. Тогда подмногообразие $S\times F\subset G\times F$ при отображении τ изоморфно отображается на открытое подмножество пространства $G^*_H F$. Поскольку локальное сечение существует над любой точкой многообразия G/H, отсюда следует, что $G^*_H F$ — аналитическое многообразие.

В алгебро-геометрической ситуации аналогичное рассуждение не проходит. Дело в том, что открытые по Зарисскому подмножества слишком велики и поэтому многие естественные расслоения не являются локально тривиальными в топологии Зарисского. В частности, расслоение $\pi: G\to G/H$ локально тривиально тогда и только тогда, когда действие H на G правыми сдвигами обладает рациональным сечением (см. п. 2.5); но если, например, $G=\mathrm{SL}_n$, то такое сечение существует только для специальных в смысле п. 2.6 групп H.

Однако действие $H:G$ всегда обладает рациональным квазисечением (см. п. 2.5), т. е. существует такое алгебраическое многообразие Z и морфизм $\sigma: Z\to G$, что $\pi\circ\sigma$ — рациональное накрытие. Это означает, что расслоение π тривиализуется над некоторым открытым подмножеством $U\subset G/H$ после подходящего неразветвленного накрытия базы. Поскольку отображение π перестановочно с действием группы G, аналогичная тривиализация имеет место над любым подмножеством вида gU.

Определение 4.20. Морфизм алгебраических многообразий $\pi: X\to Y$ называется *локально изотривиальным расслоением* (или, в более современной терминологии, локально тривиальным расслоением в этальной топологии) со слоем F, если у каждой точки многообразия Y существует окрестность, над подходящим неразветвленным накрытием которой π является тривиальным расслоением со слоем F. (Это накрытие, очевидно, можно без ограничения общности считать накрытием Галуа.)

Из предыдущего следует, что расслоение $\pi: G\to G/H$ локально изотривиально. (В действительности всякое главное расслоение нормального многообразия локально изотривиально [145], [269].) Этого оказывается достаточно для доказательства теоремы 4.19.

◀ А именно, пусть Z — такое неразветвленное накрытие Галуа открытого подмножества $U\subset G/H$, что расслоение π три-

виализуется над Z. Тогда имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} Z \times H \arrow[r] \arrow[d] & \pi^{-1}(U) \arrow[d, "\pi"] \\ Z \arrow[r] & U \end{tikzcd},$$

в которой горизонтальные стрелки суть морфизмы факторизации по некоторой свободно действующей конечной группе Г, а левая вертикальная стрелка есть проекция на первый множитель (перестановочная с действием Г). Умножая первую строку этой диаграммы на F и факторизуя по действию группы H, получаем следующую коммутативную диаграмму, в которой горизонтальные стрелки также обозначают факторизацию по Г, а левая вертикальная стрелка — отображение $(z, h, f) \mapsto$ $\mapsto (z, hf)$:

$$\begin{tikzcd} Z \times H \times F \arrow[r] \arrow[d] & \pi^{-1}(U) \times F \arrow[d, "\tau"] \\ Z \times F \arrow[r] & p^{-1}(U) \end{tikzcd}.$$

Из теоремы 4.14 и условия на Z следует, что $p^{-1}(U)$ — алгебраическое многообразие.▶

Следующие свойства однородных расслоений легко выводятся непосредственно из определений.

Предложение 4.21. Всякое инвариантное подмногообразие $Y \subset G \underset{H}{*} F$ естественным образом эквивариантно изоморфно $G \underset{H}{*} (F \cap Y)$.

Предложение 4.22. Точка $x \in F$ неособа (нормальна) в $G^*_H F$ тогда и только тогда, когда она неособа (нормальна) в F. В любом случае $T_x(G \underset{H}{*} F) = T_x(Gx) + T_x(F)$.

В том случае, когда группы G и H редуктивны, а многообразие F аффинно, многообразие $G \underset{H}{*} F$ также аффинно. Ограничение функций на F определяет изоморфизм алгебр $k[G^*_H F]^G \xrightarrow{\sim}$ $\xrightarrow{\sim} k[F]^H$ и, следовательно, изоморфизм многообразий $F/H \xrightarrow{\sim}$ $\xrightarrow{\sim} (G \underset{H}{*} F)/G$, по которому эти многообразия обычно отождествляются.

§ 5. Нуль-конус

5.1. Введение. В работе [155], посвященной конструктивному построению конечной системы образующих алгебры инвариантов форм степени d от n переменных (относительно

естественного действия группы SL_n), Д. Гильберт обратил внимание на особую роль тех форм, на которых все однородные инварианты положительной степени обращаются в нуль. Он назвал их «нуль-формами» и нашел эффективный признак, их характеризующий. Например, для бинарных форм степени d таким признаком является наличие линейного множителя кратности $>\frac{d}{2}$.

Понятие нуль-формы естественным образом обобщается на любые линейные действия редуктивных групп.

Пусть редуктивная алгебраическая группа G линейно действует в векторном пространстве V. *Нуль-конусом* этого действия называется множество общих нулей всех однородных инвариантов положительной степени или, что то же самое, слой морфизма факторизации $\pi: V \to /G$, содержащий нуль.

Так как нуль является единственной замкнутой орбитой, содержащейся в нуль-конусе, то элементы нуль-конуса характеризуются тем, что замыкание их орбиты содержит нуль. Из этого следует, в частности, что нуль-конус зависит лишь от связной компоненты группы G. В дальнейшем мы будем предполагать, что группа G связна.

Для присоединенного действия редуктивной алгебраической группы G нуль-конусом является множество нильпотентных элементов касательной алгебры $\mathfrak{g}$. В самом деле, так как коэффициенты характеристического многочлена присоединенного оператора являются однородными инвариантами, то всякий элемент нуль-конуса нильпотентен. С другой стороны, известно, что для всякого нильпотентного элемента $e \in \mathfrak{g}$ существует такой полупростой элемент h, что $[h, e]=e$. Отсюда следует, что орбита элемента e является конусом и, значит, содержится в нуль-конусе.

По аналогии и в общем случае элементы пространства V, принадлежащие нуль-конусу, называются *нильпотентными*. Мы будем обозначать нуль-конус через $\mathfrak{N}_G(V)$ или просто $\mathfrak{N}$.

Роль нуль-конуса в построении системы образующих алгебры инвариантов объясняется тем, что алгебраически независимые однородные инварианты $f_1, \ldots, f_s$ составляют систему параметров алгебры $k[V]^G$ (см. п. 3.10) тогда и только тогда, когда множество их общих нулей совпадает с $\mathfrak{N}$. Это простое следствие из теоремы Гильберта о нулях, доказанной в упомянутой выше работе [155].

В настоящее время имеются и другие, более важные применения нуль-конуса; см. об этом в следующем пункте и §§ 6 и 8.

5.2. Асимптотические конусы. Нуль-конус является «самым плохим» слоем морфизма факторизации. Его сравнение с другими слоями осуществляется методом асимптотических (ассоциированных) конусов, принадлежащим Боро и Крафту [110].

Включим векторное пространство V в виде аффинной карты в проективное пространство P той же размерности и отождествим бесконечно удаленную гиперплоскость пространства P с проективным пространством PV, ассоциированным с V.

Назовем *асимптотическим конусом* подмногообразия $M \subset V$ и обозначим через $\widehat{M}$ объединение одномерных подпространств, соответствующих точкам из $\overline{M} \cap PV$, где $\overline{M}$ — замыкание M в P. Очевидно, что $\widehat{M}$ — замкнутый конус той же размерности, что и M. Если подмногообразие инвариантно относительно группы G, то и его асимптотический конус инвариантен.

Предложение 5.1. Асимптотический конус любого слоя F морфизма факторизации (и, тем более, любой орбиты) содержится в нуль-конусе.

◀ Пусть $u \in \hat{F}$, $u \neq 0$, и $\omega \in V^*$ — такая линейная функция, что $\omega(u) \neq 0$. Пусть f — однородный инвариант степени $m > 0$. Рассмотрим рациональную функцию $\varphi(x) = \frac{f(x)}{\omega(x)^m}$ на V. Она инвариантна относительно гомотетий и определена в точке u. Следовательно, ее продолжение на P определено в бесконечно удаленной точке $p = \langle u \rangle \in \overline{F}$. Однако ограничение функции φ на $\overline{F}$ имеет вид $\varphi(x) = \frac{c}{\omega(x)^m}$, где c — значение инварианта f на F. Следовательно, $\varphi(p) = 0$ и, значит, $f(u) = 0$. ▶

Следствие 1. Размерность любого слоя морфизма факторизации не превосходит размерности нуль-конуса.

Назовем *модальностью* действия алгебраической группы H на алгебраическом многообразии X максимум чисел $\operatorname{tr} \deg k(Y)^H$ по всем инвариантным неприводимым подмногообразиям $Y \subset X$, т. е. наибольшее число параметров, от которого может зависеть семейство орбит группы H в X.

Следствие 2. Модальность действия группы G на любом слое морфизма факторизации не превосходит модальности ее действия на нуль-конусе.

◀ Пусть некоторый слой морфизма факторизации, отличный от нуль-конуса, содержит инвариантное подмногообразие M, коразмерность орбиты общего положения в котором равна m. Рассмотрим замыкание $\overline{kM}$ конуса kM, натянутого на M, в пространстве V. Поскольку $\dim \overline{kM} = \dim M + 1$ и орбиты, гомотетичные орбитам, лежащим в M, заполняют плотное подмножество в $\overline{kM}$, коразмерность орбиты общего положения в $\overline{kM}$ равна $m+1$, а коразмерность любой орбиты не меньше этого числа. Очевидно, что $\widehat{M} \subset \overline{kM}$. Следовательно, коразмерность орбиты общего положения в $\widehat{M}$ не меньше m, а это означает, что модальность действия группы G в нуль-конусе (содержащем $\widehat{M}$ согласно предложению 5.1) не меньше m. ▶

В частности, действия нулевой модальности — это действия с конечным числом орбит. Поэтому получаем

Следствие 3. Если нуль-конус содержит лишь конечное число орбит, то тем же свойством обладает и любой слой морфизма факторизации.

Предложение 5.1 допускает уточнение, связанное с тем, что слои морфизма факторизации можно рассматривать как аффинные схемы. С этой точки зрения слой $\pi^{-1}(y)$ над точкой $y\in V/G$, отвечающей максимальному идеалу $\mathfrak{n}_y$ алгебры $k[V]^G$, есть спектр алгебры

$$A(y)=k[V]/k[V]\mathfrak{n}_y,$$

которая, быть может, имеет нильпотентные элементы (ср. предложение 3.26). Алгебра $A(y)$ имеет естественную возрастающую фильтрацию, индуцированную градуировкой алгебры $k[V]$. Схемный вариант предложения 5.1 состоит в том, что градуированная алгебра $\operatorname{gr} A(y)$, ассоциированная с $A(y)$, является гомоморфным образом алгебры $A(\pi(0))$ (при некотором естественном гомоморфизме, который может быть явно указан).

В частности, если все слои морфизма факторизации имеют одинаковую размерность (см. об этом свойстве в § 8), а нуль-конус приведен и неприводим (т. е. алгебра $A(\pi(0))$ не имеет делителей нуля), то $\operatorname{gr} A(y)\simeq A(\pi 0))$ при всех $g\in V/G$ и, значит, все слои приведены и неприводимы. Если нуль-конус к тому же нормален, то и все слои нормальны [110].

5.3. Критерий Гильберта — Мамфорда. Следующая фундаментальная теорема была доказана Гильбертом [155] для действия унимодулярной группы в пространстве форм и Мамфордом [213] в общей ситуации.

Теорема 5. 2. Пусть редуктивная алгебраическая группа G линейно действует в векторном пространстве V и пусть $u\in V$ — нильпотентный элемент. Тогда существует такой одномерный тор $S\subset G$, что $\overline{Su}\ni 0$.

▶Мы приведем доказательство Ричардсона для случая $k=\mathbf{C}$, помещенное в статье [108]. Пусть T — максимальный (алгебраический) тор и K — максимальная компактная подгруппа группы G. Имеем $G=KTK$ (разложение Картана). По условию $\overline{Gu}\ni 0$. Так как замыкание подмногообразия в топологии Зарисского совпадает с его замыканием в вещественной топологии, а подгруппа K компактна в вещественной топологии, то уже замыкание подмножества TKu в вещественной топологии содержит нуль.

Рассмотрим отображение факторизации $\pi_T: V\to V/T$. Так как оно непрерывно в вещественной топологии, то из предыдущего следует, что

$$\pi_T(\overline{TKu})=\pi_T(\overline{Ku})\ni 0.$$

Таким образом, найдется такой элемент $g \in K$, что $\pi_T(gu)=0$, т. е. $\overline{Tgu} \ni 0$.

Последнее условие равносильно тому, что $\overline{(g^{-1}Tg)u} \ni 0$, и для завершения доказательства теоремы нам остается заменить тор $g^{-1}Tg$ одномерным подтором. Это возможно в силу предложения, которое будет доказано в следующем пункте. Там же будет приведена более удобная форма критерия Гильберта — Мамфорда. ▶

Отметим, что из доказанного следует, что

$$\mathfrak{N}_G(V) = G\mathfrak{N}_T(V). \tag{5.1}$$

5.4. Метод носителей. Пусть T — алгебраический тор, $\mathfrak{t}$ — его касательная алгебра, $\mathfrak{X}(T)$ — группа его характеров (записанная аддитивно). Отображение, сопоставляющее каждому характеру его дифференциал, продолжается до изоморфизма пространства $\mathfrak{X}(T)\otimes k$ на пространство $\mathfrak{t}^*$. Имея в виду этот изоморфизм, мы будем рассматривать элементы пространства $\mathfrak{X}(T)\otimes k$ как линейные функции на $\mathfrak{t}$. Положим

$$E(T) = \mathfrak{X}(T)\otimes \mathbf{Q},$$

$$\mathfrak{t}(\mathbf{Q}) = \{h \in \mathfrak{t} : \chi(h) \in \mathbf{Q} \text{ для всех } \chi \in \mathfrak{X}(T)\}.$$

Пространства $E(T)$ и $\mathfrak{t}(\mathbf{Q})$ сопряжены относительно спаривания $(\chi, h) \mapsto \chi(h)$.

Пусть тор T линейно действует в векторном пространстве V Тогда $V = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{X}(T)} V_\lambda$, где

$$V_\lambda = \{v \in V : tv = \lambda(t)v \quad \text{для всех } t \in T\}.$$

Характеры λ, для которых $V_\lambda \neq 0$, называются *весами* данного действия, а сами подпространства V_λ — *весовыми подпространствами*.

Для всякого вектора $v = \Sigma v_\lambda \in V$ $(v_\lambda \in V_\lambda)$ назовем его *носителем* и обозначим через $\operatorname{supp} v$ выпуклую оболочку в пространстве $E(T)$ множества тех весов λ, для которых $v_\lambda \neq 0$.

Предложение 5.3. Для вектора $u \in V$ следующие условия равносильны:

(1) $\overline{Tu} \ni 0$;

(2) существует такой одномерный тор $S \subset T$, что $\overline{Su} \ni 0$;

(3) $\operatorname{supp} u \not\ni 0$;

(4) существует такой вектор $h \in \mathfrak{t}(\mathbf{Q})$, что $\lambda(h) > 0$ при всех $\lambda \in \operatorname{supp} u$.

Вернемся теперь к ситуации предыдущего пункта. Рассматривая носители векторов относительно фиксированного максимального тора T группы G, мы можем с учетом предложения 5.3 переформулировать критерий Гильберта — Мамфорда следующим образом: вектор $u \in V$ нильпотентен тогда и только тогда, когда в его орбите существует такой элемент u', что $\operatorname{supp} u' \not\ni 0$.

Пример 1°. Рассмотрим естественное линейное представление группы SL_2 в пространстве форм степени d от переменных x, y. Веса этого представления относительно максимального тора

$$T=\left\{\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} : t \in k^*\right\}$$

имеют вид

$$d\varepsilon, \quad (d-2)\varepsilon, \; \ldots, \; -(d-2)\varepsilon, \; -d\varepsilon,$$

где $\varepsilon\left(\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}\right)=t^{-1}$, причем весу $(d-2k)\varepsilon$ отвечает форма $x^{d-k}y^k$. Носитель формы не содержит нуля тогда и только тогда, когда она делится либо на $x^{\left[\frac{d}{2}\right]+1}$, либо на $y^{\left[\frac{d}{2}\right]+1}$. Следовательно, нильпотентные бинарные формы (нуль-формы, в терминологии Гильберта) — это те, которые имеют линейный множитель кратности $\geqslant\left[\frac{d}{2}\right]+1$.

Пример 2°. Рассмотрим естественное линейное представление группы SL_3 в пространстве кубических форм от переменных x, y, z. Веса этого представления относительно максимального тора, состоящего из диагональных матриц, изображены на рис. 5, причем возле каждого веса указана соответствующая форма. (Форма xyz соответствует нулевому весу.) С точностью до действия группы Вейля, переставляющей x, y, z, имеется только один максимальный выпуклый многоугольник, натянутый на веса и не содержащий нуля, а именно треугольник, изображенный на рис. 5. Носитель формы содержится в этом треугольнике тогда и только тогда, когда точка $(0, 0, 1)$ является для соответствующей плоской проективной кривой либо двойной точкой с двукратной касательной $y=0$, либо тройной точкой. Следовательно, нильпотентные формы характеризуются тем, что соответствующие им кубики имеют особенность, отличную от простого самопересечения.

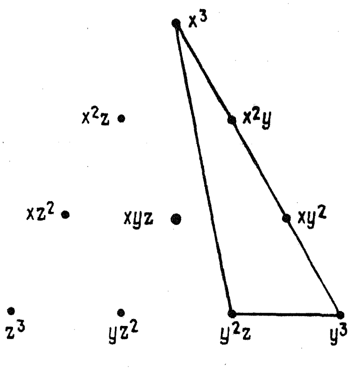


Рис. 5

5.5. Характеристика нильпотентного элемента. Развивая идею, заключенную в критерии Гильберта — Мамфорда, можно попытаться выделить среди всех одномерных торов S, удовлетворяющих условию $\overline{Su}\ni 0$, те, которые «быстрее всего подгоняют элемент u к нулю». Это соображение было обыграно в работах Руссо [252], Кемпфа [171] и Хесселинка [153] и, независимо, Ф. А. Богомолова [20]. Оно позволило произвести некоторую классификацию нильпотентных элементов.

Сохраняя предположения и обозначения предыдущих пунктов, введем в касательную алгебру $\mathfrak{g}$ группы G инвариантное скалярное умножение, ограничение которого на $\mathfrak{t}(\mathbf{Q})$ принимает рациональные значения и положительно определенно. (Например, можно положить $(x, y) = \operatorname{tr} dR(x)\, dR(y)$ для какого-либо точного линейного представления R группы G.) Определим изоморфизм $\nu: E(T) \to \mathfrak{t}(\mathbf{Q})$ по формуле

$$\nu^{-1}(h_1)(h_2) = (h_1, h_2) \qquad (h_1, h_2 \in \mathfrak{t}(\mathbf{Q}))$$

и с его помощью перенесем скалярное умножение в пространство $E(T)$.

Полупростой элемент $h \in \mathfrak{g}$ будем называть *рациональным*, если для какого-либо точного (и тогда вообще для любого) линейного представления R группы G собственные значения линейного оператора $dR(h)$ рациональны. Элемент h рационален тогда и только тогда, когда он сопряжен элементу из $\mathfrak{t}(\mathbf{Q})$.

Для $h \in \mathfrak{g}$ и $c \in k$ положим

$$V_c(h) = \{v \in V : hv = cv\},$$
$$\mathfrak{g}_c(h) = \{\xi \in \mathfrak{g} : [h, \xi] = c\xi\}.$$

Очевидно, что

$$[\mathfrak{g}_a(h), \mathfrak{g}_b(h)] \subset \mathfrak{g}_{a+b}(h), \quad \mathfrak{g}_a(h) V_b(h) \subset V_{a+b}(h).$$

Определение. *Характеристикой*[1] ненулевого нильпотентного элемента $u \in V$ называется (любой) кратчайший рациональный полупростой элемент $h \in \mathfrak{g}$, удовлетворяющий условию

$$u \in \bigoplus_{i \geqslant 2} V_c(h). \tag{5.2}$$

Докажем, что любой ненулевой нильпотентный элемент $u \in V$ обладает характеристикой. Заменив элемент u эквивалентным ему нильпотентным элементом, добьемся того, чтобы $\operatorname{supp} u \not\ni 0$. Обозначим через χ_u точку $\operatorname{supp} u$, ближайшую к нулю, и положим

$$h_u = \frac{2}{(\chi_u, \chi_u)} \nu(\chi_u) \in \mathfrak{t}(\mathbf{Q}). \tag{5.3}$$

Тогда $\chi(h_u) = 2$ будет уравнением (относительно χ) гиперплоскости H_u, проходящей через точку χ_u ортогонально ее радиу-

[1] Термин «характеристика» впервые был употреблен Е. Б. Дынкиным [44] в случае присоединенного представления: см. пример 3°.

су-вектору, а неравенство $\chi(h_u) \geqslant 2$ будет задавать полупространство $H_u{}^+$, содержащее $\operatorname{supp} u$ (см. рис. 6). Следовательно, элемент h_u удовлетворяет условию (5.2). Легко видеть, что это кратчайший из элементов пространства $\mathfrak{t}(\mathbf{Q})$, удовлетворяющих этому условию. Если в $\mathfrak{t}(\mathbf{Q})$ содержится характеристика элемента u, то ею может быть только h_u.

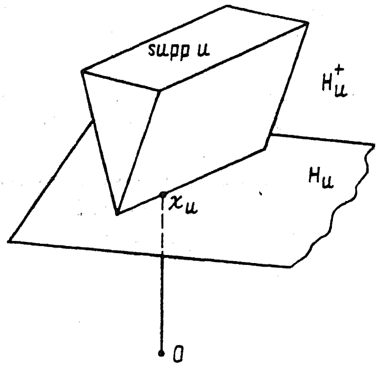


Рис. 6

Элемент u назовем *приведенным* (относительно T), если $\operatorname{supp} u \not\ni 0$ и $|h_u| \leqslant |h_{gu}|$ (или, что то же, $|\chi_u| \geqslant |\chi_{gu}|$) для любого такого $g \in G$, что $\operatorname{supp} gu \not\ni 0$. Так как число возможных носителей элементов пространства V конечно, то каждый ненулевой нильпотентный элемент эквивалентен некоторому приведенному (или, что то же, каждый ненулевой нильпотентный элемент приведен относительно некоторого максимального тора). Если u — приведенный нильпотентный элемент, то элемент h_u и является его характеристикой.

Укажем теперь способ, позволяющий эффективно вычислить характеристику.

С каждым рациональным полупростым элементом $h \in \mathfrak{g}$ связана параболическая подалгебра

$$\mathfrak{p}(h) = \bigoplus_{c \geqslant 0} \mathfrak{g}_c(h), \tag{5.4}$$

в которой централизатор $\mathfrak{z}(h) = \mathfrak{g}_0(h)$ элемента h является максимальной редуктивной подалгеброй. Обозначим через $P(h)$ соответствующую параболическую подгруппу. Так как элемент h ортогонален коммутанту алгебры $\mathfrak{z}(h)$, то линейная функция $\xi \mapsto (h, \xi)$ на $\mathfrak{p}(h)$ с точностью до рационального множителя совпадает с дифференциалом некоторого характера группы $P(h)$. Поэтому ортогональные дополнения $\tilde{\mathfrak{p}}(h)$ и $\tilde{\mathfrak{z}}(h)$ к элементу h в подалгебрах $\mathfrak{p}(h)$ и $\mathfrak{z}(h)$ соответственно являются идеалами этих подалгебр и им отвечают какие-то связные подгруппы $\tilde{P}(h)$ и $\tilde{Z}(h)$ группы G.

Теорема 5.4. Пусть u — ненулевой нильпотентный элемент пространства V. Рациональный полупростой элемент $h \in \mathfrak{g}$, удовлетворяющий условию (5.2), является характеристикой элемента u тогда и только тогда, когда проекция u_0 элемента u на $V_2(h)$ не является нильпотентным элементом для действия группы $\widetilde{Z}(h)$.

◀ Пусть T — максимальный тор группы G, содержащийся в $Z(h$, и $\widetilde{T}$ — максимальный тор группы $\widetilde{Z}(h)$, содержащийся в T. При ограничении характеров тора T на $\widetilde{T}$ гиперплоскость $H = \{\chi : \chi(h) = 2\}$ пространства $E(T)$ биективно отображается на $E(\widetilde{T})$. Прообразом нуля при этом отображении является точка

$$\chi_h = \frac{2}{(h,\ h)} \nu^{-1}(h)$$

— основание перпендикуляра, опущенного из нуля на H.

Условие «элемент u_0 не является нильпотентным для $\widetilde{Z}(h)$» в силу критерия Гильберта — Мамфорда означает, что носитель u_0 в $E(T)$ не может быть сдвинут с точки χ_h действием группы $\widetilde{Z}(h)$, а это, в свою очередь, равносильно тому, что носитель u не может быть сдвинут с точки χ_h действием группы $P(h)$ (и, в частности, содержит эту точку).

Если h — характеристика элемента u, то $h = h_u$, $\chi_h = \chi_u$ и $|\chi_u| \geqslant |\chi_{gu}|$ для любого $g \in G$. При действии на элемент u группы $P(h)$ его носитель не выходит за пределы полупространства H_u^+ и, следовательно, не может быть сдвинут с точки χ_h.

Обратно, пусть носитель u не может быть сдвинут с точки χ_h действием группы $P(h)$. В этом случае также $\chi_h = \chi_u$ и $h = h_u$. Пусть элемент $u' = gu$ $(g \in G)$ приведен; тогда $h_{u'}$ — его характеристика. Согласно разложению Брюа $g = p_1 w p_2$, где $p_1 \in P(h_{u'})$, $p_2 \in P(h_u)$, $w \in N(T)$. Имеем

$$\chi_{u'} = \chi_{w p_2 u} = w \chi_{p_2 u} = w \chi_u. \tag{5.5}$$

Следовательно, $|\chi_{u'}| = |\chi_u|$ и u — также приведенный нильпотентный элемент, а h — его характеристика. ▶

Последнее рассуждение применимо, в частности, когда оба элемента u и $u' = gu$ приведены, и показывает, что их характеристики h_u и $h_{u'}$ эквивалентны относительно группы Вейля. Если же $h_u = h_{u'}$, то для элемента w, фигурирующего в формуле (5.5), имеем $w \in Z(h_u) \subset P(h_u)$ и, значит, $g \in P(h_u)$.

Теорема 5.5. 1) Если эквивалентные нильпотентные элементы u и $u' = gu$ имеют общую характеристику h, то $g \in P(h)$;

2) Если h и h' — характеристики одного нильпотентного элемента $u \in V$, то $h' \in \mathrm{Ad}(P(h))h$.

Следствие 1. Подгруппы $P(h)$ и $\widetilde{P}(h)$ не зависят от выбора характеристики h нильпотентного элемента $u \in V$.

Следствие 2. Стабилизатор G_u нильпотентного элемента $u \in V$ с характеристикой h содержится в подгруппе $P(h)$.

Можно также показать, что $G_u^0 \subset \widetilde{P}(h)$.

Пример 1°. Бинарные формы степени d. Максимальная удаленность от нуля носителя бинарной формы, эквивалентной данной ненулевой нильпотентной бинарной форме u, определяется максимальной кратностью линейных множителей формы u. Если эта кратность равна k, и форма u — приведенная, то

$$\chi_u = (2k-d)\,\varepsilon, \quad h_u = \frac{2}{2k-d}\,\mathrm{diag}(1, \ -1)$$

(см. пример 1° п. 5.4). Отметим, что всякая бинарная форма, носитель которой не содержит нуля, автоматически является приведенной.

Пример 2°. Кубические тернарные формы. На рис. 7 изображены (сплошными линиями) прямые H_u, отвечающие приведенным нильпотентным формам u. Соответствующие характеристики вычисляются по формуле (5.3). Прямая, изображенная пунктирной линией, отвечает неприведенному нильпотентному элементу, так как в этом случае действие $\widetilde{Z}(h_u)$: : $V_2(h_u)$ изоморфно естественному действию $\mathrm{SL}_2 : k^2$, для которого все элементы нильпотентны.

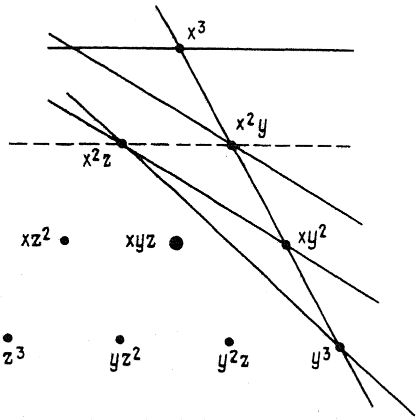


Рис. 7

Нетрудно видеть, что во втором примере характеристика однозначно определяет класс эквивалентности нильпотентной формы, в то время как в первом примере это имеет место только при $d \leqslant 4$.

Пример 3°. Присоединенное представление. Характеристика нильпотентного элемента редуктивной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ была определена Е. Б. Дынкиным [44] другим способом.

А именно, по теореме Морозова всякий ненулевой нильпотентный элемент $e \in \mathfrak{g}$ может быть включен в $\mathfrak{sl}_2$-тройку (e, h, f), т. е. найдутся такой полупростой элемент h и такой нильпотентный элемент f, что

$$[h, e]=2e, \quad [h, f]=-2f, \quad [e, f]=h. \tag{5.6}$$

Элемент h, определенный с точностью до действия группы $\mathrm{Ad}(Z(e))$, и называется характеристикой элемента e по Дынкину. Покажем, что он является характеристикой и в нашем смысле. Так как $e \in \mathfrak{g}_2(h)$, то для этого достаточно проверить, что e не является нильпотентным элементом относительно действия группы $\widetilde{Z}(h)$.

◀ Пользуясь одним критерием, который будет получен в § 6, мы докажем более сильное утверждение, а именно, что орбита $\mathrm{Ad}(\widetilde{Z}(h))e$ замкнута. Ограничимся случаем $k=\mathbf{C}$. Пусть τ — сопряжение относительно компактной вещественной формы алгебры $\mathfrak{g}$, содержащей стандартную компактную вещественную форму подалгебры $\langle e, h, f\rangle$, так что

$$\tau(e)=-f, \ \tau(f)=-e, \ \tau(h)=-h.$$

Формула

$$H(x, y)=-(x, \tau(y))$$

задает на алгебре $\mathfrak{g}$ положительно определенную эрмитову форму H, инвариантную относительно компактной вещественной формы группы G. При $x \in \widetilde{\mathfrak{z}}(h)$ имеем:

$$H([x, e], e)=([x, e], f)=(x, h)=0,$$

откуда по теореме 6,18 и следует, что орбита $\mathrm{Ad}(\widetilde{Z}(h))e$ замкнута. ▶

Отметим, что нильпотентный элемент алгебры $\mathfrak{g}$ определяется своей характеристикой с точностью до сопряженности.

5.6. Стратификация и разрешение особенностей нуль-конуса. С точностью до сопряженности имеется лишь конечное число характеристик нильпотентных элементов пространства V. Пусть $h_1, \ldots, h_s$ — все эти характеристики и $\mathfrak{N}_i$ $(i=1, \ldots, s)$ — множество нильпотентных элементов, характеристика которых сопряжена элементу h_i. Тогда $\mathfrak{N}=\mathfrak{N}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{N}_s \cup \{0\}$. Мы покажем, что $\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_s$ — неособые неприводимые подмногообразия, и укажем разрешения особенностей их замыканий.

Пусть h — характеристика какого-либо нильпотентного элемента и $\mathfrak{N}(h)$ — множество всех нильпотентных элементов, характеристика которых сопряжена h. Положим

$$V_+(h)=\bigoplus_{c \geqslant 2} V_c(h)$$

и обозначим через $V_+(h)^0$ открытое подмножество в $V_+(h)$, состоящее из элементов, проекция которых на $V_2(h)$ не является нильпотентным элементом для действия группы $\widetilde{Z}(h)$. Согласно теоремам 5.4 и 5.5

$$\mathfrak{N}(h)=GV_+(h)^0,$$

причем $g_1u_1=g_2u_2 (g_1, g_2 \in G;\ u_1, u_2 \in V_+(h)^0)$ тогда и только тогда, когда $g_2=g_1p^{-1}$, $u_2=pu_1$, где $p\in P(h)$.

Рассмотрим G-эквивариантный морфизм

$$\varphi: G \underset{P(h)}{*} V_+(h) \to V, \quad [g, u] \mapsto gu \tag{5.7}$$

(см. п. 4.8). Из предыдущего следует, что этот морфизм инъективен на открытом подмножестве $G \underset{P(h)}{*} V_+(h)^0 \subset G \underset{P(h)}{*} V_+(h)$ и отображает его на $\mathfrak{N}(h)$.

Теорема 5.6. 1) Морфизм φ изоморфно отображает $G \underset{P(h)}{*} V_+(h)^0$ на $\mathfrak{N}(h)$.

2) $\varphi(G \underset{P(h)}{*} V_+(h))=\overline{\mathfrak{N}(h)}$.

◀ 1) Нужно только доказать, что во всех точках подмножества $G \underset{P(h)}{*} V_+(h)^0$ морфизм φ имеет максимальный ранг. Это свойство может быть переформулировано следующим образом: для любых $\xi\in\mathfrak{g}$, $u\in V_+(h)^0$

$$\xi u \in V_+(h) \text{ влечет } \xi\in\mathfrak{p}(h).$$

Предположим, что $\xi u\in V_+(h)$ для каких-то $\xi\in\mathfrak{g}\setminus\mathfrak{p}(h)$, $u\in V_+(h)^0$, и пусть u_0 — проекция u на $V_2(h)$, а ξ_0 — младшая компонента ξ относительно градуировки $\mathfrak{g}=\oplus\mathfrak{g}_c(h)$. Тогда $\xi_0u_0=0$, но это невозможно, так как u_0 — также нильпотентный элемент с характеристикой h и его стабилизатор содержится в $P(h)$.

2) Имеем:

$$\mathfrak{N}(h)\subset\varphi(G \underset{P(h)}{*} V_+(h))=GV_+(h)\subset\overline{\mathfrak{N}(h)}.$$

В прямом произведении $(G/P(h))\times V$ рассмотрим замкнутое подмногообразие

$$M=\{(gP(h), v) : v\in gV_+(h)\}$$

оно изоморфно $G \underset{P(h)}{*} V_+(h))$. Ввиду полноты многообразия $G/P(h)$ проекция M на V замкнута. Но эта проекция есть $GV_+(h)$. Следовательно, $GV_+(h)=\overline{\mathfrak{N}(h)}$. ▶

Следствие. $\dim\mathfrak{N}(h)=\dim V_+(h)+\dim G/P(h)$.

В качестве примера изучим многообразие $\mathfrak{N}=\mathfrak{N}_G(\mathfrak{g})$ нильпотентных элементов самой алгебры $\mathfrak{g}$. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — простые корни алгебры $\mathfrak{g}$ и $e_1, \ldots, e_n$ — соответствующие им корневые векторы. Рассмотрим элемент $h\in\mathfrak{t}\cap\mathfrak{g}'$, определяемый условиями $\alpha_i(h)=2$ $(i=1, \ldots, n)$. Имеем,

$$\mathfrak{z}(h)=\mathfrak{t}, \quad \mathfrak{g}_2(h)=\langle e_1, \ldots, e_n\rangle.$$

Так как $(\nu^{-1}(h), \alpha_i)=\alpha_i(h)=2$ при всех i, то $\nu^{-1}(h)$ есть линейная комбинация простых корней с положительными рациональными коэффициентами. Следовательно,

$$\tilde{\mathfrak{c}}(h)=\left\{x\in\mathfrak{t}:\sum_i l_i\alpha_i(x)=0\right\},$$

где $l_1, \ldots, l_n$ — положительные рациональные числа. Можно считать, что $l_1, \ldots, l_n$ целы и взаимно просты. Тогда

$$k[\mathfrak{g}_2(h)]^{\tilde{Z}(h)}=k[x_1^{l_1}\ldots x_n^{l_n}],$$

где $x_1, \ldots, x_n$ — координаты относительно базиса $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

Из предыдущего следует, что элемент h является характеристикой любого элемента из $\mathfrak{g}_2(h)$ с отличными от нуля координатами. Подпространство $\mathfrak{g}_+(h)=\mathfrak{n}$ натянуто на корневые *векторы, отвечающие всем положительным корням, и является* стандартной максимальной унипотентной подалгеброй алгебры $\mathfrak{g}$. Подмножество $\mathfrak{g}_+(h)^0=\mathfrak{n}^0$ состоит из всех элементов подалгебры $\mathfrak{n}$, имеющих ненулевые коэффициенты при векторах $e_1, \ldots, e_n$. Так как всякий нильпотентный элемент алгебры $\mathfrak{g}$ сопряжен элементу из $\mathfrak{n}$, то

$$\overline{\mathfrak{N}(h)}=\mathrm{Ad}(G)\,\mathfrak{n}=\mathfrak{N}.$$

Подгруппа $P(h)$ есть стандартная борелевская подгруппа B группы G. Морфизм $\varphi: G\underset{B}{*}\mathfrak{n}\to\mathfrak{N}$, $[g, u]\mapsto\mathrm{Ad}(g)\,u$, является известным разрешением особенностей многообразия $\mathfrak{N}$ (см., напр., [277], [282]). Он изоморфно отображает открытое подмножество $G\underset{B}{*}\mathfrak{n}^0\subset G\underset{B}{*}\mathfrak{n}$ на открытое подмножество $\mathfrak{N}(h)\subset\mathfrak{N}$, состоящее из всех регулярных нильпотентных элементов и представляющее собой одну орбиту группы G. Дополнение к этой орбите, т. е. многообразие иррегулярных нильпотентных элементов, есть образ подмногообразия $S=\bigcup_i G\underset{B}{*}\mathfrak{n}^{(i)}\subset G\underset{B}{*}\mathfrak{n}$, где $\mathfrak{n}^{(i)}\subset\mathfrak{n}$ $(i=1, \ldots, n)$ — идеал, состоящий из всех элементов, имеющих нулевой коэффициент при векторе e_i.

Можно показать, что, если группа G проста, все неприводимые компоненты многообразия S отображаются на одно и то же подмногообразие коразмерности 2 в $\mathfrak{N}$. В этом подмногообразии, в свою очередь, имеется открытая орбита, состоящая из так называемых субрегулярных нильпотентных элементов. Прообраз каждого субрегулярного нильпотентного элемента одномерен и является объединением (конечного числа) неособых полных рациональных кривых, пересекающихся друг с другом не более чем по одной точке. Схема пересечений этих кривых (в которой вершины отвечают кривым, а ребра — точкам пересечения) совпадает со схемой простых корней группы G в тех случаях, когда последняя имеет тип A, D или E (т. е. без кратных ребер), и является схемой Дынкина типа A_{2n-1}, D_{n+1}, E_6 или D_4, когда G — группа типа B_n, C_n, F_4 или G_2 соответственно [277], [286].

§ 6. Тонкая геометрия действия

6.1. Слайсы: постановка задачи. В теории топологических групп преобразований при описании структуры действия в окрестности заданной орбиты существенную роль играет так называемая *теорема о слайсе* (или срезе) [114], состоящая в следующем.[1]

Пусть K — компактная вещественная группа Ли, дифференцируемо действующая на дифференцируемом многообразии M, и $x \in M$ — некоторая точка. Тогда некоторая инвариантная окрестность U орбиты Kx в M эквивариантно диффеоморфна некоторой инвариантной окрестности нулевого сечения нормального расслоения орбиты Kx. Эта последняя окрестность имеет стандартное строение — она эквивариантно диффеоморфна однородному расслоению вида $K \underset{K_x}{*} \Omega$ (см. п. 4.8), где Ω — некоторая K_x-инвариантная окрестность нуля в векторном пространстве, являющемся K_x-инвариантным прямым дополнением к $T_x(Kx)$ в $T_x(M)$.

Образ множества Ω при эквивариантном диффеоморфизме $K \overset{*}{_{K_x}} \Omega \to U$ и называется *слайсом* в точке x для действия K на M. Ясно, что слайс является K_x-инвариантным замкнутым в U подмногообразием, пересечение которого с каждой G-орбитой в U является K_x-орбитой.

Эта теорема имеет много приложений — к вопросам о структуре стабилизаторов, орбитных типов и др. [114]. Поскольку аналогичные вопросы весьма важны и для алгебраических групп преобразований, естественно спросить: в какой мере теорема о слайсе переносится на алгебраическую ситуацию, а точнее, на случай редуктивной алгебраической группы G, действующей на аффинном алгебраическом многообразии X (это — алгебраический аналог рассмотренной выше топологической ситуации)? Ясно, что дословное перенесение невозможно по нескольким причинам.

Во-первых, группа G_x может оказаться нередуктивной и тогда нельзя гарантировать, что в $T_x(X)$ найдется G_x-инвариантное дополнение к $T_x(Gx)$. Таким образом, с самого начала следует ограничиться лишь такими точками x, у которых стабилизатор G_x редуктивен.

Во-вторых, даже если стабилизатор G_x редуктивен, может случиться, что в любой окрестности точки x найдется такая точка y, что G_y не сопряжен в G никакой подгруппе группы G_x, — ясно, что в окрустности, эквивариантно изоморфной однородному расслоению над G/G_x, это невозможно.

Пример 1°. Пусть $G=\mathrm{SL}_2$ и $V=V_3$ (см. пример 1° в п. 3.3). Мы покажем ниже в примере 1° п. 7.2, что в V суще-

[1] См. также статью В. В. Горбацевича и А. Л. Онищика «Группы Ли преобразований» в т. 20. — С. 103—240 этой серии.

ствует непустое открытое множество, стабилизатор любой точки которого является группой порядка 3. С другой стороны, нетрудно проверить, что стабилизатор формы $v=x^2y$ тривиален. Поскольку любые непустые открытые подмножества в V пересекаются, слайса в точке v не существует.

Как будет показано ниже, указанное препятствие не возникает, если орбита Gx замкнута в X (по теореме 4.17 в этом случае стабилизатор G_x автоматически редуктивен). Однако и в предположении замкнутости орбиты Gx слайса — в указанном выше смысле — может не существовать. В самом деле, допустим, например, что стабилизатор G_x тривиален. Тогда всякое однородное расслоение над G/G_x является прямым произведением группы G на слой, а это значит, что слайс в точке x (если он существует) является рациональным сечением для действия G на X (см. п. 2.5). Однако, как мы знаем, рационального сечения может и не существовать.

Пример 2°. Пусть G — подгруппа в GL_n. Тогда стабилизатор любой точки для действия G на GL_n левыми сдвигами тривиален и все орбиты замкнуты, однако рациональное сечение существует лишь тогда, когда G — специальная группа в смысле [264], см. п. 2.6.

Таким образом, возникающее здесь препятствие имеет ту же природу, что и в задачах о построении рациональных сечений (п. 2.5) или однородных расслоений (п. 4.8): оно связано с тем, что открытые по Зарисскому множества «слишком велики». Оказывается, как и в этих задачах, выход состоит в том, чтобы изменить определение слайса, допустив возможность перехода к конечнолистному накрытию. Это было обнаружено Луной, который развил в [201] теорию так называемых этальных слайсов. Прежде чем дать точное определение этого понятия и сформулировать основной результат из [201], напомним некоторые определения и факты и введем удобную терминологию.

6.2. Превосходные морфизмы. Рассмотрим категорный фактор $\pi_{X/G}: X \to X/G$ (см. п. 4.3). Подмножество U в X будем называть *$\pi_{X/G}$-насыщенным*, если $U=\pi_{X/G}^{-1}(\pi_{X/G}(U))$, т. е. каждый слой морфизма $\pi_{X/G}$ либо целиком лежит в U, либо не пересекается с U.

Пусть Y — еще одно аффинное многообразие, на котором действует группа G, и $\pi_{Y/G}: Y \to Y/G$ — соответствующий категорный фактор. Если $\varphi: Y \to X$ — эквивариантный морфизм, то согласно сказанному в п. 4.4, возникает коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi_{Y/G}"'] & X \arrow[d, "\pi_{X/G}"] \\ Y/G \arrow[r, "\varphi/G"'] & X/G \end{tikzcd} \quad (6.1)$$

Рассмотрим теперь морфизм π_1, полученный из $\pi_{X/G}$ заменой базы с помощью φ/G

$$
\begin{tikzcd}
Y/G \underset{X/G}{\times} X \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & X \arrow[d, "\pi_{X/G}"] \\
Y/G \arrow[r, "\varphi/G"'] & X/G
\end{tikzcd}
\quad . \quad (6.2)
$$

Тогда, как мы знаем, существует однозначно определенный эквивариантный морфизм $\gamma : Y \longrightarrow Y/GX/G|X$, дополняющий диаграммы (6.1) и (6.2) до следующей коммутативной диаграммы

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dd, "\pi_{Y/G}"'] \arrow[dr, "\gamma"] & & X \arrow[dd, "\pi_{X/G}"] \\
& Y/G \underset{X/G}{\times} X \arrow[ur, "\pi_2"'] \arrow[dl, "\pi_1"] & \\
Y/G \arrow[rr, "\varphi/G"'] & & X/G
\end{tikzcd}
$$

Морфизм φ называется *превосходным* [202], если:

E1) γ — изоморфизм (иначе говоря, $\pi_{Y/G}$ получатся из $\pi_{X/G}$ заменой базы с помощью φ/G);

E2) φ/G эталéн.

Напомним, [151], что *этальным* называется морфизм $\psi : U \to V$, этальный в каждой точке $u \in U$, а этальность ψ в u означает, что естественный гомоморфизм пополнений локальных колец $\psi^* : \hat{\mathcal{O}}_{\psi(u)}(V) \to \hat{\mathcal{O}}_u(U)$ является изоморфизмом. Геометрический смысл этого алгебраического условия состоит в следующем: если $k = \mathbf{C}$ и U и V рассматриваются как аналитические пространства, то этальность ψ в u эквивалентна тому, что ψ осуществляет аналитический изоморфизм подходящих комплексных окрестностей (т. е. окрестностей в комплексной топологии) точек u и $\psi(u)$. Если u и $\psi(u)$ — неособые точки U и V, то этальность ψ в u эквивалентна тому, что $d_u\psi$ — изоморфизм касательных пространств $T_u(U)$ и $T_{\psi(u)}(V)$ (при $k = \mathbf{C}$ это следует из теоремы об обратном отображении).

Пусть φ превосходен. Тогда из E1) следует, что ограничение φ на любой слой морфизма $\pi_{Y/G}$ является изоморфизмом этого слоя с некоторым слоем морфизма $\pi_{X/G}$. В частности, множество $\varphi(Y)$ $\pi_{X/G}$-насыщено, ограничение φ на любую орбиту инъективно и φ переводит замкнутые орбиты в замкнутые. Далее, из общих свойств этальных морфизмов [151] и из E2) следует, что φ тоже эталéн и что множества $\varphi(Y)$ и $(\varphi/G)(Y/G)$ открыты соответственно в X и X/G. Наконец, отметим следующее важное свойство: если Z — замкнутое инвариантное подмножество в X, то $\varphi : \varphi^{-1}(Z) \to Z$ — превосходный

морфизм (это следует из определения замены базы и из сказанного в п. 4.4).

6.3. Этальные слайсы. Теперь можно дать определение *этального слайса в точке* $x \in X$: им называется любое аффинное подмногообразие S в X, обладающее следующими свойствами:

1) $x \in S$;
2) S инвариантно относительно G_x;
3) морфизм $G \underset{G_x}{*} S \to X$, $[g, s] \mapsto gs$ (см. п. 4.8) превосходен.

Основным результатом об этальных слайсах является следующая

Теорема 6.1. (Луна, [201]). Пусть редуктивная группа G действует на аффинном многообразии X и $x \in X$ — точка, орбита которой замкнута в X. Тогда в точке x существует этальный слайс.

Доказательство этой теоремы сразу сводится к случаю, когда X является (конечномерным) G-модулем V. В самом деле, согласно теореме 1.5, X можно считать замкнутым инвариантным подмножеством некоторого (конечномерного) G-модуля V. Предположим, что для действия G на V в точке x существует этальный слайс S. Поскольку морфизм $\alpha: G \underset{G_x}{*} S \to V$ $[g, s] \mapsto gs$, превосходен, то, как объяснено выше, и морфизм $\alpha: \alpha^{-1}(X) \to X$ превосходен. Однако многообразие $\alpha^{-1}(X)$ эквивариантно изоморфно однородному расслоению $G \underset{G_x}{*} (S \cap X)$ (см. предложение 4.21). Поэтому $S \cap X$ является этальным слайсом в точке x для действия G на X.

В случае $X = V$ существование этального слайса S устанавливается по следующей схеме. Ввиду замкнутости орбиты Gx в V, группа G_x редуктивна (см. теорему 4.17). Значит, в G_x-модуле $V = T_x(V)$ подмодуль $T_x(Gx)$ выделяется прямым слагаемым; пусть N — дополнительный к $T_x(Gx)$ подмодуль в V. Рассмотрим проходящее через точку x подмногообразие $x+N$ в V. Поскольку оно G_x-инвариантно, имеется эквивариантный морфизм $\beta: G \underset{G_x}{*} N \to V$, $[g, n] \mapsto g(x+n)$ (см. п. 4.8). Однородно расслоение $G \underset{G_x}{*} N$ имеет простую геометрическую интерпретацию: оно эквивариантно изоморфно нормальному расслоению к орбите Gx в пространстве V. При этом изоморфизме нулевому сечению нормального расслоения соответствует G-орбита точки $z = [e, 0]$ в $G \underset{G_x}{*} N$. Эта G-орбита имеет в $G \underset{G_x}{*} N$ минимальную размерность и поэтому замкнута в $G \underset{G_x}{*} N$. Ясно, что ограничение β на эту орбиту осуществляет ее эквивариантный изоморфизм с Gx, причем $\beta(z) = x$. Отсюда, из определения подпространства N и из

предложения 4.22 следует, что $d_z\beta$ является изоморфизмом касательных пространств $T_z(G \underset{G_x}{*} N)$ и $T_x(V)$. Поскольку V и $G \underset{G_x}{*} N$ — гладкие многообразия (см. предложение 4.22), это означает, что морфизм β эталей в точке z. Таким образом, мы находимся в условиях следующей «основной леммы».

Лемма 6.2. (Луна [201]). Пусть редуктивная группа G действует на аффинных многообразиях Y и Z и $\varphi: Y \to Z$ — эквивариантный морфизм. Предположим, что для некоторой точки $y \in Y$ выполнены следующие условия:

1) стабилизаторы точек y и $\varphi(y)$ совпадают;

2) орбиты точек y и $\varphi(y)$ замкнуты, соответственно, в Y и Z;

3) морфизм φ этален в точке y.

Тогда в Y существует такая $\pi_{Y/G}$-насыщенная открытая аффинная окрестность W точки y, что морфизм $\varphi: W \to Z$ превосходен.

Применяя эту лемму и предложение 4.21 к морфизму β, мы получаем: в N существует такая π_{N/G_x}-насыщенная открытая аффинная окрестность нуля U, что морфизм $\beta: G \underset{G_x}{*} U \to V$ превосходен. Это означает, что $S = x + U$ — этальный слайс в точке x для действия G на V.

Таким образом, доказательство теоремы 6.1 сводится к доказательству леммы 6.2. Последнее достаточно сложно и не может быть приведено здесь (читатель найдет его в оригинальной работе Луны [201]). Мы же рассмотрим конкретный пример, а затем перейдем к непосредственным следствиям из теоремы 6.1: они показывают, что с помощью этальных слайсов можно получить алгебраические аналоги результатов о стабилизаторах, орбитных типах и др., которые в теории дифференцируемых компактных групп преобразований получаются с помощью обычных слайсов (хотя в алгебраической ситуации картина усложняется ввиду наличия незамкнутых орбит).

Пример 1°. Пусть G связна. Рассмотрим ее присоединенное действие на ее касательной алгебре $X = \mathfrak{g}$ (ср. пример 1° п. 3.8). Пусть T — максимальный тор в G, $\mathfrak{t}$ — его касательная алгебра, Δ — система корней $\mathfrak{g}$ относительно T, $\mathfrak{g}_\alpha$ — корневое подпространство, отвечающее корню α. Тогда для любого $x \in \mathfrak{t}$ орбита Gx замкнута в X, см. п. 1.5. Рассмотрим в $\mathfrak{t}$ открытое подмножество, образованное регулярными элементами, $\mathfrak{t}^{\mathrm{reg}} = \{y \in \mathfrak{t} \mid \alpha(y) \neq 0$ для любого $\beta \in \Delta\}$, и пусть $x \in \mathfrak{t}^{\mathrm{reg}}$. Тогда $G_x = T$, а $T_x(Gx) = \mathfrak{g}x = \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha$. Поэтому $\mathfrak{t}$ является G_x-инвариантным прямым дополнением к $T_x(Gx)$ в $T_x(X) = \mathfrak{g}$. Рассмотрим теперь морфизм $\varphi: G \underset{T}{*} \mathfrak{t}^{\mathrm{reg}} \to X$, $[g, s] \mapsto gs$. Тогда из сказанного и из предложения 4.22 следует, что φ этален в любой точке слоя

$\mathfrak{t}^{\mathrm{reg}}$, а значит, и вообще в любой точке. Если еще учесть, что T действует на $\mathfrak{t}$ тривиально, то мы получаем, что все условия леммы 6.2 выполнены. Это показывает, что $\mathfrak{t}^{\mathrm{reg}}$ является этальным слайсом в любой своей точке. Таким образом, существует такое этальное накрытие Y множества всех регулярных полупростых элементов в $\mathfrak{g}$, что действие G на этом накрытии Y имеет совсем простую структуру — Y эквивариантно изоморфно $G/T\times\mathfrak{t}^{\mathrm{reg}}$ с естественным действием G на первом сомножителе и тривиальным — на втором (это следует из того, что T тривиально действует на $\mathfrak{t}$). Отметим, что указанное накрытие не является изоморфизмом.

Теперь мы перейдем к изложению ряда результатов, основанных на теореме 6.1.

Будем далее считать, что G — редуктивная группа, действующая на аффинном многообразии X. Результаты, излагающиеся в пп. 6.4—6.9, получены в основном Луной [201].

6.4. Стабилизаторы точек из окрестности замкнутой орбиты. Пусть $x\in X$ — такая точка, что орбита Gx замкнута. По теореме 6.1, в этой точке существует этальный слайс S. Поскольку

$$\varphi: G\underset{G_x}{*}S\to X,\quad \varphi([g, s])=gs, \tag{6.3}$$

— превосходный морфизм, φ инъективен при ограничении на каждую орбиту. С другой стороны, ясно, что в однородном расслоении $G\underset{G_x}{*}S$ стабилизатор любой точки сопряжен некоторой подгруппе в G_x. Учитывая, что образом φ является $\pi_{X/G}$-насыщенная окрестность точки x, мы получаем следующее утверждение:

Теорема 6.3. Пусть редуктивная группа G действует на аффинном многообразии X. Тогда у любой точки $x\in X$, орбита которой замкнута, существует такая $\pi_{X/G}$-насыщенная окрестность U, что для любой точки $y\in U$ группа G_y сопряжена подгруппе группы G_x.

В доказательстве теоремы 6.3 использовалось лишь существование слайса. Поэтому следующий пример показывает, что в теореме 6.1 нельзя убрать предположение об аффинности X или же заменить условие замкнутости Gx на условие редуктивности G_x:

Пример 1°. Рассмотрим G и V из примера 1° п. 6.1. Тогда стабилизатор точки v редуктивен (он тривиален), но из указанных в примере 1° п. 6.1 свойств следует, что этального слайса в точке v не существует. Здесь орбита Gv не замкнута (в V). Однако если заменить V на открытое (см. п. 1.4) подмножество Y, состоящее из всех орбит максимальной размерности ($=3$), то Gv будет замкнута в Y, а этального слайса в точке v по-прежнему не будет существовать. Отсюда

следует, что у точки v не существует никакой инвариантной аффинной окрестности в Y.

6.5. Слайс в неособой точке. Интересно рассмотреть случай, когда x — неособая точка многообразия X.

Теорема 6.4. Пусть редуктивная группа G действует на аффинном многообразии X и $x \in X$ — неособая точка, орбита которой замкнута. Тогда для некоторого этального слайса S в точке x существует превосходный G_x-эквивариантный морфизм

$$\psi : S \to T_x(S). \tag{6.4}$$

Отметим, что G_x-модуль $T_x(S)$ для неособой точки x с точностью до изоморфизма не зависит от выбора этального слайса S. В самом деле, из предложения 4.22 следует, что

$$T_x(X) = T_x(Gx) \oplus T_x(S), \tag{6.5}$$

и поэтому $T_x(S)$ определяется как G_x-инвариантное прямое дополнение к $T_x(Gx)$ в $T_x(X)$. Указанный G_x-модуль называется *слайс-модулем,* а соответствующая линейная группа — *слайс-группой.*

Из теоремы 6.4 вытекает

Следствие. Пусть редуктивная группа G действует на аффинном многообразии X и $x \in X^G$ — неособая точка многообразия X. Тогда x — неособая точка и многообразия X^G и $T_x(X^G) = T_x(X)^G$. В частности, если многообразие X неособо, то и многообразие X^G неособо.

6.6. Этальные слайсы и аналитические слайсы. Интересно также рассматривать отдельно случай $k = \mathbf{C}$. Поскольку морфизм φ/G этален, при $k = \mathbf{C}$ существует такая комплексная окрестность U точки $\pi_{(G \underset{G_x}{*} S)/G}(x)$, что φ/G осуществляет аналитический изоморфизм U с $V = (\varphi/G)(U)$. Поскольку φ превосходен, то из определения замены базы следует, что φ осуществляет эквивариантный аналитический изоморфизм пространства $\pi^{-1}_{(G \underset{G_x}{*} S)/G}(U)$ с инвариантной комплексной окрестностью $\pi^{-1}_{X/G}(V)$ орбиты Gx. Указанное пространство, однако, имеет весьма простую структуру: оно эквивариантно изоморфно однородному расслоению $G \underset{G_x}{*} \Omega$, где $\Omega = \pi^{-1}_{S/G_x}(U)$ (см. предложение 4.21). Таким образом, мы видим, что некоторая инвариантная комплексная окрестность орбиты Gx в X аналитически эквивариантно изоморфна однородному расслоению над этой орбитой со слоем Ω, являющимся некоторой π_{S/G_x}-насыщенной комплексной окрестностью точки x в этальном слайсе S в этой точке. Если x — неособая точка в X, то можно сказать больше. А именно, применяя теорему 6.3 и повторяя предыдущие рассуждения в отношении морфизма (6.4), мы получаем, что Ω можно считать $\pi_{T_x(S)/G_x}$-насыщенной комплексной

окрестностью нуля в $T_x(S)$. Таким образом, мы видим, что при $k=\mathbf{C}$ из теоремы об этальном слайсе вытекает существование обычного аналитического слайса (в точке, орбита которой замкнута):

Теорема 6.5. *Пусть комплексная редуктивная группа G алгебраически действует на аффинном комплексном многообразии X и пусть $x \in X$ — неособая точка, орбита Gx которой замкнута. Тогда некоторая инвариантная комплексная окрестность орбиты Gx в X аналитически эквивариантно изоморфна некоторой инвариантной окрестности нулевого сечения нормального расслоения этой орбиты.*

Как показал Луна [203], из этого результата можно вывести существование слайса как для действий компактных групп Ли (см. п. 6.1), так и для некоторых типов действий некомпактных групп Ли на дифференцируемых многообразиях.

Используя теоремы 6.5 и 4.14, можно доказать, что если $k=\mathbf{C}$ и для действия конечной группы G на алгебраическом многообразии X существует геометрический фактор $\pi : X \to X/G$, то он является и топологическим фактором.

6.7. Структура слоев морфизма факторизации. Сохраним предыдущие обозначения.

Следующее утверждение показывает, что описание слоев морфизма факторизации $\pi_{X/G}$ сводится к нахождению замкнутых орбит и описанию таких слоев некоторых других морфизмов факторизации, которые содержат неподвижную точку. В том случае, когда многообразие X — гладкое, эти последние слои являются нульконусами некоторых линейных действий (см. п. 5.1), так что результаты § 5 позволяют получить о них значительную геометрическую информацию.

Теорема 6.6. *Пусть редуктивная группа G действует на аффинном многообразии X, $x \in X$ — точка, орбита которой замкнута в X, и S — этальный слой в точке x. Тогда слой $\pi_{X/G}^{-1}(\pi_{X/G}(x))$ эквивариантно изоморфен однородному расслоению $G \underset{G_x}{*} \pi_{S/G_x}^{-1}(\pi_{S/G_x}(x))$.*

Если x — неособая точка многообразия X и N_x — инвариантное прямое дополнение к подмодулю $T_x(Gx)$ в G_x-модуле $T_x(X)$, а $\mathfrak{N}_x$ — нуль-конус для действия G_x на N_x, то слой $\pi_{X/G}^{-1}(\pi_{X/G}(x))$ эквивариантно изоморфен однородному расслоению $G \underset{G_x}{*} \mathfrak{N}_x$.

◀ Это непосредственно следует из того, что морфизмы (6.3) и (6.4), будучи превосходными, осуществляют изоморфизмы соответствующих слоев морфизмов факторизации, а также из теоремы 6.4, предложения 4.21 и формулы (6.5). ▶

Применим эту теорему к случаю, когда X — это векторное пространство V с линейным действием группы G. Тогда N_x канонически отождествляется с некоторым линейным подпространством в V, что позволяет рассмотреть сумму $x+\mathfrak{N}_x$. Многообразие $x+\mathfrak{N}_x$ лежит в слое $\pi_{V/G}^{-1}(\pi_{V/G}(x))$, поскольку $\overline{G_x(x+n)}=$

$=x+\overline{G_x n}\ni x$ для любого $n\in\mathfrak{N}_x$. Из теоремы 6.6 следует, что множество $G(x+\mathfrak{N}_x)$ совпадает с указанным слоем (и, более того, $G\underset{G_x}{*}\mathfrak{N}_x\to\pi_{V/G}^{-1}(\pi_{V/G}(x))$, $[g,n]\mapsto g(x+n)$, — эквивариантный изоморфизм).

Таким образом, каждый вектор $v\in V$ можно разложить в сумму вида $v=s+n$, где $s\in V$ — вектор, имеющий замкнутую G-орбиту, а $n\in V$ — вектор, нильпотентный (т. е. лежащий в нуль-конусе) относительно действия G_s (см. п. 5.1). Такое разложение, вообще говоря, не единственно. Как показывает следующий пример, его можно рассматривать как некоторый аналог (для общих линейных действий) классического разложения Жордана в редуктивных алгебрах Ли:

Пример 1°. Рассмотрим присоединенное действие редуктивной группы G на ее касательной алгебре Ли $X=\mathfrak{g}$. Пусть $v=s+n$ — разложение Жордана какого-либо элемента $v\in\mathfrak{g}$ [119] (s и n — соответственно, полупростой и нильпотентный элементы). Как мы видели в примере 1° п. 6.3, орбита Gs замкнута в $\mathfrak{g}$ (см. также п. 1.5). Касательной алгеброй группы G_s является $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(s)$. Эта алгебра редуктивна (см. теорему 4.17) и содержит элемент n. Поэтому (см. п. 5.1) n содержится в нуль-конусе относительно действия G_s. Мы видим, в частности, что замкнутые орбиты в $\mathfrak{g}$ — это в точности орбиты полупростых элементов.

По аналогии со случаем присоединенного действия и в общем случае элементы пространства V, орбиты которых замкнуты, называются иногда *полупростыми* (ср. в п. 5.1 определение нильпотентных элементов).

Вернемся к общей ситуации, когда G действует на X. С помощью теоремы 6.6 мы получаем следующее геометрическое описание аффинных многообразий, на которых нет непостоянных целых инвариантов:

Теорема 6.7. Пусть редуктивная группа G действует на аффинном многообразии X и пусть $k[X]^G=k$. Тогда в X имеется единственная замкнутая орбита и если H — стабилизатор какой-либо ее точки, то существует такое действие группы H на некотором аффинном многообразии Y, что:

1) в Y имеется единственная замкнутая орбита; она является неподвижной точкой и любая орбита в Y содержит эту точку в своем замыкании;

2) X эквивариантно изоморфно однородному расслоению $G\underset{H}{*}Y$.

Если, кроме того, X гладко в точках замкнутой орбиты, то Y является векторным пространством с линейным действием группы H.

Следствие. Пусть редуктивная группа G действует на гладком аффинном многообразии X и пусть в X имеется един-

ственная замкнутая орбита. Если эта орбита является неподвижной точкой, то X — это векторное пространство с линейным действием группы G.

Теорема 6.7 и ее следствие являются алгебраическими аналогами соответствующих утверждений о действиях компактных групп Ли на дифференцируемых многообразиях (см. п. 8 гл. II в [114]).

Теорема 6.7 и предложение 4.21 показывают, что гладкие аффинные многообразия X с действием редуктивной группы G, обладающие открытой орбитой, — это в точности однородные векторные расслоения $G *_H V$, где H — редуктивная подгруппа в G, а V — локально однородный (т. е. содержащий открытую орбиту) H-модуль. Таким образом, классификация таких многообразий X редуцируется к классификации локально транзитивных линейных действий редуктивных групп. Классификации таких действий посвящены специальные исследования: Э. Б. Винберг [24] нашел все локально транзитивные линейные действия связных простых групп; Сато и Кимура [257] и (более простым способом) Г. Б. Шпиз, [95] — неприводимые локально транзитивные линейные действия связных редуктивных групп. Например, связные простые неприводимые локально транзитивные линейные группы исчерпываются списком: SL_n, $\bigwedge^2 \mathrm{SL}_{2n+1}$, Sp_n, Spin_{10}.

Нетрудно видеть, что из теоремы 6.7 вытекает также следующее утверждение: если редуктивная группа G действует на n-мерном аффинном пространстве $\mathbf{A}^n$ и $k[\mathbf{A}^n]^G = k$, то это действие эквивалентно линейному. Имеется гипотеза [169], что это верно всегда, т. е. без предположения $k[\mathbf{A}^n]^G = k$. В настоящее время она доказана в следующих случаях: 1) G — тор и $\dim G = n$ *или* $n-1$, [104]; 2) $n \leqslant 2$, [290], [272]; 3) G связна и полупроста и $n=3$, [190], или $n=4$, [60].

Теорема 6.6 вместе с результатами § 5 используется и при исследовании алгебро-геометрических свойств слоев, скажем, их особенностей. Укажем, например, критерий гладкости слоя:

Теорема 6.8. *Пусть редуктивная группа G действует на гладком аффинном многообразии X, $x \in X$ — точка, орбита которой замкнута в X, N_x — инвариантное прямое дополнение к подмодулю $T_x(Gx)$ G_x-модуля $T_x(X)$ и L_x — инвариантное прямое дополнение к $N_x^{G_x^0}$ в N_x. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *слой $\pi_{X/G}^{-1}(\pi_{X/G}(x))$ является гладким многообразием;*

2) *слой $\pi_{X/G}^{-1}(\pi_{X/G}(x))$ эквивариантно изоморфен однородному векторному расслоению $G *_{G_x} L_x$;*

3) $k[L_x]^{G_x^0} = k$.

Пример 2^0. Пусть $G=\mathrm{SL}_2$, $X=V_4$ и $v=x^2y^2\in V_4$ (см. пример 1^0 п. 3.3). Несложно проверить, что $G_v=\left\{\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t^{-1} & 0\end{pmatrix} \middle| t\in k^*\right\}$ и $T_v(Gv)=\mathfrak{g}v=\langle x^3y, xy^3\rangle$ (см. подробности в примере 1^0 п. 7.2). Группа $G_v^0=\{\mathrm{diag}(t, t^{-1}) \mid t\in k^*\}$ является максимальным тором в G, откуда следует (см. ниже пример 1^0 п. 6.11), что орбита Gv замкнута. Ясно, что $N_v=\langle x^4, x^2y^2, y^4\rangle$, $N_v^{G_v^0}=\langle x^2y^2\rangle$, $L_v=\langle x^4, y^4\rangle$ и $\mathfrak{N}_v=\langle x^4\rangle\cup\langle y^4\rangle$. Таким образом, слой $\pi_{X/G}^{-1}(\pi_{X/G}(v))$ не является гладким (даже нормальным) многообразием. Его многообразием особенностей является орбита Gv. Особенность этого слоя в точке v устроена весьма просто: она эквивалентна (формально, а в случае $k=\mathbf{C}$ — аналитически) особенности $x_1x_2=0$ в $\mathbf{A}^4$.

6.8. Теорема о выходе на границу орбиты с помощью однопараметрической подгруппы. Мы доказали в п. 5.3 критерий Гильберта — Мамфорда, согласно которому любую точку конечномерного G-модуля, орбита которой содержит в своем замыкании нуль, можно «подогнать» к нулю с помощью подходящего одномерного тора из G. Результаты пп. 6.6 и 5.3 дают более общее утверждение (оно было впервые доказано при $k=\mathbf{C}$ Ричардсоном и Бирксом, [108], которые вместо этальных слайсов использовали методы п. 5.3):

Теорема 6.9. Пусть редуктивная группа G действует на аффинном многообразии X и $x\in X$ — некоторая точка. Тогда в G найдется такой одномерный тор T, что пересечение многообразия $\overline{Tx}$ с (единственной) замкнутой орбитой в $\overline{Gx}$ непусто.

◀Можно считать, что $X=\overline{Gx}$, и тогда мы оказываемся в условиях теоремы 6.7 (обозначениями которой воспользуемся). Можно считать также, что $x\in Y$. Поскольку $X\cong G_H^*Y$, достаточно показать, что для некоторого одномерного тора $T\subset H$ многообразие $\overline{Tx}$ содержит неподвижную точку 0 многообразия Y. Согласно теореме 1.5, Y можно считать замкнутым инвариантным подмножеством некоторого H-модуля V, а точку 0 — нулем в V. Тогда x — нильпотентный элемент в V и существование тора T обеспечивается теоремой 5.2. ▶

Как показывает следующий пример, «подогнать» точку x с помощью одномерного тора к незамкнутой орбите, лежащей в замыкании орбиты Gx, вообще говоря, невозможно.

Пример 1^0. Рассмотрим то же действие, что и в примере 1_0 п. 6.1, и положим $\lambda(t)=\begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ -t^{-2} & t\end{pmatrix}$, $t\in k^*$. Тогда $\lambda(t)v=x^3+tx^2y$ и поэтому $\lim\limits_{t\to 0}\lambda(t)v=x^3$. Значит, $Gx^3\subset\overline{Gv}$. Допустим, что $Gx^3\cap\overline{Tv}\neq\varnothing$ для некоторого (одномерного) тора $T\subset G$. По-

скольку $Gx^3 \cap \overline{Tv} \subset V^T$, а стабилизаторы точек из одной орбиты сопряжены, в G_{x^3} содержится одномерный тор. Это противоречит тому, что $G_{x^3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{pmatrix} \middle| u \in k \right\}$ — одномерная унипотентная группа.

6.9. Стратификация Луны. Пусть, как и выше, редуктивная группа G действует на аффинном многообразии X. Будем считать в этом пункте, что X гладко.

Как известно, существование слайсов для действия компактной группы Ли на дифференцируемом многообразии позволяет развить теорию орбитных типов, дающую стратификацию многообразия инвариантными локально замкнутыми подмножествами, на которых действие устроено уже достаточно просто, — все орбиты изоморфны между собой и являются слоями локально тривиального расслоения над соответствующим подмножеством пространства орбит (см. п. 3 гл. IV в [114]). Оказывается, этальные слайсы позволяют получить алгебраический аналог такой стратификации для действия G на X. При этом, конечно, существование незамкнутых орбит делает картину более сложной (это находит выражение в том, что страты определяются не только лишь типом замкнутой орбиты, но типом нормального расслоения к этой орбите), а грубость топологии Зарисского вынуждает вместо локально тривиальных расслоений рассматривать локально изотривиальные (см. п. 4.8). С точки зрения приложений рассмотрение такой стратификации дает некоторый систематический подход к решению задачи об описании орбит. Конечно, исчерпывающее решение этой задачи может быть получено редко. Например, уже задача о классификации пар линейных операторов в конечномерном векторном пространстве считается «дикой», не допускающей окончательного решения (напомним, что для одного оператора ее решение дается классической теорией жордановской формы). Описание стратов может рассматриваться как естественное приближение к этому решению, поскольку «вдоль» стратов наблюдается определенное однообразие в расположении и структуре орбит (см. ниже теорему 6.10, пп. 3) и 2)). Иногда полное описание орбит удается получить в пределах некоторых (но не всех) стратов см., например, [18], [22], [58]. Мы увидим (см. теоремы 6.10, 6.6 и результаты пп. 5.5, 5.6, 5.7), что описание орбит в страте сводится к описанию орбит некоторых линейных представлений некоторых параболических подгрупп стабилизаторов полупростых точек. Для линейного действия редуктивной алгебраической группы G на векторном пространстве V, «самым вырожденным» стратом оказывается нуль-конус, см. п. 5.2. Как мы видели в п. 5.3, он может быть геометрически описан как результат «разнесения» с помощью группы G объединения некоторых линейных подпространств в V — см. формулу (5.1). Мы увидим в п. 6.13, что некоторые объединения остальных стра-

тов могут быть описаны сходным образом. Перейдем теперь к точному описанию стратификации.

Обозначим через $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_G$ множество классов G-изоморфных однородных векторных расслоений над аффинными однородными пространствами группы G, а через $\mu: X/G \to \mathfrak{M}$ — отображение, сопоставляющее каждой точке $a \in X/G$ класс нормального векторного расслоения к (единственной) замкнутой орбите в слое $\pi_{X/G}^{-1}(a)$ (иначе говоря, если x — какая-либо точка этой орбиты, а N_x-инвариантное прямое дополнение к подмодулю $T_x(Gx)$ G_x-модуля $T_x(x)$, то $\mu(a)$ — это класс расслоения $G \underset{G_x}{*} N_x$).

Теорема 6.10. Пусть редуктивная группа G действует на гладком аффинном многообразии X. Тогда:

1) образ отображения $\mu: X/G \to \mathfrak{M}$ конечен;

2) для любого $\lambda \in \mathfrak{M}$ множество $(X/G)_\lambda = \{a \in X/G \mid \mu(a) = \lambda\}$ является гладким подмногообразием в X/G;

3) для любого $\lambda \in \mathfrak{M}$ все слои $\pi_{X/G}^{-1}(a)$, $a \in (X/G)_\lambda$, G-изоморфны одному и тому же многообразию F_λ, а морфизм $\pi_{X/G}: X_\lambda := \pi_{X/G}^{-1}((X/G)_\lambda) \to (X/G)_\lambda$ является локально изотривиальным расслоением со слоем F_λ.

Следствие. Если группа G действует на X свободно (т. е. стабилизатор каждой точки тривиален), то морфизм $\pi_{X/G}$ является локально изотривиальным расслоением (со слоем G).

Стратификации многообразий X/G и X, определенные, соответственно, подмногообразиями (стратами) $(X/G)_\lambda$ и X_λ, называются *стратификациями Луны.* Согласно пп. 1) и 2) теоремы 6.10, в каждой неприводимой компоненте многообразия X/G имеется открытый страт. Он называется *главным стратом* этой компоненты. Исследуя его, можно заменить X на прообраз этой компоненты при отображении $\pi_{X/G}$ и считать, что X/G неприводимо.

Теорема 6.11. Пусть редуктивная группа G действует на гладком аффинном многообразии X, $x \in X$ — точка, орбита которой замкнута, N_x — инвариантное прямое дополнение к подмодулю $T_x(Gx)$ G_x-модуля $T_x(X)$ и M_x — инвариантное прямое дополнение к $N_x^{G_x}$ в N_x. Предположим, что многообразие X/G неприводимо. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) точка $\pi_{X/G}(x)$ лежит в главном страте стратификации Луны многообразия X/G;

2) пересечение многообразия X^{G_x} с любой замкнутой орбитой непусто;

3) действие группы G_x на M_x *локально транзитивно* (т. е. имеет открытую орбиту);

(4) морфизм $\pi_{X/G}$ является гладким (см. определение в [151, 208]) в точке x.

В условиях теоремы все слои морфизма $\pi_{X/G}$, лежащие в главном страте, являются гладкими многообразиями.

В том случае, когда X — это векторное пространство V, на котором G действует линейно, касательное пространство $T_x(X)$ канонически отождествляется с V, и поэтому G_x-модуль N_x определяется по G_x-модулю $T_x(Gx)$. Это означает, что две полупростые точки из V лежат в одном страте Луны тогда и только тогда, когда их стабилизаторы сопряжены в G. Отметим еще, что в рассматриваемом случае на V действует гомотетиями одномерный тор k^*. Это действие коммутирует с действием G и поэтому спускается на V/G. Страты Луны в V и в V/G инвариантны относительно k^*.

Пример 1°. Пусть $V^G=0$ и фактор V/G одномерен. Кривая V/G нормальна (см. теорему 3.16) и, значит, неособа. Ввиду сказанного в п. 4.4, отсюда следует, что алгебра $k[V]^G$ порождается одним однородным инвариантом f, так что на самом деле V/G — это аффинная прямая, а $\pi_{V/G}$ имеет вид $f: V\to k$. Поскольку $V^G=0$, мы имеем $\deg f\geqslant 2$ и поэтому нуль-конус $f^{-1}(0)$ имеет особенность в нуле. Это означает, что число стратов Луны в V/G не меньше 2. Поскольку орбитами группы k^* на $k=V/G$ являются $\{0\}$ и $k\setminus\{0\}$, этих стратов — ровно 2: ими являются указанные k^*-орбиты.

Пример 2°. Пусть G — одномерный тор, $V^G=0$ и $k[V]^G\neq k$. Тогда в V имеется только два страта Луны: нуль-конус и его дополнение (главный страт). Всякая орбита из главного страта является слоем морфизма $\pi_{V/G}$. Пользуясь п. 3) теоремы 6.10 и специальностью группы G, см. п. 2.6, можно доказать, что ограничение морфизма $\pi_{V/G}$ на главном страте является не только локально изотривиальным, но и локально тривиальным расслоением со слом G.

Пример 3°. Пусть $G=S_m$ — симметрическая группа, естественно действующая на пространстве $V=\{(a_1,\ldots,a_m)\in k^m\mid a_1+\ldots+a_m=0\}$ (см. п. 0.4). Пусть $x=(a_1,\ldots,a_m)\in V$. Рассмотрим разбиение $\gamma(x)$ множества $I=\{1, 2,\ldots,m\}$ в объединение попарно непересекающихся непустых подмножеств, $I=I_1\cup\ldots\cup I_s$, по следующему правилу: числа i и $j\in I$ лежат в одном таком подмножестве в точности тогда, когда $a_i=a_j$. Ясно, что G_x является прямым произведением симметрических групп множеств $I_1,\ldots,I_s$ и что всякое разбиение множества I так получается. Набор целых чисел $|I_1|,\ldots,|I_s|$, упорядоченный по убыванию, обозначим через $(\gamma(x)|$. Этот набор является разбиением числа m. Стабилизаторы двух точек x и $y\in V$ сопряжены в G в точности тогда, когда $|\gamma(x)|=|\gamma(y)|$. Это означает, что имеется биекция между разбиениями числа m и стратами Луны для действия G на V: стратом, соответствующим разбиению числа m, является множество $V_\lambda=$

$=\{x \in V \mid |\gamma(x)|=\lambda\}$. Главный страт в V состоит из тех точек $(a_1, \ldots, a_m)$, у которых все a_i — разные. Объединение остальных стратов есть объединение гиперплоскостей $\Gamma_{ij}= =\{(a_1, \ldots, a_m) \leqslant a_i=a_j\}$. Отметим, что G, как линейная группа, порождена отражениями относительно гиперплоскостей Γ_{ij} и что аналогичным образом можно исследовать страты Луны для любой конечной линейной группы, порожденной отражениями. Интересно, что подмногообразие в V/G, являющееся обединением всех стратов Луны, отличных от главного, играет важную роль в теории особенностей функций: оно является так называемой бифуркационной диаграммой простой особенности типа A_{m-1} (аналогичную интерпретацию имеет объединение неглавных стратов Луны для групп Вейля типов D_n и E_n); см. [12].

Пример 4°. Рассмотрим присоединенное действие группы $G=\mathrm{SL}_m$ на ее касательной алгебре $X=\mathfrak{g}$ (т. е. алгебре матриц порядка m со следом 0). Мы можем естественно отождествить пространство V из предыдущего примера (обозначениями которого воспользуемся) с касательной алгеброй $\mathfrak{t}$ максимального тора группы G, состоящего из диагональных матриц. Тогда S_m, как группа преобразований пространства V, отождествится с группой Вейля $N_G(\mathfrak{t})/Z_G(\mathfrak{t})$. Согласно сказанному в примере 1° п. 6.7, замкнутые G-орбиты в X — это в точности G-орбиты точек из $\mathfrak{t}$. Ясно, что стабилизатор G_x любой точки $x \in \mathfrak{t}$ однозначно с точностью до сопряженности в G определяется по $|\gamma(x)|$. Поэтому и в рассматриваемом случае имеется биекция между разбиениями числа m и стратами Луны для действия G на X: стратом, соответствующим разбиению λ числа m является множество

$$X_\lambda = \bigcup_{x \in V_\lambda} \pi_{X/G}^{-1}(\pi_{X/G}(x)).$$

6.10. Пласты. Помимо стратификации Луны в теории инвариантов рассматриваются и другие виды покрытий локально замкнутыми инвариантными подмножествами, на которых действие в том или ином смысле стандартно. Мы рассмотрим здесь один тип таких покрытий, введенный Диксмье в [129].

Пусть алгебраическая группа H действует на алгебраическом многообразии Y. Для любого $d \in \mathbf{Z}$, $d \geqslant 0$, рассмотрим в Y множество $\{y \in Y \mid \dim Hy=d\}$. Согласно п. 1.4, оно локально замкнуто в Y. Неприводимые компоненты этого множества называются *пластами* действия H на Y.

Пример 1°. В примерах 1° и 2° из п. 1.3 имеется ровно два пласта: нуль и дополнение к нулю; в примерах 3° и 4° — тоже два: ось абсцисс и дополнение к ней; в примере 5° — три: дополнение к оси абсцисс, ось абсцисс без нуля и нуль.

Предположим, что многообразие Y неприводимо. Тогда среди всех пластов имеется ровно один, открытый в Y, — так называемый *регулярный пласт*

$$Y^{\text{reg}} = \{y \in Y \mid \dim Hy = \max_{x \in X} \dim Hx\}.$$

Вообще говоря, разные пласты могут иметь непустое пересечение. Следующее утверждение показывает, что для линейных действий редуктивных групп этот феномен связан с существованием незамкнутых орбит; оно также дает некоторое описание пласта, содержащего замкнутую орбиту, в частности показывает, что этот пласт является многообразием того же типа, с каким мы уже не раз встречались: оно получается «разнесением» с помощью группы открытого подмножества некоторого линейного подпространства.

Теорема 6.12 ([110]). Пусть связная редуктивная группа G линейно действует на конечномерном векторном пространстве V. Предположим, что орбита точки $v \in V$ замкнута, и пусть $Z = V^{\overset{0}{G_v}}$. Тогда v содержится в единственном пласте, и этот пласт имеет вид $\overline{GZ^{\text{reg}}}$.

Конечно, в общем случае условие постоянства размерностей орбит является слишком слабым, чтобы можно было рассчитывать получить какое-либо общее обозримое описание всех пластов и орбит в них (так, в примере 2° п. 1.3 для действия G на регулярном пласте не существует геометрического фактора). Однако для некоторых специальных видов действий пласты можно исследовать весьма детально, что дает хорошую геометрическую картину расположения орбит. К числу таких действий в первую очередь относится присоединенное действие связной редуктивной группы G на своей касательной алгебре $\mathfrak{g}$. В этом случае пласты, содержащие замкнутую орбиту (или, эквивалентно, содержащие полупростой элемент, см. пример 1° п. 6.7), называются *пластами Диксмье* [110]. Вообще говоря, не всякий пласт является пластом Диксмье, см. [110]. Однако всякий пласт в $\mathfrak{g}$ является многообразием знакомого нам типа: он получается «разнесением» с помощью G открытого подмножества линейного подпространства в $\mathfrak{g}$. Точнее, имеет место следующая

Теорема 6.13 ([110]). Для любого пласта S присоединенного действия связной редуктивной группы G на своей касательной алгебре $\mathfrak{g}$ найдется такая параболическая подалгебра $\mathfrak{p}$ в $\mathfrak{g}$ и такой разрешимый идеал $\mathfrak{r}$ в $\mathfrak{p}$, что $S = G\mathfrak{r}^{\text{reg}}$, $\overline{S} = G\mathfrak{r}$. Пласт S является пластом Диксмье в точности тогда, когда $\mathfrak{r}$ является разрешимым радикалом в $\mathfrak{p}$. Для любой параболической подалгебры $\mathfrak{p}$ и ее разрешимого радикала $\mathfrak{r}$ множество $G\mathfrak{r}^{\text{reg}}$ является пластом Диксмье.

Следствие ([110]). Каждый пласт S в $\mathfrak{g}$ содержит единственную нильпотентную орбиту.

Нильпотентная орбита в пласте называется иногда *ричардсоновской*, [244].

Пример 2°. Пусть $G = \mathrm{SL}_m$. Можно показать, что в этом

случае всякий пласт является пластом Диксмье. Пусть $\lambda = (p_1, \ldots, p_m) \in \mathbf{N}^m$ — упорядоченное по убыванию разбиение числа m (т. е. $m = p_1 + \ldots + p_m$ и $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_m$). Сопоставим ему параболическую подалгебру $\mathfrak{p}_\lambda$ в $\mathfrak{g}$ по следующему правилу: пусть $s_i = p_1 + \ldots + p_i$ и $V_i = \langle e_1, \ldots, e_{s_i} \rangle$, где $e_1, \ldots, e_m$ — стандартный базис в k^m; тогда $\mathfrak{p}_\lambda$ — это стабилизатор флага $0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_{m-1} \subset V_m = k^m$ относительно естественного действия $\mathfrak{g}$ на k^m. Обозначим через S_λ пласт в $\mathfrak{g}$, соответствующий подалгебре $\mathfrak{p}_\lambda$ (в смысле, указанном в теореме 6.13). Тогда всякий пласт в $\mathfrak{g}$ имеет вид S_λ для подходящего λ и $S_\lambda \neq S_\mu$ при $\lambda \neq \mu$. Замкнутыми орбитами в S_λ являются, в обозначениях примера 4° из п. 6.9, в точности орбиты точек из множества $\mathfrak{t}_\lambda$. Ричардсоновская орбита в S_λ состоит в точности из тех элементов $x \in \mathfrak{g}$, для которых $\dim \operatorname{Ker} x^i = s_i$ при всех $i = 1, 2, \ldots, m$. В рассматриваемом случае разные пласты не пересекаются и каждый пласт является гладким многообразием (отметим, что в других простых алгебрах Ли эти свойства, вообще говоря, не выполнены, [110], [189]).

Оказывается, в каждом пласте для присоединенного действия канонически строится сечение Сешадри, являющееся сечением Шевалле с конечной группой Вейля (см. п. 3.8). Точнее, имеет место следующая

Теорема 6.14 ([49]). Пусть S — какой-либо пласт присоединенного действия связной редуктивной группы G и e — какой-либо элемент нильпотентной орбиты в S. Рассмотрим содержащую этот элемент $\mathfrak{sl}_2$-тройку (e, h, f) (см. пример 3° п. 5.5) и положим $Z = S \cap (e + \mathfrak{z}_\mathfrak{g}(f))$. Тогда

1) $S = GZ$;

2) Z — сечение Сешадри для действия G на S, являющееся сечением Шевалле с конечной группой Вейля;

3) каждая G-орбита в S пересекает линейное многообразие $e + \mathfrak{z}_\mathfrak{g}(f)$ трансверсально;

4) для действия G на S существует геометрический фактор.

В настоящее время имеется детальное описание пластов присоединенных действий простых алгебраических групп, см. [99], [109], [177].

Отметим, что в теории инвариантов рассматриваются и другие виды инвариантных покрытий. Например, Бялыницкий—Бируля ввел и исследовал интересное покрытие, определенное действием алгебраического тора, [105], [106].

6.11. Замкнутость орбит: критерий Луны. Пусть G — редуктивная группа, действующая на аффинном многообразии X. Мы уже видели, что замкнутые G-орбиты в X играют особую роль. В дальнейшем это найдет много новых подтверждений. Если Gx, $x \in X$, — замкнутая орбита, то, согласно теореме 4.17, группа G_x редуктивна. Однако обратное может быть неверно: критерий замкнутости орбиты должен как-то учитывать не только свойства стабилизатора, но и свойства действия в це-

лом. В настоящее время известно несколько таких критериев. Они широко применяются на практике. Мы укажем их в этом и следующем пунктах.

Поскольку X, ввиду теоремы 1.5, допускает замкнутое эквивариантное вложение в конечномерный G-модуль V, мы можем при необходимости считать, что $X=V$.

Начнем с простейшего случая, когда G является тором T. Воспользуемся терминологией и обозначениями п. 5.4. Оказывается, для любого вектора $v \in V$ критерий замкнутости орбиты Tv формулируется только в терминах носителя этого вектора:

Предложение 6.15. Пусть T — алгебраический тор, линейно действующий на конечномерном векторном пространстве V, и $v \in V$ — некоторый вектор. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) орбита Tv замкнута в V;

2) 0 является внутренней точкой множества $\operatorname{supp} v$.

Теперь перейдем к общему случаю редуктивной группы G. Первый критерий замкнутости G-орбиты в X, который мы рассмотрим, был получен Луной [202]. Его доказательство опирается на следующую теорему, представляющую самостоятельный интерес и использующуюся и в других вопросах, например, при построении сечений Шевалле, см. ниже п. 7.5 и [204]:

Теорема 6.16 (Луна [202]). Пусть редуктивная группа G действует на аффинном многообразии X и пусть H — редуктивная подгруппа в G. Тогда естественный морфизм $X^H/N_G(H) \to$ $\to X/G$ конечен [1] (т. е. алгебра $k[X^H]^{N_G(H)}$ цела над подалгеброй, являющейся образом гомоморфизма $k[X]^G \to$ $\to k[X^H]^{N_G(H)}$, определенного ограничением функций на X^H).

Критерий Луны формулируется так:

Теорема 6.17. Пусть редуктивная группа G действует на аффинном многообразии X и пусть H — редуктивная подгруппа в G, а x — некоторая точка из X^H. Для того, чтобы орбита Gx была замкнута, необходимо и достаточно, чтобы была замкнута орбита $N_G(H)x$.

Следствие 1 [202]. Пусть G — редуктивная группа, H — ее редуктивная подгруппа, V — конечномерный G-модуль и $x \in V^H$ — некоторая точка. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) $\overline{Gx} \ni 0$;

2) $\overline{N_G(H)x} \ni 0$.

◀ Пусть выполнено условие 1) и y — точка единственной (см. следствие из теоремы 4.7) замкнутой $N_G(H)$-орбиты в $\overline{N_G(H)x}$. Ввиду теоремы 6.17, орбита Gy замкнута в V. Поскольку $Gy \subset \overline{Gx}$, мы получаем, что $y=0$. ▶

[1] Отметим, что из редуктивности H следует редуктивность $N_G(H)$; см., например, [204].

Следствие 2 [202]. Пусть G — редуктивная группа и H — ее редуктивная подгруппа. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) группа $W=N_G(H)/H$ конечна;

2) для любого действия группы G на аффинном многообразии X и любой точки $x\in X^H$ орбита Gx замкнута в X.

◀ 1) $\Rightarrow$ 2) непосредственно следует из теоремы 6.18. Пусть 1) не выполнено. Тогда можно найти такой конечномерный W-модуль V, что W^0 действует на V нетривиально. Значит (см. п. 5.2), в V имеются отличные от нуля нильпотентные элементы. Пусть x — такой элемент и $X \underset{N_G(H)}{*} V$. Тогда $x\in X^H$ орбита Gx не замкнута в X. Значит, 2)$\Rightarrow$1). ▶

Замечание. Из редуктивности H следует, что $N(H)^0=H^0\cdot Z_G(H)^0$, и поэтому в теоремах 6.16 и 6.17 и в следствиях из теоремы 6.17 можно заменить $N_G(H)$ на $Z_G(H)$.

Теорема 6.17 и ее следствия удобны для практических применений.

Пример 1°. Пусть редуктивная группа G действует на аффинном многообразии X и пусть T — максимальный тор в G. Тогда для любой точки $x\in X^T$ орбита Gx замкнута в X. Это немедленно вытекает из следствия 2 теоремы 6.17, поскольку группа Вейля $N_G(T)/T$ конечна. В частности, орбита вектора нулевого веса (относительно T) любого конечномерного G-модуля V замкнута, — впервые этот факт доказал, по-видимому, Костант [187].

Пример 2°. Рассмотрим действие группы $G=\mathrm{SL}_2$ на пространстве бинарных форм $V=V_d$ (см. пример 1° п. 3.3). Пусть $v=x^d+y^d$, $d\geqslant 3$. Ясно, что $v\in V^H$, где $H=\{\mathrm{diag}(\varepsilon, \varepsilon^{-1})\mid \varepsilon_d=1\}$ и что $Z_G(H)=\{\mathrm{diag}(t, t^{-1})\mid t\in k^*\}$ — максимальный тор в G. Воспользуемся обозначениями примера 1° п. 5.4. Тогда $\operatorname{supp} v$ — это выпуклая оболочка точек $d\varepsilon$ и $-d\varepsilon$. Поэтому из предложения 6.15 следует, что орбита $Z_G(H)v$ замкнута. Отсюда, из теоремы 6.17 и из сделанного выше замечания вытекает, что и орбита Gv замкнута.

6.12. Замкнутость орбит: критерий Кемпфа — Несс. Теперь мы рассмотрим еще один критерий замкнутости орбиты. Он принадлежит Кемпфу и Несс [176]. Мы будем считать в этом пункте, что $k=\mathbf{C}$.

Выделим в G максимальную компактную подгруппу K. Обозначим через $\mathfrak{g}$ касательную алгебру группы G. Рассмотрим конечномерный G-модуль V и какую-либо орбиту $\mathcal{O}$ в V. Хорошо известно, что на V можно задать K-инвариантное эрмитово скалярное умножение $(\ ,\ )$. Это позволяет говорить о длине $\|v\|$ любого вектора $v\in V$. Оказывается, свойство орбиты $\mathcal{O}$ быть или не быть замкнутой непосредственно связано с тем, как меняется эта длина, когда v пробегает орбиту $\mathcal{O}$. А именно, рассмотрим на гладком вещественном многообразии

$\mathcal{O}$ гладкую вещественную функцию $l_{\mathcal{O}}(v)=\|v\|$. Нетрудно видеть, что v является для $l_{\mathcal{O}}$ критической точкой в точности тогда, когда v ортогонален касательному пространству орбиты $\mathcal{O}$ в точке v, т. е.

$$(\mathfrak{g}v,\ v)=0. \tag{6.6}$$

Теорема 6.18. Орбита $\mathcal{O}$ замкнута в V тогда и только тогда, когда функция $l_{\mathcal{O}}$ на $\mathcal{O}$, сопоставляющая вектору его длину, достигает на $\mathcal{O}$ своего минимума. Все точки минимума образуют в этом случае одну K-орбиту и ими исчерпываются все критические точки функции $l_{\mathcal{O}}$ на $\mathcal{O}$.

◀Утверждение «только тогда» очевидно. Доказывая утверждение «тогда», предположим, что выполнено условие (6.6). Рассмотрим разложение Картана $G=KTK$. Здесь $T\subset\subset G$ — связная вещественная подгруппа Ли с касательной алгеброй $\mathfrak{t}$, для которой $i\mathfrak{t}$ — касательная алгебра максимального тора группы K, а $\mathfrak{t}(\mathbf{C})=\mathfrak{t}+i\mathfrak{t}$ — касательная алгебра максимального тора группы G. Пусть $Y\in\mathfrak{t}$, $v\in\mathcal{O}$. Рассмотрим вещественную функцию $f_v(t)=l^2_{\mathcal{O}}((\exp tY)\cdot v)$ от переменного $t\in\mathbf{R}$. Весовое разложение v относительно $\mathfrak{t}(\mathbf{C})$ имеет вид $v=\sum\limits_{\lambda\in\mathfrak{t}^*}v_\lambda$. Поэтому, учитывая ортогональность весовых подпространств, мы получаем

$$f_v(t)=\sum_{\lambda\in\mathfrak{t}^*}\|v_\lambda\|^2e^{2t\lambda(Y)}.$$

Отсюда, рассмотрев $f_v''(t)$, получаем, что либо $f_v''(t)>0$, либо $\exp tY\in G_v$ для любого $t\in\mathbf{R}$. Поскольку $f_v'(0)=0$ в силу (6.6), в первом случае среди $\|v_\lambda\|^2\lambda(Y)$ есть числа разных знаков и, значит, $f_v(t)$ монотонно стремится к $+\infty$ при $t\to\pm\infty$. Поскольку функция $l_{\mathcal{O}}$ инвариантна относительно K, для любого $a\in K$ точка av — тоже критическая для $l_{\mathcal{O}}$ и, значит, либо $f_{av}(t)$ монотонно стремится к $+\infty$ при $t\to\pm\infty$, либо $\exp tY\in G_{av}$ для любого $t\in\mathbf{R}$. В частности, либо $a^{-1}\cdot\exp tY\cdot a\in G_v$ для любого $t\in\mathbf{R}$, либо пределы $\lim\limits_{t\to\pm\infty}a^{-1}\cdot\exp tY\cdot a$ не существуют. В силу теоремы 6.9 отсюда следует, что орбита $\mathcal{O}$ замкнута в V. Наконец, если $\|gv\|\leqslant\|v\|$ для $g\in G$, то, записывая g в виде $a\cdot\exp tY\cdot b$, где $a, b\in K$, $Y\in\mathfrak{t}$, $t\in\mathbf{R}$, получаем из предыдущего, что $\exp tY\in G_{bv}$, и потому $gv=cv$, где $c=ab\in K$. Значит, $gv\in Kv$ и $\|gv\|=\|v\|$. ▶

Из этой теоремы следует, что для любого действия группы G на аффинном многообразии X в X существует такое замкнутое вещественно-алгебраическое (но не алгебраическое!) K-инвариантно подмножество, которое пересекает каждый слой морфизма факторизации $\pi_{X/G}: X\to X/G$ по K-орбите, лежащей

в единственной замкнутой G-орбите этого слоя. В самом деле, если $X=V$, то в качестве этого множества можно взять

$$S=\{v\in V \mid (\mathfrak{g}v, v)=0\}; \qquad (6.7)$$

общий же случай сводится к этому с помощью теоремы 1.5. Пример 1°. Для действия $\mathbf{C}^*$ на $\mathbf{C}^2$ по формуле $t\binom{a}{b}=\binom{ta}{t^{-1}b}$ (см. пример 2° п. 1.3) стандартное скалярное произведение инвариантно относительно группы $K=\{z\in\mathbf{C}^* \mid |z|=1\}$ и поэтому множество (6.7) имеет вид $S=\{\binom{a}{b}\in\mathbf{C}^2 \mid |a|=|b|\}$.

Отметим, что в любом случае S является пересечением системы вещественных квадрик.

Теорема 6.18 удобна для практического нахождения замкнутых орбит. Дадок и Кац [122] заметили, что из нее вытекает

Теорема 6.19. Пусть $v_{\lambda_1}, \ldots, v_{\lambda_s}$ — система ненулевых весовых относительно максимального тора $T(\mathbf{C})$ группы G векторов в G-модуле V, причем все веса $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ различны. Предположим, что:

1) нуль является внутренней точкой выпуклой оболочки системы весов $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$;

2) $\lambda_i-\lambda_j$ не является корнем для любых $i\neq j$. Тогда G-орбита точки $v=v_{\lambda_1}+\ldots+v_{\lambda_s}$ замкнута в V.

◀Из 1) следует, что орбита $T(\mathbf{C})v$ замкнута в V (см. предложение 6.15). Поэтому, заменяя v на вектор минимальной длины в $T(\mathbf{C})v$, можно считать, что $(\mathfrak{t}(\mathbf{C})v, v)=0$. Поскольку весовые подпространства в V, отвечающие разным весам, ортогональны, то из 2) следует, что $(Yv, v)=0$ для любого корневого вектора $Y\in\mathfrak{g}$. Значит, выполнено условие (6.6) и, по теореме 6.18 орбита Gv замкнута в V.▶

Пример 2°. Рассмотрим ту же ситуацию, что и в примере 2° п. 6.11 (при $k=\mathbf{C}$). Поскольку x^iy^{d-i} — весовой вектор веса $-(d-2i)\varepsilon$, а корнями являются 2ε и -2ε, то из теоремы 6.19 вытекает, что G-орбита любой формы

$$v=\sum_{i=0}^{d}\alpha_i x^i y^{d-i}, \text{где } \alpha_i\alpha_{i+1}=0\ \forall i \text{ и } \min\{i \mid \alpha_i\neq 0\}<\frac{d}{2},$$

$$\max\{i \mid \alpha_i\neq 0\}>\frac{d}{2}$$

замкнута в V.

Пример 3°. Из теоремы 6.19 мы снова получаем (при $k=\mathbf{C}$), что G-орбита вектора нулевого веса замкнута (ср. пример 1° п. 6.11).

6.13. Замкнутая орбита, лежащая в замыкании заданной орбиты. Пусть G — связная редуктивная группа, линейно и эффективно действующая на (конечномерном) векторном пространстве V. В этом пункте мы обсудим вопрос о том, как найти (единственную ввиду следствия из теоремы 4.7) замкну-

тую орбиту, лежащую в замыкании какой-либо заданной орбиты.

Зафиксируем в G максимальный тор T. Мы будем пользоваться обозначениями из п. 5.4. Положим также:

$\Delta=\{\lambda\in\mathfrak{X}(T)\mid V_\lambda\neq 0\}$;

$\Delta(v)=\{\lambda\in\Delta\mid v_\lambda\neq 0\}$ для вектора $v\in V$;

$V_M=\sum\limits_{\lambda\in M}V_\lambda$ и $v_M=\sum\limits_{\lambda\in M}v_\lambda$ для вектора $v\in V$ и подмножества $M\subseteq E(T)$ (если $M\cap\Delta=\varnothing$, то мы считаем, что $V_M=0$, а если $M\cap\Delta(v)=\varnothing$, — что $v_M=0$).

Если $v\in V$ — некоторый вектор, то мы будем обозначать через $C(v)$ выпуклый многогранный конус в пространстве $E(T)$, натянутый на носитель этого вектора, и положим

$$S(v)=C(v)\cap(-C(v)). \tag{6.8}$$

Пусть $w=v_{S(v)}$. Рассмотрим регулярную редуктивную подгруппу $H=H(w)$ группы G, касательная алгебра $\mathfrak{h}$ которой есть ортогональное дополнение к касательной алгебре тора $T_w{}^0$ в ее централизаторе (коммутант алгебры $\mathfrak{h}$ порождается теми корневыми подпространствами $\mathfrak{g}_\alpha$ касательной алгебры $\mathfrak{g}$ группы G, для которых соответствующий корень α содержится в $S(v)$). Подпространство $W=V_{S(v)}$ содержит w, инвариантно относительно H и ядро неэффективности действия H на W конечно.

Теорема 6.20 (Э. Б. Винберг [29]). Рассмотрим связную редуктивную группу G, линейно и эффективно действующую на (конечномерном) векторном пространстве V. Пусть $v\in V$ — некоторый вектор, $w=v_{S(v)}$ (см. (6.8)) и H — подгруппа в G, определенная выше.

1) Если выполнено условие

$$\dim S(v)\leqslant\dim S(gv)\quad \forall g\in G, \tag{6.9}$$

то вектор w лежит в единственной замкнутой орбите, содержащейся в $\overline{Gv}$.

2) Вектор $v\in V$ удовлетворяет условию (6.9) тогда и только тогда, когда орбита Hw замкнута и группа H_w конечна.

Теорема 6.20 может быть использована для описания объединения тех стратов Луны в V, в которых ранг стабилизаторов полупростых точек равен наперед заданному целому числу $s=0, 1, \ldots, \operatorname{rk} G$. А именно, обозначим через $F(s)$ множество всех максимальных выпуклых s-мерных многогранников в пространстве $E(T)$, натянутых на веса и содержащих внутри точку 0. Для каждого многогранника $F\in F(s)$ рассмотрим все максимальные выпуклые многогранники, натянутые на веса и содержащие F в качестве своей грани. При $s>0$, а также при $s=0$, если $0\in\Delta$, обозначим через $P(s)$ множество всех полученных таким образом многогранников. Если же $0\notin\Delta$, то

включим в $P(0)$, помимо указанных многогранников, также все максимальные выпуклые многогранники, натянутые на веса и не содержащие нуля.

Пусть $M \in P(s)$ и F — максимальная грань многогранника M, содержащая 0 (если $s=0$ и $0 \notin \Delta$, то считаем, что $F=\varnothing$). Рассмотрим в G регулярную редуктивную подгруппу $H=H(F)$, касательная алгебра которой есть ортогональное дополнение к аннулятору множества F в $\mathfrak{t}$ в централизаторе этого аннулятора. Группа H действует на V_F, и мы обозначим через V_F^0 множество тех точек w, для которых орбита Hw замкнута, а стабилизатор H_w конечен, и положим

$$V_M^0 = \{v \in V_M \mid v_F \in V_F^0\}$$

(множества V_F^0 и V_M^0 могут быть и пусты). Тогда из теоремы 6.20 следует, что

$$V(s) = \bigcup_{M \in P(s)} G \cdot V_M^0 \qquad (6.10)$$

есть объединение тех стратов Луны в V, в которых ранг стабилизатора полупростых точек равен $\operatorname{rk} G - s$. Если же в (6.10) заменить $P(s)$ на $\bigcup_{t \leqslant s} P(t)$, а V_M^0 — на V_M, то вместо $V(s)$ мы получим $\bigcup_{t \leqslant s} V(t)$ (это удобно тем, что не требует проверки условия (6.9)). Ясно, что вместо всех многогранников M из $P(s)$ достаточно рассмотреть лишь систему представителей орбит естественного действия группы Вейля на $P(s)$.

Пример 1°. Рассмотрим естественное линейное представление группы SL_3 в пространстве V кубических форм от переменных x, y, z (см. пример 2° п. 5.4, обозначениями которого мы воспользуемся). В этом случае $P(0)$ состоит из одного (с точностью до действия группы Вейля) многоугольника M, изображенного на рис. 8. Множество $F(1)$ содержит единственный (с точностью до действия группы Вейля) отрезок F, изображенный на рис. 9, однако в этом случае условие п. 2) теоремы 6.20 не выполнено, поскольку группа $H(F)$ локально изоморфна SL_2, а ее представление на V_F является присоединенным представлением. Таким образом, пространство V есть объединение открытого страта $V(2)$, состоящего из всех точек, орбиты которых замкнуты и стабилизаторы конечны, и двух подмногообразий $G \cdot V_{M_1}^0$ и $G \cdot V_{M_2}^0$, составляющих страт $V(0)$.

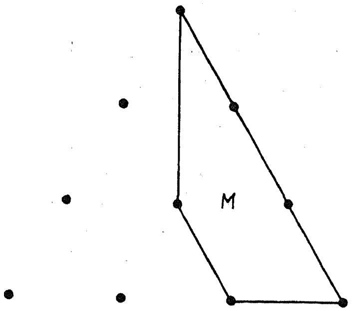


Рис. 8

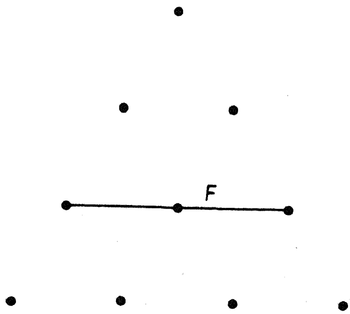


Рис. 9

Интересно отметить, что идея классификации форм по рангу их стабилизаторов принадлежит Пуанкаре [236].

6.14. Отображение момента. Для изучения действий комплексных редуктивных групп могут быть использованы методы (вещественной) симплектической геометрии.

Разъяснение используемых ниже понятий и фактов симплектической геометрии см., например, в [13].

Пусть G — связная редуктивная линейная группа, действующая в комплексном векторном пространстве V, и K — ее максимальная компактная подгруппа. Снабдим пространство V эрмитовым скалярным умножением, инвариантным относительно K, и рассмотрим вещественную симплектическую структуру в пространстве PV, определяемую мнимой частью этого скалярного умножения. Действие $K:PV$ является пуассоновским. А именно, можно проверить, что поле скоростей элемента $\xi \in \mathfrak{k}$ имеет производящую функцию

$$f_\xi(x) = \frac{1}{2i}(\xi v, v),$$

где v — (любой) единичный вектор пространства V, лежащий над точкой $x \in PV$; при этом

$$f_{[\xi, \eta]} = \{f_\xi, f_\eta\}.$$

Рассмотрим отображение момента

$$m : PV \to \mathfrak{k},\ m(x)\xi = f_\xi(x).$$

Как известно, это K-эквивариантное дифференцируемое отображение (имеется в виду, что K действует на $\mathfrak{k}^*$ посредством коприсоединенного представления), ядро дифференциала которого в каждой точке $x \in PV$ есть ортогональное дополнение в смысле симплектической метрики к пространству $T_x(Kx) = \mathfrak{k}x$. Кроме того, при обратном гомоморфизме алгебр функций скобка Березина — Кириллова на $\mathfrak{k}^*$ переходит в скобку Пуассона на PV.

Введем в алгебру $\mathfrak{k}$ инвариантное скалярное умножение (например, по формуле $(\xi, \eta) = \operatorname{Tr} \xi\eta^*$) и с его помощью отождествим $\mathfrak{k}^*$ с $\mathfrak{k}$. В соответствии с этим будем считать, что отображение m принимает значения в $\mathfrak{k}$. Далее, пусть $\mathfrak{h}$ — картановская подалгебра алгебры $\mathfrak{k}$ и $C \subset \mathfrak{h}$ — камера Вейля. Для любого $x \in PV$ обозначим через $\check{m}(x)$ тот единственный элемент из C, который лежит в K-орбите элемента $m(x)$. Тем самым определено отображение $\check{m} : PV \to C$.

Теорема 6.21 (Гийемин и Стернберг [147]). Для любого G-инвариантного неприводимого проективного алгебраического многообразия $X \subset PV$ множество $\check{m}(X) \subset C$ представляет собой рациональный выпуклый многогранник (т. е. выпуклую оболочку конечного числа точек с рациональными координатами).

Доказательство этой теоремы, принадлежащее Мамфорду и основанное на идеях теории инвариантов, имеется в приложении к статье [229]. В работе [135] Дональдсон применил эту теорему к изучению автодуальных связностей инстантонов в алгебраических векторных расслоениях над комплексной проективной плоскостью.

Отображение момента в рассматриваемой ситуации может быть также интерпретировано следующим образом. Пусть φ_x $(x \in PV)$ обозначает функцию на группе G, определяемую формулой

$$\varphi_x(g) = \|gv\|^2,$$

где v — единичный вектор, лежащий над x; тогда

$$m(x)\xi = -\frac{1}{4} d_e\varphi_x(i\xi).$$

Критерий замкнутости орбиты вектора v (теорема 6.18) означает, что орбита Gv замкнута тогда и только тогда, когда $m(gx) = 0$ для некоторого $g \in G$.

Рассмотрим функцию

$$|m|^2 : PV \to \mathbf{R}, \qquad |m|^2(x) = \|m(x)\|^2.$$

В работе Несс [229] доказано, что все критические точки функции $|m|^2$, не являющиеся точками минимума, лежат в $P\mathfrak{N}$,

где $\mathfrak{N}$ — нуль-конус для действия $G:V$. Градиентный поток функции $|m|^2$ определяет стратификацию многообразия $P\mathfrak{N}$, прообраз которой в V совпадает со стратификацией нуль-конуса $\mathfrak{N}$, описанной в п. 5.6.

§ 7. Стабилизаторы общего положения

7.1. Введение. Мы будем обозначать всюду в этом параграфе через G алгебраическую группу, действующую на неприводимом алгебраическом многообразии X.

Для любого d положим $X_d=\{x\in X\,|\,\dim Gx\leqslant d\}$. Тогда $\varnothing=X_{-1}\subset X_0\subset\ldots$ и (см. п. 1.4) каждое множество X_d замкнуто в X. Для

$$m=m_{G,\,X}=\max_x \dim Gx \tag{7.1}$$

множество X_m совпадает с X, а множество $X\setminus X_{m-1}$ непусто и открыто (и, значит, плотно) в X. Таким образом, размерность орбиты точки общего положения в X равна m. Следовательно (см. п. 1.4), стабилизатор точки общего положения в X имеет размерность $\dim G-m$.

Аналогичное явление, как известно, [114], имеет место и для дифференцируемых действий групп Ли на связных дифференцируемых многообразиях. Более того, в случае, когда группа Ли компактна, имеет место значительно более тонкое свойство — сопряженность стабилизатора точки общего положения с некоторой фиксированной подгруппой (т. е., в другой терминологии, существование так называемого «главного орбитного типа»), [114]. Естественно рассмотреть вопрос о том, в какой мере это свойство переносится на алгебраический случай.

Будем говорить, что для действия G на X существует *стабилизатор общего положения* (с. о. п.) G_*, если G_* — такая подгруппа в G, что стабилизатор точки общего положения в X сопряжен G_*. С. о. п. определен с точностью до сопряженности. Из определения следует, что если с. о. п. G_* существует, то объединение неприводимых компонент многообразия X^{G_*}, выбранных как в п. 2.8, является $N_G(G_*)$-сечением для действия G на X. В п. 7.5 мы увидим, что во многих важных случаях эта конструкция приводит к сечениям Шевалле.

Как видно из следующего примера, с. о. п. может и не существовать.

Пример 1°. Рассмотрим действие группы $G=k\times k$ на векторном пространстве k^2, определенное формулой $(a,b)(x,y)=(x+ay+b,\ y)$, $(a,b)\in G$, $(x,y)\in k^2$. Тогда стабилизатор точки (x,y) имеет вид $G(y):=\{(a,\ -ya)\,|\,a\in k\}$. Ввиду абелевости группы G, подгруппы $G(y_1)$ и $G(y_2)$ при $y_1\neq y_2$ не сопряжены. Поэтому для указанного действия с. о. п. не существует.

Как мы видели выше (см. начало п. 2.7), всякое алгебраическое семейство подгрупп в G реализуется в качестве семейства стабилизаторов некоторого сечения подходящего действия группы G. Поскольку имеются примеры таких семейств подгрупп, в которых любые две подгруппы попарно не сопряжены [246], это дает систематический способ построения таких действий (в том числе и редуктивных групп G), для которых с. о. п. не существует. Этим способом получается в действительности и разобранный пример: семейство $\{G(y) \mid y \in k\}$ есть семейство стабилизаторов точек сечения $s: k \to k^2$, $s(t) = (t, t)$.

То, что в приведенном примере стабилизаторы точек общего положения оказываются нередуктивными, не случайно. Это видно из следующей общей теоремы, доказанной при $k = \mathbf{C}$ Ричардсоном [246]:

Теорема 7.1. Пусть алгебраическая группа G действует на неприводимом алгебраическом многообразии X. Для любой точки $x \in X$ обозначим через U_x и L_x соответственно унипотентный радикал и подгруппу Леви группы G_x. Тогда в X существует конечное семейство $X_1, \ldots, X_n$ неособых подмногообразий, обладающее следующими свойствами:

1) $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i$;

2) каждое X_i открыто в $X \diagup \left(\bigcup\limits_{j=1}^{i-1} X_j\right)$;

3) для любого i и любых точек $x, y \in X$ подгруппы L_x и L_y сопряжены в G;

4) для любого i множество $\{(x, u) \mid x \in X_i, u \in U_x\}$ является подмногообразием в $X_i \times G$, проекция которого на X_i является гладким морфизмом (т. е. дифференциал этого морфизма в любой точке сюръективен).

7.2. Теоремы существования с. о. п. Несмотря на сказанное в п. 7.1, имеется ряд позитивных общих результатов, гарантирующих существование с. о. п. при некоторых предположениях о G, X или действии.

Простейшим таким результатом является следующее легко доказываемое утверждение:

Пусть G° — тор. Тогда для любого действия G на неприводимом алгебраическом многообразии X с. о. п. существует и совпадает с ядром неэффективности действия.

Значительно более тонкой является следующая теорема 7.2, касающаяся действий редуктивных алгебраических групп на гладких аффинных многобразиях. Как видно из § 6, такие действия во многих отношениях следует считать алгебраическим аналогом дифференцируемых действий компактных групп Ли (хотя в алгебраическом случае картина и усложняется за счет возможного наличия незамкнутых орбит). Эта аналогия продолжается и в отношении существования с. о. п.:

Теорема 7.2 (Ричардсон [245], Луна [201]). Для любого действия редуктивной алгебраической группы G на неприводимом гладком аффинном многообразии X существует с. о. п.

◀ Рассмотрим главный страт Луны (см. п. 6.9) в X. Тогда из теорем 6.10, 6.11 и 6.7 следует, что существуют редуктивная подгруппа $H \subset G$ (стабилизатор точки «общей» замкнутой G-орбиты), конечномерный H-модуль N, гладкое неприводимое многообразие U и G-эквивариантный этальный доминантный морфизм $U \times (G \underset{H}{*} N) \to X$ (считается, что G действует на $U \times (G \underset{H}{*} N)$ через второй сомножитель), ограничение которого на каждую G-орбиту инъективно. Поэтому существование с. о. п. для действия G на X эквивалентно существованию с. о. п. для действия G на $U \times (G \underset{H}{*} N)$. Последнее же, ввиду свойств однородных векторных расслоений, эквивалентно существованию с. о. п. для действия H на N. Поэтому вопрос сводится к случаю линейных действий. В частности, можно с самого начала считать, что алгебра $k[X]$ факториальна (этого будет достаточно для наших целей).

Пусть $f_1, \ldots, f_s$ — образующие поля $k(X)^G$.

Множество тех точек многообразия X, в которых каждая из функций f_i регулярна, является, ввиду факториальности алгебры $k[X]$, главным открытым, а потому и аффинным подмногообразием. Это позволяет, заменив X на это открытое множество, считать с самого начала, что $k(X)^G$ есть поле частных $k[X]^G$ и, значит, $(X/G, \pi_{X/G})$ — рациональный фактор, см. п. 2.4. Ввиду предложения 2.5, тогда существует такое непустое открытое множество $\Omega \subset X/G$, лежащее в главном страте, что каждый слой $\pi_{X/G}^{-1}(a)$, $a \in \Omega$, является замыканием орбиты размерности $m = m_{G,X}$. Поскольку слои над точками из главного страта эквивариантно изоморфны друг другу, это означает, что стабилизаторы точек из открытого множества $\pi_{X/G}^{-1}(\Omega) \setminus X_{m-1}$ сопряжены друг другу в G. ▶

Из этой теоремы следует, что если G редуктивна, а с. о. п. для действия G на X не существует, то в X нет инвариантных гладких открытых аффинных подмногообразий. Если вдобавок само X аффинно, то отсюда вытекает, что действие обладает следующим специальным свойством: любое замкнутое инвариантное подмногообразие Y в X пересекается с подмногообразием X^{sing} особых точек многообразия X. В самом деле, если бы $Y \cap X^{sing} = \varnothing$, то, по теореме 4.7, можно было бы найти ненулевой инвариант $f \in k[X]^G$, обращающийся в нуль на X^{sing}, и тогда $X_f = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ было бы инвариантным гладким открытым аффинным подмногообразием в X. В частности, это дает такое

Следствие. Если G редуктивна, X аффинно и действие G на X стабильно (см. п. 2.4), то с. о. п. существует.

Теорема 7.2 применима, в частности, к важнейшему типу действий — линейным действиям редуктивных групп, и приводит к естественному вопросу о явном описании для них с. о. п. Мы обсудим этот вопрос в п. 7.3. Отметим здесь следующий критерий:

Теорема 7.3. Пусть алгебраическая группа G линейно действует на конечномерном векторном пространстве V. Для того, чтобы группа G_v (соотв., ее касательная алгебра $\mathfrak{g}_v$) для точки $v \in V$ была с. о. п. (касательной алгеброй с. о. п.), необходимо и достаточно выполнение условий:

(1) множество $V_0^{G_v} = \{u \in V^{G_v} \mid G_u = G_v\}$ (соответственно, $V_0^{\mathfrak{g}_v} = \{u \in V^{\mathfrak{g}_v} \mid \mathfrak{g}_u = \mathfrak{g}_v\}$) плотно в V^{G_v} (в $V^{\mathfrak{g}_v}$);

(2) $V = \mathfrak{g}v + V^{G_v}$ (соотв., $V = \mathfrak{g}v + V^{\mathfrak{g}_v}$).

◀ Это вытекает из определения с. о. п. и того, что естественный морфизм $G \times V^{G_v} \to V$ (соотв., $G \times V^{\mathfrak{g}_v} \to V$) имеет на множестве $G \times V_0^{G_v}$ (соотв., $G \times V_0^{\mathfrak{g}_v}$) постоянный ранг. ▶

Применение теоремы 7.3 на практике сводится к явному вычислению $\mathfrak{g}_v$, G_v, $\mathfrak{g}v$, V^{G_v} и $V_{\mathfrak{g}}{}^v$ для выбранной подходящим образом точки v и проверке условий (1) и (2) (выбор такой точки v достаточно простого вида — с тем, чтобы можно было реально осуществить подсчеты, связанные с проверкой условий 1) и 2), — требует некоторой интуиции).

Приведем пример:

Пример 1°. Рассмотрим действие группы $G = \mathrm{SL}_2$ на пространстве бинарных форм $V = V_d$ (см. пример 1° п. 3.3). Для любых $g \in \mathrm{SL}_2$ и $f \in V_d$, $f \neq 0$, нули формы gf на проективной прямой $P^1 = Pk^2$ (с учетом их кратностей) получаются из нулей формы f с помощью дробно-линейного преобразования $g: P^1 \to P^1$ (см. [94]). Поскольку форма f однозначно с точностью до пропорциональности определяется набором своих нулей, а дробно-линейное преобразование проективной прямой однозначно определяется образами любых трех ее различных точек, то отсюда следует, что при $d \geqslant 3$ с. о. п. для действия группы SL_2 на пространстве V_d конечен. Более того, из того, что единственным дробно-линейным преобразованием, переводящим в себя «общий» набор из $d \geqslant 5$ различных точек проективной прямой, является тождественное преобразование, следует, что при $d \geqslant 5$ с. о. п. для действия группы SL_2 на пространстве V_d совпадает с ядром неэффективности этого действия, т. е. с $\{\pm E\}$ при четном d и с $\{E\}$ при нечетном d. Опишем теперь с. о. п. H_d для действия группы SL_2 на пространстве V_d в четырех оставшихся случаях. Мы воспользуемся теоремой 7.3 и ее обозначениями (явный вид стабилизаторов для указанных ниже форм получается из рассмотрения возможных дробно-линейных перестановок систем их нулей; описание подпространства $\mathfrak{g}v$, $v \in V_d$, непосредственно получается из того, что базисные

элементы $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}0 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ действуют на V_d соответственно как операторы $y\frac{\partial}{\partial x}$, $x\frac{\partial}{\partial x}-y\frac{\partial}{\partial y}$ и $x\frac{\partial}{\partial y}$).

Пусть $d=1$. Тогда G действует транзитивно на $V\setminus\{0\}$ и поэтому в качестве H_1 можно взять, например, стабилизатор формы y, т. е. подгруппу $\left\{\begin{pmatrix}1 & u\\ 0 & 1\end{pmatrix}\middle| u\in k\right\}$.

Пусть $d=2$. Рассмотрим форму $v=xy$. Тогда $G_v=\{\mathrm{diag}(t, t^{-1})\mid t\in k^*\}$, $\mathfrak{g}v=\langle x^2, y^2\rangle$, $V^{G_v}=\langle v\rangle$, $V_0^{G_v}=V^{G_v}\setminus\{0\}$. Поэтому $G_v=H_2$.

Пусть $d=3$ и $v=x^3+y^3$. Тогда $G_v=\{\mathrm{diag}(\varepsilon, \varepsilon^{-1})\mid \varepsilon^3=1\}$, $\mathfrak{g}v=\langle xy^2, x^2y, x^3-y^3\rangle$, $V^{G_v}=\langle x^3, y^3\rangle$ и $V_0^{G_v}=V^{G_v}\setminus(\langle x^3\rangle\cup\langle y^3\rangle)$. Поэтому $G_v=H_3$.

Пусть $d=4$ и $v=x^4+x^2y^2+y^4$. Тогда $G_v=\left\{a^lb^m \mid a=\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}, 0\leqslant l<4, m=0, 1\right\}$ — бинарная группа диэдра $\widetilde{D}_2$, $\mathfrak{g}v=\langle x^3y, xy^3, x^4-y^4\rangle$ и $V^{G_v}=\langle x^4+y^4, x^2y^2\rangle$. Нетрудно проверить, что множество $V_0^{G_v}$ открыто в V^{G_v}. Поэтому $G_v=H_4$.

С помощью соответствующей редукции к теореме 7.2 можно установить существование с. о. п. — при тех или иных предположениях о действии или многообразии — и для целого ряда действий редуктивных групп на неаффинных многообразиях. Приведем два примера.

Теорема 7.4. Пусть редуктивная группа G действует на гладком неприводимом проективном многообразии X. Если $X^G\neq\varnothing$, то для этого действия существует с. о. п.

◀Воспользуемся теоремой 1.7. Сохранив ее обозначения, будем считать, что $X\subset PV$. Ввиду редуктивности группы G, для любой точки $x\in PV$ в V найдется инвариантная гиперплоскость, дополнительная к прямой, определенной точкой x. Пусть L — проективизация этой гиперплоскости. Тогда $X\setminus L$ — непустое инвариантное аффинное открытое подмножество в X. Теперь утверждение вытекает из теоремы 7.2.▶

Теорема 7.5. Пусть редуктивная группа G действует на гладком неприводимом проективном многообразии X. Если $\mathrm{Pic}\,X=\mathbf{Z}$, то для этого действия существует с. о. п.

◀Вопрос, очевидно, сводится к случаю, когда в X нет открытой орбиты. Тогда, по следствию из теоремы 2.3, на X существует непостоянная инвариантная рациональная функция. Дополнение в X к носителю дивизора нулей этой функции является инвариантным открытым подмножеством в X. Поскольку X проективно и $\mathrm{Pic}\,X=\mathbf{Z}$, это подмножество аффинно. Утверждение вытекает теперь из теоремы 7.2.▶

Из этой теоремы, в частности, следует, что с. о. п. существует для действий редуктивных групп на проективных пространствах и грассманианах. Отсюда несложно вывести, что с. о. п. существует и для действий на произведениях проективных пространств.

В заключение этого пункта приведем еще один общий результат о с. о. п.

Теорема 7.6 (Брион, Луна, Вуст, [117]). *Пусть связная группа G действует на произвольном неприводимом многообразии X. Тогда для естественных действий на X борелевской подгруппы и максимальной унипотентной подгруппы группы G с. о. п. существуют.*

7.3. С. о. п. для линейных действий. В этом пункте рассматривается линейное действие редуктивной группы G в векторном пространстве $X=V$. Поскольку строение общих редуктивных групп в известной мере определяется строением трех их основных типов — конечных, торов и связных полупростых, а с. о. п. для действий групп первых двух типов совпадает с ядром неэффективности (см. п. 7.2), естественно рассмотреть отдельно случай, когда G связна и полупроста. Именно этот случай наиболее изучен. Далее до конца этого пункта G будет предполагаться связной и полупростой. Поскольку для любого конечномерного G-модуля V с. о. п. не изменится при добавлении к V тривиального прямого слагаемого, всюду в этом пункте предполагается, что $V^G=0$. Условимся также не различать изоморфные G-модули. Кроме того, мы будем всюду считать, что ядро неэффективности действия G на V конечно (и, следовательно, лежит в центре группы G) — этого всегда можно добиться, заменяя V на ее факторгруппу по связной компоненте единицы ядра неэффективности этого действия. В то же время полностью избавляться от ядра неэффективности (за счет факторизации G по нему) нецелесообразно, поскольку иногда бывает удобно считать G односвязной, заменив ее на универсальную накрывающую группу.

Как показывают уже простейшие примеры, для линейных действий связных полупростых групп с. о. п. может и не совпадать с ядром неэффективности. Тем не менее, действий, для которых это так, оказывается «мало», и поэтому их удается — во всяком случае, когда либо G проста, либо G-модуль V прост, — явно классифицировать.

Чтобы объяснить, о чем идет речь, введем определение: G-модуль V называется *локально сильно эффективным*, если ядро неэффективности действия G на любом его собственном подмодуле конечно. Например, всякий простой G-модуль, а если G проста, то вообще всякий G-модуль, сильно эффективен. Понятно, что «типичный» G-модуль, сильно эффективен.

Теорема 7.7. *Пусть G — связная полупростая группа. Тогда для всех локально сильно эффективных G-модулей V,*

кроме конечного их числа, с. о. п. действия G на V совпадает с ядром неэффективности этого действия.

Для простых групп доказательство может быть получено с помощью реализации простых G-модулей в алгебре функций $S=k[G/U]$ (см. п. 3.7) и использования свойств умножения в этой алгебре. Этот метод идет от работы Хаджиева [92], где с его помощью были получены первые результаты о «типичности» действий с конечным с. о. п. *Теорема 7.7 имеет качественный характер.* На самом же деле может быть получена значительно более точная информация (см. ниже).

Следующий пример показывает, что снять условие сильной эффективности в теореме 7.7 нельзя.

Пример 1°. Пусть $G=G_1\times G_2$, где G_1, G_2 — связные полупростые группы. Пусть V_i — какой-либо конечномерный G_i-модуль, причем с. о. п. для действия G_1 на V_1 бесконечен. Тогда с. о. п. для действия G на $V=V_1\oplus V_2$ бесконечен. Поэтому, меняя V_2, можно получить бесконечно много G-модулей V с этим свойством.

В настоящее время естественно возникающая (ввиду теоремы 7.7) задача о явной классификации сильно эффективных G-модулей V с отличным от ядра неэффективности с. о. п. полностью решена в случаях, когда либо группа G проста, либо модуль V прост.

Прежде всего естественно описать те случаи, когда $m_{G,V}<<\dim G$ (см. 7.1): согласно теореме 7.7, сильно эффективных G-модулей с таким свойством только конечное число (для данной G).

Пусть V — конечномерный G-модуль. Обозначим через $\mathfrak{g}$ касательную алгебру группы G и пусть $\mathfrak{g}=\bigoplus\limits_i\mathfrak{g}_i$ — ее разложение в сумму простых идеалов $\mathfrak{g}_i$. Мы можем считать, что $G\subset\subset\mathrm{GL}(V)$ и $\mathfrak{g}\subset L(V)$. Поскольку на простой алгебре Ли любые две инвариантные билинейные формы пропорциональны, а $\mathrm{Tr}(X\cdot Y)$ и $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\,X\cdot\mathrm{ad}\,Y)$ являются такими формами на $\mathfrak{g}_i$, то для любого i отношение

$$l(\mathfrak{g}_i, V)=\frac{\mathrm{Tr}\,X^2}{\mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}\,X)^2},\quad X\in\mathfrak{g}_i,$$

не зависит (если оно определено) от выбора X. Оно называется *$\mathfrak{g}_i$-индексом* G-модуля V. Поскольку в $\mathfrak{g}_i$ имеются полупростые элементы с рациональными собственными значениями, $l(\mathfrak{g}_i, V)$ является положительным рациональным числом. Если G и V просты, то (см. [44]):

$$l(\mathfrak{g}, V)=\frac{\dim V}{\dim\mathfrak{g}}\cdot\frac{|\lambda+\rho|^2-|\rho|^2}{|\lambda_0+\rho|^2-|\rho|^2},$$

где λ — старший вес V, λ_0 — старший корень $\mathfrak{g}$, ρ — полусумма положительных корней $\mathfrak{g}$, $|\mu|$ — длина вектора μ относительно инвариантного скалярного умножения на $\mathfrak{g}^*$.

Теорема 7.8 (Е. М. Андреев, Э. Б. Винберг, А. Г. Элашвили, [6]). Пусть $m_{G,V} < \dim G$. Тогда $l(\mathfrak{g}_i, V) \leqslant 1$ хотя бы для одного i.

Индекс обладает двумя полезными свойствами: он аддитивен по V и, если G проста, монотонен: если V_i — простой G-модуль со старшим весом λ_i, $i=1, 2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, а $\lambda_2 - \lambda_1$ является доминантным весом, то $l(\mathfrak{g}, V_1) < l(\mathfrak{g}, V_2)$. Это позволяет без труда найти, например, все G-модули V с $l(\mathfrak{g}, V) \leqslant 1$, если G проста. Вообще говоря, в этом случае (как и в случае, когда G полупроста, но не проста) теорема 7.8 дает необходимое, но не достаточное условие для того, чтобы $m_{G,V} < \dim G$. Однако апостериори получается следующая

Теорема 7.9 (Е. М. Андреев, Э. Б. Винберг, А. Г. Элашвили [6]). Если $G \subset \mathrm{GL}(V)$ — связная простая группа, действующая на V неприводимо, то следующие условия равносильны:

1) $m_{G,V} < \dim G$,
2) $l(\mathfrak{g}, V) \leqslant 1$,
3) $\dim V \leqslant \dim G$.

Все связные простые неприводимые группы, удовлетворяющие условиям этой теоремы, содержатся в сводной таблице в конце настоящей статьи.

Равенства в 2) и 3) достигаются только для присоединенных групп.

Определение действий с $m_{G,V} < \dim G$ среди тех, которые удовлетворяют необходимому условию из теоремы 7.8, осуществляется параллельно с описанием их с. о. п. (или его касательной алгебры) и основано по существу на непосредственных подсчетах (если структура с. о. п. не может быть найдена из каких-либо косвенных соображений). При этом используется теорема 7.3 и — при исследовании приводимых действий — следующее утверждение (см. [81]):

Пусть алгебраическая группа H действует на неприводимых многообразиях Y и Z. Предположим, что для действия H и Y существует с. о. п. H_*. Тогда, если для действия H_* на Z существует с. о. п. H_{**}, то и для действия H на $Y \times Z$ существует с. о. п., и он совпадает с H_{**}.

Для всех связных простых групп G эта работа была проделана А. Г. Элашвили [96], который классифицировал все G-модули V с $m_{G,V} < \dim G$ и нашел для них касательные алгебры с. о. п. В [97], привлекая ряд дополнительных соображений, он осуществил это также для простых модулей связных полупростых групп.

Аналогичный подход используется и для описания действий с $m_{G,V} = \dim G$, но с отличным от ядра неэффективности с. о. п.: устанавливается достаточное сильное общее необходимое условие, позволяющее найти обозримый список действий, заведомо включающий указанные, а затем с помощью непо-

средственных подсчетов (или косвенных соображений) из него выделяются эти указанные действия и для них явно описывается с. о. п. Идея получения такого необходимого условия была предложена Е. М. Андреевым и В. Л. Поповым в работе [7]. В частности, в [7] доказана следующая

Теорема 7.10. Пусть $G \subset \mathrm{GL}(V)$ — связная полупростая группа, $\mathfrak{g} = \bigoplus_i \mathfrak{g}_i$ — разложение ее касательной алгебры в сумму простых идеалов и S — подгруппа центра группы G, состоящая из скалярных преобразований векторного пространства V. Если $\dim V > 2(\dim G - \mathrm{rk}\, G)\max(\mathrm{rk}\, \mathfrak{g}_i + 1)$, то группа G/S действует на проективном пространстве PV и, тем более, группа G действует на векторном пространстве V с тривиальным с. о. п.

В [65, 66] А. М. Попов развил этот подход, усилив соответствующие оценки. Он довел сформулированную программу до конца и полностью классифицировал все связные простые и неприводимые полупростые линейные группы, имеющие конечный нетривиальный с. о. п., а также нашел этот с. о. п. (в [65, 66], кроме того, аналогичная информация получена для соответствующих действий на проективных пространствах и их произведениях).

Приведем в заключение этого пункта результаты по описанию с. о. п. в простом неприводимом случае. Мы увидим в § 8, что список действий из следующей теоремы может быть охарактеризован также целым рядом других замечательных свойств.

Теорема 7.11. Все связные простые неприводимые линейные алгебраические группы $G \subset \mathrm{GL}(V)$, имеющие нетривиальный с. о. п., содержатся в сводной таблице в конце статьи.

7.4. Замкнутые орбиты общего положения. Пусть редуктивная группа G эффективно действует на аффинном многообразии X. Рассмотрим морфизм факторизации $\pi : X \to X/G$.

Поскольку каждый слой $\pi^{-1}(a)$, $a \in X/G$ содержит единственную замкнутую орбиту $T(a)$, и ими исчерпываются все замкнутые в X орбиты, естественно интерпретировать X/G как «многообразие замкнутых орбит». Это позволяет говорить о свойствах замкнутых орбит общего положения: так называется любое свойство, выполненное одновременно для всех орбит вида $T(a)$, где a пробегает непустое открытое подмножество в X/G (зависящее от свойства). Подчеркнем, что при этом все эти орбиты вовсе не обязаны занимать в X «много места»: их объединение вполне может содержаться в собственном замкнутом подмногообразии. Таких орбит будет действительно «много» в X (а точнее, их объединение будет содержать непустое открытое подмножество в X) в точности тогда, когда орбита точки общего положения в X замкнута, т. е. действие G на X стабильно.

Одним из важных свойств замкнутых орбит общего положения (в отличие от орбит точек общего положения в X, см. пример 1° в п. 7.1!) является их эквивариантная изоморфность друг другу.

Теорема 7.12. Пусть редуктивная группа G действует на неприводимом аффинном многообразии X. Тогда в G существует такая редуктивная подгруппа C, что замкнутая орбита общего положения в X эквивариантно изоморфна G/C и в любой замкнутой орбите есть точка, неподвижная относительно C.

◀Как следует из теоремы 6.3, если орбита точки $x \in X$ замкнута, то у точки $a = \pi(x)$ найдется такая открытая окрестность $U \subset X/G$, что стабилизатор любой точки $y \in \pi^{-1}(U)$ сопряжен подгруппе группы G_x. Следовательно, в качестве C можно взять минимальный элемент (он существует ввиду нетеровости пространства G) множества $\{G_z | z \in X,\ Gz$ замкнута$\}$; редуктивность C следует из теоремы 4.17.▶

Если $T(a)$ эквивариантно изоморфна G/C, то точка $a \in X/G$ называется главной. Из приведенного рассуждения видно, что множество $(X/G)_{\mathrm{pr}}$ всех главных точек открыто в X/G, и что если с. о. п. G_* существует, то (с точностью до сопряженности)

$$G_* \subset C \tag{7.2}$$

Заметим, что ввиду редуктивности C, группа $N_G(C)$ также редуктивна.

7.5. С. о. п., сечения Шевалле и стабильность. Как было объяснено в п. 7.3, особое место среди всех линейных действий занимают действия с нетривиальным с. о. п. Следующий результат Луны и Ричардсона [204] показывает, ввиду (7.2), что такие действия обладают важным геометрическим свойством: для них существует нетривиальное сечение Шевалле, являющееся линейным подпространством.

Теорема 7.13. Сохраним обозначения теоремы 7.12 и пусть X нормально. Если $X^C/N_G(C)$ неприводимо, то X^C — сечение Шевалле для действия G на X.

◀Пусть $\varphi: X^C/N_G(C) \to X/G$ — естественный морфизм, определенный ограничением инвариантов на X^C. Ввиду теоремы 7.12, φ сюръективен. Пусть $a \in (X/G)_{\mathrm{pr}}$ и $x \in X^C \cap \pi^{-1}(a)$. Учитывая, что $T(a)$ изоморфна G/C и лежит в замыкании Gx, а $G_x \supset C$, получаем, из соображений размерности, что $Gx = T(a)$, $G_x = C$. Это означает, что $X^C \cap \pi^{-1}(a) = X^C \cap T(a) = N_G(C)x$. Следовательно, орбита $N_G(C)x$ замкнута в X^C и, кроме того, $N_G(C) = N_G(X^C)$. Отсюда вытекает, что φ — бирациональный изоморфизм. Так как X/G нормально (по теореме 3.16), мы получаем с помощью леммы 4.3, что φ — бирегулярный изоморфизм. Значит, X^C — сечение Шевалле.▶

Если не требовать линейности действия, то условие неприводимости $X^C/N_G(C)$, вообще говоря, может и не выполнять-

ся и, значит, X^C может не быть сечением Шевалле. Это, однако (как показали Луна [202] и Луна и Ричардсон [204]), происходит из-за того, что мы берем «лишние» неприводимые компоненты X^C: если исключить некоторые из них, то снова получается сечение Шевалле:

Теорема 7.14. Пусть X гладко. Тогда любая неприводимая компонента многообразия X^C, пересекающая множество $\pi^{-1}((X/G)_{pr})$, а также объединение всех таких компонент, является сечением Шевалле для действия G на X (ср. п. 2.8).

Ясно, что практическое использование (скажем, в случае линейных действий) этих сечений Шевалле для нахождения инвариантов упирается в нахождение группы C. В общем случае это — не простой вопрос, однако положение существенно упрощается (ввиду наличия богатой информации о группах G_*, см. п. 7.3), если действие стабильно, т. е. если в (7.2) имеет место равенство. Оказывается, для многих важных случаев (включая и линейные действия связных полупростых групп) можно дать простой критерий стабильности в терминах только группы G_*.

Теорема 7.15 (В. Л. Попов [67]). Пусть связная полупростая группа G действует на неприводимом аффинном многообразии X. Предположим, что алгебра $k[X]$ факториальна. Тогда для того чтобы действие G на X было стабильным, необходимо и достаточно, чтобы стабилизатор точки общего положения в X был редуктивен. В частности, если X гладко, то стабильность эквивалентна редуктивности с. о. п. G_*.

В [68] этот критерий распространен В. Л. Поповым на более общую ситуацию.

Используя имеющуюся информацию о G^*, можно явно найти с помощью теоремы 7.15 все нестабильные линейные действия связных простых и нестабильные неприводимые линейные действия связных полупростых групп — их оказывается сравнительно немного, так что нестабильность линейных действий следует рассматривать как исключительное явление. Из теорем 7.15 и 7.11 следует, например, что нестабильные связные простые неприводимые линейные группы исчерпываются списком

$$\mathrm{SL}_n,\ \textstyle\bigwedge^2\mathrm{SL}_{2n+1},\ \mathrm{Sp}_n,\ \mathrm{Spin}_{10}. \qquad (7.3)$$

Аналогично могут быть найдены нестабильные действия и в приводимом случае. Любопытно, что все действия (7.3) локально транзитивны, т. е. обладают открытой во всем пространстве орбитой (в приводимом нестабильном случае это уже не всегда так).

В заключение приведем примеры, показывающие, как с помощью описанных сечений Шевалле реально упрощается задача нахождения инвариантов.

Пример 1°. Пусть G связна и полупроста, а $V=\mathfrak{g}$ — ее касательная алгебра с присоединенным действием G. Пусть

$v \in V$ — регулярный полупростой элемент, т. е. такой, что $G_v = T$ — максимальный тор в G. Из рассмотрения корневого разложения $\mathfrak{g}$ относительно T следует, что $V^T = \mathfrak{t}$ — это касательная алгебра тора T и условия 1) и 2) теоремы 7.3 выполнены (здесь $V_0{}^T$ — это множество регулярных элементо в $\mathfrak{t}$, а $\mathfrak{g}v = \bigoplus \mathfrak{g}_\alpha$, где Δ — система корней, а $\mathfrak{g}_\alpha$ — корневое подпространство, отвечающее корню α). Поэтому T — это с. о. п. Ввиду редуктивности T, из теоремы 7.15 следует, что $C = T$, так что $\mathfrak{t}$ — сечение Шевалле. Поэтому ограничение инвариантов определяет изоморфизм алгебры $k[\mathfrak{g}]^G$ и алгебры $k[\mathfrak{t}]^W$, где $W = N_G(T)/T$ — группа Вейля; это и составляет содержание классического результата Шевалле [295] (который он получил иным способом).

Пример 2°. (Ср. п. 0.12) Рассмотрим действие группы $G = \mathrm{SL}_2$ на пространстве бинарных форм $V = V_d$ при $d \leqslant 4$ (см. пример 1° п. 3.3). Мы воспользуемся результатами и обозначениями из примера 1° п. 7.2.

Если $d = 1$, то $k[V]^G = k$, поскольку группа G транзитивно действует на $V \setminus \{0\}$. При $d = 2$, 3, 4 с. о. п. редуктивен, поэтому из теорем 7.13 и 7.15 следует, что $C = G_v$, а V^C — сечение Шевалле.

Пусть $d = 2$. Тогда $N_G(C) = \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t^{-1} & 0 \end{pmatrix} \middle| \, t \in k^* \right\}$, и легко видеть, что $k[V^C]^{N_G(C)} = k[\alpha^2]$, где α — координата на $V^C = \langle xy \rangle$. Значит, алгебра $k[V_2]^{\mathrm{SL}_2}$ порождена некоторым однородным инвариантом степени 2. Однако один однородный инвариант степени 2 можно указать сразу — это дискриминант Δ квадратичной бинарной формы. Значит, $k[V_2]^{\mathrm{SL}_2} = k[\Delta]$.

Пусть $d = 3$. Тогда снова $N_G(C) = \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t^{-1} & 0 \end{pmatrix} \middle| \, t \in k^* \right\}$. Если α и β — координатные функции на V^C относительно базиса x^3, y^3, то, очевидно, $k[V^C]^{N_G(C)} = k[\alpha^2\beta^2]$. Значит, алгебра $k[V_3]^{\mathrm{SL}_2}$ порождена некоторым однородным инвариантом степени 4. Поскольку дискриминант Δ кубической бинарной формы имеет степень 4, мы получаем отсюда, что $k[V_3]^{\mathrm{SL}_2} = k[\Delta]$ (ср. пример 1° п. 3.11).

Пусть $d = 4$. Тогда $N_G(C)$ — это бинарная группа октаэдра, см. [283]. Факторгруппа $N_G(C)/C$ изоморфна симметрической группе S_3, а ее двумерное представление, определенное действием $N_G(C)/C$ на V^C, эквивалентно естественному представлению группы S_3 в подпространстве $\{(a_1, a_2, a_3) \in k^3 \mid a_1 + a_2 + a_3 = 0\}$ пространства k^3. Согласно сказанному в п. 0.4, это означает, что алгебра $k[V^C]^{N_G(C)}$ порождена двумя однородными инвариантами степеней 2 и 3 (элементарными симметрическими функциями от соответствующих координат на V^C). Следовательно, $k[V_4]^{\mathrm{SL}_2} = k[P, H]$, где P и H — некоторые однород-

ные инварианты степеней 2 и 3 соответственно. Их явный вид указан в п. 0.12; его можно найти, решая, например, соответствующую систему линейных дифференциальных уравнений (см. пример 1° п. 3.3); другой способ указан в п. 0.12. (Ср. также пример 1° п. 3.11).

§ 8. Редуктивные линейные группы со свободной алгеброй инвариантов

8.1. Хорошие свойства в теории инвариантов. Так называемые «первая и вторая основные теоремы» классической теории инвариантов для редуктивной линейной группы $G\subset\mathrm{GL}(V)$ состоят в предъявлении конечной системы образующих и конечной системы определяющих соотношений алгебры инвариантов $k[V]^G$. Это удается сделать лишь в сравнительно немногих случаях. Например, алгебра инвариантов форм степени $d\geqslant 3$ от n переменных была описана классиками только при $n=2$, $d\leqslant 6$ и $n=d=3$; в XX в. к этому добавились случаи $n=2$, $d=7$, 8 [132], [276] и $n=4$, $d=3$ [19], [300]. Почти во всех оставшихся случаях задача кажется совершенно неразрешимой.

Причина этого явления может быть объяснена результатом В. Л. Попова [78], показывающим, что, как правило, алгебра инвариантов имеет очень высокую гомологическую размерность. Так, для бинарных форм степени $d\geqslant 7$, $d\neq 8$, эта размерность больше 10.

Следует также заметить, что в случае сложно устроенной алгебры инвариантов из явного вида ее образующих и соотношений, за редким исключением, трудно извлечь какую-нибудь полезную информацию.

Примерно то же самое можно сказать и о других задачах теории инвариантов. Они могут быть эффективно решены лишь для немногих (но, быть может, наиболее интересных) линейных групп. Естественно попытаться выделить эти группы с помощью каких-то объективных критериев. Существуют различные «хорошие» с точки зрения теории инвариантов свойства, которыми могут обладать редуктивные линейные группы. Таковыми являются, прежде всего, следующие три свойства:

(FA) Алгебра инвариантов $k[V]^G$ свободна, т. е. обладает алгебраически независимой системой однородных образующих.

(ED) Все слои морфизма факторизации $\pi: V\to V/G$ имеют одинаковую размерность.

(FO) В каждом слое морфизма π содержится лишь конечное число орбит.

Свойство (ED) означает, в алгебраических терминах, что существует система параметров алгебры $k[V]$ над $k[V]^G$, то

есть такая алгебраически независимая над $k[V]^G$ система элементов $u_1, \ldots, u_q \in k[V]$ (которые можно считать однородными), что алгебра $k[V]$ цела над подалгеброй $k[V]^G[u_1, \ldots, u_q]$.

В классических ситуациях, изучаемых в университетском курсе (мономиальное представление группы S_n, присоединенное представление группы GL_n и др.), имеют место все эти свойства.

В силу предложения 4.11 свойство (FA) равносильно тому, что $\pi(0)$ — неособая (регулярная) точка многообразия V/G. С другой стороны, очевидно, что если выполнено (FA), то само многообразие V/G неособо, ибо изоморфно аффинному пространству. Ввиду этого линейные группы, обладающие свойством (FA), называются *корегулярными* (в некоторых работах — косвободными).

Линейные группы, обладающие свойством (ED), называются *равноразмерными* (equidimensional). Линейные группы, обладающие свойством (FO), в некоторых работах называются *обозримыми* (visible).

Так как максимальная размерность слоев морфизма π равна размерности нуль-конуса $\mathfrak{N}_G(V)$ (см. п. 5.2), а минимальная — размерности типичного слоя, т. е. $\dim V - \dim V/G$, то свойство (ED) эквивалентно равенству

$$\dim \mathfrak{N}_G(V) = \dim V - \dim V/G. \tag{8.1}$$

Если в нуль-конусе содержится лишь конечное число орбит (как, например, для присоединенных групп) или если хотя бы какое-нибудь его плотное подмножество покрывается конечным числом орбит, то его размерность не превосходит размерности типичной орбиты, которая, в свою очередь, не превосходит размерности типичного слоя. Следовательно, в этом случае имеет место свойство (ED). В частности, из (FO) следует (ED).

Следствие 3 предложения 5.1 показывает, что для выполнения свойства (FO) достаточно, чтобы в нуль-конусе содержалось лишь конечное число орбит.

Конъюнкция свойств (FA) и (ED) равносильна следующему свойству:

(FM) Алгебра $k[V]$ является свободным $k[V]^G$-модулем.

Этот факт вытекает из следующего общего утверждения, относящегося к коммутативной алгебре:

Пусть $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ — алгебра многочленов, снабженная стандартной градуировкой, B — ее конечно порожденная однородная подалгебра. Тогда для того, чтобы алгебра A являлась свободным B-модулем, необходимо и достаточно, чтобы алгебра B была свободна и существовала система параметров алгебры A над B.

Наиболее тонкой частью является импликация (B-модуль A свободен) $\Rightarrow$ (алгебра B свободна), доказательство которой

приведено, например, в [112] (лемма 1 § 5 гл. V) и [283] (лемма 4.2.10).

Линейные группы, обладающие свойством (FM), называются *косвободными*. (См. в связи с этим п. 3.13).

Для конечных линейных групп слои морфизма факторизации совпадают с орбитами, так что свойство (FO), а значит, и (ED), всегда имеет место; что же касается свойства (FA), то известна следующая теорема.

Теорема 8.1. (Шепард—Тодд [273], Шевалле [120].) Алгебра инвариантов конечной линейной группы G свободна тогда и только тогда, когда группа G порождается псевдоотражениями.

(*Псевдоотражением* называется линейное преобразование, пространство неподвижных векторов которого имеет коразмерность 1.)

Доказательства этой теоремы имеются также в [112] и [283]. Все конечные линейные группы, порожденные псевдоотражениями, перечислены [273].

Для алгебраического тора $T\subset\mathrm{GL}(V)$ свойство (ED) (и одновременно свойство (FO)) имеет место тогда и только тогда, когда $V=V_1\oplus\ldots\oplus V_m$ и $T=T_1\times\ldots\times T_m$, где $T_i\subset\subset\mathrm{GL}(V_i)$ $(i=1,\ldots,m)$ и веса T_i на V_i либо линейно независимы, либо связаны единственной линейной зависимостью, имеющей положительные коэффициенты. Во всех этих случаях имеет место и свойство (FA). Однако существуют линейные алгебраические торы, обладающие свойством (FA), но не обладающие свойством (ED), например, одномерный тор $\{\mathrm{diag}\,(t, t, t^{-1}) : t\in k^*\}$.

Обзор результатов по классификации связных полупростых линейных групп, обладающих хорошими свойствами, будет дан в п. 8.7.

В пп. 8.2—8.6 будут изложены некоторые соображения, помогающие устанавливать наличие или отсутствие хороших свойств.

8.2. Наследуемость хороших свойств. Свойство редуктивных линейных групп назовем *наследуемым*, если наличие этого свойства у группы $G\subset\mathrm{GL}(V)$ влечет его наличие

1) у ограничения группы G на любое инвариантное подпространство $U\subset V$;

2) у слайс-группы (см. § 6) любого полупростого элемента пространства V.

Теорема 8.2. Свойства (FA), (ED) и (FO) являются наследуемыми.

◀ Доказательство наследуемости указанных свойств слайс-группами легко получается из теоремы о слайсе. Например, корегулярность слайс-группы полупростого элемента $v\in V$ равносильна тому, что $\pi(V)$ — неособая точка многообразия V/G;

но если группа G корегулярна, то многообразие V/G вообще неособо.

Наследуемость свойства (FO) ограничением группы G на инвариантное подпространство $U\subset V$ очевидна. Наследуемость корегулярности доказывается с помощью биградуировки алгебры $k[V]$, определяемой разложением пространства V в прямую сумму двух инвариантных подпространств: $V=U\oplus W$. Минимальная система образующих алгебры $k[V]^G$ может быть выбрана из биоднородных многочленов. Пусть $\{f_1, \ldots, f_n\}$ — такая система образующих, и пусть $f_1, \ldots, f_m$ — ее элементы, имеющие нулевую степень по W; тогда $k[U]^G=k[f_1, \ldots, f_m]$. С другой стороны, если система $\{f_1, \ldots, f_n\}$ алгебраически независима, то и ее подсистема $\{f_1, \ldots, f_m\}$ алгебраически независима.

Докажем наследуемость равноразмерности ограничением группы G на инвариантное подпространство U. В предыдущих обозначениях, имеем:

$$\pi^{-1}(\pi(U))=\{v\in V: f_{m+1}(v)=\ldots=f_n(v)=0\}$$

Пусть X — неприводимая компонента многообразия $\pi^{-1}(\pi(U))$, содержащая U, и $p: X\to U$ — проектирование параллельно W. Тогда $\pi p(x)=\pi(x)$ для любого $x\in X$. Рассмотрим коммутативный треугольник морфизмов

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "\pi|_X"'] & & U \arrow[dl, "\pi|_U"] \\ & \pi(U) & \end{tikzcd} \qquad (8.2)$$

Если слои морфизма π имеют одинаковую размерность, то тем же свойством обладает морфизм $\pi|_X$; но тогда из треугольника (8.2) легко усмотреть, что этим свойством должен обладать и морфизм $\pi|_U$. ▶

Пример 1°. Рассмотрим действие группы SL_2 в пространстве V_d бинарных форм степени $d\geqslant 3$. Стабилизатор Γ формы $v=x^d+y^d$ состоит из матриц вида $\begin{pmatrix}\varepsilon & 0\\ 0 & \varepsilon^{-1}\end{pmatrix}$ и, при четном d, $\begin{pmatrix}0 & \varepsilon\\ -\varepsilon^{-1} & 0\end{pmatrix}$, где $\varepsilon^d=1$. Как было показано в примере 2° п. 6.11, орбита формы v замкнута. Касательное пространство этой орбиты в точке v есть $\langle x^d-y^d,\ x^{d-1}y,\ xy^{d-1}\rangle$, а дополнительное к нему Γ-инвариантное подпространство, за вычетом тривиального слагаемого $\langle x^d+y^d\rangle$, есть

$$U=\langle x^{d-2}y^2,\ x^{d-3}y^3,\ \ldots,\ x^3y^{d-3},\ x^2y^{d-2}\rangle.$$

При $d\geqslant 5$ группа Γ не содержит ни одного элемента, действующего в U как псевдоотражение, так что алгебра $k[U]^\Gamma$ не свободна. По теореме 8.2 отсюда следует, что и алгебра

$k[V_d]^{SL_2}$ не свободна при $d \geqslant 5$. Напомним, что при $d \leqslant 4$ она свободна (см. пример 2° п. 75).

С помощью следствия теоремы 5.6 легко находится размерность нуль—конуса для действия группы SL_2 в пространстве V_d. Она оказывается равной $\left[\frac{d+3}{2}\right]$, а размерность типичного слоя морфизма факторизации при $d \geqslant 3$ равна 3 (см. теорему 3.3, предложение 2.5 и пример 1° п. 7.2). Следовательно, равноразмерность имеет место только при $d \leqslant 4$, т. е. в тех же случаях, что и корегулярность. К этому можно добавить, что именно при $d \leqslant 4$ стабилизатор общего положения действия группы SL_2 в пространстве V_d нетривиален (см. пример 1° п. 7.2).

8.3. Сравнение алгебр инвариантов конечных и связных редуктивных линейных групп. Д. И. Панюшев [59] обнаружил фундаментальное различие между факторпространствами (или, на другом языке, алгебрами инвариантов) конечных и связных редуктивных линейных групп. В случае $k = \mathbf{C}$ это различие может быть сформулировано в топологических терминах.

Неприводимое комплексное алгебраическое многообразие X назовем *сильно односвязным*, если для любого замкнутого подмногообразия $Y \subset X$ коразмерности $\geqslant 2$ многообразие $X' = X \setminus Y$ односвязно. Очевидно, что нормальное многообразие X сильно односвязно тогда и только тогда, когда многообразие X^{reg} его неособых точек односвязно в обычном смысле.

Автоморфизм алгебраического многообразия назовем *псевдоотражением*, если подмногообразие его неподвижных точек имеет коразмерность 1. (В случае линейных преобразований это определение согласуется с данным в п. 8.1.)

Предложение 8.3. Пусть Γ — конечная группа автоморфизмов неприводимого аффинного комплексного алгебраического многообразия X. Если фактормногообразие X/Γ сильно односвязно, то группа Γ порождается псевдоотражениями.

◀Как следует из сказанного в конце п. 6.6, X/Γ является одновременно факторпространством в топологическом смысле. Известна и легко доказывается [102, 27] следующая «лемма Чингисхана»: если Γ — дискретная группа гомеоморфизмов линейно связного хаусдорфова топологического пространства X, то из односвязности факторпространства X/Γ следует, что группа Γ порождается элементами, имеющими в X неподвижную точку[1]. В условиях леммы применим это утверждение к действию группы Γ на дополнении X' к объединению Y подмногообразий неподвижных точек всех элементов группы Γ, не являющихся псевдотражениями. Так как Y имеет коразмерность $\geqslant 2$ в X, то Y/Γ имеет коразмерность $\geqslant 2$ в X/Γ и, значит, $X'/\Gamma = (X/\Gamma) \setminus (Y/\Gamma)$ односвязно. Следовательно, группа

[1] Трудно установить, кто первым доказал это утверждение. Термин «лемма Чингисхана» предложил О. В. Шварцман.

Γ порождается элементами, имеющими неподвижные точки в X', т. е. псевдоотражениями.▶

Замечание. Предположение об аффинности многообразия X не является существенным. Достаточно, чтобы для действия группы Γ на X существовал геометрический фактор. (Об условиях существования такого фактора см. теорему 4.14.)

Редуктивную линейную группу $G \subset \mathrm{GL}(V)$ назовем *хорошей*, если никакая инвариантная гиперповерхность пространства V не отображается в подмногообразие коразмерности $\geqslant 2$ в V/G. Если группа G полупроста или равноразмерна, то она автоматически является хорошей. В самом деле, если G полупроста, то всякая инвариантная гиперповерхность $X \subset V$ может быть задана уравнением $f=0$, где $f \in k[V]^G$, и то же уравнение, но рассматриваемое на V/G, задает $\pi(X)$. Если G равноразмерна, то, вообще, полный прообраз любого подмногообразия в V/G есть подмногообразие той же коразмерности в V.

Предложение 8.4. Пусть G — хорошая связная редуктивная линейная группа, действующая в комплексном векторном пространстве V. Тогда факторпространство V/G сильно односвязно.

◀Так как многообразие V/G нормально (см. теорему 3.16), то подмногообразие $(V/G)^{\mathrm{sing}}$ его особых точек имеет коразмерность $\geqslant 2$, и достаточно доказать, что многообразие $(V/G)^{\mathrm{reg}} = (V/G) \setminus (V/G)^{\mathrm{sing}}$ односвязно. Положим $V' = \pi^{-1}((V/G)^{\mathrm{reg}})$. Так как G — хорошая линейная группа, то $V \setminus V' = \pi^{-1}((V/G)^{\mathrm{sing}})$ — подмногообразие коразмерности $\geqslant 2$ в V и, следовательно, V' — односвязное многообразие.

Ввиду связности группы G все ее орбиты и их замыкания неприводимы (как алгебраические многообразия) и, значит, линейно связны. Так как замыкания орбит любых двух точек, лежащих в одном слое морфизма π, пересекаются, то слои морфизма π также линейно связны.

Отображение π, как всякий морфизм комплексных алгебраических многообразий, является локально тривиальным топологическим расслоением (в смысле вещественной топологии) над некоторым непустым открытым в топологии Зарисского подмножеством $U \subset V/G$ [23]. Любой замкнутый путь на многообразии $(V/G)^{\mathrm{reg}}$ гомотопен пути, лежащему в $U \cap (V/G)^{\mathrm{reg}}$, а всякий такой путь может быть поднят в V'. Поэтому из односвязности V' и связности слоев следует односвязность $(V/G)^{\mathrm{reg}}$.▶

Сопоставление предложений 8.3 и 8.4 дает (в случае $k = \mathbf{C}$) следующую теорему.

Теорема 8.5. (Д. И. Панюшев [59].) Пусть $G \subset \mathrm{GL}(V)$ — хорошая связная редуктивная линейная группа и $\Gamma \subset \mathrm{GL}(U)$ — какая-либо конечная линейная группа. Если ал-

гебры $k[V]^G$ и $k[U]_\Gamma$ изоморфны, то группа Γ порождается псевдоотражениями (и, следовательно, обе эти алгебры свободны).

В [59] дано алгебраическое доказательство этой теоремы, пригодное для любого поля k.

Реально эта теорема может применяться в ситуации, описанной теоремой 7.13, когда удается априори установить изоморфность алгебр инвариантов различных линейных групп. В частности, будучи примененной к присоединенному представлению, она дает новое доказательство того, что группа Вейля порождается отражениями. В п. 8.5 мы рассмотрим более широкий класс редуктивных линейных групп, к которым могут быть применены эти соображения.

8.4. Случай двумерного фактора. Предложение 8.4 позволяет доказать также следующую полезную теорему, высказанную в [71] в качестве гипотезы В. Л. Поповым:

Теорема 8.6. [173]. Пусть $G \subset \mathrm{GL}(V)$ — хорошая связная редуктивная линейная группа. Если $\dim V/G \leqslant 2$, то группа G корегулярна и равноразмерна.

◀ Если $\dim V/G = 0$ или 1, то утверждения теоремы очевидны. Пусть $\dim V/G = 2$. Тогда равноразмерность имеет место по определению хорошей линейной группы. Для доказательства корегулярности нужно проверить, что $\pi(0)$ — неособая точка многообразия V/G. Так как V/G — двумерное нормальное многообразие, то оно может иметь только изолированные особенности. Согласно критерию Мамфорда [212] (в случае $k = \mathbf{C}$) точка $\pi(0)$ неособа, если дополнение к ней односвязно; но это свойство как раз выполнено ввиду сильной односвязности многообразия V/G. ▶

8.5. Присоединенные группы градуированных алгебр Ли (θ-группы). Пусть m — натуральное число или ∞. При $m < \infty$ пусть $\mathbf{Z}_m$ обозначает группу вычетов по модулю m, а $\mathbf{T}_m$ — группу корней m-ой степени из единицы; кроме того, будем считать, что $\mathbf{Z}_\infty = \mathbf{Z}$, а $\mathbf{T}_\infty = k^*$.

Если алгебра Ли $\mathfrak{h}$ снабжена $\mathbf{Z}_m$-градуировкой

$$\mathfrak{h} = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}_m} \mathfrak{h}_i, \tag{8.3}$$

то для любого $t \in \mathbf{T}_m$ формула

$$\theta(t)x = t^i x \text{ при } x \in \mathfrak{h}_i \tag{8.4}$$

задает ее автоморфизм, причем отображение $\theta : t \mapsto \theta(t)$ является гомоморфизмом группы $\mathbf{T}_m$ в группу $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{h}$. Обратно, любой гомоморфизм $\theta : \mathbf{T}_m \to \mathrm{Aut}\,\mathfrak{h}$ определяет $\mathbf{Z}_m$-градуировку алгебры $\mathfrak{h}$ так, что имеет место формула (8.4).

Пусть $\mathfrak{h}$ — полупростая алгебра Ли, снабженная $\mathbf{Z}_m$-градуировкой (8.3), и H — соответствующая ей односвязная алгебраическая группа. Автоморфизмы $\theta(t)$, $t \in \mathbf{T}_m$, алгебры $\mathfrak{h}$

могут быть подняты в группу H. Пусть H_0 — подгруппа их неподвижных точек. Это связная алгебраическая группа с касательной алгеброй $\mathfrak{h}_0$. Так как $[\mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}_1] \subset \mathfrak{h}_1$, то присоединенное представление группы H индуцирует путем ограничения линейное представление группы H_0 в пространстве $\mathfrak{h}_1 = V$. Образ G группы H_0 при этом представлении называется *присоединенной группой градуированной алгебры Ли* $\mathfrak{h}$. При $m=1$ это обычная присоединенная группа группы H (алгебры Ли $\mathfrak{h}$), при $m=2$ — группа изотропии симметрического пространства H/H_0.

Пусть (,) — инвариантное скалярное умножение на $\mathfrak{h}$. Из (8.4) следует, что

$$(\mathfrak{h}_i, \mathfrak{h}_j) = 0 \text{ при } i+j \neq 0, \tag{8.5}$$

так что пространства $\mathfrak{h}_i$ и $\mathfrak{h}_{-i}$ находятся в двойственности относительно скалярного умножения. В частности, на $\mathfrak{h}_0$ скалярное умножение невырожденно. Отсюда следует, что группа H_0, а значит, и группа G, редуктивна.

Имеют место градуированные аналоги разложения Жордана и теоремы Морозова. А именно, если $x = x_s + x_n$ — разложение Жордана в алгебре $\mathfrak{h}$ элемента $x \in \mathfrak{h}_1$, то $x_s, x_n \in \mathfrak{h}_1$. Если $e \in \mathfrak{h}_1$ — нильпотентный элемент, то существует $\mathfrak{sl}_2$ — тройка $\{e, h, f\}$, в которой $h \in \mathfrak{h}_0$ и $f \in \mathfrak{h}_{-1}$ [25], [27], [28].

При $x \in \mathfrak{h}_1$ имеем

$$[\mathfrak{h}, x] \cap \mathfrak{h}_1 = [\mathfrak{h}_0, x].$$

Это означает, что для подгруппы $H_0 \subset H$ и подпространства $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}$ выполняется условие леммы 1.10 и, следовательно, пересечение с $\mathfrak{h}_1 = V$ любой орбиты группы H в алгебре $\mathfrak{h}$ распадается на конечное число орбит одинаковой размерности группы G.

Используя перечисленные свойства, легко доказать, что G-орбита элемента $x \in V$ замкнута (соответственно, содержит в своем замыкании нуль) тогда и только тогда, когда x — полупростой (соответственно нильпотентный) элемент алгебры $\mathfrak{h}$, и что в V имеется лишь конечное число орбит нильпотентных элементов. Таким образом, группа G обладает свойством (FO).

В случае $m = \infty$ группа G содержит гомотетии, индуцированные автоморфизмами $\theta(t)$, $t \in k^*$, так что все элементы пространства V нильпотентны и $k[V]^G = k$. В этом случае представляет интерес рассмотреть меньшую линейную группу, не содержащую всех гомотетий. Пусть $\tilde{\mathfrak{h}}_0 \subset \mathfrak{h}_0$ — идеал коразмерности 1, ортогональный центральной подалгебре $d\theta(k)$, и $\tilde{H}_0$ — соответствующая связная подгруппа группы H_0. Образ $\tilde{G}$ подгруппы $\tilde{H}_0$ при линейном представлении группы H_0 в пространстве $\mathfrak{h}_1 = V$ назовем *приведенной присоединенной группой* $\mathbf{Z}$-градуированной алгебры Ли $\mathfrak{h}$.

Имеет место альтернатива (для неприводимых присоединенных групп это доказано в [165]):

1) либо $k[V]^{\widetilde{G}}=k$, и тогда все орбиты группы $\widetilde{G}$ совпадают с орбитами группы G;

2) либо $k[V]^{\widetilde{G}}=k[F]$, где F — некоторый однородный многочлен степени $d>0$, и тогда подмногообразия $F=c$ при $c\neq 0$ суть (гомотетичные) замкнутые орбиты группы $\widetilde{G}$, заполняющие открытую орбиту группы G, а прочие орбиты группы $\widetilde{G}$ совпадают с орбитами группы G.

Таким образом, группа $\widetilde{G}$ также обладает свойством (FO).

При $m<\infty$ полупростые элементы пространства V классифицируются аналогично тому, как это делается при $m=1$. А именно, максимальное коммутативное подпространство, состоящее из полупростых элементов пространства V, называется *картановским подпространством*. Любой полупростой элемент пространства V эквивалентен элементу фиксированного картановского подпространства $\mathfrak{c}$; два элемента из $\mathfrak{c}$ эквивалентны относительно G тогда и только тогда, когда они эквивалентны относительно действующей в $\mathfrak{c}$ конечной группы $W=N(\mathfrak{c})/Z(\mathfrak{c})$, где $N(\mathfrak{c})$ (соответственно $Z(\mathfrak{c})$) — нормализатор (соответственно централизатор) подпространства $\mathfrak{c}$ в группе G [27]. Группа W называется *группой Вейля градуированной алгебры Ли* $\mathfrak{h}$.

Из сказанного следует, что орбиты точек общего положения подпространства $\mathfrak{c}$ суть замкнутые орбиты общего положения для действия $G:V$. Легко видеть, что стабилизаторы этих точек совпадают с $Z(\mathfrak{c})$ и что $V^{Z(\mathfrak{c})}=\mathfrak{c}$. Согласно теореме 7.13 получаем отсюда, что $\mathfrak{c}$ — сечение Шевалле для действия $G:V$, т. е. гомоморфизм ограничения инвариантов

$$\rho: k[V]^G \to k[\mathfrak{c}]^W \tag{8.6}$$

является изоморфизмом.

Теорема 8.5 позволяет заключить, что группа W порождается псевдоотражениями и, значит, алгебра $k[V]^G$ свободна. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 8.7. Присоединенная группа любой $\mathbf{Z}_m$-градуированной полупростой алгебры Ли, а также приведенная присоединенная группа любой $\mathbf{Z}$-градуированной полупростой алгебры Ли, корегулярна и обладает свойством (FO).

В классических случаях $m=1$ и 2 ко всем перечисленным свойствам можно добавить следующие два:

1) действие группы G стабильно, т. е. полупростые элементы заполняют плотное подмножество пространства V;

2) группа Вейля в некотором базисе картановского подпространства записывается матрицами с рациональными элементами и, в частности, содержит только псевдоотражения порядка 2, т. е. настоящие отражения.

Ни то, ни другое более не верно при $m \geqslant 3$. Например, при $m=3$ в качестве групп Вейля появляются некоторые экзотические группы, порождаемые псевдоотражениями порядка 3.

Нильпотентные элементы полупростых алгебр Ли классифицируются методом Е. Б. Дынкина [44], основанным на теореме Морозова. Аналогичный метод может быть применен и в градуированной ситуации [26], [27], [36], [10]. В сочетании с изложенным выше методом классификации полупростых элементов и разложением Жордана это позволяет получить классификацию всех элементов пространства $V=\mathfrak{h}_1$ относительно присоединенной группы G любой заданной градуированной полупростой алгебры Ли $\mathfrak{h}$.

Этим способом получена классификация тривекторов 9-мерного пространства [36], четыревекторов 8-мерного пространства [8] и спиноров 16-мерного пространства [11]. См. также [5], [9], [133], [170].

Градуировки полупростых алгебр Ли и соответствующие им присоединенные группы удобно описываются в терминах аффинных систем корней [47], [27], [152], [34].

Линейные группы, изоморфные присоединенным группам градуированных полупростых алгебр Ли (соотв. приведенным присоединенным группам $\mathbf{Z}$-градуированных полупростых алгебр Ли), называются *θ-группами* (соотв. *приведенными θ-группами*). Все неприводимые простые θ-группы, а также неприводимые приведенные простые θ-группы, содержатся среди линейных групп, перечисленных в сводной таблице в конце статьи.

8.6. Полярные группы. Было бы хорошо дать аксиоматическое определение θ-групп. Такого определения не известно. Однако в работе Дадока и Каца [122] дано аксиоматическое определение более широкого класса редуктивных линейных групп, обладающих многими хорошими свойствами θ-групп.

Связная редуктивная линейная группа $G \subset \mathrm{GL}(V)$ называется *полярной*[1)], если в пространстве V существует подпространство $\mathfrak{c}$ со следующими свойствами:

1) все элементы $\mathfrak{c}$ полупросты;

2) $\dim \mathfrak{c} = \dim V/G$;

3) существует открытое подмножество в $\mathfrak{c}$, касательные пространства орбит точек которого совпадают (см. соглашения и обозначения).

Подпространство $\mathfrak{c}$ с такими свойствами называется *картановским подпространством.* Из 1) следует, что $\mathfrak{c} \cap \mathfrak{N}_G(V)=\{0\}$, а из 2) — что $\operatorname{codim} \mathfrak{N}_G(V) \geqslant \dim V/G$. Следовательно, всякая полярная группа равноразмерна.

[1)] Слово «полярная» связано с возможностью ввести в пространстве V некоторое подобие полярных координат.

Из тех же свойств картановского подпространства легко выводится, что морфизм $\pi|\mathfrak{c}:\mathfrak{c}\to V/G$ конечен и, значит, сюръективен. Последнее означает, что любой полупростой элемент пространства V эквивалентен элементу из $\mathfrak{c}$. В [122] доказано, что два элемента из $\mathfrak{c}$ эквивалентны относительно G тогда и только тогда, когда они эквивалентны относительно действующей в $\mathfrak{c}$ (конечной) группы $W=N(\mathfrak{c})/Z(\mathfrak{c})$. Отсюда следует, как и в случае θ-групп, что $\mathfrak{c}$ является сечением Шевалле для действия $G:V$ и что группа W порождается псевдоотражениями. Таким образом, всякая полярная группа корегулярна.

В [122] также доказано, что свойство полярности является наследуемым в смысле п. 8.2 и что все картановские подпространства эквивалентны.

К числу полярных групп относятся все θ-группы и, по тривиальным соображениям, все редуктивные линейные группы, для которых $\dim V/G\leqslant 1$. Существуют полярные группы, не принадлежащие ни одному из этих классов. Однако среди простых неприводимых линейных групп имеется только одна такая группа, а именно группа Spin_{13}, подробно изученная в [140].

8.7. Перечисление полупростых линейных групп с хорошими свойствами. Наряду со свойствами (FA), (ED) и (FO), введенными в п. 8.1, мы будем рассматривать обнаруживающее корреляцию с ними свойство.

(ST) Стабилизатор точки общего положения пространства V нетривиален.

В ряде работ (см. § 7) были найдены все группы, обладающие свойством (ST), в классе связных простых неприводимых линейных групп. Затем в том же классе линейных групп В. Г. Кац [48] перечислил все группы со свойством (FO), В. Л. Попов [71] — группы со свойством (ED) и, наконец, оба эти автора совместно с Э. Б. Винбергом [167] — группы со свойством (FA). Во всех случаях получился один и тот же список линейных групп, помещенный в сводную таблицу в конце настоящей статьи. (Все эти группы, за исключением Spin_{11} и Spin_{13}, являются θ-группами или приведенными θ-группами.) Так была установлена справедливость следующей теоремы.

Теорема 8.8. Для связных простых неприводимых линейных групп свойства (FA), (ED), (FO) и (ST) равносильны.

Бо́льшая часть импликаций, составляющих содержание этой теоремы, перестает быть верной в классе всех связных полупростых линейных групп. Так, примеры показывают, что в этом классе групп неверны импликации (FA)$\Rightarrow$(ED), (ED)$\Rightarrow$(FO), (ST)$\Rightarrow$(FA), (ED)$\Rightarrow$(ST). Однако авторам не известно примеров, опровергающих импликации (ED)$\Rightarrow$(FA) и (FO)$\Rightarrow$(ST). Первая из них составляет содержание гипотезы,

высказанной В. Л. Поповым [71] и получившей некоторую известность под названием *«русская гипотеза»*. Отметим, что, ввиду связности группы, алгебра инвариантов алгебраически замкнута в $k[V]$. Поскольку свойство (ED) также может быть выражено в чисто алгебраических терминах, это дает определенные основания надеяться, что русская гипотеза может быть следствием некоторого общего утверждения, относящегося целиком к коммутативной алгебре. Обсуждение того, каким может быть это утверждение, см. в [31].

Связные простые приводимые линейные группы со свойством (FA) перечислили О. М. Адамович и Е. О. Головина [3] и, независимо, Шварц [259]. Затем Шварц [260] выделил среди них группы, обладающие еще и свойством (ED) (и, тем самым, свойством (FM)), а О. М. Адамович [1] доказала, что все связные простые приводимые линейные группы, обладающие свойством (ED), содержатся в этом списке. Таким образом, русская гипотеза постфактум оказалась верной для всех связных простых линейных групп.

Далее, Литтельман [200] перечислил связные полупростые неприводимые линейные группы, обладающие свойством (FA) или (ED), и путем сличения списков установил справедливость русской гипотезы и для этого класса групп. Еще раньше Кац [165] нашел все связные полупростые неприводимые линейные группы со свойством (FO)[1]. Почти все они оказались θ-группами или приведенными θ-группами.

Наконец, в этом ряду работ следует упомянуть классификацию связных полупростых неприводимых линейных групп $G\subset \mathrm{GL}(V)$, для которых $\dim V/G\leqslant 1$. Эту классификацию проделали Сато и Кимура [257] и, независимо и более простым способом, Г. Б. Шпиз [95].

Все связные полупростые линейные группы со свойством (FA) к настоящему моменту не перечислены. Имеется, однако, следующая общая теорема.

Теорема 8.9. Для всякой связной полупростой алгебраической группы G имеется лишь конечное число таких линейных представлений $G\to \mathrm{GL}(V)$, что $V^G=0$ и алгебра $k[V]^G$ свободна. Более точно, для всякого такого представления

$$\dim V\leqslant 2\dim G, \tag{8.7}$$

а если представление неприводимо — то даже

$$\dim V\leqslant \frac{3}{2}\dim G+\frac{1}{2}. \tag{8.8}$$

Первая часть теоремы была доказана В. Л. Поповым в [77]. Там же была высказана одна гипотеза о ряде Пуанкаре алгебры инвариантов, из которой следовали бы оценки (8.7) и (8.8) (см. п. 3.11). Эта гипотеза была доказана Кнопом в [185].

[1]) В таблицах работы [165] имеются ошибки, исправленные в [122].

Разность между минимальным числом образующих алгебры инвариантов и ее степенью трансцендентности равна ее гомологической размерности (см. п.п. 3.9, 3.10). В Л. Попов установил в [78] аналог первой части теоремы 8.9 для любой заданной гомологической размерности n алгебры инвариантов. (Свободность этой алгебры означает, что $h=0$).

8.8. Сечения Вейерштрасса. В некоторых хороших случаях действие редуктивной линейной группы допускает сечение в виде линейного многообразия. Классический пример — нормальная форма Вейерштрасса

$$y^2z+x^3+pxz^2+qz^3 \tag{8.9}$$

неособой кубической формы от трех переменных. Формы вида (8.9) обазуют линейное многообразие, пересекающее каждую орбиту максимальной размерности группы SL_3 ровно в одной точке. Другой аналогичный пример — сечение Костанта присоединенного действия. Его точное описание мы дадим ниже.

Пусть связная редуктивная алгебраическая группа G линейно действует в векторном пространстве V. Назовем *сечением Вейерштрасса* этого действия линейное подмногообразие пространства V, которое изоморфно отображается на V/G при морфизме факторизации $\pi: V\to V/G$.

Очевидно, что сечение Вейерштрасса может существовать только тогда, когда алгебра $k[V]^G$ свободна. Кроме того, необходимо, чтобы в каждом слое морфизма π существовала точка, в которой этот морфизм имел бы максимальный ранг (равный $\dim V/G$).

Укажем способ построения сечения Вейерштрасса. Идея этого способа идет от работы Б. Костанта [187], в которой исследовалось присоединенное действие; в работах [188], [71], [73] этот способ был применен к некоторым другим действиям.

Пусть алгебра $k[V]^G$ свободно порождается однородными многочленами степеней $d_1, \ldots, d_r$ $(d_1\leqslant \ldots \leqslant d_r)$, и пусть $u\in V$ — неособая точка нуль-конуса $\mathfrak{N}=\mathfrak{N}_G(V)$, принадлежащая его неприводимой компоненте коразмерности r и имеющая коническую орбиту (все эти условия автоматически выполнены, если орбита элемента u открыта в $\mathfrak{N}$).

Существует такой рациональный полупростой элемент $h\in\mathfrak{g}$, что $hu=2u$. Имеем

$$V=T_u(\mathfrak{N})\oplus L,$$

где $hL\subset L$, $\dim L=r$. Пусть $c_1, \ldots, c_r$ $(c_1\geqslant \ldots \geqslant c_r)$ — собственные значения оператора h в L. Так как подпространство $U=\bigoplus_{c>0} V_c(h)$ содержится в нуль-конусе, то $U\subset T_u(\mathfrak{N})$. Следовательно, $c_1, \ldots, c_r\leqslant 0$.

Так же, как это сделано в [187] для присоединенной группы, доказываются следующие предложения:

Предложение 8.10. $2d_i \geqslant 2-c_i$ $(i=1, \ldots, r)$.

Предложение 8.11. Ранг морфизма π в точке u максимален (т. е. равен r) тогда и только тогда, когда $2d_i = 2-c_i$ $(i=1, \ldots, r)$.

Предложение 8.12. Если ранг морфизма π в точке u максимален, то линейное многообразие $u+L$ является сечением Вейерштрасса для группы G, причем размерность орбиты любой его точки не меньше, чем $\dim Gu$.

В частности, для присоединенной группы $\mathrm{Ad}(G) \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ связной редуктивной алгебраической группы G в качестве u следует взять регулярный нильпотентный элемент e алгебры $\mathfrak{g}$ (см. п. 5.7), а в качестве h — полупростой элемент соответствующей $\mathfrak{sl}_2$-тройки (e, h, f). В качестве L можно взять $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(f)$. Получаемое таким образом сечение $S=e+\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(f)$ называется сечением Костанта. Оно впервые было построено для любой редуктивной группы в работе Костанта [187]. Для группы GL_n похожее сечение (соответствующее другому выбору подпространства L) известно в классической литературе под названием «первая естественная нормальная форма матрицы» [39].

Из второй части предложения 8.12 и из неприводимости слоев морфизма факторизации для присоединенной группы следует, что орбиты всех точек сечения Костанта имеют максимальную размерность и что любая орбита максимальной размерности имеет с ним общую точку.

Наиболее трудным моментом в построении сечения Вейерштрасса до недавнего времени была проверка максимальности ранга морфизма факторизации в выбранной точке. Если известна сумма степеней образующих алгебры инвариантов, то это можно сделать с помощью предложений 8.10 и 8.11: достаточно проверить, что $2\Sigma d_i = \Sigma(2-c_i)$. Именно на этом пути было основано доказательство Костанта [187]; то же соображение использовалось в [188], [71]. Недавно была обнаружена возможность другого подхода. Используя совершенно иные соображения, Д. И. Панюшев [61], [62] обнаружил, что для обширного класса связных полупростых линейных групп со свободной алгеброй инвариантов ранг морфизма факторизации автоматически максимален в любой точке, орбита которой имеет максимальную размерность. Этот результат был усилен Ф. Кнопом [185] и в окончательной форме выглядит следующим образом:

Теорема 8.13. Пусть $G \subset \mathrm{GL}(V)$ — связная полупростая линейная группа. Если алгебра $k[V]^G$ свободна, то в любой точке орбиты максимальной размерности ранг морфизма факторизации $\pi: V \twoheadrightarrow V/G$ максимален (т. е. равен $\dim V/G$).

Следствие. Если в условиях теоремы нуль-конус $\mathfrak{N}$ пространства V содержит орбиту максимальной размерности,

то эта орбита открыта в $\mathfrak{N}$ и через любую ее точку можно провести сечение Вейерштрасса.

В частности, сечение Вейерштрасса существует для любой полупростой θ-группы.

§ 9. Классическая теория инвариантов

Предметом классической теории инвариантов до Гильберта было явное отыскание образующих и определяющих соотношений алгебр инвариантов классических линейных групп, действующих в пространствах тензоров того или иного вида. Решение этих двух задач в каждом конкретном случае называлось доказательством «первой основной теоремы» и «второй основной теоремы» соответственно [299], [42]. При этом использовались следующие общие соображения:

1) «символический метод», состоящий в замене инвариантов тензоров инвариантами систем векторов и линейных форм;

2) процедура поляризации (дифференцирования по одной векторной переменной по направлению другой векторной переменной), позволяющая «размножать» инварианты систем векторов;

3) редукция первой основной теоремы для системы m векторов n-мерного пространства к случаю $m \leqslant n$.

Мы попытаемся дать современное изложение этой теории (см. также [128], [291], [292], [293]).

9.1. Поляризация. Мы будем рассматривать многочлены от нескольких векторных переменных[1], каждая из которых принимает значения в фиксированном векторном пространстве V. *Число и обозначения этих переменных пока* не будут считаться фиксированными. В тех случаях, когда будет идти речь о степени многочлена по какой-либо из векторных переменных, будет подразумеваться его однородность по этой переменной.

Пусть f — многочлен от каких-то векторов. Для любых векторных переменных x и y (которые могут входить или не входить в число аргументов f) обозначим через $D_x^y f$ результат дифференцирования f по x по направлению y, т. е.

$$D_x^y f = \sum_i y_i \frac{\partial f}{\partial x_i}, \tag{9.1}$$

где x_i и y_i — координаты векторов x и y. В частности, если f не зависит от x, от $D_x^y f = 0$; если f линеен по x, то $D_x^y f$ — это просто результат подстановки в него y вместо x. Если f не зависит от y, то $D_x^y f$ линеен по y. Вообще, если f имеет сте-

[1] Выражение «многочлен от векторов $x, y, \ldots$» означает «многочлен от координат векторов $x, y, \ldots$»

пень p по x и q по y, то $D_x^y f$ имеет степень $p-1$ по x и $q+1$ по y.

Распространим определение (9.1) также на случай $x=y$. Очевидно, что $D_x^x f = pf$, если f имеет степень p по x.

Операторы вида D_x^y называются *операторами поляризации*. Они перестановочны с действием группы $\mathrm{GL}(V)$ в алгебре многочленов.

Операторы поляризации имеют простую интерпретацию в терминах теории алгебраических групп. Рассмотрим в прямой сумме m экземпляров пространства V, наряду с естественным действием группы $\mathrm{GL}(V)$, перестановочное с ним действие группы GL_m, при котором матрица $A \in \mathrm{GL}_m$ действует по правилу $(x_1, \ldots, x_m) \mapsto (x_1, \ldots, x_m)A^{-1}$, т. е. каждый вектор x_j заменяется на линейную комбинацию векторов $x_1, \ldots, x_m$ с коэффициентами, взятыми из j-го столбца матрицы A^{-1}. Это действие индуцирует действие группы GL_m в алгебре многочленов от $x_1, \ldots, x_m$. Явным образом, матрица $A=(a_{ij})$ действует на многочлен f по формуле

$$(Af)(x_1, \ldots, x_m) = f\left(\sum_i a_{i1}x_i, \ldots, \sum_i a_{im}x_i\right). \tag{9.2}$$

Из этой формулы следует, что дифференциал данного действия отображает матричную единицу $E_{ij} \in L_m$ (как элемент касательной алгебры группы GL_m) в оператор поляризации $D_{x_j}^{x_i}$.

Если многочлен f от векторных переменных имеет степень p по аргументу x, то оператор $P_x = \frac{1}{p!} D_x^{x_1} \ldots D_x^{x_p}$ (где $x_1, \ldots, x_p$ не входят в число аргументов f) переводит его в многочлен. симметричный и полилинейный по $x_1, \ldots, x_p$. Многочлен f восстанавливается по $P_x f$ путем подстановки x вместо $x_1, \ldots, x_p$. Если f однороден по каждому аргументу, то, проделав такую операцию со всеми его аргументами, мы получим полилинейную форму Pf, называемую *полной поляризацией* многочлена f. Многочлен f восстанавливается по ней путем подстановки исходных переменных.

Пусть теперь F — произвольная полилинейная форма от векторных переменных $u_1, \ldots, u_l$, и пусть $x_1, \ldots, x_m$ — какие-то векторные переменные. Назовем пространством многочленов, ассоциированным с формой F, и обозначим через $S^{x_1, \ldots, x_m}(F)$ линейную оболочку всех многочленов, получаемых из F путем подстановки переменных $x_1, \ldots, x_m$ в каком-либо порядке (вообще говоря, с повторениями) вместо $u_1, \ldots, u_l$. Очевидно, что это пространство инвариантно относительно группы GL_m.

9.2. Редукция первой основной теоремы. Пусть G — произвольная (можно считать ее алгебраической) линейная группа,

действующая в n-мерном векторном пространстве V. Рассмотрим задачу отыскания G-инвариантов систем векторов пространства V, т. е. инвариантов действия группы G в прямой сумме нескольких экземпляров пространства V (количество слагаемых пока не фиксировано).

Очевидно, что алгебра всех G-инвариантов систем векторов линейно порождается инвариантами, однородными по каждой векторной переменной. Далее, если f — какой-либо такой инвариант, то его полная поляризация Pf также является инвариантом. Поэтому если будут найдены все полилинейные инварианты, то все вообще однородные инварианты можно будет получить из них путем подстановок новых переменных (вообще говоря, с повторениями).

Определение. Набор $\{F_\alpha\}$ полилинейных G-инвариантов называется *полным набором типовых G-инвариантов* системы m векторов, если ассоциированные с формами F_α пространства многочленов $S^{x_1, \ldots, x_m}(F_\alpha)$ (см. п. 9.1) порождают алгебру всех G-инвариантов системы векторов $x_1, \ldots, x_m$. (Количество аргументов y форм F_α может быть различно и никак не связано с m.) Если это условие выполняется для любого m, то набор $\{F_\alpha\}$ называется полным набором типовых G-инвариантов (без указания числа векторов).

Обозначим через $\det$ ненулевую кососимметрическую n-линейную форму в пространстве V. Эта форма G-инвариантна тогда и только тогда, когда $G \subset \mathrm{SL}(V)$.

Теорема 9.1. 1) Всякий полный набор типовых G-инвариантов системы n векторов является уже полным набором типовых G-инвариантов (любого числа векторов).

2) Если $G \subset \mathrm{SL}(V)$, то всякий полный набор типовых G-инвариантов системы $n-1$ векторов вместе с формой $\det$ образует полный набор типовых G-инвариантов (любого числа векторов).

◀Рассмотрим действие группы GL_m в алгебре многочленов от векторных переменных $x_1, \ldots, x_m$ (см. п. 9.1). Так как это действие перестановочно с действием группы G, то оно индуцирует действие группы GL_m в алгебре $\mathfrak{A}_m$ всех G-инвариантов системы векторов $x_1, \ldots, x_m$.

Назовем G-инвариант *примитивным,* если он является примитивным вектором для группы GL_m, т. е. относительным инвариантом группы T_m треугольных матриц (и, значит, абсолютным инвариантом группы UT_m унитреугольных матриц). Из теории линейных представлений редуктивных алгебраических групп следует, что в каждом неприводимом GL_m-инвариантном подпространстве алгебры $\mathfrak{A}_m$ имеется (единственный с точностью до скалярного множителя) ненулевой примитивный инвариант.

Действие группы UT_m на систему векторов $x_1, \ldots, x_m$ состоит в том, что к каждому из них прибавляется произвольная

линейная комбинация предыдущих. Поэтому при $m>n$ система $(x_1, \ldots, x_m)$ общего положения UT_m-эквивалентна системе $(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$. Следовательно, примитивные инварианты системы векторов $x_1, \ldots, x_m$ не зависят от $x_{n+1}, \ldots, x_m$.

Пусть теперь $\{F_\alpha\}$ — полный набор типовых инвариантов системы n векторов и $\mathfrak{A}'_m$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{A}_m$, порожденная пространствами $S^{x_1, \ldots, x_m}(F_\alpha)$. Так как $S^{x_1, \ldots, x_m}(F_\alpha) \supset S^{x_1, \ldots, x_n}(F_\alpha)$, то алгебра $\mathfrak{A}'_m$ содержит все инварианты системы векторов $x_1, \ldots$ $\ldots, x_m$, не зависящие от $x_{n+1}, \ldots, x_m$ и, в частности, все примитивные инварианты. Так как она, кроме того, инвариантна относительно группы GL_m, то она совпадает с $\mathfrak{A}_m$.

Для доказательства второго утверждения теоремы достаточно рассмотреть случай $m=n$. Пусть $\{F_\alpha\}$ — полный набор типовых инвариантов системы $n-1$ векторов, $\mathfrak{A}_n$ — алгебра всех инвариантов системы векторов $x_1, \ldots, x_n$ и $\mathfrak{A}'_n$ — ее подалгебра, порожденная пространством $S^{x_1, \ldots, x_n}(F_\alpha)$. Всякая система $(x_1, \ldots, x_n)$ общего положения, удовлетворяющая условию $\det(x_1, \ldots, x_n) = 0$, UT_n-эквивалентна системе $(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$. Поэтому, рассуждая аналогично предыдущему, мы получим, что $\mathfrak{A}'_n$ совпадает с $\mathfrak{A}_n$ на гиперповерхности $\det(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Это означает, что $\mathfrak{A}_n = \mathfrak{A}'_n + \mathfrak{A}_n \det$; но отсюда уже следует, что алгебра $\mathfrak{A}$ порождается подалгеброй $\mathfrak{A}'_n$ и формой $\det$. ▶

Следствие. Для всякой редуктивной группы $G \subset \mathrm{GL}(V)$ существует конечный полный набор типовых G-инвариантов.

Отметим, что классическое доказательство теоремы 9.1 опиралось на так называемое тождество Капелли [242].

Развитая теория легко обобщается на случай нескольких векторных пространств. А именно, пусть заданы линейные представления $R_i: G \to \mathrm{GL}(V_i)$, $\dim V_i = n_i$ $(i=1, \ldots, k)$, и пусть нас интересуют инварианты действия группы G в прямой сумме нескольких экземпляров пространства V_1, нескольких экземпляров пространства V_2 и т. д. Как и в случае одного пространства, процесс поляризации сводит дело к нахождению полилинейных инвариантов. Набор полилинейных инвариантов называется полным набором типовых инвариантов, если с помощью подстановки новых переменных из него можно получить образующие алгебры инвариантов любого числа векторов.

Обозначим через $\det_i$ $(i=1, \ldots k)$ ненулевую кососимметрическую n_i-линейную форму в пространстве V_i и положим $\tilde{n}_i = n_i - 1$, если $R_i(G) \subset \mathrm{SL}(V_i)$, и $\tilde{n}_i = n_i$ в противном случае.

Теорема 9.2. В описанной выше ситуации всякий набор полилинейных инвариантов, из которого с помощью подстановки новых переменных можно получить образующие алгебры инвариантов системы из $\tilde{n}_1$ векторов пространства V_1, $\tilde{n}_2$ векторов про-

странства V_2 и т. д., вместе с формами $\det_i$ для таких i, что $R_i(G) \subset \mathrm{SL}(V_i)$, образует полный набор типовых инвариантов.

◀ В алгебре $\mathfrak{A}_{m_1, \ldots, m_k}$ инвариантов системы из m_1 векторов пространства V_1, m_2 векторов пространства V_2 и т. д. естественным образом действует группа $\mathrm{GL}_{m_1} \times \ldots \times \mathrm{GL}_{m_k}$. Инвариант называется примитивным, если он является относительным инвариантом группы $\mathrm{T}_{m_1} \times \ldots \times \mathrm{T}_{m_k}$ (и, значит, абсолютным инвариантом группы $\mathrm{UT}_{m_1} \times \ldots \times \mathrm{UT}_{m_k}$). Далее проводится такое же рассуждение, как при доказательстве теоремы 9.1. ▶

9.3. Инварианты систем векторов и линейных форм. Теоремы предыдущего пункта могут быть применены к нахождению инвариантов систем векторов и линейных форм относительно классических линейных групп GL_n, SL_n, O_n, SO_n и Sp_n. Ниже приводится сводная таблица полных наборов типовых инвариантов для этих групп. В ней векторы обозначаются латинскими буквами, линейные формы — греческими. Значение линейной формы φ на векторе u обозначается через (u, φ). Также круглыми скобками в случаях O_n, SO_n и Sp_n обозначается инвариантная (симметрическая или кососимметрическая) билинейная форма. Определяемый этой формой канонический изоморфизм между основным пространством и его сопряженным позволяет в этих случаях не различать векторы и линейные формы.

G	Типовые инварианты
GL_n	(u, φ)
SL_n	(u, φ), $\det(u_1, \ldots, u_n)$, $\det(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$
O_n	(u, v)
SO_n	(u, v), $\det(u_1, \ldots, u_n)$
Sp_n	(u, v)

◀ В случае GL_n нам достаточно доказать, что алгебра инвариантов системы n векторов $x_1, \ldots, x_n$ и n линейных форм $\xi_1, \ldots, \xi_n$ порождается многочленами (x_i, ξ_j). С помощью преобразования из группы GL_n систему векторов $(x_1, \ldots, x_n)$ общего положения можно перевести в стандартный базис $(e_1, \ldots, e_n)$ пространства k^n. Следовательно, при ограничении на линейное многообразие M, задаваемое уравнениями $x_1 = e_1, \ldots, x_n = e_n$, алгебра инвариантов изоморфно вкладывается в $k[M]$. Так как инварианты (x_i, ξ_j) при этом отображаются на координатные функции многообразия M, то они порождают алгебру инвариантов. Аналогично рассматривается случай SL_n. В случае O_n удобно сочетать теорему 9.1 с другими соображе-

ниями. Достаточно доказать, что алгебра инвариантов системы n векторов $x_1, \ldots, x_n$ порождается многочленами (x_i, x_j). Сопоставив каждой системе n векторов ее матрицу Грама, мы получим отображение прямой суммы n экземпляров пространства k^n на пространство всех симметричных матриц n-го порядка, постоянное на орбитах группы O_n и разделяющее орбиты общего положения. По теореме 4.12 отсюда следует, см. пример 1° п. 4.5, что многочлены (x_i, x_j) порождают алгебру инвариантов. Аналогично рассматриваются случаи SO_n и Sp_n. ▶

Инварианты систем векторов найдены также для простейшего (7-мерного) неприводимого линейного представления группы G_2 [89], [261], [263] и для простейшего точного (8-мерного) неприводимого линейного представления группы $Spin_7$ [263] и для представления группы SL_2 в пространстве кубических бинарных форм [262].

9.4. Соотношения между инвариантами систем векторов и линейных форм. В самой общей ситуации, описанной в конце п. 9.2, всякое соотношение между инвариантами системы векторов с помощью поляризации превращается в соотношение, полилинейное по участвующим в нем векторным переменным. Обратно, при подстановке в это полилинейное соотношение исходных переменных получается исходное соотношение. Поэтому отыскание всех соотношений между инвариантами (любого числа векторов) сводится к отысканию полилинейных соотношений.

Определение. Набор полилинейных соотношений между типовыми инвариантами называется *полным набором типовых соотношений*, если с помощью подстановки новых векторных переменных (вообще говоря, с повторениями) из них можно получить определяющие соотношения алгебры инвариантов любого числа векторов.

В следующей таблице указаны полные наборы типовых соотношений между инвариантами систем векторов и линейных форм относительно классических линейных групп. Крышка над каким-либо символом означает его пропуск в последовательности. Через $\mathrm{pf}\, A$ обозначается пфаффиан (см., например, [112]) кососимметричной матрицы четного порядка. (Напомним, что $(\mathrm{pf}\, A)^2 = \det A$).

G	Типовые соотношения
GL_n	$\det((u_i, \varphi_j))_{i,j=0}^n=0$
SL_n	$\det((u_i, \varphi_j))_{i,j=1}^n=\det(u_1,\ldots,u_n)\det(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$
	$\sum\limits_i(-1)^i\det(u_0,\ldots,\hat{u}_i,\ldots,u_n)(u_i, \varphi)=0$
	$\sum\limits_i(-1)^i\det(\varphi_0,\ldots,\hat{\varphi}_i,\ldots,\varphi_n)(u, \varphi_i)=0$
	$\sum\limits_i(-1)^i\det(u_0,\ldots,\hat{u}_i,\ldots,u_n)\det(u_i, v_1,\ldots,v_{n-1})=0$
	$\sum\limits_i(-1)^i\det(\varphi_0,\ldots,\hat{\varphi}_i,\ldots,\varphi_n)\det(\varphi_i, \psi_1,\ldots,\psi_{n-1})=0$
O_n	$\det((u_i, v_j))_{i,j=0}^n=0$
SO_n	$\det((u_i, v_j))_{i,j=0}^n=0$
	$\det((u_i, v_j))_{i,j=1}^n=\det(u_1,\ldots,u_n)\det(v_1,\ldots,v_n)$
Sp_n	$\mathrm{Pf}((u_i, u_j))_{i,j=1}^k=0,\ k=n+2,\ n+4,\ldots,2n$
	$\det((u_i, v_j))_{i,j=0}^n=0$

◀То, что соотношения между инвариантами, получаемые из указанных в таблице типовых соотношений, геометрически описывают факторпространство — это в каждом случае элементарный факт линейной алгебры. Например, в случае O_n они описывают многообразие симметричных матриц ранга $\leqslant n$, а из линейной алгебры известно, что всякая такая матрица является матрицей Грама некоторой системы векторов пространства k^n. В случае Sp_n для геометрического описания факторпространства, состоящего из кососимметричных матриц ранга $\leqslant n$, достаточно соотношений, получаемых из последнего типового соотношения. В случае SL_n соотношения, получаемые из четвертого (а также пятого) типового соотношения, — это известные квадратичные соотношения, связывающие грассмановы координаты разложимого n-вектора (см., напр., [159]).

Более тонким является утверждение о том, что рассматриваемые соотношения порождают идеал всех соотношений между инвариантами. Для его доказательства можно воспользоваться тем, что действие группы GL_m (соответственно $\mathrm{GL}_m\times\times\mathrm{GL}_p$) в пространстве U систем m векторов (соответственно m векторов и p линейных форм), описанное в п. 9.2, индуцирует ее действие в факторпространстве U/G. Нетрудно видеть, что это действие локально транзитивно. Это дает возможность найти касательное пространство многообразия U/G в точке общего положения. После этого нетрудно проверить, что дифференциалы соотношений, получаемых из указанных в таблице типовых соотношений, в точке общего положения многообразия

U/G задают как раз его касательное пространство, а отсюда, как известно [187], [189], следует, что эти соотношения порождают идеал многообразия U/G. ▶

Другие доказательства см. в [299], [291].

9.5. Инварианты тензоров. Пусть $G\subset \mathrm{GL}(V)$ — какая-либо линейная группа и $T_p^m(V)$ — пространство тензоров типа (m, p) над V. Процесс поляризации сводит отыскание однородных G-инвариантов системы тензоров $T_1 \in T_{p_1}^{m_1}(V), \ldots, T_r \in T_{p_r}^{m_r}(V)$ к отысканию полилинейных G-инвариантов систем любого числа тензоров этих типов.

Далее, имеется естественный изоморфизм между пространством полилинейных форм от s тензоров $T_1 \in T_{p_1}^{m_1}(V), \ldots, T_s \in T_{p_s}^{m_s}(V)$ и пространством полилинейных форм от $M = m_1 + \ldots + m_s$ векторов $u_{ij} \in V$ $(i = 1, \ldots, s;\ j = 1, \ldots, m_i)$ и $P = p_1 + \ldots + p_s$ линейных форм $\varphi_{ij} \in V^*$ $(i = 1, \ldots, s;\ j = 1, \ldots, p_i)$, при котором каждой полилинейной форме F от тензоров $T_1, \ldots, T_s$ отвечает полилинейная форма

$$\hat{F}(u_{11}, \ldots, u_{1m_1}, \ldots, u_{sl}, \ldots, u_{sm_s}, \varphi_{11}, \ldots, \varphi_{1p_1}, \ldots, \varphi_{sl}, \ldots, \varphi_{sp_s}) =$$
$$= F(u_{11} \otimes \ldots \otimes u_{1m_1} \otimes \varphi_{11} \otimes \ldots \otimes \varphi_{1p_1}, \ldots, u_{sl} \otimes \ldots \otimes u_{sm_s} \otimes \varphi_{sl} \otimes \ldots$$
$$\ldots \otimes \varphi_{sm_s}). \qquad (9.3)$$

Очевидно, что форма F инвариантна тогда и только тогда, когда форма $\hat{F}$ инвариантна. Тем самым отыскание полилинейных инвариантов систем тензоров сводится к отысканию полилинейных инвариантов систем векторов и линейных форм. Это составляет содержание так называемого *символического метода* классической теории инвариантов.

Полилинейные инварианты систем векторов и линейных форм относительно классических линейных групп — это линейные комбинации произведений указанных в таблице п. 9.3 типовых инвариантов, взятых от различных аргументов. Какие инварианты систем тензоров отвечают произведениям типовых инвариантов систем векторов и линейных форм? Рассмотрим, например, случай GL_n. Всякое произведение типовых инвариантов (взятых от различных аргументов) в этом случае имеет вид

$$\hat{F}(u_1, \ldots, u_M, \varphi_1, \ldots, \varphi_M) = (u_1, \varphi_1) \ldots (u_M, \varphi_M).$$

Так как (u, φ) есть результат свертки тензора $u \otimes \varphi$, то форме $\hat{F}$ согласно (9.3) отвечает полилинейная форма F от тензоров $T_1, \ldots, T_s$, значение $F(T_1, \ldots, T_s)$ которой есть результат полной свертки тензора $T_1 \otimes \ldots \otimes T_s$ при каком-то взаимно однозначном соответствии между его верхними и нижними индексами.

Для каждой из остальных классических групп имеются типовые инварианты, отличные от (u, φ). Назовем их основными тензорами данной группы. Таковыми являются для SL_n — тензор det и аналогичный ему контравариантный тензор $\det^{-1}$, для O_n — метрический тензор g (инвариантная симметрическая билинейная форма), для SO_n — тензоры det и g, для Sp_n — метрический тензор g (инвариантная кососимметрическая билинейная форма).

Если форма $\hat{F}$ есть произведение форм вида (u_i, φ_i) и каких-то основных тензоров $B_1, \ldots, B_q$, то $F(T_1, \ldots, T_s)$ есть результат полной свертки тензора $T_1 \otimes \ldots \otimes T_s \otimes B_1 \otimes \ldots \otimes B_q$.

Для групп O_n, SO_n и Sp_n в таблице п. 9.3 указаны только типовые инварианты систем векторов. Поэтому предыдущие рассуждения в этих случаях применимы только к контравариантным тензорам, а для отыскания инвариантов систем произвольных тензоров следует предварительно поднять их нижние индексы путем свертки с контравариантным тензором g^{-1}, обратным к метрическому тензору g. Если же мы хотим иметь дело сразу с тензорами произвольного типа, то мы должны включить тензор g^{-1} в число основных тензоров.

Учитывая все вышеизложенное, мы приходим к следующей окончательной формулировке.

Теорема 9.3. *Алгебра инвариантов системы тензоров $T_1, \ldots, T_r$ относительно классической линейной группы G линейно порождается всевозможными полными свертками всевозможных тензорных произведений тензоров $T_1, \ldots, T_r$ и основных тензоров группы G. (Каждый из перечисленных тензоров может входить в произведение в произвольном числе экземпляров, но произведение должно быть составлено так, чтобы число его верхних индексов равнялось числу нижних).*

Сделаем два замечания, облегчающих применение этой теоремы. Во-первых, так как $(\det \otimes \det^{-1})^{i_1 \ldots i_n}_{j_1 \ldots j_n}$ есть результат альтернирования произведения $\delta^{i_1}_{j_1} \ldots \delta^{i_n}_{j_n}$ символов Кронекера, то в случае SL_n мы можем не рассматривать произведений, в которых участвуют одновременно det и $\det^{-1}$. Во-вторых, так как $(g \otimes g^{-1})^{ik}_{kj} = \delta^i_j$, то в случаях O_n, SO_n и Sp_n мы можем не рассматривать сверток, в которых какие-то множители вида g и g^{-1} сворачиваются друг с другом хотя бы по одной паре индексов.

Слабостью символического метода является то, что выделение конечной (и, тем более, минимальной) системы образующих алгебры инвариантов из получаемых при его помощи инвариантов, как правило, оказывается весьма непростым делом, требующим использования иных соображений.

Примеры. 1°. Инварианты системы линейных операторов $A_1, \ldots, A_r$ (относительно группы GL_n или SL_n, что все равно). Это редкий случай, когда комбинаторика

всевозможных сверток, описываемых теоремой 9.3, легко просматривается. А именно, очевидно, что любая такая свертка есть произведение сверток вида

$$A^i_j B^j_k \ldots C^l_i = \operatorname{tr} AB \ldots C, \tag{9.4}$$

где A, B, ..., C — какие-то из данных операторов. Между инвариантами вида (9.4) имеются соотношения. Например, при $n=2$ по теореме Гамильтона — Кэли для любого оператора A имеем

$$A^2 - (\operatorname{tr} A) A + \frac{1}{2} ((\operatorname{tr} A)^2 - \operatorname{tr} A^2) E = 0.$$

Умножая это равенство на оператор B и беря след, получаем соотношение

$$\operatorname{tr} A^2 B = \operatorname{tr} A \operatorname{tr} AB + \frac{1}{2} \operatorname{tr} A^2 \operatorname{tr} B - \frac{1}{2} (\operatorname{tr} A)^2 \operatorname{tr} B.$$

С помощью анализа подобных соотношений найдены [87], [278] минимальные системы образующих алгебр инвариантов любого числа линейных операторов при $n=2$ и 3. При $n=2$ такую систему образуют, например, инварианты $\operatorname{tr} A_i$, $\operatorname{tr} A_i A_j$ $(i \leqslant j)$, $\operatorname{tr} A_i A_j A_k$ $(i<j<k)$. В общем случае доказано [86], [241], что все соотношения между инвариантами (9.4) являются в некотором точно определенном смысле следствиями теоремы Гамильтона — Кэли.

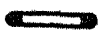
2°. Ортогональные и симплектические инварианты системы линейных операторов (т. е. инварианты относительно группы O_n или Sp_n). Представив каждый из данных операторов в виде суммы симметрического и кососимметрического, мы можем свести дело к случаю, когда все данные операторы — симметрические или кососимметрические. В этом случае тождество $(A \otimes g)^k{}_{ikj} = \pm (g \otimes A)^k{}_{ikj}$ позволяет переставлять данные операторы с экземплярами метрического тензора g, благодаря чему тензоры g и g^{-1} полностью исключаются и мы получаем лишь инварианты вида (9.4). Однако теперь между ними имеются соотношения, не вытекающие из теоремы Гамильтона — Кэли. Более подробно об этом см. [87], [249].

3°. Инварианты бинарной формы f степени d (относительно группы SL_2). Будем рассматривать форму f как симметрический тензор типа $(0, d)$. Согласно теореме 9.3 ее инварианты получаются в результате всевозможных полных сверток тензоров вида

$$\underbrace{f \otimes \ldots \otimes f}_{k} \otimes \underbrace{\det{}^{-1} \otimes \ldots \otimes \det{}^{-1}}_{l}, \tag{9.5}$$

где $dk = 2l$. Схема такой свертки может быть описана при помощи графа Γ с k вершинами, соответствующими множителям

f в (9.5), и l ребрами, соответствующими множителям $\det^{-1}$, в котором вершина и ребро инцидентны, если соответствующие им множители сворачиваются по (одной) паре индексов (при свертке по двум парам индексов получается нуль, так что этот случай можно на рассматривать). Каждая вершина графа Γ инцидентна ровно d ребрам. Если граф Γ является несвязным объединением графов Γ_1 и Γ_2, то определяемый им инвариант является произведением инвариантов, определяемых графами Γ_1 и Γ_2. Поэтому можно ограничиться связными графами. Далее, если граф Γ допускает автоморфизм, меняющий ориентацию нечетного числа ребер (при любой их первоначальной ориентации), то определяемый им инвариант равен нулю. Учитывая эти соображения и зная степени образующих алгебры инвариантов (см. п. 0.12 и пример 2° п. 7.5), при $d\leqslant 4$ нетрудно показать, что эти образующие определяются следующими графами:

при $d=2$ — , при $d=3$ — , при $d=4$ —  и . (Ср п. 0.12)

Другие примеры, исследуемые при помощи символического метода, см. в [3], [41], [42], [45], [88].

СВОДНАЯ ТАБЛИЦА

В настоящей таблице перечислены все связные неприводимые простые линейные группы $G\subset \mathrm{SL}(V)$ со свободной алгеброй инвариантов, см. § 8. Среди связных неприводимых простых линейных групп они могут быть также охарактеризованы как все: 1) равноразмерные группы, 2) косвободные группы, 3) обозримые группы, 4) полярные группы, 5) группы с нетривиальным стабилизатором общего положения, см. §§ 8 и 7.

В столбце «G» символами SL_n, Sp_n, SO_n, G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 обозначаются соответствующие простые алгебраические группы в их простейших линейных представлениях. Через Spin_n обозначается образ односвязной накрывающей группы SO_n при спинорном (если n нечетно) или полуспинорном (если n четно) представлении. Символом $\mathrm{S}^m H$ (соотв., $\bigwedge^m H$) обозначается m-я симметрическая (соотв., внешняя) степень линейной группы H, а символом $\mathrm{S}_0^m H$ (соотв., $\bigwedge_0^m H$) — старшая неприводимая компонента этой группы. Полезно иметь в виду, что $\mathrm{SO}_3 = S^2\mathrm{SL}_2$, $\mathrm{SO}_5 = \bigwedge_0^2 \mathrm{Sp}_4$, $\mathrm{SO}_6 = \bigwedge^2 \mathrm{SL}_4$, $\mathrm{S}_0^2\mathrm{SO}_3 = \mathrm{S}^4\mathrm{SL}_2$.

В столбце «G_*» содержится информация о стабилизаторе общего положения G_* линейной группы G, см. § 7. А именно, если он конечен, то указывается изоморфная ему группа, а

№	G	$\dim V$	G_*	$\dim V/G$	Степени инвариантов	θ	Литература
1	SL_n	n	$\mathfrak{sl}_{n-1}+\mathfrak{u}_{n-1}$	0	0	$(\mathfrak{sl}_{n+1}, \infty)$	
2	SO_n, $n\neq 4$, $n\geqslant 3$	n	$\mathfrak{so}_{n-1}$	1	2	$(\mathfrak{so}_{n+1}, 2)$	
3	Sp_{2n}, $n\geqslant 2$	$2n$	$\mathfrak{sp}_{2n-2}+\mathfrak{u}_{2n-1}$	0	0	$(\mathfrak{sl}_{2n+1}, 4)$	
4	$AdSL_n$	n^2-1	$\mathfrak{t}_{n-1}$	$n-1$	$2, 3, \ldots, n$	$(\mathfrak{sl}_n, 1)$	[39]
5	S^2SL_n	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\mathfrak{so}_n$	1	n	$(\mathfrak{sp}_{2n}, \infty)$	[39]
6	S^2Sp_{2n}, $n\geqslant 2$	$n(2n+1)$	$\mathfrak{t}_n$	n	$2, 4, 6, \ldots, 2n$	$(\mathfrak{sp}_{2n}, 1)$	[159], [2]
7	$S_0{}^2SO_{2n}$, $n\neq 4$, $n\geqslant 3$	$\frac{(n-1)(n+2)}{2}$		$n-1$	$2, 3, \ldots, n$	$(\mathfrak{sl}_n, 2)$	[39]
	n чёт.		$(Z_2)^{n-2}$				
	n нечёт.		$(Z_2)^{n-1}$				
8	Λ^2SL_n, $n\geqslant 4$	$\frac{(n-1)n}{2}$				$(\mathfrak{so}_{2n}, \infty)$	[39]
	n чёт.		$\mathfrak{sp}_{n-1}$	1	$\frac{n}{2}$		
	n нечёт.		$\mathfrak{sp}_{n-1}+\mathfrak{u}_{n-1}$	0	0		
9	Λ^2SO_n, $n\neq 4$, $n\geqslant 3$	$\frac{(n-1)n}{2}$				$(\mathfrak{so}_n, 1)$	[39], [159], [2]
	n чёт.		$\mathfrak{t}_{\frac{n}{2}}$	$\frac{n}{2}$	$2, 4, \ldots, n-2, \frac{n}{2}$		
	n нечёт.		$\mathfrak{t}_{\frac{n-1}{2}}$	$\frac{(n-1)}{2}$	$2, 4, \ldots, n-1$		

10	$\Lambda_0^2 \mathrm{Sp}_{2n},\ n \geqslant 2$	$(n-1)(2n+1)$	$\underbrace{\mathrm{sl}_2 + \ldots + \mathrm{sl}_2}_{n}$	$n-1$	$2, 3, \ldots, n$	$(\mathrm{sl}_{2n}, 2)$	
11	S^3SL_2	4	Z_3	1	4	(G_2, ∞)	[42], [262]
12	S^3SL_3	10	$(Z_3)^2$	2	4, 6	$(\mathrm{so}_8, 3)$	[236, 42, 189, 25, 28]
13	Λ^3SL_6	20	$\mathrm{sl}_3+\mathrm{sl}_3$	1	4	(E_6, ∞)	[41, 42, 45]
14	Λ^3SL_7	35	G_2	1	7	(E_7, ∞)	[41], [42,] [45]
15	Λ^3SL_8	56	tl_3	1	16	(E_8, ∞)	[41,] [42] [45]
16	Λ^3SL_9	84	$(Z_3)^4$	4	12, 18, 24, 30	$(E_8, 3)$	[36], [45]
17	$\Lambda_0^3\mathrm{Sp}_6$	14	sl_3	1	4	(F_4, ∞)	[73]
18	Λ^4SL_8	70	$(Z_2)^6$	7	2, 6, 8, 10, 12, 14, 18	$(E_7, 2)$	[8]
19	$\Lambda_0^4\mathrm{Sp}_8$	42	$(Z_2)^6$	6	2, 5, 6, 8, 9, 12	$(E_6, 2)$	[8]
20	Spin_7	8	G_2	1	2	(F_4, ∞)	[161], [263]
21	Spin_9	16	so_7	1	2	$(F_4, 2)$	[161]
22	Spin_{10}	16	$\mathrm{so}_7+\mathrm{u}_8$	0	0	(E_6, ∞)	[161]

Продолжение табл.

№	G	dim V	G_*	dim V/G	Степени инвариантов	θ	Литература
23	$Spin_{11}$	32	sl_5	1	4		[161]
24	$Spin_{12}$	32	sl_6	1	4	(E_7, ∞)	[161]
25	$Spin_{13}$	64	sl_3+sl_3	2	4, 8		[140]
26	$Spin_{14}$	64	G_2+G_2	1	8	(E_8, ∞)	[73]
27	$Spin_{16}$	128	$(Z_2)^8$	8	2, 8, 12, 14, 18, 20, 24, 30	$(E_8, 2)$	[11]
28	G_2	7	sl_3	1	2	$(SO_8, 3)$	[89], [261], [263]
29	F_4	26	so_8	2	2, 3	$(E_6, 2)$	
30	E_6	27	F_4	1	3	(E_7, ∞)	
31	E_7	56	E_6	1	4	(E_8, ∞)	
32	E_8	248	t_8	8	2, 8, 12, 14, 18, 20, 24, 30	$(E_8, 1)$	
33	AdG_2	14	t_2	2	2, 6	$(G_2, 1)$	
34	AdF_4	52	t_4	4	2, 6, 8, 12	$(F_4, 1)$	
35	EdE_6	78	t_6	6	2, 5, 6, 8, 9, 12	$(E_6, 1)$	
36	EdE_7	133	t_7	7	2, 6, 8, 10, 12, 14, 18	$(E_7, 1)$	

если он бесконечен, то указывается тип его касательной алгебры. При этом $\mathfrak{t}_m$ обозначает касательную алгебру m-мерного тора, а $\mathfrak{u}_m$ — касательную алгебру m-мерной унипотентной группы (унипотентного радикала группы G_*).

В столбце «Степени инвариантов» указаны степени элементов минимальной (алгебраически независимой) системы однородных образующих алгебры $k[V]^G$. См. п. 3.3.

В столбце «θ» в тех случаях, когда группа G является θ-группой или приведенной θ-группой (см. п. 8.5) указан тип градуированной алгебры Ли, с которой она связана, и порядок m автоморфизма, определяющего градуировку; если $m=\infty$, то имеется в виду приведенная θ-группа.

ЛИТЕРАТУРА

Монографии по классической теории инвариантов: [143], [136], [297], [258], [42], [137], [281], [242], [283].

Монографии по современной теории инвариантов: [128], [213], [215], [189], [137].

Обзоры: [31], [195], [239], [74], [64].

Теория инвариантов бинарных форм: [4], [143], [136], [126], [127], [42], [93], [283], [276], [132].

Инварианты и орбиты конкретных линейных групп: [42], [189], [18], [19] (кубические формы от 3 и 4 переменных), [197], [22] (формы 4-й степени от 3 переменных), [159], [280] (билинейные формы), [39], [43], [2], [280] (пары билинейных форм), [41], [36], [45] (тривекторы), [8] (четыревекторы), [161], [140], [73], [11] (спиноры), [162], [3], [259], [133], [179], [89], [261—263], [87], [88], [58], [288].

Орбиты присоединенных представлений и представлений изотропии симметрических пространств: [187], [109], [110], [177], [99], [191], [193], [49], [235], [282], [44], [98], [5], [188], [9], [133].

Линейные группы, алгебра инвариантов которых является полным пересечением: [40], [224—227], [285].

Инварианты и орбиты борелевских и максимальных унипотентных подгрупп: [92], [100], [63], [81], [33], [79], [32], [115].

Локально транзитивные действия в частности, линейные представления и сферические однородные пространства: [24], [95], [69], [256], [257], [165], [179], [180], [83—85], [267], [288], [33], [14—17], [35], [161], [189], [175], [205], [124], [125], [294], [56], [116], [32], [211].

Теория инвариантов над полями положительной характеристики: [127], [219], [220], [213], [148], [270], [271], [123], [241], [286], [247], [248], [277], [283], [138], [103].

Теория инвариантов над алгебраически незамкнутыми полями: [123], [242], [108], [252], [161], [38], [243].

1. *Адамович О. М.* Равноразмерные представления простых алгебраических групп // Геом. методы в задачах алгебры и анализа.— Ярославль, 1980.— С. 120—125.
2. —, *Головина Е. О.* Об инвариантах пары билинейных форм // Вестн. МГУ. Сер. мат., мех.— 1977.— № 2.— С. 15—18.
3. —, — Простые линейные группы, имеющие свободную алгебру инвариантов // Вопр. теории групп и гомол. алгебры. Ярославль, 1979.— С. 3—41.
4. *Алексеев В. Г.* Теория рациональных инвариантов бинарных форм.— Юрьев, 1899.— 232 с.

5. *Алексеевский А. В.* Группы компонент централизаторов унипотентных элементов в полупростых алгебраических группах // Тр. Тбил. матем. ин-та.— 1979.— *62.*— С. 5—27.
6. *Андреев Е. М., Винберг Э. Б., Элашвили А. Г.* Орбиты наибольшей размерности полупростых линейных групп Ли // Функц. анализа и его прил.— 1967.— *1,* № 1.— С. 3—7.
7. —, *Попов В. Л.* О стационарных подгруппах точек общего положения в пространстве представления полупростой группы Ли / Функц. анализ и его прил.— 1971.— *5,* № 4.— С. 1—8.
8. *Антонян Л. В.* Классификация четырех векторов восьмимерного пространства // Тр. семинара по вект. и тенз. анализу.— Изд-во МГУ, 1981.— *20.*— С. 144—161.
9. — О классификации однородных элементов Z_2-градуированных полупростых алгебр Ли // Вестн. МГУ. Сер. мат., мех.— 1982.— № 2.— С. 29—34.
10. — Об однородных нильпотентных элементах периодически грудуированных полупростых алгебр Ли // Вопр. теории групп и гомол. алгебры.— Ярославль, 1987.— С. 55—64.
11. —, *Элашвили А. Г.,* Классификация спиноров размерности шестнадцать // Тр. Тбил. матем. ин-та.— 1982.— *70.*— С. 4—23.
12. *Арнольд В. И.* Нормальные формы функций вблизи вырожденных критических точек, группы Вейля A_k, D_k, E_k и лагранжевы особенности // Функц. анализ и его прил.— 1972.— *6,* № 4.— С. 3—25.
13. —, *Гивенталь А. Б.* Симплектическая геометрия // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Соврем. пробл. матем. Фундам. направл.— 1985.— *4.*— С. 7—140.
14. *Ахиезер Д. Н.* Плотные орбиты с двумя концами // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1977.— *41,* № 2.— С. 308—324.
15. — Алгебраические группы, транзитивные в дополнении к однородной гиперповерхности // Тез. докл. АН СССР.— 1979.— *245,* № 2.— С. 281—284.
16. — О действиях с конечным числом орбит // Функц. анализ и его прил.— 1985.— *19,* № 1.— С. 1—5.
17. — Однородные комплексные многообразия // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Соврем. пробл. матем. Фундам. направл.— 1986.— *10.*— С. 223—275.
18. *Беклемишев Н. Д.* Классификация кватернарных кубических форм необщего положения // Вопр. теории групп и гомол. алгебры.— Ярославль, 1981.— С. 3—17.
19. — Инварианты кубических форм от четырех переменных // Вестн. МГУ. Сер. мат., мех.— 1982.— № 2.— С. 42—49.
20. *Богомолов Ф. А.* Голоморфные тензоры и векторные расслоения на проективных многообразиях // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1978. *42,* № 6.— С. 1227—1287.
21. —, *Кацыло П. И.* Рациональность некоторых фактор-многообразий // Мат. сб.— 1985.— *126,* № 4.— С. 584—591.
22. *Буй Вьет Ха.* Классификация тернарных форм четвертой степени с нетривиальной группой автоморфизмов // Вопр. теории групп и гомол. алгебры.— Ярославль, 1982.— С. 150—152.
23. *Варченко А. Н.* Теоремы топологической эквисингулярности семейств алгебраических многообразий и семейств полиномиальных отображений // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1972.— *36,* № 5.— С. 957—1019.
24. *Винберг Э. Б.* Инвариантные линейные связности в однородном пространстве // Тр. Моск. мат. о-ва.— 1960.— *9.*— С. 191—210.
25. —. О линейных группах, связанных с периодическими автоморфизмами полупростых алгебраических групп // Докл. АН СССР.— 1975.— *221,* № 4.— С. 767—770.
26. — О классификации нильпотентных элементов градуированных алгебр Ли // Докл. АН СССР.— 1975.— *225,* № 4.— С. 745—748.

27. —. Группа Вейля градуированной алгебры Ли // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1976.— *40*, № 3.— С. 488—526.
28. — Классификация однородных нильпотентных элементов полупростой градуированной алгебры Ли // Тр. семинара по вект. и тенз. анализу.— Изд-во МГУ, 1979.— *19*.— С. 155—177.
29. — О замыкании орбиты редуктивной линейной группы // Алгебра.— Изд-во МГУ, 1980.— С. 31—36.
30. — Рациональность поля инвариантов треугольной группы // Вестн. МГУ. Сер. мат., мех.— 1982.— № 2.— С. 23—24.
31. — Эффективная теория инвариантов // Алгебра.— Изд-во МГУ, 1982.— С. 27—33.
32. — Сложность действий редуктивных групп // Функц. анализ и его прил.— 1986.— *20*, № 1.— С. 1—13.
33. —, *Кимельфельд Б. Н.* Однородные области на флаговых многообразиях и сферические подгруппы полупростых групп Ли // Функц. анализ и его прил.— 1978.— *12*, № 3.— С. 12—19.
34. —, *Онищик А. Л.* Семинар по группам Ли и алгебраическим группам.— М.: Наука, 1988.— 343 с.
35. —, *Попов В. Л.* Об одном классе квазиоднородных аффинных многообразий // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1972.— *36*, № 4.— С. 749—763.
36. —, *Элашвили А. Г.* Классификация тривекторов девятимерного пространства // Тр. семинара по вект. и тенз. анализу.— Изд-во МГУ, 1978.— *18*.— С. 197—233.
37. *Воскресенский В. Е.* Группы Пикара линейных алгебраических групп // Исследования по теории чисел.— Изд-во Саратовского ун-та, 1969.— № 3.— С. 7—16.
38. — Алгебраические торы.— М.: Наука, 1977.— 223 с.
39. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.— М.: Наука, 1967.— 576 с.
40. *Гордеев Н. Л.* Конечные линейные группы, алгебра инвариантов которых — полное пересечение // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1986.— *50*, № 2.— С. 345—372.
41. *Гуревич Г. Б.* Алгебра тривектора. II // Тр. семинара по вект. и тенз. анализу.— Изд-во МГУ, 1948.— *6*.— С. 28—124.
42. — Основы теории алгебраических инвариантов.— М.: Гостехиздат, 1948.— 408 с.
43. — Канонизация пары бивекторов // Тр. семинара по вект. и тенз. анализу.— Изд-во МГУ, 1950.— *8*.— С. 355—363.
44. *Дынкин Е. Б.* Полупростые подалгебры полупростых подалгебр Ли // Мат. сб.— 1952.— *30*, № 2.— С. 349—462.
45. *Егоров Г. В.* Инварианты тривектора девятимерного пространства // Вопр. теории групп и гомол. алгебры.— Ярославль, 1981.— С. 127—131.
46. *Желобенко Д. П.* Компактные группы и их представления.— М.: Наука, 1970.— 664 с.
47. *Кац В. Г.* Автоморфизмы конечного порядка полупростых алгебр Ли // Функц. анализ и его прил.— 1969.— *3*, № 3.— С. 94—96.
48. — К вопроссу об описании пространства орбит линейных алгебраических групп // Успехи мат. наук.— 1975.— *30*, № 6.— С. 173—174.
49. *Кацыло П. И.* Сечения пластов в редуктивной алгебре Ли // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1982.— *46*, № 3.— С. 477—486.
50. — Рациональность пространств орбит неприводимых представлений SL_2 // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1983.— *47*, № 1.— С. 26—36.
51. — Рациональность пространств модулей гиперэллиптических кривых // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1984.— *48*, № 4.— С. 705—710.
52. — Рациональность полей инвариантов приводимых представлений SL_2 // Вестн. МГУ. Сер. мат., мех.— 1984.— № 5.— С. 77—79.
53. — Многообразие модулей кривых рода 4 рационально // Докл. АН СССР.— 1986.— *290*, № 6.— С. 1292—1294.
54. Математика XIX века. Математическая логика, алгебра, теория чисел, теория вероятностей.— М.: Наука, 1978.— 255 с.

55. *Мерзляков Ю. И.* Рациональные группы.— М.: Наука, 1980.— 464 с.
56. *Микитюк И. В.* Об интегрируемости инвариантных гамильтоновых систем с однородными конфигурационными пространствами // Мат. сб.— 1986.— *129*, № 4.— С. 514—534.
57. *Онищик А. Л.* Комплексные оболочки компактных однородных пространств // Докл АН СССР.— 1960.— *130*, № 4.— С. 726—729.
58. *Панюшев Д. И.* Классификация четырехмерных антикоммутативных алгебр с нетривиальной группой автоморфизмов // Вопр. теории групп и гомол. алгебры.— Ярославль, 1982.— С. 98—105.
59. — О пространстве орбит конечных и связных линейных групп // Изв. АН СССР.— Сер. мат.— 1982.— *46*, № 1.— С. 95—99.
60. — Полупростые группы автоморфизмов четырехмерного аффинного пространства // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1983.— *47*, № 4.— С. 881—894.
61. — Регулярные элементы в пространствах линейных представлений редуктивных алгебраических групп // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1984.— *48*, № 2.— С. 411—419.
62. — Регулярные элементы в пространствах линейных представлений. II // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1985.— *49*, № 5.— С. 979—985.
63. — Орбиты наибольшей размерности разрешимых подгрупп редуктивных линейных групп и редукция для *U*-инвариантов // Мат. сб.— 1987.— *132*, № 3.— С. 371—382.
64. *Паршин А. Н.* Д. Гильберт и теория инвариантов // Историко-матем. исследования.— М.: Наука, 1974.— *20*.— С. 171—197.
65. *Попов А. М.* Конечные стационарные подгруппы общего положения простых линейных групп Ли // Тр. ММЛ.— 1985.— *48*.— С. 7—59.
66. — Конечные стационарные подгруппы общего положения неприводимых полупростых линейных групп Ли // Тр. ММО.— 1987.— *50*.— С. 209—248.
67. *Попов В. Л.* Критерий стабильности действия полупростой группы на факториальном многообразии // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1970.— *34*, № 3.— С. 523—531.
68. — О стабильности действия алгебраической группы на алгебраическом многообразии // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1972.— *36*, № 2.— С. 371—385.
69. — Квазиоднородные аффинные алгебраические многообразия группы SL_2 // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1973.— *37*, № 4.— С. 792—832.
70. — Группы Пикара однородных пространств линейных алгебраических групп и одномерные однородные векторные расслоения // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1974.— *38*, № 2.— С. 292—322.
71. — Представления со свободным модулем ковариантов // Функц. анализ и его прил.— 1976.— *10*, № 3.— С. 91—92.
72. — Алгебраические кривые с бесконечной группой автоморфизмов // Мат. заметки.— 1978.— *23*, № 2.— С. 183—195.
73. — Классификация спиноров размерности четырнадцать // Тр. Моск. мат. ов-а.— 1978.— *37*.— С. 173—217.
74. — Инвариантов теория // Матем. энциклопедия. Т. 2.— М.: Сов. энциклопедия, 1979.— С. 540—543.
75. — К теореме Гильберта об инвариантах // ДАН СССР.— 1979.— *249*, № 3.— С. 551—555.
76. — Конструктивная теория инвариантов // Изв. АН СССР.— Сер. мат.— 1981.— *45*, № 5.— С. 1100—1120.
77. — Теорема конечности для представлений со свободной алгеброй инвариантов // Изв. АН СССР.— Сер. мат.— 1982.— *46*, № 2.— С. 347—370.
78. — Сизигии в теории инвариантов // Изв. АН СССР.— Сер. мат.— 1983.— *47*, № 3.— С. 554—622.
79. — Стягивание действий редуктивных алгебраических групп // Мат. сб.— 1986.— *130*, № 3.— С. 310—334.
80. — Полтора века теории инвариантов // Методол. анализ матем. теорий.— 1987.— С. 235—256.

81. — Замкнутые орбиты борелевских подгрупп // Мат. сб.— 1988.— *135*, № 3.— С. 385—402.
82. Проблемы Гильберта.— М.: Наука, 1969.— 239 с.
83. *Пясецкий В. С.* Линейные группы Ли, действующие с конечным числом орбит // Функц. анализ и его прил.— 1975.— *9*, № 4.— С. 85—86.
84. — Оценка числа орбит треугольной группы // Вопр. теории групп и гомол. алгебры.— Ярославль, 1983.— С. 54—57.
85. — Фундаментальные множества треугольных групп // Вопр. теории групп и гомол. алгебры.— Ярославль, 1985.— С. 157—160.
86. *Размыслов Ю. П.* Тождества со следом полных матричных алгебр над полем характеристики 0 // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1974.— *38*, № 4.— С. 723—756.
87. *Сибирский К. С.* Алгебраические инварианты дифференциальных уравнений и матриц.— Кишинев: Штиинца, 1976.— 268 с.
88. — Введение в алгебраическую теорию инвариантов дифференциальных уравнений.— Кишинев: Штиинца, 1982.— 166 с.
89. *Симония В. Т.* Первая основная теорема в теории векторных инвариантов особой группы Ли G_2 // Сообщ. АН ГрузССР.— 1960.— *24*, № 6.— С. 641—648.
90. *Суханов А. А.* Описание наблюдаемых подгрупп линейных алгебраических групп // Успехи мат. наук.— 1978.— *33*, № 2.— С. 182—183.
91. — Описание наблюдаемых подгрупп линейных алгебраических групп // Мат. сб.— 1988.— *137*, № 1.— С. 90—102.
92. *Хаджиев Д.* Некоторые вопросы теории векторных инвариантов // Мат. сб.— 1967.— *72*, № 3.— С. 420—435.
93. — Теория инвариантов бинарных форм.— Ташкент: ФАН, 1978.— 52 с.
94. *Шафаревич И. Р.* Основы алгебраической геометрии. Т. 1, 2.— М.: Наука, 1988.— 351 с., 304 с.
95. *Шпиз Г. Б.* Классификация неприводимых локально транзитивных линейных групп Ли // Геом. методы в задачах алгебры и анализа.— Ярославль, 1978.— С. 152—160.
96. *Элашвили А. Г.* Канонический вид и стационарные подалгебры точек общего положения для простых линейных групп Ли // Функц. анализ и его прил.— 1972.— *6*, № 1.— С. 51—62.
97. — Стационарные подалгебры точек общего положения для неприводимых линейных групп Ли // Функц. анализ и его прил.— 1972.— *6*, № 2.— С. 65—78.
98. — Централизаторы нильпотентных элементов в полупростых алгебрах Ли // Тр. Тбил. матем. ин-та.— 1975.— *46*.— С. 109—132.
99. — Пласты простых алгебр Ли особого типа // Исследования по алгебре.— Тбилиси, 1985.— С. 171—194.
100. — Орбиты максимальной размерности для борелевских подгрупп полупростых линейных групп Ли // Функц. анализ и его прил.— 1987.— *21*, № 1.— С. 92—93.
101. *Adams J. F.* Lectures on Lie groups.— New York, Amsterdam: W. A. Benjamin, 1969.— 130 с. (Пер. на рус. яз.: *Адамс Д.* Лекции по группам Ли.— М.: Наука, 1979.— 144 с.)
102. *Armstong H. A.* On the fundamental group of an orbit space // Proc. Cambridge Phil. Soc.— 1968.— *64*.— С. 299—301.
103. *Bardsley P., Richardson R. W.* Étale slices for algebraic transformation groups in characteristic p // Proc. Lond. Math. Soc.— 1985.— *51*, № 3.— С. 295—317.
104. *Bialynicki-Birula A.* Remarks on the action of an algebraic torus on k^n. I, II // Bull. Acad. pol. sci., Sér. math., astr., phys.— 1966.— *14*.— С. 177—188; 1967.— *15*.— С. 123—125.
105. — Some theorems on actions of algebraic groups // Ann. Math.— 1973.— *98*.— С. 480—497.

106. — Some properties of the decompositions of algebraic varieties determined by actions of a torus // Bull. Acad. pol. sci., Sér. sci. math, astr, phys.— 1976 — *24*.— C. 667—674.
107. —, *Hochshild G., Mostow G. D.* Extensions of representations of algebraic linear groups // Amer. J. Math.— 1963.— *65*.— C. 131—144.
108. *Birkes D.* Orbits of linear algebraic groups // Ann. Math.— 1971.— *93*, № 3.— C. 459—475.
109. *Borho W.* Über Schichten halbeinfacher Lie-Algebren // Inv. Math.— 1981.— *65*.— C. 283—317.
110. —, *Kraft H.* Über Bahnen und deren Deformationen bei linearen Aktionen reduktiver Gruppen // Comment. Math. Helv.— 1979.— *54*.— C. 61—104.
111. *Bourbaki N.* Algèbre. Chap. 9.— Paris: Hermann, 1959.— 258 c. (Пер. на рус. яз.: *Бурбаки Н.* Алгебра. Модули, кольца, формы.— М.: Наука, 1966.— 555 с.)
112. — Groupes et algèbres de Lie. Chap. 4—6.— Paris: Hermann, 1968.— 288 c. (Пер. на рус. яз.: *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. Гл. 4—6.— М.: Мир, 1972.— 334 с.)
113. *Boutot J.-F.* Singularités rationnelles et quotients par les groupes réductifs // Inv. Math.— 1987.— *88*.— C. 65—68.
114. *Bredon G. E.* Introduction to compact transformation groups.— New York, London: Academic Press, 1972.— 421 c. (Пер. на рус. яз.: *Бредон Г.* Введение в теорию компактных групп преобразований.— М.: Наука, 1980.— 440 с.)
115. *Brion M.* Représentations exceptionnelles des groupes semisimples // Ann. sci. E. N. S.— 1985.— *18*.— C. 345—387.
116. — Classification des espaces homogènes spheriques // Compos. Math.— 1987.— *63*.— C. 189—208.
117. —, *Luna D., Vust T.* Espaces homogenes sphériques // Inv. Math.— 1986.— *84*.— C. 617—632.
118. *Brower A. E., Cohen A. M.* The Poincaré series of the polynomials invariant under SU_2 in its irreducible representation of degree $\leqslant 17$ // Math. centrum Amsterdam.— 1979.— ZW. 134/79.— C. 1—20.
119. *Chevalley C.* Théorie des groups de Lie. T. 2.— Paris: Hermann, 1951.— 196 c. (Пер. на рус. яз.: *Шевалле К.* Теория групп Ли. Т. 2.— М.: ИЛ, 1958.— 274 с.)
120. — Invariants of finite groups generated by reflections // Amer. J. Math.— 1955.— *77*.— C. 778—782.
121. — Fondaments de la géométrie algébrique.— Paris, 1958.
122. *Dadok J., Kac V.* Polar representations // J. Algebra.— 1985.— *92*, № 2.— 504—524.
123. *De concini C., Procesi C.* A characteristic free approach to invariant theory // Adv. Math.— 1976.— *21*.— C. 330—354.
124. —, — Complete symmetric varieties // Lect. Notes Math.— 1983.— № 996.— C. 1—44.
125. —, — Complete symmetric varieties. II // Adv. Stud in Pure Math.— 1985.— *6*.— C. 481—513.
126. *Dickson L. E.* Algebraic invariants.— N. Y.: Wiley, 1916.— 100 s.
127. — On invariants and the theory of numbers.— New York: Dover Publ., 1966.— 110 c.
128. *Dieudonné J. A., Carrell J. B.* Invariant Theory.— New York, London: Academic Press, 1971.— c. (Пер. на рус. яз. в кн.: *Дьедонне Ж., Керрол Дж., Мамфорд Д.* Геометрическая теория инвариантов.— М.: Мир,— 1974.— С. 10—124).
129. *Dixmier J.* Polarisations dans les algébres de Lie semisimples complexes // Bull. Sci. math.— 1975.— *99*.— C. 45—63.
130. — Quelques résultats de finitude en théorie des invariants (d'après V. L. Popov) // Astérisqus.— 1987.— *145/146*.— C. 163—175.

131. —, *Erdös P., Nicolas J.-L.* Sur le nombre d'invariants fondamentaus des formes binaries // C. r. Acad. sci., Paric.— 1987.— *305,* Sér. I.— C. 319—322.
132. —, *Lazard D.* Le nombre minimum d'invarients fondamentaux pour les formes binaires de degree 7 // Potrigaliae Math.— 1985—86.— *43,* № 3.— C. 377—392.
133. *Djocović D. Z.* Classification of nilpotent elements in simple exceptional real Lie algebras of inner type and description of their centralizers // J. Algebra.— 1988.— *112,* № 2.— C. 503—524.
134. *Dolgachev I. V.* Rationality of fields of invarianta // Proc. Symp. Pure Math.— 1987.— *46.*— C. 3—16.
135. *Donaldson S.* Instantons and geometric invariant theory // Commun. Math. Phys.— 1984.— *93.*— C. 453—460.
136. *Elliot E. B.* An introduction to the algebra of quantics.— Oxford Univ. Press, 1913.
137. *Fogarty J.* Invariant Theory.— New York, Amsterdam: W. A. Benjamin, 1969.— 216 c.
138. — Geometric quotients are algebraic schemes // Adv. Math.— 1983.— *48.*— C. 166—171.
139. *Fossum R. M.* Invariant theory, representation theory, commutative algebra — ménage à trois // Lect. Notes Math.— 1981.— № 867.— C. 1—37.
140. *Gatti V., Viniberghi E.* Spinors of 13-dimensional space // Adv. in Math.— 1978.— *30.*— C. 137—155.
141. *Gieseker D.* Global moduli for surfaces of general type // Inv. math.— 1977.— *43.*— C. 233—282.
142. — Geometric invariant theory and applications to moduli problems // Lect. Notes Math.— 1983.— № 996.— C. 45—73.
143. *Grace J. H., Young A.* The algebra of invariants.— Cambridge Univ. Press, 1903.— 384 c.
144. *Grosshans F.* Observable groups and Hilbert's fourteenth problem // Amer. J. Math.— 1973.— *95,* № 1.— C. 229—253.
145. *Grothendieck A.* Technique de descente et théorèmes d'existence en gèomètrie algébrique. I. Généralités. Descente par morphismes fidélement plats.— Séminaire Bourbaki, 1959/60, exp. 190.
146. — Les schémas de Hilbert.— Sèminaire Bourbaki, 1960/61, exp. 221.
147. *Guillemin V., Sternberg S.* Convexity properties of the moment mapping. I, II // Inv. math.— 1982.— *67,* № 3.— C. 491—513; ibid.— 1984.— *77,* № 3.— C. 533—546.
148. *Haboush W.* Reductive groups are geometrically reductive // Ann. Math.— 1975.— *102.*— C. 67—83.
149. *Hajja M.* Rational invariants of meta-abelian groups of linear automorphisms // J. Algebra.— 1983.— *80,* № 2.— C. 295—305.
150. *Harish-Chandra.* Spherical functions on a semi-simple Lie group. I, II // Amer. J. Math.— 1958.— *80.*— C. 241—310; 553—613.
151. *Hartshorne R.* Algebraic Geometry.— New York: Springer-Verlag, 1977.— *52.*— 496 c. (Пер. на рус. яз.: *Хартсхорн Р.* Алгебраическая геометрия.— М.: Мир, 1981.— 599 с.)
152. *Helgason S.* Differential geometry. Lie groups, and symmetric spaces.— New York e. a.: Academic Press, 1978.— 622 c.
153. *Hesselink W. H.* Uniform instability in reductive groups // J. reine angew. Math.— 1978.— *303/304.*— C. 74—96.
154. *Hilbert D.* Über die Theorie des algebraische Formen // Math. Ann.— 1890.— *36.*— C. 473—534.
155. Über die vollen Invariantensysteme // Math. Ann.— 1893.— *42.*— C. 313—373.
156. *Hochster M.* Invariant theory of commutative rings // Contemp. Math.— 1985.— *43.*— C. 161—179.
157. —, *Huneke C.* Tightly closed ideals // Bull. Amer. Math. Soc.— 1988.— *18,* № 1.— C. 45—48.

158. —, *Roberts J.* Rings of invariants of reductive groups acting on regular rings are Cohen—Macaulay // Adv. Math.— 1974.— *13.*— C. 125—175.
159. *Hodge W. V. D., Pedoe D.* Methods of Algebraic Geometry. V. 1.— Cambridge: 1947.— 440 c. (Пер. на рус. яз.: *Ходж В., Пидо Д.* Методы алгебраической геометрии. Т. I.— М.: ИЛ, 1954.— 461 с.)
160. *Humphreys J. E.* Linear Algebraic Groups. New York: Springer-Verlag, 1975.— 269 c. (Пер. на рус. яз.: *Хамфри Д.* Линейные алгебраические группы.— М.: Наука, 1980.— 399 с.)
161. *Igusa J.-i.* A classification of spinors up to dimension twelve // Amer. J. Math.— 1970.— *92.*— C. 997—1028.
162. — Geometry of absolutely admissible representations // Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra. In honour of Y. Akizuki.— Tokyo: Kinokuniya, 1973.— C. 373—552.
163. *Ja'ja' J.* An addendum to Kronecker's theory of pencils.— SIAM J. of Appl. Math.— 1979.— *37,* № 3.— C. 700—712.
164. *Jósefiak T., Pragacz P., Weyman J.* Resolutions of determinantal varieties and tensor complexes associated with symmetric and antisymmetric metrices // Astérisque.— 1981.— *87/88.*— C. 109—189.
165. *Kac V. G.* Some remarks on nilpotent orbits // J. Algebra.— 1980.— *64.*— C. 190—213.
166. — Root systems, representations of quivers and invariant theory // Lect. Notes Math.— 1983.— № 996.— C. 75—108.
167. —, *Popov V. L., Vinberg E. B.* Sur les groupes algébriques dont l'algèbre des invariants est libre // C. r. Acad. sci. Paris.— 1976.— *283,* ser. A.— C. 875—878.
168. *Kambayashi T.* Projective representations of algebraic groups of transformations // Amer. J. Math.— 1966.— *88.*— C. 199—205.
169. — Automorphism group of a polynomial rings and algebraic group action on an affine space // J. Algebra.— 1979.— *60.*— C. 439—451.
170. *Kawanaka N.* Orbits and stabilizers of nilpotent elements of a groded semisimple Lie algebra // J. fac. sci. univ. Tokyo.— Sec. 1A.— 1987.— *34,* № 3.— C. 573—597.
171. *Kempf G. R.* Instability in invariant theory // Ann. Math.— 1978.— *106.*— C. 299—316.
172. — The Hochster—Roberts theorem in invariant theory // Mich. Math. J.— 1979.— *26.*— C. 19—32.
173. — Some quotient surfaces are smooth // Mich. Math. J.— 1980.— *27.*— C. 295—299.
174. — Computing invariants // Lect. Notes Math.— 1987.— № 1278.— C. 81—94.
175. —, *Knudsen F., Mumford D., Saint-Donat B.* Toroidal embeddings. I.— Lect. Notes Math.— 1973.— № 339.— 209 c.
176. —, *Ness L.* The length of vectors in representation spaces // Lect. Notes Math.— 1979.— № 732.— C. 233—243.
177. *Kempken G.* Induced conjugacy classes in classical Lie algebras // Math. Inst. Basel, 1982.— Preprint 3.— C. 1—51.
178. *Kimura T.* A classification of prehomogeneous vector spaces of simple algebraic groups with scalar multiplications // J. Algebra.— 1983.— *83,* № 1.— C. 72—100.
179. —, *Kasai S.-i.* The orbital decomposition of some prehomogeneous vector spaces // Adv. Pure Math.— 1985.— *6.*— C. 437—480.
180. —, —, *Yasukura O.* A classification of the representations of reductive algebraic groups which admit only a finite number of orbits // Amer. J. Math.— 1986.— *108,* № 3.— C. 643—691.
181. *Klein F.* Vergleichende Betrachtungen über neue geometrische Forschungen.— Erlangen, 1872 (Пер. на рус. яз.: *Клейн Ф.* Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований.— Изв. физ.-мат. о-ва при Казанск. ун-те.— 1896.— 5).

182. — Vorlesunlen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade.— Leipzig: Teubner, 1884.— 260 с.
183. — Elementarmathematik von höheren Standpunkte aus. B. 2. Geometrie.— Berlin: Springer, 1925.— 314 с. (Пер. на рус. яз.: *Клейн Ф.* Элементарная математика с точки зрения высшей. Т. 2. Геометрия.— М.: Наука, 1987.— 416 с.)
184. — Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19 Jahrhundert. Teil I.— Berlin: Springer, 1926.— 400 с. (Пер. на рус. яз.: *Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии.*— М., Л.: Н.-т. изд. НКТП СССР, 1937.— 432 с.)
185. *Knop F.* Über die Glattheit von Quotientabbildungen // Manuscr. Math.— 1986.— *56.*— С. 419—427.
186. —, *Littelmann P.* Der Grad erzeugender Funktionen von Invariantenringen // Math. Z.— 1987.— *196.*— С. 211—229.
187. *Kostant B.* Lie group representations on polynomial rings // Amer. J. Math.— 1963.— *85.*— С. 327—404.
188. —, *Rallis S.* Orbits and representations associated with symmetric spaces // Amer. J. Math.— 1971.— *93.*— С. 753—809.
189. *Kraft H.* Geometrische Methoden in der Invarianten-theorie.— Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg, 1984.— 308 с. (Пер. на рус. яз.: *Крафт Х.* Геометрические методы в теории инвариантов.— М.: Мир, 1987.— 312 с.)
190. —, *Popov V. L.* Semisimple group actions on the three dimensional affine space are linear // Comment. Math. Helvetici.— 1985.— *60.*— С. 466—479.
191. —, *Procesi C.* Closures of conjugacy classes of matrices are normal // Inv. Math.— 1979.— *53.*— С. 227—247.
192. —, — Minimal singularities in GL_n // Inv. Math.— 1981.— *62.*— С. 503—515.
193. —, — On the geometry of conjugacy classes in classical groups // Comment. Math. Helv.— 1982.— *57.*— С. 539—602.
194. *Krämer M.* Sphärishe Untergruppen in kompakten zusammenhängenden Liegruppen // Compos. Math.— 1979.— *38.*— С. 129—153.
195. *Kung J. P. S., Rota G.-C.* The invariant theory of binary forms // Bull. Amer. Math. Soc.— 1984.— *10,* № 1.— С. 27—85.
196. *Kunz E.* Introduction to commutative algebra and algebraic geometry.— Birkhäuser, 1985.— 238 с.
197. *Kuribayashi A., Komiya K.* On Weierstrass points and automorphisms of curves of genus three // Lect. Notes Math.— 1979.— № 732.— С. 253—299.
198. *Lang S.* Algebra.— Addison—Wesley Publ. Comp., 1965.— 508 с. (Пер. на рус. яз.: *Ленг С.* Алгебра.— М.: Мир, 1968.— 564 с.)
199. *Lascoux A.* Syzygies des varietes determinantales // Adv. Math.— 1978.— *30.*— С. 202—237.
200. *Littelmann P.* Koreguläre und äquidimensionale Darstellungen halbeinbacher Liegruppen // J. Algebra (to appear).
201. *Luna D.* Slices étales // Bull. Soc. Math. France.— 1973.— memoire *33.*— С. 81—105.
202. — Adhérences d'orbite et invariants // Inv. Math.— 1975.— *29.*— С. 231—238.
203. — Sur certaines opérations différentiables des groupes de Lie // Amer. J. Math.— 1975.— *97.*— С. 172—181.
204. —, *Richardson R. W.* A generalization of the Chevalley restriction theorem // Duke Math. J.— 1979.— *46,* № 3.— С. 487—496.
205. —, *Vust T.* Plongements d'espaces homogènes // Comment. Math. Helvetici.— 1983.— *58.*— С. 186—245.
206. Mathematical developments arising from Hilbert problems.— Proc. of symp. in pure math., Providence, R. I., 1976.— *28.*— 628 с.
207. *Matsushima Y.* Espaces homogènes de Stein des groups de Lie complexes // Nagoya Math. J.— 1960.— *16.*— С. 205—216.

208. *Miln J. S.* Étale Cohomology.— Princeton Univ. Press, 1980.— 323 с. (Пер. на рус. яз.: *Милн Д.* Этальные когомологии.— М.: Мир, 1983.— 392 с.)
209. *Miyata K.* Invariants of certain groups. I // Nagoya Math. J.— 1971.— *41*.— С. 69—73.
210. *Molien T.* Über die Invarianten der linearen Substitutionsgruppen // Sitzugsber. König. Preuss. Akad. Wiss.— 1897.— С. 1152—1156. (Пер. на рус. яз. в кн.: *Молин Ф. Э.* Числовые системы.— Новосибирск: Наука, 1985.— С. 105—109).
211. *Muller I., Rubenthaler H., Schiffmann G.* Structure des espaces préhomogènes associés à certaines algèbres de Lie graduées // Math Ann.— 1986.— *274*, № 1.— С. 95—123.
212. *Mumford D.* The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity // Publ. IHES.— 1961.— *9*.— С. 5—22.
213. — Geometric invariant theory. Berlin: Springer-Verlag, 1965.— 147 с.
214. — Stability of projective varieties // Enseign. Math.— 1977.— *24*.— С. 39—110.
215. —, *Fogarty J.* Geometric invariant theory.— Berlin: Springer-Verlag, 1982.— 219 с.
216. *Murthy P.* A note on factorial rings // Arch. Math.— 1964.— *15*.— С. 418—420.
217. *Nagata M.* On embedding problem of abstract varieties in projective varieties // Mem. Kyoto Univ.— 1956.— *30*.— С. 71—82.
218. — On the 14-th problem of Holbert // Amer. J. Math.— 1959.— *81*.— С. 766—772.
219. — Invariants of a group in an affine ring // J. Math. Kyoto Univ.— 1964.— *3*.— С. 369—377.
220. — Lectures on the fourteenth problem of Hilbert.— Bombay: Tata Inst. of Fund. Research, 1965.— 78 с.
221. *Nakajima H.* Invariants of finite groups generated by pseudoreflections in positive characteristic // Tsukuba J. Math.— 1979.— *3*, № 1.— С. 109—122.
222. — Modular representations of p-groups with regular rings of invariants // Proc. Japan Academy, ser. A.— 1980.— *56*, № 10.— С. 469—473.
223. — Modular representation of abelian groups with regular rings of invariants // Nagoya Math. J.— 1982.— *86*.— С. 229—248.
224. — Quotient singularities which are complete intersections // Manuscr. Math.— 1984.— *48*, № 1—3.— С. 163—187.
225. — Quotient complete intersections of affine spaces by affine groups // Nagoya Math. J.— 1985.— *98*.— С. 1—36.
226. — Representations of a reductive algebraic group whose algebra of invariants are complete intersections // J. reine angew. Math.— 1986.— *367*.— С. 115—138.
227. —, *Watanabe K.-i.* The classification of quotient singularities which are complete intersections // Lect. Notes Math.— 1984.— № 1092.— С. 103—120.
228. *Ness L.* Mumford's numerical function and stable projective hypersurfaces // Lect. Notes Math.— 1979.— № 732.— С. 417—453.
229. — A stratification of the null cone via the moment map // Amer. J. Math.— 1984.— *106*.— С. 1281—1329.
230. *Newstead P. E.* Introduction to moduli problems and orbit spaces.— Bombay: Tata Inst. of Fund. Research, 1978.— 183 с.
231. *Noether E.* Körper und Systeme rationaler Functionen // Math. Ann.— 1915.— *76*.— С. 161—196.
232. — Der Endlichkeitssatz der Invarianten endlicher Gruppen // Math. Ann.— 1916.— *77*.— С. 89—92.
233. *Pauer F.* Normale Einbettungen von G/U // Math. Ann.— 1981.— *257*.— С. 371—396.

234. — Glatte Einbettungen von *G/U* // Math. Ann.— 1983.— *262*.— C. 421—429.
235. *Peterson D.* Geometry of the adjoint representation of a complex semisimple Lie algebra. Ph. D. Thesis.— Harward Univ., 1978.
236. *Poincaré A.* Sur les formes cubiques ternaires et quaternaires. I. II // J. École Polyt.— 1881.— *50*.— C. 199—253; 1882.— *51*.— C. 45—91. (Пер. на рус. яз.: *Пуанкаре А.* Избранные труды. Т. 2.— М.: Наука, 1972.— С. 819—900).
237. *Popov V. L.* Constructive invariant theory // Astérisque.— 1981.— *87/88*.— C. 303—334.
238. — Homological dimension of algebras of invariants // J. reine angew. Math.— 1983.— *341*.— C. 151—173.
239. — Modern development in Invariant Theory // Proc. Intern. Congress of Math.— Berkeley, 1986.— C. 394—406.
240. *Popp H.* Moduli Theory and Classification Theory of Algebraic Varieties // Lect. Notes Math.— 1977.— № 620.— 189 c.
241. *Procesi C.* The invariant theory of $n\times n$ matrices // Adv. in Math.— 1976.— *19*.— C. 306—381.
242. — A primer of invariant theory.— Brandeis Lect. Notes, 1982.— *1*.— 218 c.
243. —, *Schwarz G.* Inequalities defining orbit spaces // Inv. Math.— 1985.— *81*.— C. 539—554.
244. *Richardson R. U.* Conjugacy classes in Lie algebras and algebraic groups // Ann Math.— 1967.— *86*.— C. 1—15.
245. — Principal orbit types for algebraic transformation spaces in characteristic zero // Inv. Math.— 1972.— *16*.— C. 6—14.
246. — Deformations of Lie subgroups and the variation of isotropy subgroups // Acta Math.— 1972.— *129*, № 1-2.— C. 35—73.
247. — The conjugating representation of a semisimple algebraic group // Bull. Amer. Math. Soc.— 1976.— *82*, № 6.— C. 933—935.
248. — Affine coset spaces of reductive algebraic groups // Bull. Lond. Math. Soc.— 1977.— *9*.— C. 38—41.
249. *Rivlin R. S., Smith G. F.* Orthogonal integrity basis for N symmetric matrices // Contr. to mechanics.— Pergamon Press, 1969.— C. 121—141.
250. *Rosenlicht M.* Some basic theorems on algebraic groups // Amer. J. Math.— 1956.— *78*.— C. 401—443.
251. — Toroidal algebraic groups // Proc. Amer. Math. Soc.— 1961.— *12*.— C. 984—988.
252. *Rousseau G.* Immeubles sphériques et théorie des invariants // C. r. Acad. sci. Paris Sér. A.— 1978.— *286*.— C. 247—250.
253. *Saltman D.* Nöether's problem over an algebraically closed field // Inv. Math.— 1984.— *77*.— C. 71—84.
254. — Group acting on fields: Nöether's problem // Contemp. Math.— 1985.— *43*.— C. 267—277.
255. *Sampson J. H., Washnitzer S.* A Künneth formula for coherent algebraic sheaves. III // J. Math.— 1959.— *3*.— C. 389—402.
256. *Sato M., Kimura T.* On zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces // Ann. Math.— 1974.— *100*.— C. 131—170.
257. —, — A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants // Nagoya Math. J.— 1977.— *65*.— C. 1—155.
258. *Schur I.* Vorlesungen über Invariantentheorie.— Berlin: Springer-Verlag, 1968.— 134 c.
259. *Schwarz G. W.* Representations of simple Lie groups with regular rings invariants // Inv. Math.— 1978.— *49*.— C. 167—191.
260. — Representations of simple Lie groups with a free module of invariants // Inv. Math.— 1978.— *50*.— C. 1—12.
261. — Invariant theory of G_2 // Bull. Amer. Math. Soc.— 1983.— *9*.— C. 335—338.

262. — On classical invariant theory and binary cubics // Ann. inst. Fourier.— 1987.— *37*, № 3.— C. 191—216.
263. — Invariant theory of G_2 and $Spin_7$ // Comment. math. Helv.— 1988.— *63*, № 4.— C. 624—663.
264. Séminaire C. Chevalley. Anneaux de Chow et applications.— Paris: E. N. S., 1958.— 135 c.
265. *Serre J.-P.* Cohomologie Galoisienne // Lect. Notes Math.— 1964.— № 5.— 219 c. (Пер. на рус. яз.: *Серр Ж.-П.* Когомологии Галуа.— М.: Мир, 1968.— 208 с.)
266. — Algèbre locale. Multiplicités // Lect. Notes Math.— 1975.— № 11.— 160 c. (Пер. на рус. яз.: *Серр Ж.-П.* Локальная алгебра и теория кратностей // Матем. Сб. перев.— 1963.— 7, № 5.— Т. 3—93).
267. *Servedio F. J.* Prehomogeneous vector spaces and varieties // Trans. Amer. Math. Soc.— 1973.— *176*.— C. 421—444.
268. *Seshadri C. S.* On a theorem of Weitzenböck in invariant theory // J. Math. Kyoto Univ.— 1962.— *1*.— C. 403—409.
269. — Some results on the quotient space by an algebraic group of automorphisms // Math. Ann.— 1963.— *149*.— C. 286—301.
270. — Quotient spaces modulo reductive algebraic groups // Ann. Math.— 1972.— *95*.— C. 511—556.
271. — Geometric reductivity over an arbitrary base // Adv. Math.— 1977.— *26*.— C. 225—274.
272. *Shafarevich I.* Some infinite dimensional algebraic groups // Rend. Mat. e delle sue appl.— 1966.— *25*.— C. 208—212.
273. *Shephard G. C., Todd J. A.* Finite unitary reflection groups // Canad. J. Math.— 1954.— *6*.— C. 274—304.
274. *Shepherd-Barron N. I.* The rationality of certain spaces associated to trigonal curves // Proc. Symposia Pure Math.— 1987.— *46*,— C. 165—171.
275. — The rationality of some moduli spaces of plane curves // Compos. Math.— 1988.— *67*.— C. 51—88.
276. *Shioda T.* On the graded ring of invariants of binary octavics // Amer. J. Math.— 1967.— *89*.— C. 1022—1046.
277. *Slodowy P.* Simple singularities and simple algebraic groups // Lect. Notes Math.— 1980.— № 815.— 175 c.
278. *Smith G. F.* A complete set of unitary invariants for N 3×3 complex matrices // Tenzor.— 1970.— *21*.— C. 273—283.
279. *Smoke W.* Dimension and multiplicity of graded algebras // J. Algebra.— 1972.— *21*.— C. 149—173.
280. *Spaltenstein N.* Dégénérescences des formes bilinéaires // J. Algebra.— 1983.— *80*.— C. 1—28.
281. *Spencer A. J. M.* Theory of invariants.— New York—London: 1971.— 125 c. (Пер. на рус. яз.: *Спенсер Э.* Теория инвариантов.— М.: Мир, 1974.— 156 с.)
282. *Springer T.* Trigonometric sums, Green functions of finite groups and representations of Weyl groups // Inv. math.— 1976.— *36*.— C. 173—207.
283. — Invariant Theory // Lect. Notes Math.— 1977.— № 585.— 111 c. (Пер. на рус. яз.: *Спрингер Т.* Теория инвариантов.— М.: Мир, 1981.— 191 с.)
284. *Stanley R.* Hilbert functions of graded algebras // Adv. Math.— 1978.— *28*.— C. 57—83.
285. — Invariants of finite groups and their applications to combinatorics // Bull. Amer. Soc.— 1979.— *1*.— C. 475—511.
286. *Steinberg R.* Conjugacy classes in algebraic groups // Lect. Notes Math.— 1974.— № 366.— 159 c.
287. *Sumihiro H.* Equivariant completion // J. Math. Kyoto Univ.— *14*, № 1.— C. 1—28.
288. *Thrall R. M., Chanler J. H.* Ternary trilinear forms in the field of complex numbers // Duke Math. J.— 1983.— *4*, № 4.— C. 678—690.
289. *Triantaphyllou D.* Invariants of finite groups acting nonlinearly on rational function fields // J. Pure Appl. Algebra.— 1980.— *18*.— C. 315—331.

290. *Van der Kulk W.* On polynomial rings in two variables // Nieuw. Archief voor Wiskunde.— 1953.— *1*.— C. 33—41.
291. *Vust T.* Sur la théorie des invariants des groupes classiques // Ann. Inst. Fourier.— 1976.— *26*, № 1.— C. 1—31.
292. — Sur la théorie classique des invariants // Comment. Math. Helvetici.— 1977.— *52*.— C. 259—295.
293. — Foncteurs polynomiaux et théorie des invariants // Lect. Notes Math.— 1980.— № 795.— C. 330—340.
294. — Plongements d'espaces symétriques algébriques: une classification.— Preprint Univ. Genève, 1987.
295. *Warner G.* Harmonic analysis on semi-simple Lie groups. I.— Berlin: Springer-Verlag, 1972.— 545 c.
296. *Weil A.* On algebraic groups of transformations // Amer. J. Math.— 1955.— *77*.— C. 355—391.
297. *Weitzenböck R.* Invariantentheorie.— Noordhoff, Groningen, 1923.— 408 c.
298. *Weyl H.* Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen. I—IV // Math. Zeitschr.— 1925.— *23*.— C. 271—309; 1926.— *24*.— C. 328—395, 789—791. (Пер. на рус. яз. в кн.: *Вейль Г.* Избранные труды.— М.: Наука, 1984.— С. 100—197).
299. — The classical groups. Their invariants and representations.— Princeton Univ. Press, 1939.— 302 s. (Пер. на рус. яз.: *Вейль Г.* Классические группы, их инварианты и представления.— М.: ИЛ, 1947.— 408 с.)
300. *Young A.* On quantitative substitutional analysis. VII // Proc. Lond. Math. Soc.— 1933.— *36*, № 4.— C. 304—368.
301. *Zariski O., Samuel P.* Commutative algebra. Vol. II.— Princeton: D. van Nostrand Company, 1960.— 414 c. (Пер. на рус. яз.: *Зарисский О., Самюэль П.* Коммутативная алгебра. Т. 2.— М.: ИЛ, 1963.— 438 с.)

ОГЛАВЛЕНИЕ

УДК 512.743

I. Т. А. Спрингер. Линейные алгебраические группы // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Соврем. пробл. матем. Фундам. направл. 1989.— 55.— С. 5—136

Рассматривается теория линейных алгебраических групп. Последовательно изложены результаты и методы теории для алгебраически замкнутых полей, для произвольных незамкнутых полей и специальных полей определения. Тщательное рассмотрение фундаментальных результатов сопровождается большим количеством примеров. При этом изложены и достижения самого последнего времени. Библ. 68.

УДК 512.745

II. Э. Б. Винберг, В. Л. Попов. Теория инвариантов // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Соврем. пробл. матем. Фундам. направл. — 1989.— 55.— С. 137—309

Статья посвящена изложению основ современной теории инвариантов. С современных позиций изложены основные результаты классической теории инвариантов. Изложение иллюстрируется большим количеством примеров. Рассмотрены приложения к теории многообразий модулей алгебраических многообразий. Используются язык и сведения из теории линейных алгебраических групп, которые можно найти в первой статье настоящего тома. Библ. 301.

Технический редактор *В. С. Рябова* Корректор *И. В. Садекова*

Сдано в набор 12.05.89 Подписано в печать 12.10.89
Формат бумаги $60 \times 90^1/_{16}$. Бум кн.-журн. Литературная гарнитура.
Высокая печать. Усл. печ. л. 19,75 Усл. кр.-отт. 19,75 Уч.-изд. л. 20,71
Тираж 800 экз. Заказ 3632 Цена 4 р. 60 к.

Адрес редакции: 125219, Москва, А-219, Балтийская ул., 14. Тел. 155-42-41

Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ,
140010, Люберцы, 10, Московской обл., Октябрьский просп., 403

ISSN 0233—6723. ИНТ. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 55. 1989. 1—316.