Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

Лекционные курсы НОЦ

Выпуск 15

Издание выходит с 2006 года

Е. М. Чирка

Пространства Тейхмюллера

Москва
2010

УДК 517.5
ББК (В)22.16
Л43

Л43 **Лекционные курсы НОЦ**/ Математический институт им. В. А. Стеклова РАН (МИАН). – М.: МИАН, 2010. Вып. 15: Пространства Тейхмюллера/ Чирка Е. М. – 152 с.

ISBN 5-98419-038-9

Серия “Лекционные курсы НОЦ” – рецензируемое продолжающееся издание Математического института им. В. А. Стеклова РАН. В серии “Лекционные курсы НОЦ” публикуются материалы специальных курсов, прочитанных в Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук в рамках программы Научно-образовательный центр МИАН.

Настоящая брошюра содержит курс лекций “Пространства Тейхмюллера” Е. М. Чирки, прочитанный в осеннем семестре 2009 года в Научно-образовательном центре МИАН.

ISBN 5-98419-038-9

Оглавление

Предисловие **5**

Униформизация **7**

Лекция 1. Ориентированность и род – Топологические и дифференциальные классы р/п – Фундаментальная группа – Накрытия, теорема о монодромии – Универсальное накрытие – Накрывающие группы и отображения – Классы р/п по универсальным накрывающим – Фуксовы группы и теорема униформизации 7

Лекция 2. Метрика Пуанкаре – Гиперболические метрики – Конформные типы р/п – Проколы – Компоненты края – Фундаментальные области – Дубль Шоттки – Гомотопные отображения – Накрывающие группы и гомотопии 21

Классы римановых поверхностей **35**

Лекция 3. Классы Римана – Торы: классификация по решёткам – Торы: гиперэллиптическая классификация – Разветвлённые накрытия над R_1 35

Лекция 4. Комплексные и конформные структуры – Координатное представление – Расстояние между конформным структурами – Квазиконформные отображения – Коэффициенты Бельтрами – Классы и пространства Тейхмюллера – Примеры – Пространства Торелли . . . 45

Дифференциалы на римановой поверхности **57**

Лекция 5. Дифференциалы Бельтрами – Уравнение Бельтрами на плоскости – Теорема Боярского – Квазиконформные гомеоморфизмы $\widehat{\mathbb{C}}$ – Последовательности квазиконформных отображений 57

Лекция 6. Квазиконформные деформации – Дифференциалы Бельтрами и конформные структуры – Квадратичные дифференциалы – Слоения, порождаемые квадратичными дифференциалами – ϕ-геодезические 68

Лекция 7. Локально тривиальные дифференциалы – Определяющие функции классов Тейхмюллера – Производная Шварца – Оценки производных Шварца 78

Теоремы Тейхмюллера **88**

Лекция 8. Проекция Берса – Замена базы – Структура классов Тейхмюллера – Расстояние Тейхмюллера 88

Лекция 9. Теорема Крушкаля–Гамильтона – Теорема существования – Деформации Тейхмюллера – Теорема единственности – Вложение Тейхмюллера 97

Структуры на пространствах Тейхмюллера **104**

Лекция 10. Комплексная структура – Вложения в $\mathbb{C}^N$ – Псевдовыпуклость $T_{g,n}$ – Диски Тейхмюллера и метрика Кобаяси – Модулярная группа 104

Лекция 11. Тейхмюллер $\to$ Торелли – $T_{g,n+1} \to T_{g,n}$ – Универсальные семейства р/п – Классифицирующие отображения 115

Лекция 12. Поверхности с краем – Гиперэллиптическая база – Гиперэллиптические модули – Периоды абелевых дифференциалов 127

Приложение **139**

1. Аппроксимационные теоремы 139
2. Голоморфные функции в банаховом пространстве 143
3. Координаты Фрике 145

Литература **148**

Предисловие

Эта книжечка написана неспециалистом и для неспециалистов. Моей целью было по возможности компактное, но с доказательствами, изложение основ пространств Тейхмюллера, доступное для достаточно широкого круга читателей, а значит, не перегруженное специфической аналитикой и не затуманенное постоянными ссылками на теорию квазиконформных отображений. Для специалистов это неинтересно, но для потенциальных пользователей пространствами Тейхмюллера может оказаться полезным.

Собственно введение в пространства Тейхмюллера содержится в лекциях 3–9. Поскольку меня интересуют приложения к многомерному комплексному анализу, я отобрал в основном конечномерную "комплексную" часть теории (именно в таком ключе она сформировалась примерно к началу 70-х годов прошлого века), добавив в последние лекции немного более современного материала в этом направлении. Универсального пространства Тейхмюллера здесь нет – там своя специфическая теория.

Теория римановых поверхностей исторически делится на три части: мероморфные функции и формы на компактных римановых поверхностях, униформизация и пространства Тейхмюллера. Теорию пространств Тейхмюллера один из её основателей Л. Берс называл высшей математикой римановых поверхностей. Она считается традиционно трудной для восприятия и это связано, в первую очередь, с неочевидно необходимой сложностью исходных объектов. Таковыми в теории Тейхмюллера выступают "отмеченные римановы поверхности", которыми называются тройки (S, f, S'), где S – фиксированная (базовая) поверхность, S' – "переменная" риманова поверхность и $f\colon S \to S'$ гомеоморфизм ("маркировка"). На таких тройках определяется эквивалентность по Тейхмюллеру и уже классы эквивалентности являются точками пространства Тейхмюллера $T\langle S\rangle$, свойства которого предстоит изучать. Гомеоморфизмы $S \to S'$, гомотопные f, входят в один класс, но это лишь частичная факторизация. Увидеть за всем этим реальные семейства римановых поверхностей не так-то просто и ясность проявляется постепенно, шаг за шагом освоения теории.

Я попробовал слегка упростить основные объекты, заменяя довольно смутные для меня тройки парами (S, J), где S – фиксированная риманова поверхность (база) и J – оператор конформной структуры на S, т.е. линейный оператор в слоях касательного расслоения к S, т.ч. $J^2 = -\operatorname{id}$. (Такие операторы J являются первичными объектами теории комплексных и почти комплексных многообразий; в одномерном случае работать с ними довольно просто.) Тройке (S, f, S') с гладким f соответствует конформная структура $J = f^* J'$ на S, где J' – оператор на TS', индуцируемый конформной структурой на S' ("умножение на i" в слоях TS'). Классификация Тейхмюллера на множестве конформных структур простая: J и J' эквивалентны, если существует биголоморфизм римановых поверхностей $h\colon (S, J) \to (S, J')$ (т.е. $h^* J' = J$), гомотопный тождественному отображению базы; эта классификация даёт то же пространство Тейхмюллера $T\langle S\rangle$. Множество конформных структур на S естественно параметризуется дифференциалами Бельтрами, что открывает прямой путь к анализу.

Всё это, конечно, хорошо известно. То, что точки пространства Тейхмюллера являются классами конформных структур, отмечается в каждой монографии по этой тематике, но сами структуры рассматриваются не как рабочий инструмент, а скорее, как геометрические иллюстрации. Отметим в связи с этим, что в настоящее время существует целый ряд представлений пространств Тейхмюллера в зависимости от области их применений (см., например, [1], [11], [37]) и необходимость перевода на новую терминологию – обычная практика в этой теории.

Текст написан на основании лекций в НОЦ Математического института им. В. А. Стеклова РАН, которые я читал осенью 2009 г.

От читателя предполагается знакомство с теорией римановых поверхностей и так называемым общим анализом (многообразия, формы и т.п.). Знакомство с началами многомерного комплексного анализа облегчит понимание материала, особенно там, где появляется бесконечномерный комплексный анализ. Впрочем, я старался доказывать всё, не злоупотребляя ссылками.

Униформизация

Лекция 1

Ориентированность и род – Топологические и дифференциальные классы р/п – Фундаментальная группа – Накрытия, теорема о монодромии – Универсальное накрытие – Накрывающие группы и отображения – Классы р/п по универсальным накрывающим – Фуксовы группы и теорема униформизации

1. Ориентированность и род. Риманова поверхность S (сокращённо, р/п) – это связное комплексное одномерное многообразие. Таким образом, на S предполагается некоторый атлас локальных комплексных координат (которые *называются* голоморфными) с функциями переходов, голоморфными (в обычном смысле) в соответствующих областях комплексной плоскости. Голоморфные функции в плоских областях являются $\mathbb{R}$-аналитическими (ряды Тейлора), гладкими (теорема Вейерштрасса) и, конечно же, непрерывными. Поэтому такой атлас задаёт на S одновременно структуры $\mathbb{R}$-аналитического, дифференцируемого и топологического многообразия (поверхности). Напомним, какими специфическими топологическими свойствами обладают р/п.

Прежде всего, такая поверхность канонически *ориентирована*: если $z = x+iy$ – локальные голоморфные координаты в $U \subset S$, то базис $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ в U считается положительно ориентированным, а форма $dx \wedge dy = \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z}$ считается положительной формой площади в U; если w – другая голоморфная координата, то $dw \wedge d\overline{w} = |w_z|^2 \, dz \wedge d\bar{z}$, коэффициент > 0 и, значит, это определение не зависит от выбора локальных координат. В дальнейшем все поверхности в тексте предполагаются ориентированными.

Топологически, ориентируемые поверхности характеризуются следующим свойством: у всякой простой замкнутой кривой $\gamma \subset S$ есть окрестность U такая, что множество $U \setminus \gamma$ **не** связно. Глобальное дополнение, $S \setminus \gamma$ при этом вполне может быть связным. Максимальное число попарно не пересекающихся простых (жордановых) замкнутых кривых γ_j на S таких, что множество $S \setminus \bigcup \gamma_j$

связно, называется *родом* поверхности S и традиционно обозначается буквой g. Род может быть и нулевым (как у сферы – по теореме Жордана) и бесконечным. Мы будем иметь дело в основном с поверхностями конечного рода.

Простейший пример компактной р/п рода g, задаваемой алгебраически – это гиперэллиптическая кривая S, вложенная (топологически!) в $(\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty)^2$ и в аффинной части определяемая уравнением вида $w^2 = P(z)$, где P – многочлен степени $2g+1$ с простыми (некратными) нулями. Если нули P, скажем, в точках $1, \ldots, 2g+1$, то замкнутые жордановы кривые на S с z-проекциями $[1,2], [3,4], \ldots, [2g-1, 2g]$ в совокупности очевидно не разбивают S.

Всякая р/п является счётным объединением своих компактных подмножеств (теорема Радó, см. [24], с. 186), поэтому далее все вовлекаемые многообразия предполагаются счётно-компактными.

Наконец, всякая р/п триангулируема, т.е., представляется в виде локально конечного объединения (гомеоморфных образов) треугольников, такого, что замыкания любых двух различных треугольников либо не пересекаются, либо имеют одну (и только одну) общую сторону, либо одну общую вершину (известный топологический факт).

2. Топологические и дифференциальные классы р/п. Тоже общеизвестный (и нетривиальный) топологический факт, что всякая компактная ориентирумая и триангулируемая поверхность рода g гомеоморфна гладкой $\mathbb{R}$-аналитической "сфере с g ручками" в $\mathbb{R}^3$ (т.е., топологически все такие поверхности одинаковы и неразличимы).

Наличие дифференцируемой структуры никак не усложняет эту классификацию: всякая компактная ориентируемая дифференцируемая поверхность S рода g диффеоморфна той же сфере с g ручками и все такие поверхности дифференциально неразличимы. Это следует из существования на S функций Морса с одним максимумом, одним минимумом и $2g$ седловыми точками и процедуры соответствующих "перестроек" (см. [29], с. 251–264, [17], § 3). На гиперэллиптической поверхности $S = \big\{w^2 = z\prod_1^{2g}(z-\lambda_j)\big\}$ в $(\widehat{\mathbb{C}})^2$ с различными $|\lambda_j| \neq 0$ такой функцией Морса является, например, $1/(1+|z|) \in C^\infty(S)$ с критическими точками над $z = 0, \lambda_j, \infty$. На некомпактной р/п S $\exists$ гладкая (в общем, не ограниченная) строго субгармоническая *функция исчерпания* $u \geqslant 0$ с компактными множествами уровней $\{u \leqslant R\}$, $\forall\ R \geqslant 0$. Критические точки такой функции невырождены, т.е. u – функция Морса на S. Например, на поверхности $S\colon w^2 = z\prod_1^{2g}(z-\lambda_j)$ в $\mathbb{C}^2$ таковой является функция $|z|$ (и, конечно, много других).

Наличие комплексной структуры на поверхности позволяет существенно усилить указанную выше теорему о вложении: оказывается, что всякая компактная р/п *конформно эквивалентна* (!) гладкой алгебраической поверхности в $\mathbb{R}^3$ с обычной евклидовой метрикой (теорема Гарсиа, см. [26]), но мы этим пользоваться не будем.

В основном, мы будем изучать компактные р/п и поверхности, гомеоморфные компактным, из которых удалено (“выколото”) конечное множество точек. Если род такой поверхности S равен g, а число “проколов” равно n, то S называется поверхностью *конечного топологического типа* (g, n), короче, топ. типа (g, n). Сразу отметим, что кольцо и проколотый круг гомеоморфны, поэтому в указанный класс входят, например, все компактные р/п с краем, а также с краем и конечным числом проколов. Эйлерова характеристика такой поверхности равна $2 - 2g - n$ (см. [41], л. 4).

3. Фундаментальная группа. Основные топологические объекты на поверхности S – гомотопические классы (см. п. 16) замкнутых путей (петель) $\gamma\colon [0,1] \to S$ с фиксированным началом и концом $\circ \in S$ – образуют фундаментальную группу $\pi_1(S, \circ)$. На компактной поверхности рода g есть стандартная система $2g$ образующих этой группы $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$, связанных единственным соотношением $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1$ (см. полную развёртку р/п, [41], л. 4 и рис. 1). Здесь 1 означает класс путей “гомотопных нулю”, точнее, гомотопных пути $\gamma(t) \equiv \circ$. При $g > 1$ такая группа некоммутативна.

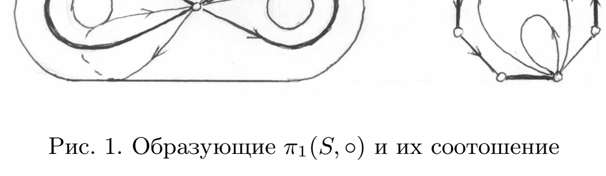

Рис. 1. Образующие $\pi_1(S, \circ)$ и их соотошение

Для компактной поверхности с n проколами к указанным образующим надо добавить простые петли c_j вокруг проколов и подправить единственное соотношение до $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots c_1 \ldots c_n = 1$[1] (см. [41], л. 4 рис. 13).

Фундаментальные группы с различными началами $\circ$, p изоморфны: если σ – путь с началом $\circ$ и концом p, то отображение $\gamma \to \sigma\gamma\sigma^{-1}$ задаёт такой изоморфизм, зависящий, к сожалению, от гомотопического класса пути σ (среди путей с общим началом $\circ$ и концом p). Таким образом, определена абстрактная группа $\pi_1(S)$, изоморфная всем $\pi_1(S, p)$, но конкретная работа всё же требует фиксации некоторого начала $\circ$.

С фундаментальной группой тесно связана коммутативная группа $H_1(S, \mathbb{Z})$ одномерных гомологий (см. [41], л. 3). По теореме ван Кампена (верной для произвольного многообразия), имеет место изомофизм $H_1(S, \mathbb{Z}) = \pi_1(S)/[\pi_1, \pi_1]$, где справа стоит фактор по коммутанту $[\pi_1, \pi_1] = \{aba^{-1}b^{-1} \colon a, b \in \pi_1(S)\}$. Для компактной р/п рода g группа $H_1(S, \mathbb{Z})$ изоморфна $\mathbb{Z}^{2g}$. В ней есть базис $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$ (рис. 2), образуемый классами свободно гомотопных (без фиксированных начал) петель таких, что индексы пересечения $a_i \wedge a_j$, $b_i \wedge b_j$, $a_i \wedge b_j$, $i \neq j$, равны нулю (представители вообще не пересекаются), а $a_i \wedge b_i = 1$ (смысл равенств $a \wedge b = \pm 1$ объяснён на рис. 2). Для поверхности типа (g, n) в образующие H_1 надо добавить простые петли вокруг проколов (с нулевыми индексами пересечения со всеми петлями); в этом случае $H_1(S, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{2g+n}$.

4. Накрытия. Непрерывное отображение $\pi \colon S \to S'$ называется *накрытием*, если $\forall\, p \in S$ $\exists$ окрестность $U = U(p) \ni p$ такая, что $\forall$ связной компоненты U' множества $\pi^{-1}(U)$ сужение $\pi|U' \to U$ является гомеоморфизмом (1:1).

Например, отображение $z \mapsto z^n$ проколотой плоскости $\mathbb{C} \setminus 0$ на себя является n-листным (число прообразов каждой точки равно n) накрытием, а $z \mapsto e^z$ – бесконечнолистное накрытие проко-

[1]При такой традиционной записи предполагается, что сначала идёт путь a_1, затем b_1 и т.д. Но в дальнейшем петлям будут соответствовать дробнолинейные преобразования (см. п. 6), композиция которых записывается, тоже традиционно, справа налево. Поэтому произведение путей $\gamma_2\gamma_1$ тоже естественнее писать таким образом (сначала путь γ_1, потом γ_2), что мы и делаем в дальнейшем (таким образом, $(\gamma_2\gamma_1)(t) = \gamma_1(2t)$ при $0 \leqslant t \leqslant 1/2$ и $= \gamma_2(2t-1)$ при $1/2 \leqslant t \leqslant 1$). На соотношение в фундаментальной группе это никак не влияет: заменяя a_j, b_j на a_j^{-1}, b_j^{-1} (тоже образующие), получаем указанное соотношение с порядком справа налево.

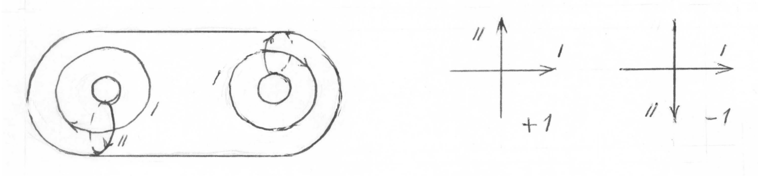

Рис. 2. Базис $H_1(S, \mathbb{Z})$ и индексы пересечений

лотого круга $\mathbb{D}\backslash 0$ левой полуплоскостью $\operatorname{Re} z < 0$. Часто накрытием называют само множество S', а π тогда называют проекцией.

Всякий путь $\gamma\colon [0,1] \to S$ "поднимается" до пути γ' на S' с началом в произвольно заданной точке $\circ' \in \pi^{-1}(\circ)$, где $\circ = \gamma(0)$. В самом деле, разобьём $[0,1]$ точками $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_N = 1$ так, что $\gamma([t_k, t_{k+1}])$ лежит в $U_k = U(\gamma(t_k))$, $0 \leqslant k < N$, и определим $\gamma'([t_0, t_1]) = \pi^{-1}(\gamma([t_0, t_1]))$ в связной компоненте $U_0' \subset \pi^{-1}(U_0)$, содержащей $p' = \gamma'(t_0)$, далее определим $\gamma'([t_1, t_2]) = \pi^{-1}(\gamma([t_1, t_2]))$ в связной компоненте $U_1' \subset \pi^{-1}(U_1)$, содержащей $\gamma'(t_1)$, и т.д. Поднятие пути γ на S' с началом p' определено однозначно: множество тех $t \in [0,1]$, для которых гипотетические два такие поднятия совпадают, непусто, открыто и замкнуто на $[0,1]$ и потому равно $[0,1]$.

Если γ_1 – другой путь в S, настолько близкий к γ, что все $\gamma_1([t_k, t_{k+1}]) \subset U_k$, то указанный процесс проходит одновременно для γ, γ_1 и оба поднятия γ', γ_1' лежат в $\cup U_k'$, т.е. поднятия близки, если окрестности U_k достаточно мелкие. Будем называть это свойство непрерывностью поднятия путей.

Из этого построения (аналогичного процессу аналитического продолжения из ТФКП) очевидно получается

Теорема о монодромии. *$\pi\colon S' \to S$ – накрытие, γ_0, γ_1 – пути с общими началом $\circ$ и концом p, гомотопные в классе путей на S с концами $\circ, p \Longrightarrow$ Поднятия γ_0', γ_1' этих путей с общим началом $\circ' \in \pi^{-1}(\circ)$ имеют и общий конец $p' \in \pi^{-1}(p)$.*

$\triangleleft$ Если $\gamma(s,t)\colon [0,1]^2 \to S$ – гомотопия с $\gamma(s,0) \equiv \circ$, $\gamma(s,1) \equiv p$, то при достаточно близких $s, \tilde{s}$ концы поднятий путей $\gamma(s,\cdot)$, $\gamma(\tilde{s},\cdot)$ с началом $\circ'$ лежат в одной компоненте $U'(p)$ множества $\pi^{-1}(U(p))$ (см. выше) и потому совпадают, так как $\pi|U'(p) \to U(p)$ – гомеоморфизм. Значит, множество $\{s\colon \gamma'(s,1) = \gamma'(0,1)\}$ непусто, открыто и замкнуто в $[0,1]$ и потому содержит $s = 1$. $\triangleright$

Другим полезным следствием конструкции поднятия путей является возможность поднятия образов односвязных многообразий, в частности, дисков:

Следствие 1. *X – связное и односвязное многообразие, $f\colon X \to S$ – непрерывное отображение, $f(x_0) = \circ$, $\pi\colon S' \to S$ – накрытие $\Longrightarrow \forall\ \circ' \in \pi^{-1}(\circ)\ \exists\ !$ непрерывное отображение $f'\colon X \to S'$ такое, что $f'(x_0) = \circ'$ и $\pi \circ f' = f$. Если при этом X – комплексное многообразие и отображение f голоморфное, то f' – тоже голоморфное отображение.*

$$\begin{tikzcd} & S' \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[ur, "f'"] \arrow[r, "f"'] & S \end{tikzcd}$$

$\triangleleft$ Пусть $x \in X$, γ – путь на X с началом x_0 и концом x и γ' – однозначно определяемое поднятие на S' пути $f \circ \gamma$ с началом $\circ'$ и каким-то концом p'. Если γ_1 – другой путь на X из x_0 в x, то γ_1 гомотопен γ (X односвязно) и по теореме о монодромии γ_1' имеет тот же конец $p' \Longrightarrow$ отображение $f'\colon x \to p'$ – единственное искомое. Так как накрытие π голоморфно и, локально, $f' = \pi^{-1} \circ f$, то f' голоморфно вместе с f. $\triangleright$

Следствие 2. *$\pi\colon S' \to S$ – накрытие и $f(s,t)\colon [0,1]^2 \to S$ – гомотопия путей $f(0,\cdot)$, $f(1,\cdot)$ с общими концевыми точками $\circ, p$ для всех $s \Longrightarrow \exists\ !$ гомотопия $f'\colon [0,1]^2 \to S'$ с единым заданным началом $\circ' \in \pi^{-1}(\circ)$, причём все пути $f'(s,\cdot)$ имеют общий конец $p' \in \pi^{-1}(p)$.*

Наконец, последнее замечание об общих накрытиях $\pi\colon S' \to S$. Если $U_1, U_2, \dots$ – покрытие р/п S односвязными координатными окрестностями с соотв. голоморфными координатами $z_1, z_2, \dots$, то функция $z_j \circ \pi$ на каждой связной компоненте множества $\pi^{-1}(U_j)$ задаёт её гомеоморфизм на область $z_j(U_j) \subset \mathbb{C}$. Функции переходов $(z_j \circ \pi) \circ (z_k \circ \pi)^{-1} = z_j \circ z_k^{-1}$, как видим, голоморфны, и таким образом на S' определяется структура римановой поверхности (эта комплексная структура однозначно характеризуется тем условием, что проекция π голоморфна).

5. Универсальное накрытие. Накрытие р/п $\pi\colon \widetilde{S}\to S$ называется *универсальным*, если поверхность $\widetilde{S}$ односвязна. Почему такое название? Потому, что если $\pi'\colon S'\to S$ – любое другое накрытие, то, согласно сл. 1 п. 4, $\exists$ голоморфное поднятие $\pi''\colon \widetilde{S}\to S'$ отображения π, т.е. $\pi=\pi'\circ\pi''$. Это означает, что π'' – тоже накрытие и, таким образом, р/п $\widetilde{S}$ накрывает не только S, но и любое другое накрытие над S; отсюда – универсальное, “самое большое”. В частности, если $\pi^1\colon \widetilde{S}^1\to S$ – другое универсальное накрытие, то $\exists$ накрытие $\pi^2\colon \widetilde{S}\to\widetilde{S}^1$, т.ч. $\pi^1\circ\pi^2=\pi$. Так как $\widetilde{S}^1$ односвязно, то π^2 1:1 и, значит, биголоморфно $\Longrightarrow$

Универсальное накрытие единственно с точностью до биголоморфизма.

• Доказательство существования универсального накрытия конструктивно: фиксируем $\circ\in S$ и рассмотрим множество $\widetilde{S}$ пар $(p,[\gamma])$, где $p\in S$ и $[\gamma]$ – гомотопический класс путей на S с началом $\circ$ и концом p. Пусть U – односвязная окрестность p и $\widetilde{U}_\gamma$ – множество пар $(q,[\tau\gamma])$, где $q\in U$ и τ – путь в U из p в q. Так как U односвязна, то проекция $\pi\colon \widetilde{U}_\gamma\to U$, $(q,[\tau\gamma])\mapsto q$ взаимно однозначная, и мы объявляем $\widetilde{U}_\gamma$ окрестностью $(p,[\gamma])$. Если $[\gamma_1]\neq[\gamma]$, то $\widetilde{U}_{\gamma_1}\cap\widetilde{U}_\gamma$ пусто $\Longrightarrow$ На $\widetilde{S}$ определена структура поверхности с локально $1:1$ проекцией $\pi\colon (p,[\gamma])\mapsto p$.

Поверхность $\widetilde{S}$ связна: Если γ – путь на S из $\circ$ в p и γ_s – путь $\gamma(ts)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, то $(\gamma(s),[\gamma_s])$ – путь на $\widetilde{S}$ из $(\circ,[\circ])$ в $(p,[\gamma])$.

Поверхность $\widetilde{S}$ односвязна: Если $\tilde{\gamma}$ – замкнутый путь на $\widetilde{S}$ с началом $(\circ,[\circ])$, то $\gamma=\pi\tilde{\gamma}$ – тоже замкнутый путь (на S), гомотопный нулю (иначе его поднятие $\tilde{\gamma}$ на $\widetilde{S}$ имело бы конец, отличный от $(\circ,[\circ])$). Согласно след. 2 п. 4 $\tilde{\gamma}$ тоже гомотопен нулю. •

По теореме Римана $\widetilde{S}$ – либо сфера Римана $\widehat{\mathbb{C}}$, либо плоскость $\mathbb{C}$, либо круг $\mathbb{D}$, точнее, $\exists$ голоморфное вложение $z\colon \widetilde{S}\to\widehat{\mathbb{C}}$, $z(\widetilde{S})=\widehat{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$ или $\mathbb{D}$. В зависимости от этого поверхность S называется соотв. *эллиптической*, *параболической* или *гиперболической*.

6. Накрывающие группы и отображения. Пусть α – замкнутый путь на S с началом $\circ$ и γ – путь с началом $\circ$ и концом p. Если α не гомотопен нулю, то любое поднятие замкнутого пути $\gamma\alpha\gamma^{-1}$ на универсальную накрывающую $\widetilde{S}$, очевидно, не замкнуто (поскольку $\widetilde{S}$ односвязна), начало $p'=(p,[\gamma])$ и конец

$p'' = (p, [\gamma\alpha])$ различны. Таким образом, α однозначно определяет непрерывное отображение $\phi_\alpha\colon (p,[\gamma]) \mapsto (p,[\gamma\alpha])$. Оно, очевидно, сохраняет проекцию (т.е. $\pi \circ \phi_\alpha = \pi$) и потому является голоморфным и 1:1 преобразованием $\widetilde{S}$ $((\phi_\alpha)^{-1} = \phi_{\alpha^{-1}}) \Longrightarrow \phi_\alpha$ – автоморфизм р/п $\widetilde{S}$ (биголоморфное отображение $\widetilde{S}$ на себя), элемент группы $\operatorname{Aut}\widetilde{S}$, который называется *накрывающим преобразованием* (поверхности $\widetilde{S}$), соответствующим петле α. Над любой односвязной областью $U \subset S$ это отображение "переставляет листы" проекции π (связные компоненты $\pi^{-1}(U)$), конформно переводя их друг в друга и не меняя проекции. При этом, $\forall$ листов U', U'' найдётся петля α, т.ч. $\phi_\alpha(U') = U''$ (достаточно найти α, т.ч. $\phi_\alpha(p') = \phi_\alpha(p'')$ для некоторых $p' \in U'$, $p'' \in U''$ с одинаковой проекцией $p \in U$; см, упр. 2). Из теоремы единственности (ТФКП) очевидно следует, что если α не гомотопна нулю, то ϕ_α не имеет неподвижных точек на S.

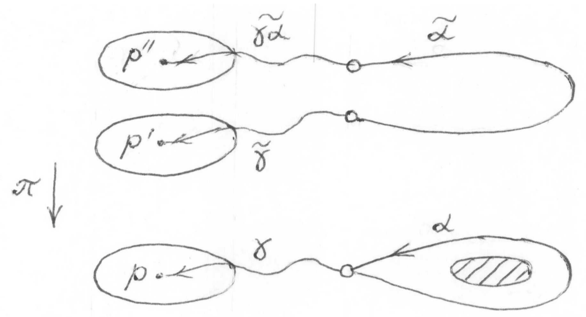

Рис. 3. Накрывающее преобразование ϕ_α

Из определения ясно, что ϕ_α зависит только от гомотопического класса $[\alpha]$ и что отображение $[\alpha] \mapsto \phi_\alpha$ является гомоморфизмом-вложением групп $\pi_1(S,\circ) \to \operatorname{Aut}\widetilde{S}$, $[\circ] \mapsto \mathrm{id}$, где id – тождественное преобразование.

Если $z\colon \widetilde{S} \to \widehat{\mathbb{C}}$ – голоморфное вложение с каноническим образом $D = \widehat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{D}$ или $\mathbb{H}$, то $A_\alpha = z \circ \phi_\alpha \circ z^{-1}$ является автоморфизмом соотв. канонической области D и потому (ТФКП) – дробно-линейным (мёбиусовым) преобразованием, действующим на всей сфере Римана. $\Longrightarrow$ автоморфизмы A_α (области D) образуют подгруппу $G = G_z \subset \operatorname{Aut} D$ (зависящую от выбора координаты z) и изоморфную $\pi_1(S,\circ) = \{[\alpha]\}$.

Если $\psi \in \operatorname{Aut} D$, то $\pi \circ \psi \colon D \to S$ – тоже универсальное накрытие, с накрывающей группой $\psi G \psi^{-1} = \{\psi \circ A \circ \psi^{-1} \colon A \in G\}$, в общем, отличной от G. Чтобы избавиться от такого произвола, требуется некоторая нормировка универсального накрытия $D \to S$, фиксирующая координату z однозначно. Например, в случае $D = \mathbb{D}$ обычно предполагается, что точка $z = 0 \in \mathbb{D}$ проектируется в базовую для $\pi_1(S)$ точку $\circ$ и что направление $\partial/\partial x$ в 0 проектируется в заданное направление в точке $\circ$. Координата z такими условиями определяется однозначно, $\operatorname{Aut} \mathbb{D}$ состоит из дробно-линейных преобразований вида $e^{ic}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$, $a \in \mathbb{D}$, $c \in \mathbb{R}$, и накрывающая группа G есть вполне определённая подгруппа дробно-линейных автоморфизмов $\mathbb{D}$. Аналогичная нормировка предполагается для $\mathbb{H}$ (скажем, в точке $z = i$) и для $D = \mathbb{C}$. Всюду в дальнейшем, говоря об универсальном накрытии, мы предполагаем некоторую такую нормировку, определяющую представление накрывающей группы в виде подгруппы дробно-линейных автоморфизмов накрывающей области. Тогда каждой петле α на S с началом $\circ$ однозначно соответствует дробно-линейный автоморфизм A_α канонической области $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$, причём $A_\alpha \neq \mathrm{id}$ не имеет в D неподвижных точек (иначе $\phi_\alpha \neq \mathrm{id}$ имело бы неподвижную точку на S).

Следующая простая лемма часто используется в дальнейшем.

Лемма 1. *$f \colon S_0 \to S$ – гомеоморфизм p/n, $\pi_0 \colon D_0 \to S_0$, $\pi \colon D \to S$ – универсальные накрытия $\Longrightarrow$ $\exists$ гомеоморфизм $\tilde{f}$ (определяемый однозначно с точностью до композиции с элементами накрывающей группы накрытия π), накрывающий отображение f, т.е. $\pi \circ \tilde{f} = f \circ \pi_0$. Если при этом f голоморфно, то $\tilde{f}$ – биголоморфизм.*

$$\begin{array}{ccc} D_0 & \xrightarrow{\tilde{f}} & D \\ {\scriptstyle \pi_0}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi} \\ S_0 & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

$\lhd$ Так как D_0 односвязна, то по следствию 1 (п. 4), применённому к $f \circ \pi_0$, $\exists\ \tilde{f}$, т.ч. $\pi \circ \tilde{f} = f \circ \pi$. Так как проекции локально 1:1 и голоморфны, то $\tilde{f}$ локально 1:1 и голоморфно вместе с f. Так как $\tilde{f}^{-1} = \pi_0^{-1} \circ f^{-1} \circ \pi$ и π_0, f, π – накрытия, то $\tilde{f}$ – тоже накрытие. Так как D односвязна, то, отсюда, $\tilde{f}$ – гомеоморфизм.

О единственности: Если $\tilde f_1$ – другое накрытие f, то $\pi \circ \tilde f_1 \circ \tilde f^{-1} = \pi$. Так как листы π^{-1} над односвязной всюду плотной областью $U \subset S$ получаются один из другого автоморфизмами вида A_α из накрывающей группы накрытия π, то $\tilde f_1 = A_\alpha \circ \tilde f$ над $U \Longrightarrow$ всюду по непрерывности. $\triangleright$

Следствие. *Если $A \in G_0$, накрывающей группе π_0, то $\tilde f \circ A \circ \tilde f^{-1} = B$ – элемент накрывающей группы $G \subset \operatorname{Aut} D$ проекции π.*

Удивительно, что $\tilde f$ здесь всего лишь гомеоморфизм, в то время как A, B – дробно-линейные отображения!

$\triangleleft$ $\pi \circ B = f \circ \pi_0 \circ A \circ \tilde f^{-1} = f \circ \pi_0 \circ \tilde f^{-1} = \pi$. $\triangleright$

Универсальное накрытие определяет на S структуру, формально ещё более жёсткую, чем комплексная: если U, V – односвязные подобласти S и непрерывные функции $z\colon U \to \widetilde S$, $w\colon V \to \widetilde S \subset \widehat{\mathbb{C}}$ (значение ∞ допускается) т.ч. $\pi \circ z = \mathrm{id}_U$, $\pi \circ w = \mathrm{id}_V$ (т.е. сечения проекции π), то функция перехода $z \circ w^{-1}$ на $w(U \cap V)$ *дробно-линейна* (а не просто голоморфна). Структуры многообразия с такими функциями переходов называются *проективными* и мы выше показали, что всякая р/п S допускает проективную структуру, совместимую с комплексной структурой S. Для комплексных многообразий размерности > 1 это далеко не так, условие проективности намного сильнее комплексности.

7. Классы р/п по универсальным накрывающим. Соответствие $S \to G$, где G – накрывающая группа универсальной проекции $D \to S$, позволяет в разумных пределах отождествлять р/п с чисто алгебраическими объектами – соотв. подгруппами автоморфизмов канонических областей и решать геометрически-аналитические задачи для р/п алгебраическими методами. Посмотрим, как это работает, на примере описания р/п по их универсальным накрытиям.

Если $\widetilde S = \widehat{\mathbb{C}}$, то накрытие $\pi\colon \widetilde S \to S$ конечнолистно (из-за компактности $\widetilde S$). Из соотношения для эйлеровых характеристик (см. [41], л. 2, с. 21) получаем, что $2 = k(2 - 2g)$, где k – число листов накрытия π, откуда $g = 0$ и $k = 1$, значит, S – тоже сфера, *единственная* эллиптическая р/п. Здесь никакой алгебры не нужно.

Если $\widetilde S = \mathbb{C}$, то G состоит из аффинных преобразований $z \mapsto az + b$.

Если $G = \{\mathrm{id}\}$ тривиальна, то $\pi\colon \mathbb{C} \to S$ 1:1, т.е. S голоморфно эквивалентна плоскости $\mathbb{C}$.

Отображение $az + b$ не имеет неподвижных точек в $\mathbb{C} \iff a = 1$, $b \neq 0$. Коэффициенты b элементов группы G образуют группу по сложению Γ без предельных точек. Пусть $b_1 \neq 0$ – ближайшая к 0 точка Γ и $0 \neq b_2 \in \Gamma$ – ближайшая к 0 и не $\mathbb{R}$-пропорциональная b_1.

Если b_2 нет, то Γ – арифметическая прогрессия $\{nb_1\colon n \in \mathbb{Z}\}$. Точки $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ проектируются (при универсальном накрытии) в одну точку р/п $S \iff z_2 = z_1 + nb_1$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$. Отображение $z \mapsto e^{2\pi iz/b_1}$ “склеивает” именно такие точки и отображает $\mathbb{C}$ на $\mathbb{C} \setminus 0 \implies$ р/п S биголоморфно эквивалентна $\mathbb{C} \setminus 0$. Геометрически, фактор $\mathbb{C}/G$ виден на полосе $\{0 \leqslant \operatorname{Re} z/b_1 \leqslant 1\}$ с отождествлёнными краями ($z \sim z + b_1$), однолистно отображамой на S: это бесконечный цилиндр, т.е. (топологически) сфера с двумя проколами.

Если b_2 есть, то как легко сообразить, в замкнутом параллелелограмме с вершинами $0, b_1, b_2, b_1 + b_2$ нет других точек Γ, кроме вершин, и $\Gamma = \{nb_1 + mb_2\colon n, m \in \mathbb{Z}\}$ – решётка. В этом случае фактор $\mathbb{C}/G$ есть тор (отождествляются соотв. точки противоположных сторон указанного параллелограмма).

Все ли торы (= компактные р/п рода 1) получаются таким образом? Ответ положительный, см., например, [41], л. 10, с. 86.

Подведём итог: С точностью до биголоморфизмов,

- эллиптические р/п – это только сфера,
- параболические р/п – это $\mathbb{C}$, $\mathbb{C} \setminus 0$ и торы,
- гиперболические р/п – *все остальные*.

Семейство торов мы изучим отдельно и, в основном, будем заниматься гиперболическими р/п.

8. Фуксовы группы и теорема униформизации. Группа G гомеоморфизмов топологического пространства X (на себя) называется *собственно разрывной*, если $\forall\, x \in X\ \exists$ окрестность $U \ni x$, т.ч. $A(U) \cap U$ непусто лишь для конечного множества элементов $A \in G$. Если G – накрывающая группа универсального накрытия $\pi\colon \widetilde{S} \to S$ и $U \ni x$ – связная компонента множества $\pi^{-1}(V)$, где V – односвязная окрестность $\pi(x)$ то, как уже отмечалось, $A(U) \cap U$ непусто лишь для $A = \mathrm{id}$ (теорема единственности, ТФКП) $\implies G$ собственно разрывна.

Собственно разрывные подгруппы $G \subset \operatorname{Aut} D$, где $D = \mathbb{D}$ или $\mathbb{H}$, называются *фуксовыми группами*. Иногда в определение фуксовых групп добавляют требование, что любой элемент $A \in G \setminus \mathrm{id}$ не имеет в D неподвижных точек (см. [6], с. 150), и мы тоже присоединим это условие, поскольку оно выполняется для всех накрывающих групп. Если G – с этим дополнительным свойством (отсутствием кручений), то $\forall\, z \in D\ \exists$ окрестность $U \ni z$, т.ч. $A(U) \cap U$ пусто $\forall\, A \in G \setminus \mathrm{id}$.

Каждая подгруппа $G \subset \operatorname{Aut} D$ определяет на D условие эквивалентности: $z_1 \sim z_2$, если $z_2 = A(z_1)$ для некоторого $A \in G$. Класс эквивалентности $[z]$ называется G-орбитой точки $z \in D$. Множество таких классов обозначается через D/G и наделяется естественной фактор-топологией (множество $U \subset D/G$ открыто, если $\pi_G^{-1}(U)$ открыто, где $\pi_G \colon D \to D/G$ – фактор-проекция). Если G фуксова и $U \ni z$ такова, что $A(U) \cap U = \varnothing\ \forall\, A \in G \setminus \mathrm{id}$, то сужение $\pi_G|U$ 1:1, $\pi_G(U)$ является окрестностью $[z]$ и таким образом на D/G вводится структура римановой поверхности. При этом если $z' = A(z)$, $A \in G \setminus \mathrm{id}$, то $A(U) \cap U$ пусто (по условию на G). Так как $A(U)$ – связная компонента $\pi_G^{-1}(\pi_G(U))$, содержащая z', то мы получаем отсюда, что $\pi_G \colon D \to D/G$ есть накрытие р/п, универсальное, поскольку D односвязна.

Если, как выше, G – накрывающая группа универсального накрытия $\pi \colon D \to S$, то р/п S и D/G биголоморфно эквивалентны, так как отображение $\pi_G \circ \pi^{-1} \colon S \to D/G$ корректно определено и биголоморфно.

Таким образом, изучение гиперболических р/п эквивалентно изучению соотв. фуксовых групп; просто это различные языки и дело вкуса, какой из них предпочесть, геометрический или алгебраический. Для начинающих изучать теорию Тейхмюллера одной из очевидных сложностей является то, что ни один из этих языков нельзя проигнорировать, сразу приходится говорить по крайней мере на этих двух языках одновременно (а есть ещё и другие необходимые, см. лл. 4–7).

Итак, мы установили, что всякая гиперболическая р/п биголоморфно эквивалентно фактору $\mathbb{D}$ или $\mathbb{H}$ по соотв. фуксовой группе. Отсюда, вместе с теоремой Римана получается такая классификация:

Теорема униформизации. *Произвольная р/п голоморфно эквивалентна одной из следующих, попарно не эквивалентных, поверхностей:*

1. $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$;
2. $\mathbb{C}$;
3. $\mathbb{C} \setminus 0$;
4. $\mathbb{C}/\Gamma$, *где* Γ *– решётка;*
5. D/G, *где* $D = \mathbb{D}$ *или* $\mathbb{H}$ *и* G *– фуксова подгруппа* $\operatorname{Aut} D$.

Если G – фуксова группа, то предельные точки каждой её орбиты концентрируются на ∂D. Множество $\sigma(G)$ таких предельных точек называется *предельным множеством* группы G, а дополнение к нему в ∂D называется *идеальной границей* группы G.

Пример. $D = \mathbb{H}$, $G = \{z \mapsto a^n z \colon n \in \mathbb{Z}\}$, $a > 1 \Longrightarrow \sigma(G) = \{0, \infty\}$. Орбиты точек лежат на лучах из 0. Функция $z \mapsto e^{-2\pi i \log z/\log a}$ задаёт фактор-отображение на р/п, которая является образом полукольца $\{z \in \mathbb{H} \colon 1 < |z| < a\} \Longrightarrow \mathbb{H}/G = \{w \colon 1 < |w| < e^{2\pi^2/\log a}\}$ – кольцо, произвольного внешнего радиуса, зависящего от a. Лучи $\mathbb{R}_\pm$ составляют идеальную границу; правый бесконечнолистно накрывает внутреннюю окружность кольца, левый – внешнюю.

Фуксовых групп с таким малым ($\# \leqslant 2$) предельным множеством совсем немного (см. упр. 3). Для остальных множество $\sigma(G)$ сразу бесконечное и совершенное, но это не так просто доказать и мы это использовать не будем.

* * * * *

Задачи и упражнения.

1. $\pi \colon S' \to S$ – накрытие, не 1:1 $\Longrightarrow$ группа $\operatorname{Aut} S'$ нетривиальна.

2. $\pi \colon \widetilde{S} \to S$ – универсальное накрытие $\Longrightarrow \forall\, p \in S$, $p', p'' \in \pi^{-1}(p)$ $\exists$ петля α с началом $\circ$, т.ч. соотв. ей накрывающее преобразование ϕ_α переводит p' в p''.

3. $\sigma(G)$ – предельное множество фуксовой группы G.
$\sigma(G)$ пусто $\Longrightarrow G = \{\mathrm{id}\}$,

$\#\sigma(G) = 1 \Longrightarrow G$ накрывает проколотый круг $\mathbb{D} \setminus 0$,

$\#\sigma(G) = 2 \Longrightarrow G$ накрывает кольцо.

4. $[a]$ – орбита точки $a \in \mathbb{D}$ относительно фуксовой группы $G \Longrightarrow$ множество предельных точек $[a]$ на $\partial\mathbb{D}$ *совпадает* с $\sigma(G)$.

5. S – компактная р/п, $E \subset S$ – конечное подмножество, G – накрывающая группа поверхности $S \setminus E \Longrightarrow \sigma(G) = \partial D$.

6* (лемма Альфорса). S – компактная р/п с непустым краем, E – конечное подмножество S, G – накрывающая группа р/п $S \setminus E \Longrightarrow$ $\mathrm{mes}_1\, \sigma(G) = 0$ (mes_1 – длина).

Лекция 2

Метрика Пуанкаре – Гиперболические метрики – Конформные типы р/п – Проколы – Компоненты края – Фундаментальные области – Дубль Шоттки – Гомотопные отображения – Накрывающие группы и гомотопии

9. Метрика Пуанкаре. Метрика на гладком многообразии – это положительно определённая билинейная форма в слоях касательного расслоения, гладко зависящая от точек самого многообразия. На р/п S есть метрики, согласованные с комплексной структурой J (так называемые *конформные* метрики), относительно которых структура J (“умножение на i” в слоях касательного расслоения) ортогональна (см. [41], л. 5, п. 3). В локальных голоморфных координатах $z = x + iy$ такая метрика имеет вид $\rho^2 = \lambda^2(z)((dx)^2 + (dy)^2) =: (\lambda(z)\,|dz|)^2$, где $\lambda > 0$ – гладкая функция, $\rho^2(v, Jv) = 0$ $\forall$ касательного вектора $v = v_1\frac{\partial}{\partial x} + v_2\frac{\partial}{\partial y} \in T_aS$ и длина v в этой метрике равна $\lambda(a)\,(v_1^2+v_2^2)^{1/2}$. Длина спрямляемой кривой γ в координатной окрестности равна $\int_\gamma \lambda\,|dz|$, а площадь измеримого подмножества E равна $\int_E \lambda^2\,dx\wedge dy = \int_E \lambda^2\,\frac{i}{2}\,dz\wedge d\bar z$. Переход к другой голоморфной координате ζ стандартный: $dz = z'_\zeta\,d\zeta$ и в ζ-окрестности $\lambda(z)$ надо заменить на $\lambda(z(\zeta))|z'_\zeta|$. Это обычное правило замены переменных под знаком интеграла, поэтому длины кривых и площади множеств относительно метрики ρ определены на S глобально.

В круге $\mathbb{D}$ и в полуплоскости $\mathbb{H}$ есть замечательная метрика, инвариантная относительно любых голоморфных автоморфизмов этих областей, *метрика Пуанкаре* ρ_Π. В круге это метрика $|dz|/(1-|z|^2)$, а в $\mathbb{H}$ – метрика $\frac{1}{2}|dz|/y$ (упр. 1). Инвариантность означает, что, например, если $\zeta \mapsto z(\zeta)$ – дробно-линейный автоморфизм $\mathbb{H}$, то $|dz|/\operatorname{Im} z = |d\zeta|/\operatorname{Im}\zeta$ (и аналогично в $\mathbb{D}$).

Кривизна (гауссова) конформной метрики $\lambda\,|dz|$ – это функция $K = -\frac{1}{\lambda^2}\,\Delta\log\lambda$ (определение не зависит от выбора локальных голоморфных координат, упр. 2). Простое вычисление показывает, что кривизна метрики Пуанкаре в круге и полуплоскости постоянна и равна -4; домножая ρ_Π на 2 можно, конечно, сделать кривизну $\equiv -1$ но для вычислений удобнее предложенная выше (поскольку в 0 она совпадает с евклидовой метрикой). Можно показать, что полная метрика в $\mathbb{D}$ с такой кривизной единственна (упр. 3).

Важную роль в дальнейшем будут играть геодезические кривые в метрике Пуанкаре. Для их нахождения достаточно, пользуясь инвариантностью относительно дробно-линейных автоморфизмов $\mathbb{H}$, найти геодезические, соединяющие точки i, ia, $a > 1$. $\forall$ пути γ из i в ia, $\int_\gamma |dz|/y \geqslant \int_\gamma dy/y$, поскольку $|dz| \geqslant dy$ и равенство достигается только если касательные к γ параллельны мнимой оси п.в. (По формуле Стокса, последний интеграл равен интегралу по отрезку $[i, ia]$ т.е., равен $\log a$.) $\Longrightarrow$ (ТФКП)

- *Геодезические кривые в метрике Пуанкаре в $\mathbb{H}$ – это дуги окружностей, ортогональных $\mathbb{R}$;*
- *для любых двух точек в $\mathbb{H}$ $\exists\,!$ геодезическая дуга, их соединяющая.*

Отображение $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ переводит $\mathbb{H}$ в $\mathbb{D}$, а метрики Пуанкаре – друг в друга $\Longrightarrow$ геодезические Пуанкаре в круге – это тоже дуги окружностей, ортогональных $\partial\mathbb{D}$. Простое вычисление показывает, что расстояние Пуанкаре d_Π между точками $0, z \in \mathbb{D}$ равно $d_\Pi(z, 0) = \frac{1}{2} \log \frac{1+|z|}{1-|z|}$.

10. Гиперболические метрики. Простое, но важное замечание: поскольку метрика Пуанкаре инвариантна относительно $\operatorname{Aut} D$, то она инвариантна и относительно любой подгруппы $G \subset \operatorname{Aut} D \Longrightarrow$

На произвольной гиперболической р/п S при помощи универсального накрытия $\pi\colon \widetilde{S} \to S$ канонически определена гладкая метрика постоянной кривизны -4, прообраз которой на $\widetilde{S}$ совпадает с метрикой Пуанкаре ρ_Π (прообраз определён корректно, так как проекция π локально 1:1).

Эту метрику на S называют *гиперболической* (иногда точнее – гиперболической метрикой Пуанкаре).

Каждый путь на S поднимается до пути на $\widetilde{S}$ и его длина в гип. метрике *совпадает* с длиной поднятия в метрике Пуанкаре. Поэтому большинство задач о гип. геодезических на р/п S стандартно решается так: поднимем условия на $\widetilde{S} =$, скажем, $\mathbb{H}$ (где все геодезические в метрике Пуанкаре – это полуокружности на $\widehat{\mathbb{C}}$, ортогональные $\mathbb{R}$), проанализируем там и результат переформулируем в терминах S.

Например, гип. расстояние $h(p,q)$ между точками $p,q \in S$ – это, как обычно, минимум длин кривых, соединяющих p и q. Метрика *полна*, если соотв. шары $\{q\colon h(q,p) \leqslant R\}$, $R < \infty$, компактны. Если путь $\gamma\colon [0,1) \to S$ покидает любой компакт при $t \to 1$, то его поднятие на $\widetilde{S}$ стремится к границе при $t \to 1$ и потому его длина равна бесконечности. Вывод:

- *Всякая гиперболическая р/п S полна относительно своей гип. метрики.*
- *Через заданную точку S в любом заданном направлении проходит единственная гип. геодезическая $\gamma\colon [0,\infty) \to S$ бесконечной гип. длины.*

При переходе к гип.метрике на р/п S единственность геодезических, соединяющих две точки, вообще говоря, нарушается: образ геодезической в $\mathbb{H}$ при факторизации может оказаться замкнутым и тогда на нём есть две геодезические равной длины и с общими концами. Но тогда эти два геодезических пути γ_1, γ_2 не гомотопны друг другу (при поднятии $\gamma_2\gamma_1^{-1}$ в $\mathbb{H}$ получается незамкнутая дуга геодезической полуокружности). Отсюда такая коррекция:

- *На произвольной гиперболической р/п S в любом гомотопическом классе путей с заданными концами $\exists\,!$ кратчайшая кривая, геодезическая относительно гип. метрики.*

“Кривая” здесь, как обычно, – это путь с точностью до параметризации.

Концы могут совпадать и тогда геодезический путь замкнут. В классе свободно гомотопных замкнутых путей (концы не фиксируются) минимум длин может и не достигаться.

Пример. Функция $z \mapsto w = e^{iz}$ задаёт универсальное накрытие проколотого круга $\mathbb{D} \setminus 0$ верхней полуплоскостью. Так как $dz = -i\,dw/w$ и $y = \operatorname{Im} z = -\log|w|$, то $\frac{1}{2}|dz|/y = \frac{1}{2}|dw|/(|w|\log 1/|w|)$ – гип. длина в $\mathbb{D} \setminus 0$. Длина любого пути $\gamma\colon [0,1) \to \mathbb{D} \setminus 0$, стремящегося к 0 при $t \to 1$, очевидно, бесконечна, но длина окружности $\gamma\colon |w| = r$ равна $\frac{1}{2r\log 1/r}\int_\gamma |dw| = \frac{\pi}{\log 1/r} \to 0$ при $r \to 0$. (Замечание: окружности $|w| = r$ *не* являются геодезическими, см. упр. 5.)

И ещё: гип. площадь проколотого круга $0 < |z| < r$, $r < 1$, конечна и равна $\frac{\pi}{2}\int_0^r \frac{dt}{t\,(\log t)^2} \to 0$ при $r \to 0$.

Геодезических в данном классе может и не быть, но если они есть, то единственность гарантируется:

Лемма 2. *На произвольной гиперболической р/п в любом нетривиальном (не гомотопном нулю) классе свободно гомотопных петель есть не более одной гип. геодезической.*

$\triangleleft$ Пусть $S \neq \widetilde{S} = \mathbb{H}$, γ_0, γ_1 – гомотопные гип. геодезические и $F(s,t)\colon [0,1]^2 \to S$ – их гомотопия в классе свободных петель. Согласно след. 1 п. 4 F поднимается до гомотопии $\widetilde{F}$ соотв. поднятий. Приближая $\widetilde{F}$ гладкими функциями (и оставляя неизменной при $s = 0,1$), можем считать, что F и $\widetilde{F}$ – гладкие отображения. Тогда путь $\widetilde{F}(s,0)$ имеет конечную длину Пуанкаре.

Предположив, что кривые γ_0, γ_1 различны, мы получаем, что накрывающие их полуокружности Γ_0, Γ_1, ортогональные $\mathbb{R}$, различны $\Longrightarrow$ один из концов a_0 полуокружности Γ_0 не является предельным для Γ_1. Так как Γ_0 накрывает γ_0 счётное число раз, то концы Γ_0 являются предельными для орбиты точки $\widetilde{F}(0,0)$ относительно накрывающей группы G (если $\phi \in \operatorname{Aut}\mathbb{H}$, то прямая Пуанкаре, проходящая через z и $\phi(z) \neq z$ при отображении ϕ переходит сама в себя).

Пусть $A_\nu \subset G$ т.ч. точки $A_\nu(\widetilde{F}(0,0))$ лежат на Γ_0 и стремятся к a_0 при $\nu \to \infty$. Тогда другой конец $A_\nu(\widetilde{F}(1,0))$ пути $A_\nu(\widetilde{F}(s,0))$ остаётся на Γ_1 и потому длина Пуанкаре этого пути стремится к ∞ при $\nu \to \infty$. Но это противоречит ограниченности длины пути $\widetilde{F}(s,0)$, так как длина Пуанкаре инвариантна относительно действий $\operatorname{Aut}\mathbb{H}$. $\triangleright$

Биголоморфные отображения, очевидно, сохраняют гип. метрику. Обратно, если $f\colon S \to S'$ – сохраняющий гип. метрику диффеоморфизм, то f, в частности, конформно и потому комплексно дифференцируемо (см. геометрический смысл комплексной производной, ТФКП), т.е. голоморфно $\Longrightarrow$

- *Биголоморфные отображения гиперболических р/п* $=$ $= 1:1$ *изометрии гиперболических метрик этих р/п.*

11. Конформные типы р/п. Комплексная структура р/п позволяет детальнее классифицировать р/п конечного топ. типа (g,n). Напомним, что это р/п, которая получается введением комплексной структуры на топологической поверхности $S_0 \setminus E$, где S_0 компактна и E – конечное множество. Пусть $S = (S_0 \setminus E, J)$ – р/п, $a \in E$ и V – окрестность a в S_0, гомеоморфная $\mathbb{D}$. Тогда р/п

$(V \setminus a, J)$ голоморфно эквивалентна либо проколотому кругу $\mathbb{D}\setminus 0$, либо кольцу $\{z \in \mathbb{C}\colon r < |z| < 1/r\}$ с некоторым $r > 0$ и это свойство не зависит, очевидно, от выбора V. Точка a называтся *проколом* в первом случае и *компонентой края* во втором. Обозначим через n число проколов, через m – число компонент края и будем говорить в таком случае, что р/п S имеет (конечный) *конформный тип* (g, n, m) ("конформный" здесь синоним "голоморфный", ввиду эквивалентности биголоморфных отображений и изометрий относительно гип. метрики). Если $m = 0$, то часто вместо $(g, n, 0)$ пишут просто (g, n) подчёркивая, что это конформный тип. Конформный тип р/п существенно зависит от комплексной структуры. Например, если $f\colon A \to \mathbb{D}\setminus 0$ – диффеоморфизм кольца и проколотого диска и J – комплексная структура на A, голоморфные функции которой имеют вид $h \circ f$, где h – обычная голоморфная функция в $\mathbb{D} \setminus 0$, то р/п (A, J) голоморфно неотличима от $\mathbb{D}\setminus 0$. Такие преобразования можно делать в сколь угодно малых окрестностях топ. проколов $\Longrightarrow$ На поверхности топ. типа (g, N) есть комплексные структуры любого конформного типа (g, n, m) в рамках $n + m = N$.

Проколы и компоненты края вместе называем *компонентами границы* р/п S, а области $U = V \setminus a$, описанные выше, – окрестностями соотв. компонент.

12. Проколы. Геометрия р/п в окрестности прокола описывается следующей леммой.

Лемма 3. *S – гиперболическая р/п топ. типа $(g, n) \Longrightarrow$ Для всякого прокола на S $\exists$ окрестность U, $r > 0$ и голоморфная координата $w\colon U \to \mathbb{D}_r \setminus 0$, т.ч. все кривые $\arg w = \mathrm{const}$ в U являются гип. геодезическими на S. При этом координату z на универсальном накрытии $\Pi\colon \mathbb{H} \to S$ можно выбрать так, что $U \setminus \{w \leqslant 0\}$ однолистно накрывается полуполосой $\{|x| < \pi,\ y > \log(1/r)\}$ и $w \circ \Pi = e^{iz}$.*

Так же $\exists$ дробно-линейная координата ζ на универсальной накрывающей $\mathbb{D} \to S$, т.ч. $w = \exp\frac{\zeta+1}{\zeta-1}$ в области $W \subset \mathbb{D}$, однолистно накрывающей $U \setminus \{w \leqslant 0\}$. Граница W состоит из дуг трёх окружностей: две касаются друг друга в точке 1 и ортогональны $\partial\mathbb{D}$, а третья лежит в $\mathbb{D}$ и касается $\partial\mathbb{D}$ в 1, см. рис. 4. Гиперболическая метрика S в области U равна $\frac{1}{2}|dw|/(|w|\log 1/|w|)$.

Окрестности прокола с такими свойствами будем называть *каноническими*. Формула для обратного отображения $\zeta = 1 + 2/\log(w/e)$ несколько раз используется в дальнейшем (лл. 8–9).

$\lhd$ Пусть α – жорданова гип. геодезическая на S, замкнутая в малой связной окрестности U_0 прокола с предельной точкой в проколе (такая $\exists$, упр. 7), $\Pi\colon \mathbb{H} \to S$ – универсальное накрытие и V_0 – связная компонента $\Pi^{-1}(U_0 \setminus \alpha)$. Тогда $p|V_0 \to U_0 \setminus \alpha$ 1:1 и ∂V_0 состоит из кривой $\overline{V}_0 \cap \Pi^{-1}(\partial U_0)$, двух геодезических Пуанкаре, накрывающих α 1:1 и $\Sigma = \partial V_0 \cap (\mathbb{R} \cup \infty)$. Так как в U_0 есть голоморфная функция $f \not\equiv 0$ с нулём в проколе, то $f \circ \Pi$ голоморфна в V_0 и стремится к 0 при стремлении к $\Sigma \Longrightarrow$ (по граничной теореме единственности, ТФКП) Σ есть одна точка. Координату z в $\mathbb{H}$ выберем так, что эта точка есть ∞. Тогда геодезические части ∂V_0, накрывающие α, будут отрезками прямых $x = \mathrm{const}$ и можно считать, что это прямые $x = \pm\pi$. Тогда есть $R > 0$, т.ч. полуполоса $V = \{|x| < \pi,\ y > R\}$ принадлежит V_0. Обозначим через U окрестность прокола, которая накрывается полуполосой $\{|x| \leqslant \pi,\ y > R\}$. Так как полупрямые $\{x = \pm\pi,\ y > R\}$ проектируются в α и $e^{\pm i\pi} = -1$, то функция w в U, равная $\exp(iz \circ \Pi)$, $z \in V$, непрерывно продолжается в U и там голоморфна. Так как e^{iz} конформно отображает V на проколотый диск $\{0 < |w| < e^{-R}\}$, то w – голоморфная координата в U с этими значениями.

Отображение $z = i\frac{1+\zeta}{1-\zeta}$ переводит $\mathbb{D}$ в $\mathbb{H}$ и окрестность $W \subset \mathbb{D}$, описанная в лемме, является прообразом полуполосы V при этом отображении.

Используя равенство $w = e^{iz}$, точно так же, как в примере п. 10, выводим указанное представление гиперболической метрики. $\rhd$

Как следствие, получаем, например, что гип. площадь р/п конформного типа (g, n) конечна.

13. Компоненты края. Для каждой компоненты края $\exists$ окрестность $U \subset S$ и голоморфный внутри U гомеоморфизм $w\colon \overline{U} \to A\colon 0 < r < |w| \leqslant 1$, переводящий $\partial U \cap S$ в $\{|w = 1|\}$. Пусть $\pi\colon \mathbb{D} \to S$ – универсальное накрытие и $\widetilde{U}$ – связная компонента $\pi^{-1}(U)$. Тогда $\widetilde{U}$, очевидно, односвязна и, значит, $\pi|\widetilde{U} \to U$ – универсальное накрытие. Функция $-\log|w \circ \pi|$ положительная и гармоническая на $\widetilde{U}$, но $= 0$ на $\partial\widetilde{U} \cap \mathbb{D}$. Если $E = \partial\widetilde{U} \cap \partial\mathbb{D}$ – точка $z = a$ (z – координата в $\mathbb{C} \supset \mathbb{D}$), то функция $\varepsilon \log|z - a| - \log|w \circ \pi|$

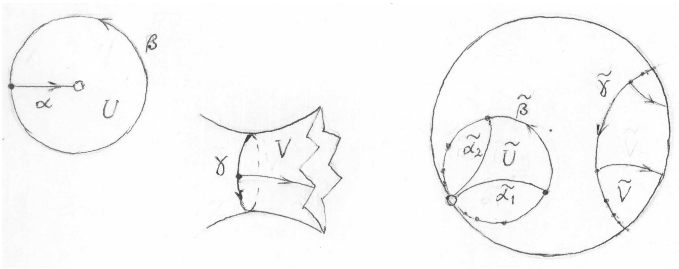

Рис. 4. Поднятия окрестностей прокола и края

гармоническая в $\widetilde{U}$ и её предельные значения на $\partial\widetilde{U}$ не превосходят $\varepsilon \log 2 \Longrightarrow$ При $\varepsilon \to 0$ получается противоречие с принципом максимума для гармонических функций $\Longrightarrow E$ – замкнутая дуга, не точка.

Если l – внутренность этой дуги и $p \in S \setminus U$, то $\pi^{-1}(p)$ не пересекает $\widetilde{U}$ и, значит, не имеет предельных точек на l. Так как это верно для сколь угодно малых окрестностей U (l для всех них одна) то отсюда следует, что l не пересекает предельное множество $\sigma(G)$ накрывающей группы G, т.е. l принадлежит идеальной границе этой группы (см. п. 8 л. 1).

Пусть γ – жорданова гип.геодезическая петля на S, свободно гомотопная ∂U. Так как $S \setminus \partial U$ состоит из двух связных компонент, одна из которых U гомеоморфна кольцу, то это топологическое свойство сохраняется при гомотопии (это нетрудно доказать, используя триангулируемость S и то, что всякая петля на S свободно гомотопна петле, состоящей из сторон треугольников триангуляции) $\Longrightarrow S \setminus \gamma$ тоже состоит из двух компонент. Если U достаточно мала, то петли γ и ∂U не пересекаются и одна из компонент V множества $S \setminus \gamma$ содержит $\overline{U}$ и тоже гомеоморфна кольцу. Пусть $\widetilde{V}$ – компонента $\pi^{-1}(V)$, содержащая $\widetilde{U}$ и $\tilde{\gamma} = \partial\widetilde{V} \cap \mathbb{D}$. Так как γ свободная геодезическая, то $\tilde{\gamma} \subset \pi^{-1}(\gamma)$ – дуга окружности, ортогональной $\partial\mathbb{D}$, с теми же концами, что и дуга $\partial\widetilde{U} \cap \partial\mathbb{D}$. Так как длина Пуанкаре $\tilde{\gamma}$ бесконечна, то она накрывает γ счётное число раз и, значит, на ней есть точки p', p'' т.ч. $p'' = A(p')$ для некоторого $A \in G$ и отрезок $\tilde{\gamma}$ между p' и p'' накрывает γ однократно. Циклическая группа $\{A^n : n \in \mathbb{Z}\}$ переводит $\tilde{\gamma}$ в себя $\Longrightarrow \widetilde{V}$ в себя и, как легко понять, является накрывающей группой универсального накрытия $\pi|\widetilde{V} \to V$. Построенную область V

(со свободной гип. геодезической границей γ) назовём *канонической* окрестностью соотв. компоненты края. Как показано выше, внутренность l дуги $\partial\widetilde{V}\cap\partial\mathbb{D} = \partial\widetilde{U}\cap\partial\mathbb{D}$ не пересекает предельное множество фуксовой группы G, но концы дуги ему принадлежат.

Объединение всех дуг l по всем компонентам $\widetilde{V}\subset\pi^{-1}(V)$ и по всем компонентам края совпадает с идеальной границей $I = \partial\mathbb{D}\setminus\sigma(G)$ группы G: Если l – связная компонента I и $\tilde{\gamma}$ – геодезическая Пуанкаре с теми же концами, то $l\cup\tilde{\gamma}$ ограничивает область U т.ч. $A(U) = U$, либо $A(U)\cap U = \varnothing\ \forall\ A\in G\setminus\mathrm{id}$ $\Longrightarrow \pi|_U$ – накрытие окрестности V некоторой компоненты границы S, которая не может быть проколом, так как $\pi(\tilde{\gamma})$ – гип. геодезическая.

Лемма 4. *S – р/п топ. типа $(g,n)\Longrightarrow$ В каждом ненулевом гомотопическом классе $[\gamma]$ свободных петель на S, не содержащем петель в канонических окрестностях проколов, $\exists!$ гип. геодезическая петля.*

$\lhd$ Пусть $\gamma_j\in[\gamma]$ таковы, что гип.длины $h(\gamma_j)\to l = \inf\{h(\alpha)\colon \alpha\in[\gamma]\}$, γ_j – образы $[0,1]\to S$, $p_j = \gamma_j(0) = \gamma_j(1)$. В канонических окрестностях компонент края или прокола никаких замкнутых свободных геодезических нет. Поэтому, перепараметризовывая γ_j с учётом условия на $[\gamma]$ и переходя к подпоследовательности, можем считать, что p_j сходятся к некоторой $p\in S$.

Пусть $\pi\colon\mathbb{D}\to S$ – универсальное накрытие; тогда есть $a_j\to a\in\mathbb{D}$, т.ч. $\pi(a_j) = p_j$. Пусть b_j – конец поднятия $\tilde{\gamma}_j$ пути γ_j с началом a_j. Так как длины Пуанкаре для $\tilde{\gamma}_j$ (равные гип. длинам соотв. γ_j) равномерно ограничены, то, переходя к подпоследовательности, можно считать, что $b_j\to b$ и, значит, $d_\Pi(a,b)\leqslant l$. С другой стороны, кривая $\hat{\gamma}_j$, состоящая из геодезических отрезков $[a_j,a]\cup[a,b]\cup[b,b_j]$ проектируется в замкнутую кривую на S, гомотопную γ_j (поскольку $\hat{\gamma}_j$ и $\tilde{\gamma}_j$ гомотопны в $\mathbb{D}$ как кривые с фиксированными концами) $\Longrightarrow \pi([a,b])$ – искомая гип. геодезическая.

Единственность доказана в лемме 2. $\rhd$

14. Фундаментальные области. Метрика Пуанкаре удобна для построения так называемых фундаментальных областей на универсальной накрывающей $\pi\colon\widetilde{S}\to S$. Область $U\subset\widetilde{S}$ называется *фундаментальной*, если $\pi(\overline{U}) = S$ и сужение $\pi|U\to\pi(U)$ однолистно (1:1). Простейшие примеры таких областей – это так называемые *многоугольники Дирихле*: для каждой фиксированной точки $a \in \widetilde{S}$ это множество

$$\mathcal{D}_a = \left\{ z \colon d_\Pi(z,a) < d_\Pi(z,a_j),\ \ \forall\, a_j \in \pi^{-1}(\pi(a)),\ a_j \neq a \right\}$$

(d_Π – расстояние Пуанкаре на $\widetilde{S}$). Если $A \in G$, накрывающей группе, и $A(a) = a_j$, то $A(\mathcal{D}_a) = \mathcal{D}_{a_j}$ и эта область не пересекает $\mathcal{D}_a$, если $A \neq \mathrm{id}$. Так как $\pi(A(\mathcal{D}_a)) = \pi(\mathcal{D}_a)$ и, очевидно, $\bigcup_j \overline{\mathcal{D}}_{a_j} = \widetilde{S}$, то $\mathcal{D}_a$ – фундаментальная область. Преобразования A суть движения в метрике Пуанкаре, т.е. области $\mathcal{D}_{a_j}$ конгруэнтны друг другу. Ясно, что граница $\mathcal{D}_a$ состоит из отрезков геодезических (прямолинейных в см. метрики Пуанкаре) и сама $\mathcal{D}_a$ гиперболически выпукла в том смысле, что любые её две точки соединяются отрезком геодезической, целиком лежащим в $\mathcal{D}_a$ (упр. 8).

Если S компактна, то $\mathcal{D}_a$ – компакт (упр. 9). Если S – конечного топологического типа, то число сторон $\mathcal{D}_a$ конечно (упр. 10).

Другая каноническая фундаментальная область строится на основе полной развёртки р/п (см. [41], л. 4). Пусть $\circ$ – фиксированная точка гип. р/п S конформного типа (g,n), S_0 – её компактификация и $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g \ \subset S$ – стандартные образующие петли группы $\pi_1(S_0, \circ)$, т.ч. дополнение к их объединению в S_0 гомеоморфно кругу. Замена α_j, β_j гомотопными им гип. геодезическими на S с общим началом-концом $\circ$ не меняет эти свойства, так как любые две различные жордановы гип. геодезические на S пересекаются не более чем в одной точке (см. соотв. геодезические Пуанкаре в накрывающем круге). Добавим к α_j, β_j ещё n гип. геодезических γ_i на S, соединяющих $\circ$ с проколами, и обозначим через S' дополнение в S к объединению всех обозначенных геодезических. Тогда S' – односвязная область и если $\Pi \colon \mathbb{D} \to S$ – универсальное накрытие, $a \in \mathbb{D}$ и $\pi(a) \in S'$, то компонента $\mathcal{P}_a$ множества $\Pi^{-1}(S')$, содержащая a, однолистно накрывает S' и является выпуклым $(4g + 2n)$-угольником в метрике Пуанкаре (см. упр. 8) с $4g$ вершинами внутри $\mathbb{D}$ (все проектируются в $\circ$!) и n вершинами на $\partial\mathbb{D}$ (каждая соответствует своему проколу). Внутренние углы $\mathcal{P}_a$ в вершинах на $\partial\mathbb{D}$ равны 0 (см. лемму 3) и сумма всех внутренних углов $\mathcal{P}_a$ равна 2π (см. образ проекции Π в окрестности $\circ$). Согласно п. 12 площадь Пуанкаре многоугольника $\mathcal{P}_a$ (= гип.площадь S) конечна.

Многогранники Дирихле, многоугольники развёртки ($\mathcal{P}_a$) и др. фундаментальные многоугольники удобны тем, что они дают единую голоморфную координату Π^{-1} на "почти всей" S, точнее, на односвязных областях $\Pi(\mathcal{D}_a)$, $\Pi(\mathcal{P}_a)$ и т.п., замыкания которых совпадает с S, а границы кусочно-геодезические относительно гиперболической метрики.

15. Дубль Шоттки. Пусть S – р/п конформного типа $(g, 0, m)$, $m > 0$, (без проколов) и G – накрывающая группа универсального накрытия. Обозначим через $\widehat{\mathcal{D}}$ область $\mathbb{D} \cup I \cup (\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}) = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \sigma(G)$. Если $A \in G$ переводит в себя некоторую компоненту $\widetilde{V} \subset \pi^{-1}(V)$, где V – каноническая окрестность компоненты края, то A – элемент циклической группы G_V, соответствующей универсальному накрытию $\pi|\widetilde{V} \to V$ (см. выше) $\Longrightarrow A$ не имеет неподвижных точек на l, где l – внутренность $\partial\widetilde{V} \cap \partial\mathbb{D}$. Так как G собственно разрывна и её элементы не имеют неподвижных точек на $\mathbb{D}$, то отсюда следует, что она такова же и на $\widehat{\mathcal{D}}$. Согласно п. 8, л. 1 фактор $\widehat{\mathcal{D}}/G =: \widehat{S}$ является р/п, часть которой $\mathbb{D}/G$ есть наша S, а другая часть S^- получается из неё антиголоморфной инволюцией ("отражением") $\hat{\pi} \circ \iota$, где $\hat{\pi}\colon \widehat{\mathcal{D}} \to \widehat{\mathcal{D}}/G$ – фактор-проекция и $\iota\colon z \to 1/\bar{z}$ – симметрия относительно $\partial\mathbb{D}$. Образ каждой компоненты l идеальной границы I группы G бесконечнолистно накрывает петлю на $\widehat{S}$, общую компоненту границ. Поэтому $\exists$ компакт $K \subset \widehat{\mathcal{D}}$, образ которого при фактор-проекции совпадает с $\widehat{S} \Longrightarrow \widehat{S}$ – компактная р/п, которая называется *дублем Шоттки* р/п S. (Она, конечно, голоморфно эквивалентна дублю, описанному в [41], л. 9, п. 12, но приведённое выше построение более конструктивно и алгебраично.)

Если S имеет проколы, то заменяя окрестность прокола U с конформным отображением $z\colon U \to \mathbb{D} \setminus 0$ на $U \cup a$ с $z\colon U \cup a \to \mathbb{D}$, $z(a) = 0$, мы "заклеиваем" прокол и продолжаем комплексную структуру на S в полную окрестность a. Проделав это с каждым проколом, построим дубль Шоттки пополненной р/п типа $(g, 0, m)$ (если $m > 0$) и опять выколем добавленные точки на S и симметричные им на S^-. Результатом будет *дубль Шоттки* поверхности типа (g, n, m). У него уже нет компонент края, а число проколов удвоилось и род вырос с g до $2g + m - 1$ (упр. 11).

Если $\hat{\pi}\colon \mathbb{D} \to \widehat{S}$ – универсальное накрытие, то антиголоморфная инволюция $\hat{\iota}\colon \widehat{S} \to \widehat{S}$ (оставляющая неподвижными все точки $\partial S \cap \partial S^- =: \Gamma$) поднимается до антиголоморфной инволюции $\tilde{\iota}\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ и если взять за базу точку $\circ \in \Gamma$, а координату z в $\mathbb{D}$ такой что $\hat{\pi}(0) = \circ$, то $\tilde{\iota}(0) = 0$ и $\tilde{\iota}$ оставляет неподвижными все точки связной компоненты $L \subset \hat{\pi}^{-1}(\Gamma)$, содержащей 0. Так как отображение, комплексно сопряжённое к $\tilde{\iota}$ дробно-линейно, то $\tilde{\iota}(z) \equiv e^{i\alpha}\bar{z}$ и, решая уравнение $e^{i\alpha}\bar{z} = z$ неподвижных точек, получаем, что L есть диаметр $\mathbb{D} \cap \{Im(e^{i\alpha/2}z) = 0\}$. Это – геодезическая в метрике Пуанкаре в $\mathbb{D} \Longrightarrow \Gamma$ – гип. геодезическая на $\widehat{S}$. Вывод:

Лемма 5. *Произвольная р/п S конформного типа (g, n, m), $m > 0$, голоморфно отличная от круга и кольца, голоморфно эквивалентна области с $\mathbb{R}$-аналитической границей на своём дубле $\widehat{S}$, причём каждая компонента края этой области является геодезической относительно гип. метрики на $\widehat{S}$.*

Для круга это тоже верно: дубль – сфера Римана, $\partial\mathbb{D}$ на ней геодезическая, только метрика тут не гиперболическая, а сферическая. Аналогично для кольца с дублем-тором (см. упр. 12).

Переход к дублям во многом сводит классификационные задачи для р/п конформного типа (g, n, m) к соотв. задачам для компактных р/п с проколами. Поэтому мы сосредоточимся в основном на р/п конформного типа (g, n).

16. Гомотопные отображения. Непрерывные отображения $f_0, f_1 \colon X \to Y$ топологических пространств называются *гомотопными*, если $\exists$ непрерывное отображение $F \colon [0,1] \times X \to Y$, т.ч. $F(0, \cdot) = f_0$ и $F(1, \cdot) = f_1$. Нам понадобятся некоторые результаты о гомотопности отображений р/п.

Пусть S – гиперболическая р/п топ. типа (g, n) и $l(S)$ – минимум длин свободных гип. геодезических петель на S, не гомотопных нулю (см. упр. 13). Если $f_0, f_1 : X \to S$ – непрерывные отображения топ. пространства X в S и гип. расстояния $h(f_0(x), f_1(x)) < l(S)/2 \ \forall\, x \in X$, то $\exists\,!$ гип. геодезическая на S с началом $f_0(x)$ и концом $f_1(x)$ (см. п. 10). Обозначим через $f_s(x)$ точку на этой геодезической, т.ч. $(1-s)\, h(f_s(x), f_0(x)) = s\, h(f_s(x), f_1(x))$ и положим $F(s, x) = f_s(x)$. Ясно, что F – гомотопия отображений f_0 и f_1. Вывод:

Лемма 6. *S – гиперболическая р/п топ. типа (g, n), $f_0, f_1 \colon X \to S$ – непрерывные отображения топ. пространства X в S, $h(f_0(x), f_1(x)) < l(S)/2 \ \forall\, x \in X \Longrightarrow f_0, f_1$ гомотопны.*

Следствие. *$f_n \colon S \to S$ – последовательность гомеоморфизмов, сходящаяся равномерно на компактных подмножествах $\Longrightarrow$ все f_n с $n \gg 1$ гомотопны друг другу.*

Об автоморфизмах р/п можно сказать больше. Будем говорить, что непрерывное отображение $f\colon S \to S$ *гомологично тождественному*, если для любой петли γ на S петля $f \circ \gamma$ ей гомологична (т.е. f индуцирует тождественное отображение на группе гомологий $H_1(S, \mathbb{Z})$). Таковым является, например, всякое отображение, гомотопное тождественному.

Лемма 7. *$f\colon S \to S$ – биголоморфизм гип. р/п топ. типа (g, n), $g \geqslant 1$, гомологичный тождественному. $\Longrightarrow$ f – тождественное отображение.*

$\triangleleft$ Пусть $\pi\colon \mathbb{D} \to S$ – универсальное накрытие, G – накрывающая группа и $\tilde{f}$ – поднятие f до автоморфизма $\mathbb{D}$.

Так как $g > 0$, то на S есть $2g$ свободных гип. геодезических жордановых петель α_j, β_j, представляющих линейно независимые классы в $H_1(S, \mathbb{Z})$ и объединение которых не разбивает S (дополнение связно), а индексы пересечений таковы: $\alpha_j \wedge \alpha_i = 0 = \beta_j \wedge \beta_i = 0$ и $\alpha_j \wedge \beta_i = \delta_{ji}$ (см. [41], л. 3).

По условию, f сохраняет гомологические классы и свойство геодезичности $\Longrightarrow$ согласно единственности гип. геодезических (лемма 4, п. 13) $f \circ \alpha_1 = \alpha_1$, $f \circ \beta_1 = \beta_1 \Longrightarrow \circ = \alpha_1 \cap \beta_1$ – неподвижная точка отображения $f \Longrightarrow \tilde{f}$ переводит орбиту $\pi^{-1}(\circ)$ на себя. Пусть $a \in \pi^{-1}(\circ)$ и $A \in G$ переводит a в $\tilde{f}^{-1}(a)$. Тогда a – неподвижная точка дробно-линейного отображения $\tilde{f} \circ A$. Обозначим через $\tilde{\alpha}_1$ связную компоненту $\pi^{-1}(\alpha_1)$, содержащую a. Тогда $\tilde{f} \circ A$ оставляет неподвижной a и отображает $\tilde{\alpha}_1$ на себя (так как $f \circ \alpha_1 = \alpha_1$) $\Longrightarrow$ оставляет неподвижными концы $\tilde{\alpha}_1 \Longrightarrow \tilde{f} \circ A = \mathrm{id}$ $\Longrightarrow \tilde{f} \in G \Longrightarrow f \circ \pi = \pi \circ \tilde{f} = \pi \Longrightarrow f = \mathrm{id}$. $\triangleright$

17. Накрывающие группы и гомотопии. Нам постоянно придётся подниматься на универсальные накрывающие и возвращаться обратно. Следуюшая лемма, переводящая язык гомотопий в язык равенств, бывает при этом весьма полезной.

Лемма 8. *Для гомеоморфизмов $f_0, f_1\colon S \to S'$ р/п следующие условия эквивалентны*:

1) *f_0 и f_1 гомотопны*;

2) *f_0 и f_1 индуцируют одинаковые изоморфизмы накрывающих групп (т.е. для соотв. поднятий $\tilde{f}_0 \circ A \circ \tilde{f}_0^{-1} = \tilde{f}_1 \circ A \circ \tilde{f}_1^{-1}$ $\forall\ A \in G = G_S$)*;

3) *для всякого поднятия $\tilde{f}_0$ отображения f_0 на универсальную накрывающую $\exists$ поднятие $\tilde{f}_1$ отображения f_1, совпадающее с $\tilde{f}_0$ на предельном множестве $\sigma(G)$ группы G.*

$\triangleleft$ Ограничимся гиперболическими поверхностями с $\#\sigma(G) > 2$ (см. упр. 3, л. 1).

1) $\to$ 2). Пусть f_t – гомотопия и $\tilde{f}_t$ – её поднятие на универсальную накрывающую $\mathbb{D}$, т.е. $\pi' \circ \tilde{f}_t = f_t \circ \pi$ с соотв. проекциями. Фиксируем точку $z \in \mathbb{D}$ и $A \in G$.

Пути $t \mapsto \tilde{f}_t(A(z))$ и $t \mapsto (\tilde{f}_0 \circ A \circ \tilde{f}_0^{-1})(\tilde{f}_t(z))$ имеют одинаковое начало $\tilde{f}_0(A(z))$. Проекция второго пути в S' равна $\big((f_0 \circ \pi) \circ A \circ \tilde{f}_0^{-1}\big)(\tilde{f}_t(z)) = \big(f_0 \circ \pi \circ \tilde{f}_0^{-1}\big)(\tilde{f}_t(z)) = \pi' \circ \tilde{f}_t(z)$, а первого – $f_t \circ \pi(A(z)) = f_t \circ \pi(z)$, т.е. проекции совпадают. По теореме о монодромии их концы тоже совпадают $\Longrightarrow \tilde{f}_1 \circ A = (\tilde{f}_0 \circ A \circ \tilde{f}_0^{-1}) \circ \tilde{f}_1$, т.е. индуцированные изоморфизмы G и G' совпадают.

2) $\to$ 1). Соединим $\tilde{f}_0(z)$ и $\tilde{f}_1(z)$ геодезической дугой в $\mathbb{D}$ и через $\tilde{f}_t(z)$ обозначим точку на этой дуге, делящую расстояние Пуанкаре в пропорции $t\colon (1-t)$. Дробно-линейное отображение $\theta(A) = \tilde{f}_0 \circ A \circ \tilde{f}_0^{-1}$ переводит концы дуги в $\tilde{f}_0(A(z))$ и $\tilde{f}_1(A(z))$. Так как $\theta(A)$ сохраняет расстояние Пуанкаре, то $\theta(A)(\tilde{f}_t(z)) = \tilde{f}_t(A(z)) \Longrightarrow \tilde{f}_0 \circ A \circ \tilde{f}_0^{-1} = \tilde{f}_t \circ A \circ \tilde{f}_t^{-1}$, т.е. все такие $\tilde{f}_t$ индуцируют одинаковый изоморфизм G и G'. Положим $f_t = \pi' \circ \tilde{f}_t \circ \pi^{-1}$. Так как $\pi^{-1}(p) = z$ или $A(z)$ с $A \in G$, то $\pi' \circ \tilde{f}_t(A(z)) = \pi' \circ \theta(A) \circ \tilde{f}_t(z) = \pi' \circ \tilde{f}_t$ (так как $\theta(A) \in G'$ и $\pi' \circ \psi = \pi'$ для $\psi \in G'$) $\Longrightarrow f_t$ – корректно определённая гомотопия f_0 и f_1.

3) $\to$ 2). Пусть $\tilde{f}_0 = \tilde{f}_1$ на $\sigma(G)$. Множество $\sigma(G)$ инвариантно относительно G и $\tilde{f}_j(\sigma(G)) = \sigma(G') \Longrightarrow$ дробно-линейные отображения $\tilde{f}_0 \circ A \circ \tilde{f}_0^{-1}(w) = \tilde{f}_1 \circ A \circ \tilde{f}_1^{-1}(w)$, равны на $\sigma(G)$ $\forall\ A \in G$. Так как $\#\sigma(G) \geqslant 3$, то это верно для всех $w \in \mathbb{D}$.

2) $\to$ 3). Полагая $h = \tilde{f}_0^{-1} \circ \tilde{f}_1$, перепишем указанное выше равенство в виде $A \circ h = h \circ A$. Если $a \in \partial\mathbb{D}$ – неподвижная точка $A \in G$, то $A \circ h(a) = h(a)$, т.е. $h(a)$ – тоже такая точка. Можно считать, что a – притягивающая точка для A, т.е. $A^n(z) \to a$ для всех $z \in \mathbb{D}$. Тогда, в частности, $A^n(h(z)) \to a$. Но $A^n \circ h = h \circ A^n \to h(a) \Longrightarrow h(a) = a\ \forall\ a \in \sigma(G)$, а это и есть утв. 3. $\triangleright$

Подчеркнём, что для р/п S конформного типа (g, n) множество $\sigma(G)$ *совпадает* с $\partial\mathbb{D}$ (см. пп. 12, 13) и эквивалентность условий 1) и 3) означает, что гомотопным отображениям S соответствуют поднятия, совпадающие на $\partial\mathbb{D}$. – Очень удобная замена понятий!

* * * * *

Задачи и упражнения.

1. Метрики Пуанкаре в $\mathbb{D}$ и $\mathbb{H}$ инвариантны относительно автоморфизмов этих областей.

2. Определение кривизны конформной метрики не зависит от выбора локальных голоморфных координат.

3^*. Полная конформная метрика постоянной кривизны -4 в $\mathbb{D}$ или $\mathbb{H}$ совпадает с метрикой Пуанкаре ρ_Π. Привести пример конформной метрики кривизны -4 в $\mathbb{D}$, отличной от ρ_Π.

4. Круг $\mathbb{D}$ с метрикой Пуанкаре является прямым метрическим пространством в смысле Буземана: если a, b, c – точки на прямой Пуанкаре, причём b лежит между a и c, то $d_\Pi(a,b) + d_\Pi(b,c) = d_\Pi(a,c)$.

5. Описать гип. геодезическую петлю в $\mathbb{D} \setminus 0$ с началом $r \in (0,1)$, гомотопную: пути $z = r\,e^{2\pi i\,t}$; пути $z = r\,e^{4\pi i\,t}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. По какую сторону от окружности $|z| = r$ они находятся? Какая ближе к 0? Какова их гладкость?

6. Р/п конформного типа (g,n) гиперболична $\Longleftrightarrow 2g - 2 + n > 0$.

7. S_0 – р/п, $a \in S_0$, $S = S_0 \setminus a$ гиперболическая $\Longrightarrow \forall\, p \in S\ \exists$ гип. геодезический путь $\gamma\colon [0,1] \to S$ т.ч. $\gamma(0) = p$ и $\lim_{t\to 1} \gamma(t) = a$.

8. Многоугольники Дирихле и многоугольники развёртки выпуклы относительно метрики Пуанкаре.

9. S – компактная гип. р/п $\Longrightarrow$ замыкание в $\mathbb{D}$ любой фундаментальной области универсального накрытия $\mathbb{D} \to S$ компактно.

10. S – гип. р/п топ. типа $(g,n) \Longrightarrow$ всякий многоугольник Дирихле имеет конечное число сторон, а число сторон многоугольника развёртки, лежащих в $\mathbb{D}$, равно $4g + 2n$.

11. $\widehat{S}$ – дубль Шоттки р/п S конф. типа (g,n,m), $m > 0$, $\Longrightarrow \widehat{S}$ – р/п конф. типа $(2g + m - 1, 2n)$.

12. $A \subset \mathbb{C}$ – кольцо, $\hat{A}$ – его дубль Шоттки (тор) $\Longrightarrow \partial A \cap \partial A^-$ в $\hat{A}$ состоит из двух непересекающихся $\mathbb{R}$-аналитических петель, геодезических относительно метрики на $\hat{A}$, индуцируемой евклидовой метрикой на $\mathbb{C}$ при универсальном накрытии $\mathbb{C} \to \hat{A}$.

13. S – гип. р/п топ. типа $(g,n) \Longrightarrow \exists$ компакт $K \subset S$, т.ч. всякая свободная гип. геодезическая жорданова петля на S принадлежит K.

14. На р/п топ. типа (g,n) $\exists$ ровно $2g$ свободных гип. геодезических жордановых петель, не гомологичных нулю. Привести пример компактной р/п S и свободной жордановой гип. геодезической на S, гомологичной нулю.

Классы римановых поверхностей

Лекция 3

Классы Римана – Торы: классификация по решёткам – Торы: гиперэллиптическая классификация – Разветвлённые накрытия над R_1

1. Классы Римана. Самая радикальная, конформная классификация р/п фиксированного типа восходит к Риману, который первый заметил, что классы конформно эквивалентных компактных алгебраических поверхностей определяются конечными наборами комплексных чисел: их число равно 0 при $g = 0, 1$ при $g = 1$ и $3g-3$ при $g > 1$. Итак, по Риману, р/п S, S' эквивалентны (пишем $S \sim S'$), если $\exists$ биголоморфное отображение $h\colon S \to S'$. Это действительно отношение эквивалентности на множестве р/п и классы эквивалентности называются *классами Римана* (= классами конформное эквивалентных р/п). Для р/п определённого конф.типа g, (g, n) или (g, n, m) множества классов Римана р/п соотв. конф.типов обозначаются R_g, $R_{g,n}$, $R_{g,n,m}$ и обычно называются пространствами модулей, но часто под модулями р/п понимают также различные подклассы классов Римана, поэтому для большей определённости мы будем называть множества R_g и т.д. *пространствами Римана* (р/п соотв.типа).

Конечно, параметризовать семейства р/п некими абстрактными множествами практически бесполезно, поэтому понятно стремление наделить эти множества некоторой топологической, а лучше дифференциальной, а ещё лучше, комплексно-аналитической структурой и описать их как-то поконкретнее. Этим мы и будем заниматься.

Посмотрим пока, что получается на простых примерах.

Примеры. 1. R_0 состоит из одного элемента: всякая компактная р/п рода 0 голоморфно эквивалентна сфере Римана $\widehat{\mathbb{C}}$.

2. $R_{0,n}$ при $n \leqslant 3$ – тоже одна точка. Например, р/п конф.типа $(0, 3)$ по теореме об устранимой особенности (ТФКП) и теореме Римана голоморфно эквивалентна сфере без трёх точек, а последняя переводится в $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ дробно-линейным преобразованием (биголоморфизмом $\widehat{\mathbb{C}}$).

3. $R_{0,0,1}$ – опять точка: сфера с одной дыркой голоморфно эквивалентна кругу (та же теорема Римана). Таково же и $R_{0,1,1}$, так как круг с произвольным проколом голоморфно эквивалентен $\mathbb{D} \setminus 0$.

4. Тип $(0,0,2)$ – ко́льца. Каждая такая р/п голоморфно эквивалентна кольцу $1 < |z| < R < \infty$ (простое доказательство – при помощи задачи Дирихле с данными $0, \log R$ на компонентах границы и подбор R с условием, что приращение сопряжённой гармонической функции по образующей петле равно 2π). Кольца же с различными R конформно неэквивалентны (упр. 1) $\Longrightarrow R_{0,0,2} = (1,\infty) \subset \mathbb{R}$ (как множества).

А вообще-то р/п с краем лучше параметризовать при помощи компактных дублей; во множестве р/п конф.типа $(2g+m-1, 2n)$ дубли выделяются дополнительным условием $\exists$ антиголоморфной иноволюции с неподвижным множеством, дополнение к которому состоит из двух связных компонент (см. упр. 5, 6).

2. Торы: классификация по решёткам. Компактная р/п рода 1 конформно эквивалентна тору $\mathbb{C}/\Gamma$, где Γ – некоторая решётка (см. л. 10, п. 4), $\Gamma = \{n\omega_1 + m\omega_2 \colon n, m \in \mathbb{Z}\}$; $\pi \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma$ – универсальное накрытие.

Сдвиги $\zeta \mapsto \zeta + c$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$ переводят классы эквивалентности относительно Γ друг в друга $\Longrightarrow$ индуцируют биголоморфные преобразования (автоморфизмы) тора $S = \mathbb{C}/\Gamma \Longrightarrow$ группа $\operatorname{Aut} S$ транзитивна: $\forall\, p, q \in S\ \exists \phi \in \operatorname{Aut} S$, т.ч. $\phi(p) = q$, причём всякое $\phi \in \operatorname{Aut} S$ гомотопно тождественному отображению.

Комплексные числа ω_1, ω_2 назовём образующими решётки. Так как нас интересуют только конформные классы торов, то важно лишь отношение $\tau = \omega_2/\omega_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, причём можно считать, что $\tau \in \mathbb{H}$ (нормальные образующие). Образующие решётки определены далеко не однозначно. Если ω_1', ω_2' – другие образующие, то

$$\begin{matrix}\omega_1' \\ \omega_2'\end{matrix} = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \begin{matrix}\omega_1 \\ \omega_2\end{matrix},$$

причём матрица перехода и обратная к ней должны быть целочисленными $\Longrightarrow$ их взаимно обратные определители целочисленные $\Longrightarrow ad - bc = \pm 1$ и если $\tau' = \omega_2'/\omega_1' \in \mathbb{H}$, то $ad - bc = 1$. Новый параметр $\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$, т.е. получается из τ дробно-линейным преобразованием с целочисленными коэффициентами, нормированными условием $ad - bc = 1$. Таким образом, преобразования перехода к другим нормальным образующим задаются матрицами из группы $SL_2(\mathbb{Z})$. Подгруппа $E \subset \operatorname{Aut}\widehat{\mathbb{C}}$, состоящая из таких преобразований, называется *эллиптической модулярной группой*.

Замене образующих решётки (периодов, см. [41], л. 10), как выше, соответствует $\mathbb{R}$-линейное преобразование плоскости, сохраняющее решётку и индуцирующее соотв. диффеоморфизм тора, меняющий базис 1-мерных гомологий. Напр., для тора с образующими решётки $1, \tau$ замена с матрицей $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ соответствует линейному преобразованию $\zeta = \xi + i\eta \mapsto \xi + i(\xi + \eta)$, которое после проекции $\mathbb{C}$ на S переводит меридианы в себя, а параллели "скручивает", как на рис. 5. Топологически это преобразование известно как *скручивание Дэна*. Если $U \subset S$ – окрестность меридиана γ с гомеоморфизмом $z\colon U \to A$ на кольцо $A\colon 1 < |z| < 2$ и $\phi\colon z = r\,e^{i\theta} \mapsto r\,e^{i(\theta + (r-1)2\pi)}$ (внешняя окружность кольца поворачивается на угол 2π, а внутренняя остаётся на месте), то преобразование $f\colon S \to S$, тождественное вне U и равное $z^{-1} \circ \phi \circ z$ на U, является гомеоморфизмом S; это и есть скручивание Дэна вокруг петли γ (см. рис. 5). На рис. 6 показано представление поворота решётки с образующими $1, \tau = (1 + i\sqrt{3})/2$ на угол $\pi/3$ (замена на образующие $\tau, \tau - 1$) в виде композиции двух замен, каждая из которых представляет скручивание Дэна. Алгебраически, это эквивалентно матричному представлению $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

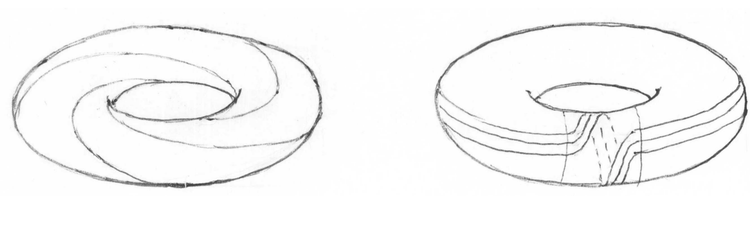

Рис. 5. Скручивание Дэна

Если торы $\mathbb{C}/\Gamma_0$, $\mathbb{C}/\Gamma$ голоморфно эквивалентны, то $\exists$ их биголоморфизм f, переводящий $\pi_0(0)$ в $\pi(0)$. Он поднимается до биголоморфного отображения $\tilde{f}$ плоскости $\mathbb{C}$ (см. лемму 1, п. 5, л. 1), переводящего Γ_0 в $\Gamma \Longrightarrow \tilde{f}(\zeta) = \alpha\zeta$. Если ω_1^0, ω_2^0 и ω_1, ω_2 – нормальные образующие решёток Γ_0, Γ то отсюда следует, что $\omega_1' = \alpha\omega_1^0$, $\omega_2' = \alpha\omega_2^0$ – тоже нормальные образующие Γ. По до-

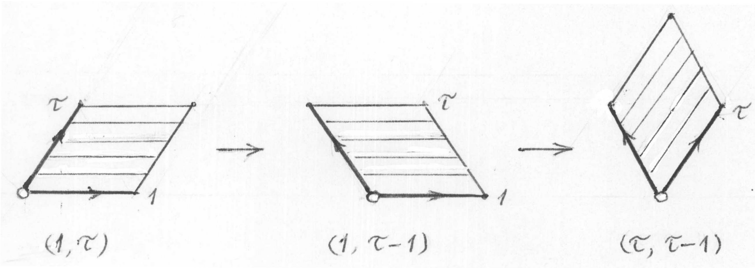

Рис. 6. Замена образующих как композиция скручиваний

казанному, $\tau_0 = \tau'$ получается из τ эллиптическим модулярным преобразованием ($\in \operatorname{Aut}\mathbb{H}$).

Обратно, если Γ_0, Γ – решётки и $\tau_0 = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$, как выше, то заменяя ω_1, ω_2 образующими ω_1', ω_2', как выше, получаем, что $\tau_0 = \tau'$ $\implies (\omega_1', \omega_2') = \omega_1'(1, \tau') = \frac{\omega_1'}{\omega_1^0}(\omega_1^0, \omega_2^0) \implies \Gamma$ получается из Γ_0 линейным преобразованием $z \mapsto \frac{\omega_1'}{\omega_1^0}\, z$ и, значит, торы $\mathbb{C}/\Gamma_0$ и $\mathbb{C}/\Gamma$ голоморфно эквивалентны. Вывод:

- *Торы $\mathbb{C}/\Gamma_0, \mathbb{C}/\Gamma$ голоморфно эквивалентны $\iff$ их параметры τ_0, τ (при каком-нибудь выборе нормальных образующих) лежат в одной орбите эллиптической модулярной группы $E \subset \operatorname{Aut}\mathbb{H}$. Следовательно, $R_1 = \mathbb{H}/E$.*

Это топологическое пространство с естественной фактор-топологией (множество открыто, если его прообраз открыт). На нём *можно* ввести структуру римановой поверхности, относительно которой фактор-проекция голоморфна, но мы её введём по-другому; всё же $\mathbb{H}/E$ – не самое удобное представление для R_1.

3. Торы: гиперэллиптическая классификация. Тор – гиперэллиптическая (точнее, эллиптическая) р/п (см. [41], с. 84). На гиперэллиптической р/п S рода $g \geqslant 1$ $\exists$ мероморфная функция z степени 2 (каждое значение принимается дважды), число критических значений которой $= 2g + 2 \geqslant 4$ (см. формулу Римана–Гурвица, [41], л. 2, п. 10). Дробно-линейным преобразованием сделаем $0, 1, \infty$ кратными (критическими) значениями z. Можно считать также, что полюс z находится в точке $\circ = \pi(0)$, где $\pi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma = S$ – фактор-отображение. Так нормированную функцию z будем называть *нормальной проекцией* тора S (на $\widehat{\mathbb{C}}_z$).

Если z_1 – другая нормальная проекция S, то, в окрестности $0 \in \mathbb{C}_\zeta$,

$$z \circ \pi(\zeta) = h(\zeta) + \frac{a_1}{\zeta} + \frac{a_2}{\zeta^2}\,, \qquad z_1 \circ \pi(\zeta) = h_1(\zeta) + \frac{b_1}{\zeta} + \frac{b_2}{\zeta^2},$$

где h, h_1 – голоморфные функции и $a_2 \neq 0 \neq b_2 \Longrightarrow \exists\, a \in \mathbb{C}$, т.ч. $z_1 - a\,z$ имеет в $\circ$ либо устранимую особенность, либо простой полюс. Последнего быть не может, так как функция с единственным и простым полюсом на р/п S задаёт биголоморфизм S и сферы Римана, а у нас S – тор $\Longrightarrow z_1 - a\,z$ – константа по принципу максимума $\Longrightarrow$ нормальная проекция z на торе S определена однозначно с точностью до каких-то возможных линейных преобразований $z \mapsto a\,z + b$.

Дифференциальная форма dz имеет в $\circ$ полюс кратности $3 \Longrightarrow$ dz имеет на $S \setminus \circ$ ещё 3 нуля (по теореме Римана–Роха, см. [41], л. 10, п. 2), причём все эти нули – критические точки p_0, p_1, p_2 функции z – простые и различные, так как z имеет степень 2. По той же причине критические значения z ($=$ значения в этих точках) различны и, по построению z, равны $0, 1, \lambda$. Значение $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ назовём *эллиптическим параметром* тора S.

Строя нормальную проекцию, мы заботились лишь о том, чтобы значения $0, 1$ были критическими, а λ – уж какое получится, зависит от S и z. Выбор двух из трёх небольшой: если $a\,z + b$ имеет критические значения $0, 1, \lambda'$ то функции $z(z-1)(z-\lambda)$ и $(a\,z+b)(a\,z+b-1)(a\,z+b-\lambda')$ имеют единый полюс $\circ$ и единый набор p_0, p_1, p_2 (двойных) нулей (нули dz при линейной замене z не меняются) $\Longrightarrow$ их отношение есть константа $\Longrightarrow$

$$(z-c)(z-c-1/a)(z-c-\lambda'/a) = z(z-1)(z-\lambda),$$

где $c = -b/a$.

Разберём все возможные случаи по значениям c.

1. $c = 0 \Longrightarrow l = a\,z$, $(z-1/a)(z-\lambda'/a) = (z-1)(z-\lambda) \Longrightarrow$ либо $\lambda = 1/a$, $\lambda' = a$, т.е. $\lambda' = 1/\lambda$, либо $a = 1$ и $\lambda' = \lambda$.

2. $c = 1 \Longrightarrow l = a\,(z-1)$, $(z-1-1/a)(z-1-\lambda'/a) = z(z-\lambda)$ $\Longrightarrow$ либо $a = -1$ и $\lambda' = 1-\lambda$, либо $\lambda' = -a$, $\lambda = 1 + 1/a$, т.е. $\lambda' = 1/(1-\lambda)$.

3. $c = \lambda \Longrightarrow l = a\,(z-\lambda)$, $(z-\lambda-1/a)(z-\lambda-\lambda'/a) = z(z-1) \Longrightarrow$ либо $\lambda = -1/a$, $\lambda' = a\,(1-\lambda)$, т.е. $\lambda' = (\lambda-1)/\lambda$, либо $\lambda' = -a\lambda$ и $\lambda = 1 - 1/a$, т.е. $\lambda' = \lambda/(\lambda-1)$.

Вывод: эллиптический параметр λ комплексного тора определён однозначно с точностью до полученных выше преобразований:

$$\lambda \mapsto \lambda, \frac{1}{\lambda}, 1-\lambda, \frac{1}{1-\lambda}, \frac{\lambda-1}{\lambda}, \frac{\lambda}{\lambda-1}\,.$$

Эти преобразования составляют, очевидно, группу с образующими $A\colon \lambda \mapsto 1/\lambda$, $B\colon \lambda \mapsto 1-\lambda$ и соотношениями $A^2 = B^2 = (AB)^3 = 1$ (группа перестановок из трёх элементов).

Предложение 1. *Комплексные торы голоморфно эквивалентны $\Longleftrightarrow$ наборы шести эллиптических параметров $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ их всевозможных нормальных проекций в $\widehat{\mathbb{C}}$ совпадают.*

$\triangleleft$ Пусть $f\colon S \to S_1$ – биголоморфизм комплексных торов, z_1 – нормальная проекция с полюсом $\circ_1$ и $\phi \in \operatorname{Aut} S$ т.ч. $\phi(\circ) = f^{-1}(\circ_1)$. Тогда $z_1 \circ f \circ \phi$ – нормальная проекция тора S (с полюсом $\circ$). Так как f и ϕ – биголоморфизмы, то критические значения $0, 1, \lambda_1$ функций z_1 и $z_1 \circ f \circ \phi$ одинаковы $\Longrightarrow$ по доказанному выше, λ_1 – одно из значений λ', указанных выше.

С другой стороны, пусть $z\colon S \to \widehat{\mathbb{C}}$ и $z_1\colon S_1 \to \widehat{\mathbb{C}}$ – нормальные проекции торов, с одинаковым критическим значением $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0,1\}$. Тогда функция $P(z) = z(z-1)(z-\lambda)$ имеет полюс 6-го порядка в $\circ$ и нули 2-го порядка в остальных критических точках функции z. Проектируя в $\mathbb{C}_z$ произвольную замкнутую кривую γ на S, не проходящую через нули и полюс $P(z)$, мы получаем отсюда, что приращение аргумента функции $P(z)$ вдоль γ кратно $4\pi \Longrightarrow$ на S $\exists$ мероморфная функция w, т.ч. $w^2 = P(z)$ $\Longrightarrow \psi\colon p \mapsto (z(p), w(p))$ есть голоморфное 1:1 отображение тора S на поверхность $S_0\colon w^2 = P(z)$ в $\widehat{\mathbb{C}}^2$. Аналогично определяем $\psi_1\colon S_1 \to S_0$. Но тогда $f = \psi^{-1} \circ \psi\colon S \to S_1$ – гомеоморфизм р/п, голоморфный в $S\setminus\circ \Longrightarrow$ биголоморфизм (по теореме об устранимой особенности, ТФКП). $\triangleright$

Другими словами, пространство модулей Римана R_1 для торов совпадает с $(\mathbb{C}\setminus\{0,1\})/E_1$, где E_1 – описанная выше группа из шести преобразований $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$. Вроде ничем это не лучше, чем в п. 2, но всё же $6 < \infty$ и это позволяет решительно продвинуться в описании R_1.

Функция

$$j(\lambda) = \frac{4}{27}\frac{(\lambda^2-\lambda+1)^3}{\lambda^2(\lambda-1)^2}$$

(так называемый j-инвариант эллиптической кривой) очевидно инвариантна относительно A и $B \Longrightarrow$ относительно всех преобразований группы E_1. $\Longrightarrow j(\lambda') = j(\lambda)$, если λ, λ' лежат в одной орбите группы E_1.

Так как $j\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ – голоморфное разветвлённое 6-листное накрытие и почти все орбиты группы E_1 (кроме конечного числа) состоят из 6 точек, то j принимает разные значения на разных орбитах. Точки $0, 1, \infty$ составляют отдельную орбиту указанной группы и всю эту орбиту (и только её) j отображает в ∞. Вывод:

Предложение 2. $j\colon \mathbb{C}\setminus\{0,1\} \to \mathbb{C}$ – *собственное*[2] *голоморфное отображение, значения которого* $j(\lambda)$ *однозначно определяют классы Римана соотв. комплексных торов. В частности,* $R_1 = \mathbb{C}$.

Таким образом, пространство $\mathbb{H}/\Gamma = R_1$ оказывается обычной комплексной плоскостью и эллиптические параметры λ определяют соотв. классы Римана с точностью до пяти простых преобразований, так что эквивалентность $\lambda \sim \lambda'$ проверяется элементарно.

Как видим, гиперэллиптическое представление торов удобно для классификации. Его недостатком является неочевидность структуры автоморфизмов, инвариантной метрики (см. упр. 7) и т.п., хорошо видных в представлении через решётки.

4. Разветвлённые накрытия над $\mathbf{R_1}$. Соединим теперь две классификации торов вместе. Каждая решётка эквивалентна ($\mathbb{C}$-линейно) решётке Γ с образующими $1, \tau \in \mathbb{H}$. В качестве мероморфной функции с двойным полюсом в $\circ = \pi(0)$ здесь можно взять $\wp \circ \pi^{-1}$, где $\wp$ – функция Вейерштрасса с периодами $1, \tau$:

$$\wp(\zeta) = \frac{1}{\zeta^2} + {\sum}' \left(\frac{1}{(\zeta-n-m\tau)^2} - \frac{1}{(n+m\tau)^2}\right)$$

и $'$ означает суммирование по всем целым $(n, m) \neq (0, 0)$. Ряд сходится равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{C}\setminus\Gamma \Longrightarrow \wp$ там голоморфна, а в точках Γ имеет полюса 2-го порядка. Производная $\wp'(\zeta)$ обращается в нуль в точках $1/2, \tau/2, (1+\tau)/2$ (и

[2] Прообраз любого компакта – компакт.

в их сдвигах по Γ); например, $\wp'(1/2) = -16\sum 1/(1-2n-2m\tau)^3$ и для каждого члена ряда в нём есть такой же противоположного знака. Подбирая коэффициенты функции $a\,\wp + b$ так, чтобы значения в $\zeta = \tau/2, 1/2$ стали соотв. $0, 1$, получаем нормальную проекцию

$$z(\zeta) = \frac{\wp(\zeta) - \wp(\tau/2)}{\wp(1/2) - \wp(\tau/2)}$$

(это функция на $S = \mathbb{C}/\Gamma$, так как она двупериодическая с периодами $1, \tau$). Тогда параметр λ равен третьему критическому значению, $z((1+\tau)/2)$ и мы получаем

Предложение 3. *Эллиптический параметр λ тора $\mathbb{C}/\Gamma$ и параметр периодов τ решётки Γ можно выбрать так, что λ однозначно определяется по τ формулой*

$$\lambda(\tau) = \frac{\wp(\frac{1-\tau}{2}) - \wp(\frac{\tau}{2})}{\wp(\frac{1}{2}) - \wp(\frac{\tau}{2})}\,.$$

Функция w из п. 3 при наличии параметра ζ получается проще: двупериодическая функция $z'(\zeta)$ равна нулю как раз там, где $z = 0, 1, \lambda$, и имеет полюс 3-го порядка в $\circ = \pi(0)$. $\Longrightarrow (z')^2 = c \cdot z(z-1)(z-\lambda)$ с легко вычисляемым множителем $c = c(\tau) \Longrightarrow$ в качестве w можно взять $z'/\sqrt{c}$ и тогда определён голоморфный гомеоморфизм $S \to S_0\colon w^2 = z(z-1)(z-\lambda)$ в $\widehat{\mathbb{C}}^2$.

Дифференциальная форма $(dz)/w$ голоморфна на S_0 (упр. 7). Пусть l_1, l_2 – гладкие жордановы кривые на $\mathbb{C}_z$, соединяющие $0, 1$ и $0, \lambda$ соотв. и γ_1, γ_2 – петли на S_0, двулистно накрывающие l_1, l_2 проекцией z. Тогда γ_1, γ_2 порождают базис в $H_1(S_0, \mathbb{Z})$ и $\omega_1 = \int_{\gamma_1} dz/w$, $\omega_2 = \int_{\gamma_2} dz/w$ – соотв. периоды. Соглано [41], л. 10, п. 4, р/п S_0 (а значит и S) голоморфно эквивалентна тору $\mathbb{C}/\Gamma'$ где Γ' – решётка с образующими $1, \tau'$. Так как значения w в двух точках с одинаковой проекцией z отличаются лишь знаком, то $\omega_j = 2\int_{l_j} dz/\sqrt{P(z)}$ при подходящем выборе непрерывных ветвей корня на l_1, l_2 (здесь $P(z) = z(z-1)(z-\lambda)) \Longrightarrow$ при изменении λ в круге $U \subset \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ выражение τ' голоморфно по $\lambda \in U$. Так как параметр τ, указанный выше, получается из соотв. τ' дробно-линейным преобразованием (с целыми коэффициентами), то отсюда, в частности, следует, что $\pi_0^{-1}(U)$ есть счётное объединение областей $U_j \subset \mathbb{H}$, причём сужения $\lambda(\tau)|U_j \to U$ 1:1 $\Longrightarrow$ $\lambda\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ – накрытие, универсальное ввиду односвязности $\mathbb{H} \Longrightarrow \lambda(\tau)$ – знаменитая *модулярная функция* Шварца.

Итак, мы установили связь параметров τ и λ. Далее смотрим j-инвариант. Композиция

$$\mathbb{H} \xrightarrow{\lambda} \mathbb{C} \setminus \{0,1\} \xrightarrow{j} \mathbb{C},$$

согласно п. 2, является фактор-проекцией $\mathbb{H} \to \mathbb{H}/E$ по эллиптической модулярной группе E и мы её только что представили в виде композиции бесконечнолистного универсального накрытия λ и 6-листного разветвлённого накрытия j.

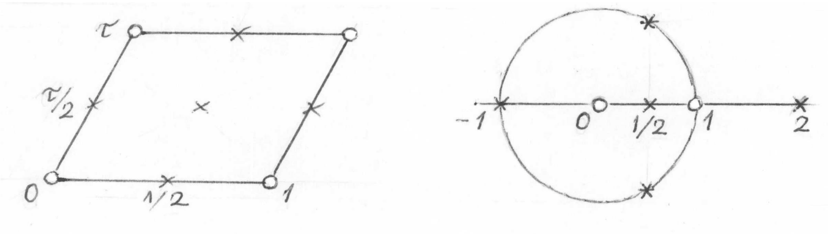

Рис. 7. Критические точки функций Вейерштрасса и j

Отображение $j\colon \mathbb{C} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{C}$ имеет 5 критических точек, $(1 \pm i\sqrt{3})/2, -1, 1/2, 2$, причём ветвление вокруг $(1 \pm i\sqrt{3})/2$ кубическое, а вокруг $-1, 1/2$ и 2 – квадратичное. Критические значения j (в этих точках) равны, соотв., 0 и 1 (для этого – множитель $4/27$). Таким образом, над $0 \in \mathbb{C}$ имеем 2 кубические точки ветвления и над $1 \in \mathbb{C}$ – 3 квадратичные $\Longrightarrow$ фактор-отображение $\mathbb{H} \to \mathbb{H}/E$ имеет счётное число кубических точек ветвления над 0 и счётное число квадратичных ветвлений над 1; всё же представление в виде композиции делает эту картину более наглядной.

Несколько слов о компактификации $\widehat{R}_1$ пространства R_1. Таковой является, конечно, сфера Римана $\widehat{\mathbb{C}}$, но каков смысл ∞? Это тоже видно на 6-листном накрытии j, разветвлённом над $0, 1, \infty$. В ∞ проектируются $\lambda = 0, 1, \infty$. Предельные поверхности в $\widehat{\mathbb{C}}^2$ – это р/п $w^2 = z(z-1)(z-\lambda)$ с $\lambda = 0, 1$ и $w^2 = z(z-1)$ (для которой надо предварительно заменить w на $w/\sqrt{-\lambda}$). Это обычные сферы, но вложенные в $\widehat{\mathbb{C}}^2$ (топологически) с одной точкой самопересечения ($0, 1$ и ∞ соотв.) $\Longrightarrow$ $\widehat{R}_1 = R_1 \cup R_0$, причём при проектировании j над $R_0 \subset \widehat{R}_1$ лежат три сферы (поверхности меньшего рода), но с особенностями.

* * * * *

Задачи и упражнения.

1. Кольца $1 < |z| < R$ с различными R голоморфно не эквивалентны.

2. γ – гладкая жорданова петля в полуплоскости $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ и $S = \{(re^{i\theta}, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}\colon (r,t) \in \gamma\}$ – тор вращения в $\mathbb{R}^3$ с образующей γ и комплексной структурой, ортогональной относительно евклидовой метрики в $\mathbb{R}^3$, s – натуральный параметр (длина дуги) на $\gamma \Longrightarrow ds/r - id\theta$ – голоморфная форма на S (при соотв. ориентации S) $\Longrightarrow$ S голоморфно эквивалентна тору $\mathbb{C}/\Gamma$ с образующими решётки $1, \tau$, где $\tau = \frac{i}{2\pi}\int_\gamma ds/r$ – чисто мнимое.

3. $1, i$ –образующие решётки $\Gamma \subset \mathbb{C}$. Представить гомеоморфизм тора $\mathbb{C}/\Gamma$, соответствующий повороту $z \mapsto i\,z$ плоскости $\mathbb{C}$, в виде композиции трёх скручиваний Дэна (геометрически на решётке и матрично).

4. Эллиптическая модулярная группа E действует на $\mathbb{H}$ собственно разрывно, в частности, предельные точки каждой E-орбиты лежат на $\mathbb{R} \cup \infty = \partial\mathbb{H}$.

5. Преобразованию $\zeta \mapsto -\zeta$ универсальной накрывающей $\mathbb{C}_\zeta$ соответствует инволюция $(z,w) \mapsto (z,-w)$ тора $S\colon w^2 = z(z-1)(z-\lambda)$ в $\widehat{\mathbb{C}}^2$.

6. Найти все эллиптические параметры λ для тора $\mathbb{C}/\Gamma$, где Γ – решётка с образующими $1, i$. То же с образующими $1, e^{i\pi/3}$. (Ответы есть в тексте лекции.)

7. Отображение $(z,w) \mapsto (\bar{z}, -\overline{w})$ является антиголоморфной инволюцией тора $S\colon w^2 = z(z-1)(z-\lambda)$ с $\lambda \in (1,\infty) \subset \mathbb{R}$. Какие точки S остаются при этом неподвижными? Дублем какой двусвязной области является S? $\exists$ ли антиголоморфная инволюция на S с $\lambda \notin \mathbb{R}$?

8. Форма $(dz)/w$ на торе $S\colon w^2 = z(z-1)(z-\lambda)$ в $\widehat{\mathbb{C}}^2$ голоморфна и нигде не равна нулю. Метрика $|dz/w|$ с точностью до постоянного множителя является образом евклидовой метрики при универсальном накрытии $\pi\colon \mathbb{C} \to S$.

9. $R_{1,1} = R_1$.

10. $R_{0,4} = R_1$.

11. Нарисовать покрытие плоскости $\mathbb{C}_\lambda$ шестью не пересекающимися областями (“листами”) U_ν с частично сопадающими границами, т.ч. проекции $j|U_\nu$ 1:1 и замыкания каждой $j(U_\nu)$ совпадают с $\mathbb{C}_j$.

Лекция 4

Комплексные и конформные структуры – Координатное представление – Расстояние между конформным структурами – Квазиконформные отображения – Коэффициенты Бельтрами – Классы и пространства Тейхмюллера – Примеры – Пространства Торелли

5. Комплексные и конформные структуры. До сих пор мы неявно понимали под комплексной структурой некий атлас непрерывных карт с голоморфными функциями переходов. Это эквивалентно выделению в пространствах непрерывных функций на подобластях класса функций с определёнными необходимыми условиями (предпучка), которые считаются голоморфными. При таком подходе проще определять прообразы комплексных структур при гомеоморфизмах $f\colon S \to S'$ р/п. Если J' – комплексная структура на S' то f^*J' – такая структура на S, относительно которой голоморфные функции имеют вид $h \circ f$, где h – голоморфные функции в соотв. областях на S'.

Топологически эквивалентные р/п бывает удобным рассматривать как различные комплексные структуры J на одном топологическом основании $\mathbb{S}$, т.е. как пары $(\mathbb{S}, J)$ (покрытие для определяющих атласов можно выбрать единое, локально конечное, из односвязных областей). При этом дифференциальные структуры на $\mathbb{S}$, индуцируемые комплексными J, J' вообще говоря, различные (точнее, поверхности в общем не диффеоморфны).

Для гладких комплексных структур на гладкой поверхности S есть более аналитическое определение. Комплексной структуре на такой поверхности однозначно соответствует оператор J “умножения на i” в касательном расслоении, точнее послойный линейный оператор $J\colon T_pS \to T_pS$, $p \in S$, т.ч. $J^2 = -I$ (I – тождественный оператор), Jv – гладкое поле $\forall$ гладкого поля v и пары v, Jv положительно ориентированы. Голоморфные функции при этом выделяются условием Коши – Римана $df + iJ\,df = 0$ (на T^*S оператор J определяется условием $(J\alpha)(v) = \alpha(Jv)$). Обратно, если на TS задан такой оператор (условие его гладкости можно существенно ослабить), то локально $\exists$ J-голоморфные функции (решения уравнения Коши–Римана), голоморфные координаты $\Longrightarrow$ задана комплексная структура (подробнее см. [41], л. 5–6). Если $f\colon S \to (S', J')$ – гладкое, нигде не вырожденное отображение, то прообраз J' на S, комплексная структура $J = f^*J'$, определяется условием $Jv = f_*^{-1}J'f_*v$, где $f_*\colon TS \to TS'$ – касательное отображение. Отображение $f\colon (S,J) \to (S',J')$ голоморфно, если $J = f^*J'$.

Используя прообразы структур, диффеоморфные р/п тоже удобно изучать как различные операторы J в касательном расслоении фиксированной гладкой базовой поверхности $\underline{S}$. При этом появляется новый феномен, которого нет в топологическом представлении: некоторые *различные* операторы J в $T\underline{S}$ порождают *одинаковые* комплексные структуры, т.е. пары $(\underline{S}, J)$ и $(\underline{S}, J')$ могут быть биголоморфно эквивалентными и при $J \neq J'$. Между "операторами почти комплексных структур" J на $T\underline{S}$ и классами конформно эквивалентных метрик на $\underline{S}$ имеется 1:1 соответствие ([41], л. 5–6), поэтому далее мы называем операторы J *конформными структурами* на $\underline{S}$. Конечно, если конформные структуры рассматривать тоже с точностью до конформных гомеоморфизмов, то получатся те же классы комплексных структур с точностью до биголоморфизмов, но нас интересует более тонкая классификация и здесь операторы J, позволяющие подключить анализ через координатные представления, намного удобнее, чем абстрактные комплексные структуры.

6. Координатное представление. В плоской области $D \subset \mathbb{C}_z$ любая метрика имеет вид $\lambda|\,dz + \mu\,d\bar z|$, где $\lambda > 0$ и комплексная функция μ имеет $|\mu| < 1$. Поэтому любая (положительно ориентированная) конформная структура J в D однозначно определяется 1-формой $\alpha = dz + \mu\,d\bar z$ и условием, что $J\alpha = i\,\alpha$, $J\bar\alpha = -i\,\alpha$ (а далее по $\mathbb{R}$-линейности и двойственности, как выше). Такие 1-формы называются формами типа $(1,0)$ относительно J (сокращённо, $(1,0)_J$). Если $\beta \in (1,0)_J$, то из разложения $\beta = a\alpha + b\bar\alpha$ видим, что β пропорциональна α, т.е. структура J определяет форму α типа $(1,0)_J$ однозначно с точностью до множителя. Голоморфные относительно J функции имеют диференциалы, пропорциональные α (если $df + i\,J(df) = 0$ то $J(df) = i\,df$ и из представления $df = a\alpha + b\bar\alpha$ получаем, что $b\bar\alpha = 0$). Так как $df = f_z(dz + (f_{\bar z}/f_z)\,dz)$, то в областях $D \subset \mathbb{C}_z$ условие Коши – Римана для структуры J с базовой 1-формой $\alpha = dz + \mu d\bar z$ записывается в виде уравнения Бельтрами $f_{\bar z} = \mu\, f_z$. Это уравнение имеет решение f (см. далее л. 5), которое определяет биголоморфное отображение (D,J) на $(f(D), J_{\mathrm{st}})$, где J_{st} – стандартная конформная структура в $\mathbb{C}_z$ $\big(J(\frac{\partial}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial y}\big)$. Таким образом, комплексная структура в плоской односвязной области единственна (с точностью до биголоморфизма – по теореме Римана), а конформных структур столько же, сколько комплексных функций μ с $|\mu| < 1$ (сохранение ориентации).

Чтобы перенести эту простую картинку на р/п определённого типа, надо выбрать среди них некоторую базу S и воспользоваться её универсальным накрытием $\pi\colon D \to S$. Если $D \subset \mathbb{C}_z$, J' – гладкая комплексная структура на $\underline{S}$ (гладкой основе S) и $\tilde{J}' = \pi^* J'$ – её поднятие на D, то $\tilde{J}$ – стандартная структура J_{st} в $\mathbb{C}$ (которую мы обычно не указываем) с соотв. базовой формой dz, а $\tilde{J}'$ соответствует однозначно определённая $(1,0)_J$-форма $dz + \mu(z)\, d\bar{z}$ с $|\mu| < 1$ (условие сохранения ориентации, которое мы всегда предполагаем для всех комплексных структур). Мы постоянно будем работать с такими поднятиями, но чтобы результаты можно было интерпретировать в терминах накрываемых р/п, надо будет постоянно следить за их инвариантностью относительно действия накрывающей группы G базовой поверхности.

7. Расстояние между конформными структурами. Наряду с гладкими конформными структурами, мы будем работать также со структурами, измеримыми (см. ниже) и определёнными на почти всех $T_p\underline{S}$. Если J' – такая конформная структура на $\underline{S}$, то в J-координате z ей однозначно соответствует $(1,0)_J$-форма $dz + \mu^z\, d\bar{z}$ с $\mu \in L^\infty$, $|\mu^z| < 1$ (индекс z подчёркивает, что коэффициент зависит от выбора J-голоморфной координаты z). Если w – другая такая координата, с определяющей $(1,0)_J$-формой $dw + \mu^w\, d\overline{w}$, то в пересечении коорд. окрестностей эти формы должны быть пропорциональны $\Longrightarrow dw + \mu^w\, d\overline{w} = w' dz + \mu^w\, \overline{w'}\, d\bar{z} = w'(dz + \mu^z\, d\bar{z})$, т.е. $\mu^z = \mu^w \overline{w}'/w'$ (здесь $w' = dw/dz$). Таким образом, $|\mu| := |\mu^z|$ не зависит от выбора J-голоморфной координаты; мы назовём эту функцию (поточечным) *отклонением* структуры J' от базовой J.

Так как $|\mu| < 1$, то естественно воспользоваться метрикой Пуанкаре в круге и определить расстояние между конформными структурами J', J, полагая

$$\tau\,(J', J) = \frac{1}{2} \operatorname*{ess\,sup}_{\underline{S}} \log \frac{1+|\mu|}{1-|\mu|} = \frac{1}{2} \log \frac{1+\|\mu\|}{1-\|\mu\|}$$

(функция $\kappa(x) = \frac{1+x}{1-x}$, $x \in [0,1)$, возрастающая, $\|\mu\| := \operatorname{ess\,sup}_{\underline{S}} |\mu|$).

Если J_1, J_2 в локальной J-координате z представлены формами $\alpha_j = dz + \mu_j\, d\bar{z}$, $\mu_j \in L^\infty$, соотв., и $|\mu_j| < 1$, то

$$dz = \frac{\alpha_1 - \mu_1 \bar{\alpha}_1}{1 - |\mu_1|^2} \Longrightarrow \alpha_2 = \frac{1 - \bar{\mu}_1 \mu_2}{1 - |\mu_1|^2} \left(\alpha_1 + \frac{\mu_2 - \mu_1}{1 - \bar{\mu}_1 \mu_2}\, \bar{\alpha}_1 \right).$$

При замене z на w коэффициенты μ_j домножаются на одинаковый множитель, по модулю равный $1 \Longrightarrow \left| \frac{\mu_2 - \mu_1}{1 - \bar{\mu}_1 \mu_2} \right|$ не зависит от выбора координат и мы определяем расстояние

$$\tau\,(J_1, J_2) = \frac{1}{2} \log \kappa \left(\left\| \frac{\mu_2 - \mu_1}{1 - \bar{\mu}_1 \mu_2} \right\| \right).$$

Таким образом, при фиксации базы естественно выделяется класс конформных структур J' на $\underline{S}$, т.ч. $\tau(J', J) < \infty$ (эквивалентно, $\|\mu\| < 1$). Из инвариантности расстояния Пуанкаре в круге относительно дробно-линейных автоморфизмов вытекает, что это действительно функция расстояния в указанном классе, причём эта функция не зависит от выбора базовой р/п в этом классе, т.е. замена базы является изометрическим преобразованием множества таких конформных структур на $\underline{S}$.

8. Квазиконформные отображения. Если $S = (\underline{S}, J)$, $S' = (\underline{S}, J')$, $J' \neq J$, – одинаковые гладкие поверхности с различными конформными структурами, то тождественное отображение $f\colon p \mapsto p$ *не* является биголоморфизмом р/п S, S' и *не* является конформным относительно соотв. конф. метрик на S, S': прямые углы относительно одной в целом не являются прямыми относительно другой. Отклонение f от конформности поточечно измеряется функцией $|\mu \equiv \mu_J| =: |\mu|_f$, определённой в п. 7. Если $\underline{S}$ компактная, то $max\,|\mu_f| = k < 1$, а такие отображения называются *квазиконформными*. В частности, мы видим, что на компактной поверхности квазиконформные отображения самым естественным образом связаны с конформными структурами.

Класс гладких конформных структур на $\underline{S}$, к сожалению, не замкнут относительно выжных для теории предельных переходов и при решении главной вариационной задачи теории пространств Тейхмюллера возникает необходимость существенного расширения этого класса. Можно, как в [1], ограничиться семейством конформных структур с изолированными особенностями, но обычное расширение идёт дальше, до структур J', определённых на п.в. $T_p\underline{S}$, измеримых в том смысле, что $J'v$ измеримо $\forall$ гладкого поля

v на $\underline{S}$ и таких, что $\tau(J', J) < \infty$. Множество таких структур J' на $\underline{S}$ (и пар $(\underline{S}, J')$) обозначается далее через $\langle S \rangle$. Так как локально J' определяется коэффициентом Бельтрами $\mu \in L^\infty$ и пространство L^∞ полно, то $\langle S \rangle$ – полное метрическое пространство относительно метрики τ (см. ещё п. 1, л. 5).

В л. 5–6 мы покажем, что и такая, определённая почти всюду, конформная структура J однозначно определяет на $\underline{S}$ комплексную структуру (с соотв. голоморфными функциями, непрерывными на $\underline{S}$), т.е. пара $(\underline{S}, J)$ является р/п. При этом тождественное отображение базы $\underline{S}$ порождает отображение $(\underline{S}, J) = S \to S' = (\underline{S}, J')$, в общем уже не гладкое (гладкие функции на S' могут не быть таковыми на $\underline{S}$), а всего лишь квазиконформное. Однако, общие квазиконформные отображения достаточно глубоко разработаны и представляют весьма удобный инструмент исследования р/п. Мы постараемся не углубляться в основы теории квазиконформных отображений, но доказывать всё необходимое по ходу дела.

Итак, сначала определение. Общее квазиконформное отображение р/п $f\colon S \to S'$ есть сохраняющий ориентацию гомеоморфизм со следующими свойствами. Пусть z, w – локальные голоморфные координаты на S, S' и $w(z) = w \circ f \circ z^{-1}$ – координатное представление f в соотв. плоской области. Условие первое: обобщённые первые частные производные функции $w(z)$ локально суммируемы с квадратом и $w_z \neq 0$ п.в. в области определения (последнее свойство для решений уравнений Бельтрами мы докажем в л. 5, а пока используем для упрощения определений). Тогда отношение $|\mu_f| = |w_{\bar z}/w_z|$ (отклонение f от конформного) при переходе к другим голоморфным координатам не меняется и условие второе заключается в том, что $\|\mu_f\| = \operatorname{ess\,sup} |\mu_f| = k < 1$ (часть условий можно ослабить или вовсе удалить, но это для нас неважно). Величина $K = \frac{1+k}{1-k}$ называется *коэффициентом квазиконформности* отображения f. Отметим, что для конформного (= биголоморфного) отображения f отклонение $\equiv 0$ (вместе с $w_{\bar z}$).

По теореме Мори (см. [36]) всякое квазиконформное отображение f плоских областей дифференцируемо п.в. и обычные первые частные производные совпадают с обобщёнными. (Это одно из немногих мест, которые мы доказывать не будем.)

9. Коэффициенты Бельтрами. Работая с отображениями р/п, всё время аппелировать к локальным координатам весьма неудобно. Поэтому квазиконформные отображения, как правило, поднимаются на универсальные накрытия и там превращаются в отображения плоских областей, а это уже объекты анализа, комплекснозначные функции. На плоскости $\mathbb{C}_z$ квазиконформное отображение областей $f\colon U \to V$ во многом характеризуется *коэффициентом Бельтрами* $\mu_f := f_{\bar z}/f_z$. Нам понадобятся формулы для композиции таких отображений. При их выводе достаточно разобраться с гладкими отображениями, поскольку любое такое отображение приближается гладкими квазиконформными, причём так, что первые частные производные тоже приближаются п.в. (см. прил. 1).

Посчитаем сначала $\mu_{f^{-1}}$ для отображения $\zeta = f(z)$. Так как $d\zeta = f_z(dz + \mu_f\, d\bar z)$ и $|\mu_f| < 1$ то отсюда $dz = (d\zeta - \mu_f \frac{f_z}{\overline{f_z}}\, d\bar\zeta)/(1 - |\mu_f|^2) f_z \implies (f^{-1})_\zeta = 1/(f_z(1-|\mu_f|^2))$ и

$$\mu_{f^{-1}} \circ f = -\mu_f\, f_z/\overline{f_z},$$

в частности, $K_{f^{-1}} = K_f$.

Теперь посмотрим композицию квазиконформных отображений $G \xrightarrow{h} D \xrightarrow{g} H$. Координаты в областях G, D обозначим соотв. ζ, z. Тогда $dg = g_z(dz + \mu_g\, d\bar z) = g_z\big[(h_\zeta + \mu_g \overline{\mu_h}\overline{h_\zeta})\, d\zeta + (\mu_h h_\zeta + \mu_g \overline{h_\zeta})\, d\bar\zeta\,\big] \implies$

$$\mu_{g\circ h}(\zeta) = \frac{\mu_g - \mu_{h^{-1}}}{1 - \overline{\mu_{h^{-1}}}\mu_g}(z)\frac{\overline{h_\zeta}}{h_\zeta}.$$

Для $h = f^{-1}$ получаем формулу, которую будем часто использовать:

$$(\mu_{g\circ f^{-1}}) \circ f = \frac{\mu_g - \mu_f}{1 - \overline{\mu_f}\mu_g}\frac{f_z}{\overline{f_z}}.$$

Обозначим $\kappa(x) = \frac{1+x}{1-x}$, $0 \leqslant x < 1$, и прямым вычислением получим, что $\kappa(\frac{x+y}{1+xy}) = \kappa(x)\cdot\kappa(y)$. Из неравенства $|a-b| < |1 - \bar a b|$ для $a, b \in \mathbb{D}$ тоже прямым вычислением следует неравенство $\left|\frac{a-b}{1-\bar a b}\right| \leqslant \frac{|a|+|b|}{1+|ab|}$. Так как $K_f = \kappa(\|\mu_f\|_\infty)$ то отсюда получаем, что

$$K_{h\circ g} \leqslant K_h \cdot K_g.$$

10. Классы и пространства Тейхмюллера. Для краткости, р/п $(\underline{S}, J)$ с гладкой базой $\underline{S}$ и конформной структурой J обозначаем просто через S, раскрывая конформную структуру, когда понадобится. Как оговорено выше, J предполагается определённой п.в., измеримой и сохраняющей ориентацию. По Риману, $S \sim S'$, если эти р/п биголоморфно эквивалентны.

Р/п S, S' *эквивалентны по Тейхмюллеру*, $S \approx S'$, если $\exists$ биголоморфизм $h\colon S \to S_1$, *гомотопный тождественному* отображению поверхности $\underline{S}$. Это действительно отношение эквивалентности, разбивающее классы Римана на более мелкие по чисто топологическому признаку. Класс Тейхмюллера р/п S обозначаем через $[S]$[3].

Диффеоморфные р/п (даже общие плоские области) в общем не квазиконформны друг другу, однако, нас интересуют в основном поверхности конформного типа (g, n). Для компактных р/п всякий диффеоморфизм квазиконфорный. Далее, как объяснено в конце п. 13 л. 2, всякая конформная структура J конформного типа (g, n) на $\underline{S} = \widehat{\underline{S}} \setminus E$ (где $\widehat{\underline{S}}$ – компактная гладкая поверхность и $\#E < \infty$) однозначно продолжается в проколы до комплексной структуры $\hat{J}$ на $\widehat{\underline{S}}$ и согласно прил. 1 $\exists$ квазиконформный диффеоморфизм $f\colon (\underline{S}, J) \to (\underline{S}, J')$, гомотопный и сколь угодно близкий к тождественному $\Longrightarrow$ Мы видим, что в каждом классе $[S]$ р/п конформного типа (g, n) есть р/п, для которых тождественное отображение $\underline{S}$ является гладким и квазиконформным отображением $S \to S'$, т.е. все эти классы связаны наличием квазиконформных отображений для их представителей. (Это верно и для р/п конформного типа (g, n, m), но мы их будем классифицировать при помощи дублей, см. л. 11.)

С другой стороны, конформный тип р/п инвариантен относительно квазиконформных отображений (простое упр. 5). Таким

---

[3] Приведённое здесь определение отличается от принятого в ряде монографий по пространствам Тейхмюллера: для общих р/п классы Тейхмюллера существенно ужимаются дополнительным требованием, чтобы указанные биголоморфизмы h совпадали на идеальной границе фуксовой группы базовой р/п. Это, конечно, облегчает дальнейшую работу, но уже для р/п типа (g, n, m) с $g > 0$, $m > 0$ соотв. пространства становятся бесконечномерными. Определённые выше классы и соотв. пространства называются ещё редуцированными классами и редуцированными пространствами Тейхмюллера (см. [7]). Мы же следуем терминологии в книге Абикофа [1], тем более, что для р/п конформного типа (g, n) оба определения совпадают.

образом, расстояние τ между любыми двумя р/п $(\underline{S}, J')$ конечного конформного типа конечно $\Longrightarrow$ Множество всех таких р/п совпадает с метрическим пространством $\langle S\rangle$, описанным в п. 8. Так как это пространство не зависит от выбора (в нём) базы S, то множества классов Тейхмюллера для таких р/п обозначаются, соотв., $T_g, T_{g,n}$ и называются *пространствами Тейхмюллера* р/п соотв. типа[4].

В пространствах Тейхмюллера естественно вводится фактор-топология: открытыми являются подмножества, прообразы которых при фактор-отображении открыты в соотв. пространстве $\langle S\rangle$. В л. 8 мы покажем, что метрика τ в $\langle S\rangle$ индуцирует метрику в соотв. пространстве Тейхмюллера, совместимую с этой топологией.

Приведённое выше короткое определение классов Тейхмюллера может оказаться неудобным при работе с конкретными представлениями р/п, когда это просто геометрически различные объекты (скажем, алгебраические кривые в комплексном проективном пространстве). В таком случае фиксируется некоторая базовая $S = (\underline{S}, J)$ с гладкой базой $\underline{S}$ и гладкой комплексной структурой J на $\underline{S}$ и все р/п S' того же типа "маркируются" какими-нибудь фиксированными квазиконформными гомеоморфизмами $f\colon S \to S'$. Тройки (S, f, S') называются *отмеченными* р/п и уже они классифицируются по Тейхмюллеру: $(S, f_0, S_0) \approx (S, f_1, S_1)$, если $\exists$ биголоморфизм $h\colon S_0 \to S_1$, т.ч. гомеоморфизм $f_1^{-1} \circ h \circ f_0\colon \underline{S} \to \underline{S}$ гомотопен тождественному. Ясно, что при таком (традиционном) определении классы Тейхмюллера зависят только от гомотопических классов отображений f_0, f_1 и что это определение эквивалентно приведённому выше для р/п $(\underline{S}, f^* J_0)$ и $(\underline{S}, f_1^* J_1)$. При таком определении роль базы S заметнее, поэтому при заданной базе S соотв. пространство (классов) Тейхмюллера удобнее обозначать через $T\langle S\rangle$.

Наконец, для произвольной р/п $S = (\underline{S}, J)$, мотивируясь вышеизложенным, обозначим через $T\langle S\rangle$ множество классов Тейхмюллера, в которых есть представители $(\underline{S}, J')$, для которых существуют квазиконформные отображения на базу S. Как и в случае с фундаментальной группой, для исследования какого-нибудь

[4] Для р/п конформного типа (g, n, m) с $m > 0$ таким образом определяются конечномерные *редуцированные* пространства Тейхмюллера и мы используем для них обозначение $T^{\#}_{g,n,m}$.

определённого пространства Тейхмюллера (скажем, р/п конечного типа), удобно фиксировать “базовую точку”, р/п S соотв. типа, и далее работать с таким отмеченным пространством $T\langle S\rangle$.

11. Примеры. 1. $T_0, T_{0,1}, T^{\#}_{0,0,1}$, как и соотв. пространства Римана, состоят из одного элемента. $T_{0,n}$, $n \leqslant 3$, – тоже, поскольку для $\mathbb{C}\setminus\{a_1,a_2,a_3\}$ $\exists$ непрерывное семейство дробно-линейных отображений l_t т.ч. $l_0 = \mathrm{id}$ и $l_1(a_1,a_2,a_3) = (0,1,\infty)$ (сначала непрерывно уводим a_2 в ∞, потом сдвигаем то, что получилось из a_0 в 0 и растяжениями с поворотом новое a_1 – в 1).

2. Кольца $1 < |z| < R$ с различными R голоморфно не эквивалентны, поэтому $T^{\#}_{0,0,2} = R_{0,0,2} = (1,\infty) \subset \mathbb{R}$.

3. Торы $\mathbb{C}/\Gamma$. В качестве базы S возьмём тор $\mathbb{C}/\Gamma$ с образующими $1, i$ и маркируем $\mathbb{C}/\Gamma_0$, $\mathbb{C}/\Gamma_1$ (с образующими $1,\tau_0$ и $1,\tau_1$ соотв.) отображениями f_0, f_1, которые накрываются $\mathbb{R}$-линейным отображениями $\tilde f_0(\zeta) = (\zeta + \mu_0\bar\zeta)/(1+\mu_0)$ с $\mu_0 = (i-\tau_0)/(i+\tau_0)$ и соотв. $\tilde f_1(\zeta)$, переводящими Γ в Γ_0, Γ_1. Так как транзитивная группа $\operatorname{Aut} S_0$ состоит из преобразований, гомотопных тождественному, то всякий биголоморфизм $h\colon S_0 \to S_1$ гомотопен таковому, переводящему $\circ = \pi_0(0)$ в $\circ_1 = \pi_1(0)$ (π_0, π_1 – соотв. фактор-проекции), что мы далее и предполагаем. Такой биголоморфизм h поднимается до биголоморфизма $\tilde h$ плоскости $\mathbb{C}$, сохраняющего 0, т.е. $\tilde h\colon \zeta \mapsto \alpha\zeta$, $\mathbb{C}$-линейно (см. п. 6 л. 1) $\Longrightarrow \tilde\phi = \tilde f_1^{-1}\circ\tilde h\circ\tilde f_0$ (поднятие $f_1^{-1}\circ h\circ f_0$) – $\mathbb{R}$-линейное отображение, переводящее Γ на себя. Всякая гомотопия $F_t\colon S \to S$ в тождественное отображение очевидно преобразуется в гомотопию с теми же концевыми F_0, F_1, сохраняющую $\circ$. А такая поднимается до гомотопии $\widetilde{F}_t$ плоскости $\mathbb{C}$, переводящей решётку Γ в себя $\Longrightarrow$ оставляющей неподвижными все её точки $\Longrightarrow$ отображение ϕ гомотопно тождественному $\Longleftrightarrow$ линейное отображение $\tilde\phi$ тождественное $\Longrightarrow \tilde f_1 = \tilde h\circ\tilde f_0$ т.е. $\zeta + \mu_1\zeta = \alpha(\zeta + \mu_0\bar\zeta)$, откуда $\alpha = 1$ и $\mu_0 = \mu_1 \Longrightarrow \tau_0 = i\,\frac{1-\mu_0}{1+\mu_0} = \tau_1$ $\Longrightarrow \Gamma_0 = \Gamma_1$. Вывод: торы $\mathbb{C}/\Gamma_0$ и $\mathbb{C}/\Gamma_1$ эквивалентны по Тейхмюллеру $\Longleftrightarrow$ они совпадают, $\tau_0 = \tau_1 \Longrightarrow T_1 = \mathbb{H}$ (как топологические пространства).

Построенное в л. 3 п. 4 разветвлённое накрытие над R_1 выглядит теперь как

$$T_1 \xrightarrow{\lambda} \mathbb{C}\setminus\{0,1\} \xrightarrow{j} R_{0,1}.$$

Вместо параметров $\tau \in \mathbb{H}$, как видим, можно использовать параметры $\mu = \frac{i-\tau}{i+\tau} \in \mathbb{D}$.

4. Торы с проколом, $T_{1,1}$. Так как группа автоморфизмов тора транзитивна и её элементы гомотопны тождественному отображению, то можно считать, что проколы на всех торах $\mathbb{C}/\Gamma$ – это фактор-проекции самих решёток Γ. Таким образом устанавливаем 1:1 соответствие классов Тейхмюллера для торов $\mathbb{C}/\Gamma$ и проколотых торов $(\mathbb{C} \setminus \Gamma)/\Gamma$, т.е. $T_{1,1} = \mathbb{H}$, как и T_1.

12. Пространства Торелли. Из всех классов р/п, которые мы будем рассматривать, классы Тейхмюллера – самые маленькие, а классы Римана – самые большие. Между ними есть и другие интересные классы. Самые простые из них, классы Торелли, непосредственно связаны с периодами абелевых дифференциалов ([41], л. 10). Заметим, что всякий гомеоморфизм f поверхности $\underline{S}$ действует на группу гомологий $H_1(\underline{S}, \mathbb{Z})$, переводя класс гомологий $[\gamma]$ петли (цепи́) γ в класс $[f \circ \gamma]$. Р/п $S = (\underline{S}, J)$, $S' = (\underline{S}, J')$ называются *эквивалентными по Торелли*, если $\exists$ биголоморфизм $f\colon S \to S'$, "гомологичный тождественному", т.е. такой, что $[f \circ \gamma] = [\gamma]$ для любого класса $[\gamma] \in H_1(\underline{S}, \mathbb{Z})$. Гомеоморфизмы, гомотопные тождественному, конечно же, обладают этим свойством, $\Longrightarrow$ любой класс Тейхмюллера содержится в некотором классе Торелли (который, в свою очередь, содержится в некотором классе Римана). Множество (пространство) классов Торелли р/п конечных конформных типов обозначаем соотв. $\mathcal{T}_g, \mathcal{T}_{g,n}, \mathcal{T}_{g,n,m}$. В качестве примера рассмотрим классы сфер с проколами.

Р/п конформного типа $(0, n+3)$, $n > 0$, представим в виде $S = (\mathbb{C} \setminus E, J)$, где $E = \{0, 1, 2, \ldots, n+1\}$ и J – комплексная структура, продолжаемая до таковой $\hat{J}$ на $\widehat{\mathbb{C}}$. $H_1(\mathbb{C} \setminus E) = \mathbb{Z}^{n+2}$ порождается жордановыми петлями вокруг $n+2$ проколов. Если h – биголоморфизм двух таких поверхностей, гомологичный тождественному, то h непрерывно продолжается до $\hat{h}$ на $\widehat{\mathbb{C}}$ и оставляет неподвижными ∞ и все точки E (малая петля вокруг $a \in E$ переходит в таковую же). По теореме Римана и теореме об устранимой особенности, $\exists$! биголоморфное отображение $\phi_J\colon (\mathbb{C}, \hat{J}) \to \mathbb{C} = (\mathbb{C}, J_{\mathrm{st}})$, переводящее упорядоченное множество E в упорядоченное множество $E_\lambda = \{0, 1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Точки $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, получаемые таким образом, заполняют область $M_n = (\mathbb{C} \setminus \{0,1\})^n \setminus \bigcup_{i \neq j} H_{ij}$ где $H_{ij}\colon \lambda_i = \lambda_j$. Если $h\colon S \to S'$ – биголоморфизм р/поверхностей указанного вначале вида, гомологичный тождественному отображению $\mathbb{C} \setminus E$, то $\phi_{J'} \circ \hat{h} \circ \phi_J^{-1}$ –

биголоморфизм $\mathbb{C}$, сохраняющий $0, 1, \Longrightarrow$ тождественное отображение, т.е. $\phi_{J'} \circ \hat{h} = \phi_J$. Так как $\hat{h}$ сохраняет все точки E, то отсюда получается, что упорядоченные множества E_λ (а значит, и сами λ) для р/п, эквивалентных по Торелли (а тем более – по Тейхмюллеру), одинаковы. Другими словами, корректно определено отображение (“проекция”)

$$\pi_{\mathcal{T}} \colon \mathcal{T}_{0,n+3} \longrightarrow M_n \subset \mathbb{C}^n.$$

С другой стороны, если параметры λ для S, S' одинаковы, то отображение $\phi_{J'}^{-1} \circ \phi_J \colon S \to S'$ биголоморфное и подолжается до гомеоморфизма плоскости, сохраняющего все точки $E \Longrightarrow$ оно гомологично тождественному $\Longrightarrow S, S'$ эквивалентны по Торелли. Таким образом, доказано, что проекция $\pi_{\mathcal{T}}$ 1:1, что мы запишем в виде равенства:

Предложение 4.

$$\mathcal{T}_{0,n+3} = M_n = (\mathbb{C} \setminus \{0,1\})^n \setminus \left(\bigcup_{i \neq j} \{\lambda_i = \lambda_j\} \right).$$

Это область в $\mathbb{C}^n$, получаемая удалением из него $2n + \frac{n(n-1)}{2}$ гиперплоскостей. При $n = 1$ получается уже знакомая нам плоскость $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ из л. 3 и описанные там проекции можно окончательно переписать в виде

$$T_1 \xrightarrow{\lambda} \mathcal{T}_{0,4} \xrightarrow{j} R_1 .$$

* * * * *

Задачи и упражнения.

1. $dz + \mu\, d\bar{z}$ – базовая форма комплексной структуры J в области $D \subset \mathbb{C}_z$. Найти Jv для $v = \operatorname{Re} a \frac{\partial}{\partial z}$.

2. В той же ситуации, установить критерий того, что форма $dz + \mu\, d\bar{z}$ является J-голоморфной.

3. Проверить, что “радиальные” преобразования плоскости $\phi_\alpha \colon z = r\, e^{i\theta} \mapsto r^\alpha e^{i\theta}$ квазиконформны $\forall\ \alpha > 0$ и найти коэффициенты квазиконформности.

4 (задача Грёча). Среди квазиконформных отображений, переводящих квадрат в прямоугольник со сторонами $a > b$ и вершины в вершины (отображения непрерывны в замыкании), минимальный коэффициент квазиконформности ($= a/b$) имеет $\mathbb{R}$-линейное отображение и только оно.

5. $f\colon S \to S'$ – квазиконформное отображение р/п, S – конформного типа $(g, n, m) \Longrightarrow S'$ – того же типа.

6. Пространство $T_{0,4}$ нетривиально; более того, имеет место гомеоморфизм $T_{0,4} = T_1$ $(= \mathbb{H})$.

7. Используя двулистные нормальные проекции для гиперэллиптических р/п (см. п. 3 л. 3) определить накрытие $\mathcal{T}_2 \to \mathcal{T}_{0,6}$. Сколько в нём листов? Универсально оно или нет?

Дифференциалы на римановой поверхности

Лекция 5

Дифференциалы Бельтрами – Уравнение Бельтрами на плоскости – Теорема Боярского – Квазиконформные гомеоморфизмы $\widehat{\mathbb{C}}$ – Последовательности квазиконформных отображений

1. Дифференциалы Бельтрами. Гладкой конформной структуре J' на базовой р/п $S = (\underline{S}, J)$ соответствует $(1,0)_J$-форма $dz + \mu^z\, d\bar{z}$, коэффициент которой при замене S-голоморфных координат z на w меняется по правилу $\mu^z = \mu^w \overline{w}'/w'$ (см. п. 7, л. 4). Домножим обе части на форму $d\bar{z}/dz$ (это имеет смысл: дифференциальные формы – это $\mathbb{R}$-линейные функции на слоях касательного расслоения и, как функции, их можно умножать, делить, брать модуль и т.п.). Полученное равенство $\mu^z \frac{d\bar{z}}{dz} = \mu^w \frac{d\overline{w}}{dw} =: \mu_{J'}$ показывает, что вот это образование $\mu = \mu_{J'}$, называемое *дифференциалом Бельтрами* (структуры J'), корректно определено почти всюду на р/п S (точнее, на касательном расслоении $T\underline{S}$, но так обычно не говорят). Коэффициент μ^z зависит от z, но его модуль $|\mu^z| < 1$ есть модуль $|\mu_{J'}|$ дифференциала Бельтрами $\mu_{J'}$ – корректно определённая функция класса L^∞ на самой поверхности S. Это функция отклонения J' от J и $\|\mu\| := \|\mu\|_\infty < 1$ для $S' = (\underline{S}, J') \in \langle S \rangle$ (см. л. 4, п. 7).

Более общие дифференцалы на S локально представляются в виде $a^z\,(dz)^r\,(d\bar{z})^s$, $r, s \in \mathbb{Z}$, с заменой коэффициентов, обеспечивающей равенство с $a^w\,(dw)^r\,(d\overline{w})^s$ для любых пар локальных координат. Такие функции на TS называются *дифференциалами типа* (r,s); например, конформные метрики на S – это дифференциалы типа $(1,1)$ а дифференциалы Бельтрами – это дифференциалы μ типа $(-1,1)$ с $|\mu| < 1$.

Дифференциалы Бельтрами на S возникают естественно и при квазиконформных отображениях $f\colon S \to S'$ р/п. Пусть z, w – голоморфные координаты в окрестностях p_0, $f(p_0)$ соотв. и $w(z) = w \circ f \circ z^{-1}$ – координатное представление f в соотв. плоской области. Тогда $dw = w_z \left(dz + \frac{w_{\bar{z}}}{w_z}\, d\bar{z}\right)$. Функция $\mu_f := \frac{w_{\bar{z}}}{w_z} \frac{d\bar{z}}{dz}$ на

$T\underline{S}$ в окрестности p_0 (определённая там для п.в. p) при замене z на S-голоморфную координату ζ равна $\frac{w_{\bar\zeta}}{w_\zeta}\frac{d\bar\zeta}{d\zeta}$, а от замены w на S'-голоморфную координату η тоже не меняется $\Longrightarrow$ μ_f корректно определена п.в. на $T\underline{S}$ (класса L^∞ по p). Она называется *дифференциалом Бельтрами* квазиконформного отображения f. Если J' – конформная структура р/п $S' \in \langle S\rangle$, то f^*J' – конформная структура на $\underline{S}$, из того же множества $\langle S\rangle$. Таким образом, множество конформных структур $\langle S\rangle$ (с конечным расстоянием τ от структуры J, см. п. 8, л. 4) инвариантно относительно квазиконформной замены базы S. Из определений видно, что дифференциал Бельтрами μ_f п.в. совпадает с дифференциалом Бельтрами структуры f^*J'. В л. 6 мы покажем, что *всякий* дифференциал типа $(-1,1)$ на S с $\|\mu\|_\infty < 1$ порождается некоторым квазиконформным отображением, но для этого надо решить сначала несколько важных аналитических задач.

Прежде всего, поднимем структуры, дифференциалы и отображения на универсальную накрывающую. С торами мы в основном разобрались, поэтому далее считаем, что S – гиперболическая р/п, и фиксируем универсальное накрытие $\pi\colon \mathbb{D} \to S$, с фиксированной координатой z на $\mathbb{C} \supset \mathbb{D}$. Тем самым в $\operatorname{Aut}\mathbb{D}$ фиксируется накрывающая группа G проекции π, а S отождествляется с $\mathbb{D}/G$.

Дифференциалы типа $(-1,1)$ в $\mathbb{D}$ имеют вид $\mu\, d\bar z/dz$, т.е. полностью определяются комплексными функциями μ (коэффициентами), от которых мы требуем измеримость и равномерные оценки $|\mu| \leqslant k < 1$ п.в. Такие функции образуют единичный шар в банаховом пространстве $L^\infty(\mathbb{D})$, норму в котором мы далее обозначаем через $\|\cdot\|$ (или $\|\cdot\|_\infty$ в исключительных случаях). Дифференциалы, поднимаемые отображением π из поверхности S, должны быть инвариантными относительно преобразований $A \in G$ (поскольку $\pi \circ A = \pi$). Это условие записывается в виде

$$(\mu \circ A)\overline{A'}/A' = \mu, \quad A \in G,$$

и определяет линейное подпространство в $L^\infty(\mathbb{D})$. Единичный шар этого подпространства, который будет играть большую роль в дальнейшем, мы обозначаем через $B_1(G)$ (более общо, $B_r(G)$ – шар радиуса r).

Итак, всякий дифференциал Бельтрами μ на S с $\|\mu\| < 1$ однозначно (при заданной координате z и проекции π) поднимается до дифференциала Бельтрами $\mu\, d\bar z/dz$ в $\mathbb{D}$ с $\mu \in B_1(G)$ и, обратно, всякому $\mu \in B_1(G)$ однозначно соотв. дифференциал Бельтрами μ на S с локальным координатным представлением $\mu\, d\bar{z}/dz$. Поэтому в дальнейшем дифференциалы Бельтрами на S отождествляются с элементами $B_1(G)$, которые мы называем далее *коэффициентами Бельтрами*. Классы Тейхмюллера из пространства $T\langle S\rangle$ тоже удобнее рассматривать как подмножества в $B_1(G)$: мы говорим, что $\mu_1 \approx \mu_2$, эквивалентны по Тейхмюллеру, если $(\underline{S}, J_{\mu_1}) \approx (\underline{S}, J_{\mu_2})$.

В п. 12, л. 7 мы покажем, что для гиперболической р/п конформного типа (g, n) условие $\mu_1 \approx \mu_2$ эквивалентно равенству на $\partial\mathbb{D}$ соотв. решений уравнений Бельтрами. В таком представлении эквивалентности по Тейхмюллеру исчезают и р/п и конформные структуры на ней, остаётся только круг $\mathbb{D}$ и накрывающая группа G, относительно которой дифференциалы $\mu\, d\bar{z}/dz$ инвариантны. Так как $T\langle S\rangle = B_1(G)/\approx$ и правая часть полностью определяется группой G, то естественно таким же образом определить пространство Тейхмюллера $T(G)$ для произвольной фуксовой группы $G \subset \operatorname{Aut}\mathbb{D}$. Таким образом, по определениям, $T(G) = T\langle\mathbb{D}/G\rangle$, слева стоит объект алгебры и анализа, а справа – объект конформной геометрии. Во многих задачах язык фуксовых групп и уравнений Бельтрами удобнее, но надо помнить, что всё это делается для классификации р/п и результаты по возможности интерпретировать в геометрических терминах.

Исходя из 1:1 соответствия конформных структур J' на S и коэффициентов Бельтрами $\mu \in B_1(G)$, мы определяем расстояние

$$\tau(\mu_1, \mu_2) := \tau(J_{\mu_1}, J_{\mu_2}) = \frac{1}{2}\log\kappa\left(\left\|\frac{\mu_1 - \mu_2}{1 - \overline{\mu_1}\mu_2}\right\|\right)$$

в $B_1(G)$, аналогичное расстоянию Пуанкаре в круге. Определяемая им топология совпадает, очевидно, с топологией L^∞, но расстояние τ по сравнению с L^∞-нормой имеет существенное преимущество – инвариантность относительно дробно-линейных автоморфизмов шара вида $\mu \mapsto e^{ic}\frac{\mu - \mu_0}{1 - \overline{\mu_0}\mu}$ с заданным μ_0 и измеримой вещественной функцией c.

Тесную связь дифференциалов Бельтрами и квазиконформных отображений разберём сначала на основном аналитическом примере $S = \mathbb{D}$.

2. Уравнение Бельтрами на плоскости. На плоскости $\mathbb{C}_z$ решаем уравнение $f_{\bar z} = \mu f_z$, где $\mu \in L^\infty(\mathbb{C})$, $\|\mu\| < 1$, в классе функций f из пространства Соболева $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$ с некоторым $p > 2$, которое выберем дальше в зависимости от $\|\mu\|$. Решение ищем в виде $f(z) = z + Pf_{\bar z}$ (стандартное решение), где $(P\phi)(z) = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \phi(\zeta)(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta})\, dS_\zeta$ есть оператор Коши–Грина; вычитание константы гарантирует условие $(P\phi)(0) = 0$ и определённость для всех $\phi \in L^p(\mathbb{C})$ с $p > 2$ (см. [4], гл. 5). Оператор P даёт решение уравнения $h_{\bar z} = \phi$ для $\phi \in L^p(\mathbb{C})$, т.е. $\frac{\partial}{\partial \bar z} P\phi = \phi$ (см. [14], [4], [41], л. 5). Формальная производная по z такой функции f равна $1 + \Pi f_{\bar z}$ где $(\Pi\phi)(z) = -p.v.\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\phi(\zeta)\, dS_\zeta}{(\zeta - z)^2}$ – двумерное преобразование Гильберта, сингулярный интеграл, понимаемый в смысле главного значания по Коши. Доказательство следующей основной технической леммы для таких интегралов в разной степени общности см. в [14], [4], [43].

Лемма 9. *$\forall\, \phi \in L^p(\mathbb{C})$ с $1 < p < \infty$ сингулярный интеграл $(\Pi\phi)(z)$ определён для п.в. $z \in \mathbb{C}$ и является обобщённой производной по z от функции $P\phi$. Преобразование Гильберта $\phi \mapsto \Pi\phi$ есть ограниченный линейный оператор из $L^p(\mathbb{C})$ в $L^p(\mathbb{C})$ с нормой $\|\Pi\|_p$, непрерывно завиящей от p. В $L^2(\mathbb{C})$ оператор Π унитарный, $\|\Pi\|_2 = 1$.*

Используя оператор Π и обозначая $f_{\bar z} =: \phi$, перепишем уравнение Бельтрами в виде $(1 - \mu\Pi)\phi = \mu$. Согласно лемме 9 $\exists\, p_0 > 2$, т.ч. $\|\mu\|_\infty \|\Pi\|_p < 1$ для всех $2 < p < p_0$. Фиксируем такое p – и тогда оператор $1 - \mu\Pi$ обратим в $L^p(\mathbb{C})$, ограниченный обратный равен $1 + \mu\Pi + (\mu\Pi)^2 + \cdots \implies$ если $\mu \in L^\infty \cap L^p(\mathbb{C})$, то ϕ однозначно определяется равенством $\phi = (1 - \mu\Pi)^{-1}\mu$ и уравнение Бельтрами имеет решение $f(z) = z + (P\phi)(z)$. По построению, такое *стандартное* решение уравнения Бельтрами в $L^p(\mathbb{C})$ единственно.

Оператор Коши–Римана улучшает гладкость на 1: функция $f(z) - z$ имеет обобщённые частные производные $f_{\bar z} = \phi$, $f_z - 1 = \Pi\phi$ из $L^p(\mathbb{C})$, т.е. $f(z) - z \in W^{1,p}(\mathbb{C})$. Функции этого класса непрерывны всюду на плоскости и удовлетворяют равномерному условию Гёльдера с показателем $1 - 2/p$ и константой, пропорциональной $\|f_{\bar z}\|_p$ (ссылки туда же).

Лемма 10. *$\mu_n \in L^\infty(\mathbb{C})$, $\|\mu_n\| \leqslant k < 1$ и $\mu_n \to \mu$ п.в. в $\mathbb{C}$, причём носители всех μ_n равномерно ограничены $\implies$ стандартные* *решения f_n уравнений Бельтрами с коэффициентами μ_n соотв. равномерно сходятся при $n \to \infty$ к стандартному решению уравнения Бельтрами с коэффициентом μ.*

$\lhd$ $(f_n - f)_{\bar z} = \mu_n (f_n - f)_z + (\mu_n - \mu)\, f_z$, т.е. $(1 - \mu_n \Pi)(f_n - f)_{\bar z} = (\mu_n - \mu)\, f_z$. Правая часть этого равенства стремится к 0 в $L^p(\mathbb{C})$. Так как $\|\mu_n\| \leqslant k$, то из этого следует, что $(f_n - f)_{\bar z} \to 0$ в $L^p(\mathbb{C})$ $\Longrightarrow |f_n - f| = |P((f_n - f)_{\bar z})| \leqslant C \|(f_n - f)_{\bar z}\|_p\, |z|^{1-2/p}$ равномерно стремится к 0 в круге, содержащем носители всех функций μ_n. Вне него функции $f_n - f$ голоморфны и равномерно ограничены $\Longrightarrow$ сходимость равномерная в $\widehat{\mathbb{C}}$ (по теореме об устранимой особенности и принципу максимума). $\rhd$

Лемма 11. $\mu \in C_0^k(\mathbb{C})$, $\|\mu\|_\infty < 1 \Longrightarrow$ *стандартное решение уравнения Бельтрами $f_{\bar z} = \mu f_z$ – тоже класса $C^k(\mathbb{C})$.*

$\lhd$ Имеем:

$$
\begin{aligned}
f(z+h)_{\bar z} = \mu(z+h) f(z+h)_z \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow \frac{1}{h}((1 - \mu(z)\Pi)(f(\cdot + h) - f(\cdot))_{\bar\zeta})(z) = \\
&= \frac{1}{h}(\mu(z+h) - \mu(z))(\Pi f_{\bar\zeta}(\cdot + h))(z) \\
&\qquad + \frac{1}{h}(\mu(z+h) - \mu(z)) = \\
&= \frac{1}{h}(\mu(z+h) - \mu(z)) f_z(z+h) \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow \frac{1}{h}(f(z+h) - f(z)) = \\
&= 1 + P(1 - \mu\Pi)^{-1}\left[\frac{1}{h}(\mu(\cdot + h) - \mu(\cdot))\, f_z(\cdot + h)\right](z).
\end{aligned}
$$

Беря $h \in \mathbb{R}$ и устремляя его к 0, получаем, что правая часть (ввиду непрерывности оператора в правой части) стремится к $1 + P(1 - \mu\Pi)^{-1} \frac{\partial \mu}{\partial x}\, f_z$ и предел непрерывен по z из-за оператора P, улучшающего гладкость $\Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}$ $\exists$ и непрерывна. Аналогично, $\frac{\partial f}{\partial y}$ и затем очевидная индукция по k. $\rhd$

3. Теорема Боярского. Следующая теорема доказана Б. Боярским в 1955 г. (см. [12] и общую теорию уравнений Бельтрами в [13]).

Теорема 1. *Для всякого $\mu \in L^\infty(\mathbb{C})$ с компактным носителем и $\|\mu\| < 1$ существует единственный квазиконформный гомеоморфизм F_μ плоскости $\mathbb{C}$, нормированный условием $F_\mu(z) = z + o(1)$ в окрестности ∞ и удовлетворяющий уравнению Бельтрами с коэффициентом μ.*

$\lhd$ Сначала предположим, что $\mu \in C_0^2(\mathbb{C})$. Тогда стандартное решение f уравнения Бельтрами принадлежит $C^2(\mathbb{C})$ (лемма 11). Дифференцируя это уравнение по z, получаем $f_{z\bar z} = \mu f_{zz} + \mu_z f_z$. Если бы f_z не имела нулей, то разделив на неё, получили бы уравнение $\lambda_{\bar z} = \mu\lambda_z + \mu_z$ для $\lambda = \log f_z$. А в общем, просто решим это уравнение относительно λ стандартным образом: $\lambda = P(1 - \mu\Pi)^{-1}\mu_z$ и найдём функцию f^0 из соотношений $f^0_z = ce^\lambda$, $f^0_{\bar z} = c\mu\, e^\lambda$, где $c = e^{-\lambda(\infty)}$. Для $\exists$ такой f^0 (с $f^0(0) = 0$) необходимо и достаточно, чтобы смешанные производные равнялись, т.е. $e^\lambda_{\bar z} = (\mu\, e^\lambda)_z$, т.е. $\lambda_{\bar z} = \mu\lambda_z + \mu_z$, а это как раз и выполнено, согласно формуле для λ.

Функция f^0, как и λ, голоморфна и ограничена вне носителя μ; более того, так как $c\, e^{\lambda(\infty)} = 1$, то $f^0(z) = z + O(1)$ в окрестности $\infty \Longrightarrow f^0(z) = z + P(f^0_{\bar z}) \Longrightarrow f^0 = f$, стандартное решение и мы таким образом доказали, что $f_z = ce^\lambda$ всюду отлична от 0. Якобиан f равен $|f_z|^2 - |f_{\bar z}|^2 = |f_z|^2(1 - |\mu|^2) > 0$ всюду $\Longrightarrow f$ локально 1:1. Так как $f(z) = z + O(1)$ в окрестности ∞, то из этого следует, что f глобально 1:1. Остаётся отнормировать, полагая $F_\mu = f - (Pf_{\bar z})(\infty)$.

В случае произвольного $\mu \in L^\infty$ с компактным носителем, воспользуемся леммой 10. Пусть μ_n – последовательность гладких функций с равномерно ограниченными носителями, сходящаяся к μ п.в., с $\|\mu_n\| \leqslant \|\mu\|$ и f_n – стандартные решения соотв. уравнений Бельтрами. Тогда $f_n \in C^1(\mathbb{C})$ и обратные функции f_n^{-1} удовлетворяют соотв. уравнениям Бельтрами с коэффициентами, модули которых равны $|\mu_n|$ (см. л. 4 п. 9). А тогда в любом круге $|z| < R$ функции f_n^{-1} удовлетворяют условию Гёльдера $|f_n^{-1}(z_1) - f_n^{-1}(z_2)| \leqslant C_R|z_1 - z_2|^{1-2/p} \Longrightarrow$ в любом таком круге $|f_n(z_1) - f_n(z_2)| \geqslant c_R|z_1 - z_2|^{p/(p-2)}$. Так как $f_n \to f$, решению уравнения Бельтрами с коэффициентом μ, то это неравенство выполняется также и для $f \Longrightarrow f$ – гомеоморфизм.

Что касается единственности: если $f_\mu \in W^{1,2}_{\text{loc}}$ – другое решение того же уравнения, с той же асимптотикой в ∞, то $(1 - \mu\Pi)(F_\mu - f_\mu)_{\bar z} = 0$. Функция $(F_\mu - f_\mu)_{\bar z}$ имеет компактный носитель, поэтому принадлежит $L^2(\mathbb{C})$, а оператор $1 - \mu\Pi$ в $L^2(\mathbb{C})$

обратим $\Longrightarrow (F_\mu - f_\mu)_{\bar z} = 0$ в обобщённом смысле $\Longrightarrow$ (лемма Вейля, см. [41], л. 6) функция $F_\mu - f_\mu$ голоморфна в $\mathbb{C}$ и стремится к 0 на $\infty \Longrightarrow$ (принцип максимума) $F_\mu - f_\mu \equiv 0$. $\triangleright$

Функцию F_μ мы называем далее *каноническим* решением уравнения Бельтрами (с коэффициентом μ). По построению она имеет вид

$$F_\mu(z) = z - \frac{1}{\pi}\int \frac{(F_\mu)_{\bar\zeta}\, dS_\zeta}{\zeta - z} =: z + T(F_\mu)_{\bar\zeta}(z).$$

Так как $(F_\mu)_{\bar z} = (1 - \mu\Pi)^{-1}\mu$ голоморфно зависит от μ (см. п. 12, л. 7 и прил. 2), то F_μ тоже голоморфна по $\mu \in L^\infty$, $\|\mu\| < 1$, (т.е. $F_\mu(a)$ голоморфна по $\mu\ \forall\, a \in \mathbb{C}$) и мы неоднократно будем этим пользоваться.

4. Квазиконформные гомеоморфизмы $\widehat{\mathbb{C}}$. Пусть теперь μ – произвольная функция из $L^\infty(\mathbb{C})$, $\|\mu\| < 1$, никакого условия на носитель, и мы ищем гомеоморфное решение уравнения $f_{\bar z} = \mu f_z$ в $\mathbb{C}$. Функция $\mu_1 = \chi\mu$, где χ – характеристическая функция $\mathbb{D}$, сосредоточена в $\overline{\mathbb{D}} \Longrightarrow \exists$ стандартное решение f_1 уравнения Бельтрами с коэффициентом μ_1, осуществляющее квазиконформный гомеоморфизм $w = f_1(z)$. Исходное уравнение Бельтрами означает, что $df = f_z(dz + \mu\, d\bar z)$. Перепишем это в терминах w. Так как $dw = (f_1)_z(dz + \mu_1\, d\bar z)$, то $dz = (\alpha - \mu_1\bar\alpha)$ с $\alpha = (dw)/((f_1)_z(1 - |\mu|^2)) \Longrightarrow$

$$df = \frac{f_z}{(f_1)_z}\frac{1 - \mu\overline{\mu_1}}{1 - |\mu_1|^2}\left(dw + \frac{\overline{(f_1)_z}}{(f_1)_z}\frac{\mu - \mu_1}{1 - \mu\overline{\mu_1}}\, d\overline{w}\right),$$

т.е. $f(z(w)) =: F(w)$ – должна быть решением уравнения Бельтрами с коэффициентом μ_2, равным 0 в окрестности $0 \Longrightarrow F(1/w)_{\overline{w}} = -\frac{1}{\overline{w}^2}F_{\overline{w}}(1/w) = \frac{w^2}{\overline{w}^2}\mu_2 F(1/w)_w$, т.е. $F(1/w)$ должна удовлетворять уравнению Бельтрами с компактным носителем, а мы знаем, что такое разрешимо, $\exists$ стандартное квазиконформное решение $\Longrightarrow$ $1/F(1/f_1(z))$ фиксирует точки $0, \infty$ и решает искомое уравнение Бельтрами. Таким образом, получаем следующее:

Теорема 2. *Для всякого $\mu \in L^\infty(\mathbb{C})$ с $\|\mu\| < 1$ существует единственный квазиконформный гомеоморфизм f сферы Римана, оставляющий неподвижными точки $0, 1, \infty$ и удовлетворяющий в $\mathbb{C}$ уравнению Бельтрами $f_{\bar z} = \mu f_z$.*

◁ Функция $f = F(1/f_1(1))/F(1/f_1(z))$, очевидно искомая. Если g – другая такая же и $w = f(z)$, то $dg = (g_z/f_z)\,dw$ п.в., т.е. $g_{\overline{w}} = 0$ в обобщённом смысле $\Longrightarrow$ (лемма Вейля) $g = h \circ f$, где h – голоморфная функция. Так как f и g – гомеоморфизмы $\widehat{\mathbb{C}}$ с неподвижными точками $0, 1, \infty$, то h такая же $\Longrightarrow$ $h(w) \equiv w$, т.е. $g = f$. ▷

Если μ имеет компактный носитель, то f и каноническое решение F_μ связаны очевидным линейным соотношением $f = \frac{F_\mu - F_\mu(0)}{F_\mu(1) - F_\mu(0)}$.

Как видно из доказательства, вместо $0, 1, \infty$ можно брать произвольные различные $z_0, z_1, z_2 \in \widehat{\mathbb{C}}$ – решение с такими неподвижными точками тоже единственно.

Теперь попробуем найти аналогичное отображение круга в круг. Если $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ – квазиконформный гомеоморфизм с коэффициентом Бельтрами μ, $\|\mu\| < 1$, то $g(z) = 1/\overline{f(1/\bar{z})}$ – квазиконформный гомеоморфизм $\mathbb{D}^- := \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$. Так как $g_{\bar{z}} = \frac{g^2}{\bar{z}^2}\overline{f_{\bar{z}}(1/\bar{z})}$ и $g_z = \frac{g^2}{z^2}\overline{f_z(1/\bar{z})}$, то g удовлетворяет в $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ уравнению Бельтрами с коэффициентом $\mu^- = \frac{z^2}{\bar{z}^2}\overline{\mu(1/\bar{z})}$. Зная это, мы определим теперь $\hat{\mu}$ на всей $\mathbb{C}$ равной μ в $\mathbb{D}$ и μ^- в $\mathbb{D}^-$. Это функция класса $L^\infty(\mathbb{C})$ с $\|\hat{\mu}\| = \|\mu\|$. По доказанному выше, $\exists\,!$ квазиконформный гомеоморфизм $f^{\hat{\mu}}$ сферы $\widehat{\mathbb{C}}$ с коэффициентом Бельтрами $\hat{\mu}$ и неподвижными точками $1, i, -1$. Используя вид $\hat{\mu}$, непосредственно проверяем, что $\overline{1/f^{\hat{\mu}}(1/\bar{z})}$ – тоже гомеоморфизм, с тем же коэффициентом $\hat{\mu}$ и неподвижными $1, i, -1 \Longrightarrow f^{\hat{\mu}}(z) \equiv \overline{1/f^{\hat{\mu}}(1/\bar{z})}$ $\Longrightarrow |f^{\hat{\mu}}(e^{i\theta})| \equiv 1$, $\theta \in \mathbb{R}$, $\Longrightarrow f^{\hat{\mu}}(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$. Применяя это построение к $t\mu$ вместо μ с $0 \leqslant t \leqslant 1$, мы получаем непрерывное семейство таких гомеоморфизмов $f^{t\hat{\mu}}$, причём $f^0(z) \equiv z \Longrightarrow f^0(\mathbb{D}) = \mathbb{D} \Longrightarrow f^{\hat{\mu}}(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$. Полагая $f^\mu := f^{\hat{\mu}}|_{\hat{\mathbb{D}}}$, получаем следующее утверждение:

Теорема 3. *Для всякого $\mu \in L^\infty(\mathbb{D})$ с $\|\mu\| < 1$ существует единственный гомеоморфизм $f = f^\mu\colon \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$, квазиконформный в $\mathbb{D}$, удовлетворяющий уравнению Бельтрами $f_{\bar{z}} = \mu f_z$ и оставляющий неподвижными точки $1, i, -1$.*

Такие f^μ будем называть *нормальными* решениями соотв. уравнений Бельтрами в $\mathbb{D}$. Подчеркнём, что f^μ есть сужение на $\overline{\mathbb{D}}$ квазиконформного гомеоморфизма сферы Римана, коммутирующий с антиголоморфной инволюцией относительно единичной окружности.

У нас будет встречаться ситуация, когда $f^{\mu} \circ A = f^{\mu}$ в $\mathbb{D}$ для некоторго $A \in \operatorname{Aut}\mathbb{D}$. Так как $A(z) = e^{ic}\frac{z+a}{1+\bar{a}z}$ с постоянными $a \in \mathbb{D}$, $c \in \mathbb{R}$, то $1/\overline{A(z)} = e^{ic}\frac{1+a\bar{z}}{\bar{z}+\bar{a}} = A(1/\bar{z})$ и поэтому $1/\overline{f^{\mu}(1/\overline{A(z)})} = 1/\overline{f^{\mu}(1/\bar{z})} \Longrightarrow f^{\hat{\mu}} \circ A = f^{\hat{\mu}}$ в $\widehat{\mathbb{C}}$. Отсюда (и цепного правила) очевидно следует, что $(\hat{\mu} \circ A)\overline{A'}/A' = \hat{\mu}$, и мы это будем использовать в дальнейшем.

5. Последовательности квазиконформных отображений. Класс квазиконформных отображений, подобно классам Гёльдера, обладает свойством компактности при равномерной оценке коэффициентов.

Лемма 12. $f_j\colon \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$ – *последовательность гомеоморфизмов, квазиконформных в* $\mathbb{D}$ *с неподвижными точками* $1, i, -1$ *и т.ч.* $|\mu_{f_j}| \leqslant k < 1 \Longrightarrow \exists$ *подпоследовательность* f_{j_ν}, *равномерно сходящаяся к некоторому гомеоморфизму* $f\colon \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$, *тоже квазиконформному в* $\mathbb{D}$, *причём* $|\mu_f| \leqslant k$.

$\lhd$ По определению, f_j – нормальные решения уравнений Бельтрами с коэффициентами $\mu_j := \mu_{f_j}$. Как и в п. 3, функции f_j удовлетворяют двусторонним условиям Гёльдера

$$c|z_1 - z_2|^{p/(p-2)} \leqslant |f_j(z_1) - f_j(z_2)| \leqslant C|z_1 - z_2|^{1-2/p}$$

с некоторым $p > 2$ и константами > 0, зависящими от k. Поэтому можно считать, что f_j равномерно сходятся к гомеоморфизму f. Так как $f_j \in W^{1,p}(\mathbb{D})$ и первые частные производные f_j в L^p равномерно по j ограничены (см. п. 2), то можно считать, что эти производные тоже слабо сходятся в L^p. Так как $f_j \to f$, то, по определению обобщённых производных, $(f_j)_z \to f_z$, $(f_j)_{\bar{z}} \to f_{\bar{z}}$ (слабая сходимость в $L^p(\mathbb{D})$, справа стоят обобщённые производные f). $\Longrightarrow f \in W^{1,p}(\mathbb{D})$ и $|(f_j)_z|^2 \pm |(f_j)_{\bar{z}}|^2 \to |f_z|^2 \pm |f_{\bar{z}}|^2$ слабо в $L^{p/2} \Longrightarrow$

$$\int_{\mathbb{D}} (|(f_j)_z|^2 \pm |(f_j)_{\bar{z}}|^2)\lambda\, dS \to \int_{\mathbb{D}} (|f_z|^2 \pm |f_{\bar{z}}|^2)\lambda\, dS$$

$\forall\, \lambda \in C_0^1(\mathbb{D})$. Условия $|\mu_j| \leqslant k$ эквивалентны неравенствам $|(f_j)_z|^2 + |(f_j)_{\bar{z}}|^2 \leqslant \frac{1+k^2}{1-k^2}(|f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2)$ (функция $\frac{1+x}{1-x}$ монотонно возрастает) $\Longrightarrow \int_{\mathbb{D}} (|f_z|^2 + |f_{\bar{z}}|^2)\lambda\, dS \leqslant \frac{1+k^2}{1-k^2}\int_{\mathbb{D}} (|f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2)\lambda\, dS$. Ввиду произвольности λ получаем, что $|f_z|^2 + |f_{\bar{z}}|^2 \leqslant \frac{1+k^2}{1-k^2}(|f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2)$ п.в., т.е. $|\mu_f| \leqslant k$ тоже.

Пусть теперь K – множество точек, в которых f_z $\exists$ и $= 0$. Тогда $f_{\bar z} = 0$ п.в. на $K \Longrightarrow$ множество $f(K)$ имеет меру нуль в $\mathbb{D}$. Определим $\nu = -(\mu\overline{f_z}/f_z) \circ f^{-1}$ вне $f(K)$ и $= 0$ на K (хоть последнее и неважно) и обозначим через g нормальное решение уравнения Бельтрами с коэффициентом ν. Тогда $g \circ f$ – гомеоморфизм $\mathbb{D}$ класса $W^{1,p}$ и $(g \circ f)_{\bar z} = (g_w \circ f)(f_{\bar z} + (\nu \circ f)\overline{f_z}) = 0$ п.в. в $\mathbb{D} \Longrightarrow$ по лемме Вейля ([41], л. 6) $g \circ f$ – голоморфная функция из $\operatorname{Aut}\mathbb{D} \Longrightarrow$ дробно-линейная, сохраняющая $1, i, -1$, $\Longrightarrow g \circ f(z) \equiv z \Longrightarrow g = f^{-1}$. Так как образ множества $f(K)$ меры нуль при отображении $g \in W^{1,2}$ имеет меру нуль и равен K, то $f_z \neq 0$ п.в. в $\mathbb{D} \Longrightarrow f$ – квазиконформное отображение. $\triangleright$

Замечание. Между прочим, мы доказали ещё, что $f_z \neq 0$ п.в., f^{-1} – тоже квазиконформно и $f_z, 1/f_z \in L^p(\mathbb{D})$ с $p \leqslant p(k) > 2$ (поскольку $1/f_z = (f^{-1})_\zeta(1 - |\mu|^2)$, см. п. 9, л. 4).

Следствие. $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ – *гомеоморфизм класса* $W^{1,2}_{\text{loc}}$, *удовлетворяющий уравнению Бельтрами с коэффициентом* μ, $\|\mu\| < 1$ $\Longrightarrow f = h \circ \phi$, *где* ϕ – *нормальное решение того же уравнения Бельтрами и* $h \in \operatorname{Aut}\mathbb{D}$ *дробно-линейное. В частности,* f – *квазиконформное отображение,* $f_z \neq 0$ *п.в.,* f_z *и* $1/f_z \in L^p(\mathbb{D})$ *с некоторым* $p > 2$ *и отображение* f^{-1} *такое же.*

$\triangleleft$ Пусть μ_j – последовательность гладких функций в $\mathbb{D}$, сходящаяся к μ п.в. и т.ч. $|\mu_j| \leqslant \|\mu\|$ (например, $\mu_j(z) = \int_{\mathbb{D}} \mu(\zeta)\lambda(j(\zeta - z))\, dS_\zeta$, где $\lambda \in C_0^\infty(\mathbb{D})$, $\lambda \geqslant 0$ и $\int_{\mathbb{D}} \lambda(\zeta)\, dS_\zeta = 1$). Согласно лем. 4 можно считать, что последовательность нормальных решений ϕ_j уравнений Бельтрами с коэффициентами μ_j соотв. сходится в $\mathbb{D}$ к квазиконформному гомеоморфизму $\phi\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$. По лемме 10 и доказательству теоремы 3, $\phi_{\bar z} = \mu\phi_z$.

Так как $df = f_z(dz + \mu\, d\bar z)$ и $d\phi = \phi_z(dz + \mu\, d\bar z)$, то $df = (f_z/\phi_z)d\phi \Longrightarrow$ полагая $w = \phi(z)$ и $h = f \circ \phi^{-1}$, получаем, что $h_{\bar z} = 0$ п.в. $\Longrightarrow$ по лемме Вейля h – голоморфная функция $\Longrightarrow$ $h \in \operatorname{Aut}\mathbb{D}$, дробно-линейная $\Longrightarrow f = h \circ \phi$ – квазиконформное отображение со всеми перечисленными свойствами. $\triangleright$

* * * * *

Задачи и упражнения.

1. $v = \mathrm{Re}(a\frac{\partial}{\partial z}|_p) \in T_pS$, где z – голоморфная координата на S в окрестности p, и μ – дифференциал Бельтрами на S. Выписать $J_\mu v$.

2. Пространство Тейхмюллера $T\langle S\rangle$ произвольной р/п S (с соотв. фактор-топологией) линейно связно.

3. f_1, f_2 – решения класса $W^{1,2}(D)$ уравнения Бельтрами с одинаковым коэффициентом μ в области $D \subset \mathbb{C}$, причём $f_1\colon D \to D_1$ – гомеоморфизм $\Longrightarrow$ $\exists$ (обычная) голоморфная функция h в D_1, т.ч. $f_2 \equiv h \circ f_1$.

4. $t \mapsto \mu(\cdot, t)$ – отображение класса C^1 интервала $I \subset \mathbb{R}$ в единичный шар в $L^\infty(\mathbb{D})$[5] $\Longrightarrow$ нормальное решение уравнения $f_{\bar z} = \mu(z,t) f_z$ непрерывно дифференцируемо по $t \in I$ $\forall\, z \in \mathbb{C}$.

5. $\tau \to \mu(\cdot, \tau)$ – голоморфное отображение области $D \subset \mathbb{C}$ в $L^\infty(\mathbb{C})$, $\|\mu(\cdot,\tau)\| < 1$ и носители всех $\mu(z,t)$ равномерно ограничены $\Longrightarrow$ стандартное и каноническое решения уравнения $f_{\bar z} = \mu(z,\tau) f_z$ голоморфны по $\tau \in D$ $\forall\ z \in \mathbb{C}$.

6. То же без условия на носители.

[5]т.е. $\mu(\cdot, t+\Delta t) - \mu(\cdot, t) = A(\cdot, t)\Delta t + o(|\Delta t|)$ при $\Delta t \to 0$ и отображение $t \to A(\cdot, t)$ из I в $L^\infty(\mathbb{D})$ непрерывно.

Лекция 6

Квазиконформные деформации – Дифференциалы Бельтрами и конформные структуры – Квадратичные дифференциалы – Слоения, порождаемые квадратичными дифференциалами – ϕ-геодезические

6. Квазиконформные деформации. Дифференциалы Бельтрами на плоскости, инвариантные относительно некоторой группы мёбиусовых (= дробно-линейных) отображений порождают целую серию преобразований этой группы при помощи гомеоморфных решений соотв. уравнений Бельтрами.

Лемма 13. *f – квазиконформный гомеоморфизм $\widehat{\mathbb{C}}$ с коэффициентом Бельтрами μ, A – дробно-линейное отображение. Следующие условия эквивалентны*:

1. $(\mu \circ A)\overline{A'}/A' = \mu$;
2. $f \circ A \circ f^{-1}$ *– дробно-линейное отображение.*

$\triangleleft$ $1 \to 2$. Сначала предположим, что f оставляет неподвижными точки $0, 1, \infty$. Так как $(f \circ A)_{\bar z} = (f_{\bar\zeta} \circ A)\overline{A'} = (\mu \circ A)(f_\zeta \circ A)\overline{A'} = (\mu \circ A)((f \circ A)_z/A')\overline{A'} = \mu \cdot (f \circ A)_z$, то $f \circ A$ – решение уравнения Бельтрами с тем же коэффициентом μ. Пусть a_0, a_1, a_2 – образы $0, 1, \infty$ при отображении f и B – дробно-линейное отображение с теми же образами $0, 1, \infty$. Тогда $B^{-1} \circ f \circ A$ оставляет $0, 1, \infty$ неподвижными и $d(B^{-1} \circ f \circ A) = ((B^{-1})' \circ f \circ A) d(f \circ A) \Longrightarrow B^{-1} \circ f \circ A$ – решение уравнения Бельтрами всё с тем же коэффициентом μ. По теор. 1 л. 5 $B^{-1} \circ f \circ A = f$, т.е. $f \circ A \circ f^{-1} = B \in \operatorname{Aut} \widehat{\mathbb{C}}$.

В общем случае пусть b_0, b_1, b_2 – образы $0, 1, \infty$ для f и $C \in \operatorname{Aut} \widehat{\mathbb{C}}$ переводит их обратно в $0, 1, \infty$. Тогда $C \circ f$ – решение уравнения Бельтрами с коэффициентом μ, сохраняющее $0, 1, \infty$ $\Longrightarrow$ по доказанному $(C \circ f) \circ A \circ (C \circ f)^{-1}$ дробно-линейное $\Longrightarrow$ $f \circ A \circ f^{-1} = C^{-1} \circ B \circ C$ дробно-линейное.

$2 \to 1$. Из $f \circ A = B \circ f$, $A, B \in \operatorname{Aut} \widehat{\mathbb{C}}$, получаем $(f \circ A)_{\bar z} = (B' \circ f) f_{\bar z}$, $(f \circ A)_z = (B' \circ f) f_z \Longrightarrow (f \circ A)_{\bar z}/(f \circ A)_z = \mu$. Остаётся заметить (см. выше), что левая часть последнего равенства равна $(\mu \circ A)\overline{A'}/A'$. $\triangleright$

Если условие 1 выполняется для всех A из некоторой группы $G \subset \operatorname{Aut} \widehat{\mathbb{C}}$ дробно-линейных преобразований, то отображения вида $f \circ A \circ f^{-1}$ тоже образуют подгруппу в $\operatorname{Aut} \widehat{\mathbb{C}}$, которую мы обозначаем через fGf^{-1}. Такие группы называются квазиконформными деформациями группы G, а для фуксовых G они называются *квазифуксовыми*.

В частности, пусть $\pi\colon \mathbb{D} \to S$ – универсальное накрытие р/п S с накрывающей группой G и f^μ – нормальное решение в $\mathbb{D}$ уравнения Бельтрами с коэффициентом μ. Тогда (см. л. 5 п. 4) f^μ имеет вид $f^{\hat\mu}|_{\mathbb{D}}$ где $f^{\hat\mu}$ – квазиконформный гомеоморфизм $\widehat{\mathbb{C}}$ с коэффициентом Бельтрами $\hat\mu$, равным μ в $\mathbb{D}$ и т.ч. $(\hat\mu \circ A)\overline{A'}/A' = \hat\mu$ $\forall\, A \in G \Longrightarrow f^\mu G (f^\mu)^{-1} \subset \operatorname{Aut}\mathbb{D}$ – фуксова группа, которая получается из G квазиконформной деформацией f^μ.

Квазифуксовы группы получаются из G, например, при помощи канонических решений уравнений Бельтрами (л. 5 п. 3) или решений с тремя неподвижными точками (теор. 2 л. 5). В общем случае группа $F_\mu G F_\mu^{-1}$ не фуксова, но у неё есть своё преимущество.

Лемма 14. *F_μ – канонические решения уравнений Бельтрами с соотв. $\mu \in B_1(G) \Longrightarrow \forall\, A \in G$ дробно-линейные отображения $F_\mu \circ A \circ F_\mu^{-1}$ голоморфно зависят от μ, т.е. локально представляются в виде $\frac{a(\mu)z+b(\mu)}{c(\mu)z+d(\mu)}$ с коэффициентами, голоморфными по μ.*

$\lhd$ Считаем $ad-bc=1$. Тогда $F_\mu \circ A = \frac{aF_\mu+b}{cF_\mu+d}$. Пусть $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ – произвольные различные точки и w_0, w_1, w_2 – их образы относительно A. Тогда $(cF_\mu(z_j)+d)F_\mu(w_j) = aF_\mu(z_j)+b$ – система линейных уравнений на a, b, c, d плюс нормировка $ad-bc=1$, с голоморфными по μ коэффициентами (см. л. 5 п. 3). Ввиду произвольности z_j, она разрешима однозначно с точностью до общего множителя $\pm 1 \Longrightarrow$ в окрестности каждого $\mu_0 \in B_1(G)$ $\exists\, a, b, c, d$ голоморфные по μ из этой окрестности. $\rhd$

7. Дифференциалы Бельтрами и конформные структуры. Пусть $\pi\colon \mathbb{D} \to S$ – универсальное накрытие базовой р/п $S = (\underline{S}, J)$ с накрывающей группой G, $\mu \in B_1(G)$ и $f^\mu\colon \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$ – нормальное решение уравнения Бельтрами с коэффициентом μ.

Определим проекцию-накрытие $\pi\colon \mathbb{D} \to \underline{S}$, полагая $\pi' = \pi \circ (f^\mu)^{-1}$. Относительно J она всего лишь квазиконформна. Так как $\pi' \circ f^\mu = \pi = \pi \circ A = \pi' \circ f^\mu \circ A = (\pi' \circ B) \circ f^\mu$, $\forall\, A \in G$, то $\pi' \circ B = \pi'$ $\forall\, B \in G' = f^\mu G (f^\mu)^{-1}$. Проекция π' определяет на $\underline{S}$ конформную структуру J_μ, локальными голоморфными координатами которой являются функции $w = (\pi')^{-1} = f^\mu \circ \pi^{-1}$.

В самом деле, если $\pi(z_1) = \pi(z_2)$, то $z_2 = B(z_1)$ для некоторого $B \in G'$ и ветви w_1, w_2 в окрестностях z_1, z_2 связаны соотношением $w_2 = B(w_1) \Longrightarrow dw_2 = B'(w_1)dw_1$ и значит, формы типа $(1,0)$ для J_μ определяются независимо от выбора ветвей $w \Longrightarrow$ структура J_μ определена корректно.

Так как $\pi = \pi' \circ f^\mu$, то f^μ является поднятием тождественного отображения базы $\underline{S}$.

В качестве локальных J-голоморфных координат берём ветви z функции π^{-1}. Так как $(1,0)$-форма для J_μ равна (пропорциональна) $dw = (f^\mu)_z(dz + \mu\, d\bar{z})$, то из определения п. 1 (л. 5) мы видим, что μ есть дифференциал Бельтрами построенной сейчас комплексной структуры J_μ и доказано (с упрощением обозначений) следующее:

Предложение. *Для всякого дифференциала Бельтрами μ на р/п S с $\|\mu\| < 1 \; \exists\, !$ конформная структура J_μ на $\underline{S}$ с дифференциалом Бельтрами, равным μ. При этом тождественное отображение базы $\underline{S}$ является квазиконформным отображением р/п $f\colon S \to S_\mu = (\underline{S}, J_\mu)$ с дифференциалом Бельтрами $\mu_f = \mu$.*

Вместо проекций в одну и ту же базу $\underline{S}$ можно действовать более абстрактно. Группа $G' = f^\mu G (f^\mu)^{-1}$ построенная выше, очевидно, фуксова $\Longrightarrow$ определена р/п $S' = \mathbb{D}/G'$ с универсальной фактор-проекцией $\pi'\colon \mathbb{D} \to S'$. Тогда $\pi' \circ B = \pi'$ для $B \in G'$, как и $\pi \circ A = \pi$ для $A \in G \Longrightarrow$ Однозначно определено квазиконформное отображение $h^\mu\colon S \to S'$, поднятием которого является f^μ, т.е. $\pi' \circ f^\mu = h^\mu \circ \pi$. Если на р/п S' в качестве локальной координаты взять $w = (\pi')^{-1}$, а на S – ту же $z = \pi^{-1}$, то получим, что $f^\mu = w \circ h^\mu \circ z^{-1}$, т.е. f^μ – координатное представление h^μ. По определению дифференциалов Бельтрами для квазиконформных отображений (п. 1), $\mu^z\, d\bar{z}/dz$ является таковым для отображения h^μ и J_μ есть прообраз конформной структуры на S' относительно h^μ.

Вместо нормального решения можно использовать, например, каноническое. Голоморфные автоморфизмы области $F_\mu(\mathbb{D})$ не обязательно дробно-линейны, но по доказанному в п. 6, группа $G' = F_\mu G F_\mu^{-1} \subset \operatorname{Aut} F_\mu(\mathbb{D})$ вся состоит из дробно-линейных отображений. Для р/п $S' = F_\mu(\mathbb{D})/G'$ голоморфная фактор-проекция равна $\pi' := \pi \circ F_\mu^{-1}$ (так как $\pi' \circ B = \pi'$ для всех $B \in G'$) и накрывает квазиконформное отображение $h_\mu\colon S \to S'$ (т.е. $\pi' \circ F_\mu = h_\mu \circ \pi$), с тем же дифференциалом Бельтрами μ.

И всё-таки, подход с единой базой выглядит проще (да и деформации здесь все оказываются тривиально тождественными).

8. Квадратичные дифференциалы. Пространство $L^{\infty}_{(-1,1)}(S)$ дифференциалов μ типа $(-1,1)$ на р/п S является сопряжённым к пространству $L^{1}_{(2,0)}(S)$ интегрируемых дифференциалов ϕ типа $(2,0)$ на S. (Локально, $\phi = \phi^{z}(dz)^2$, $|\phi| := |\phi^{z}|\, dz\, d\bar{z}$ и корректно определена неотрицательная дифференциальная 2-форма $|\phi|\hat{} := |\phi^{z}|\frac{i}{2}\, dz \wedge d\bar{z}$, которую можно интегрировать по S.) Если, локально, $\mu = \mu^{z}\, d\bar{z}/dz$, то $\mu\phi = \mu^{z}\phi^{z}\, dz\, d\bar{z}$, 2-форма $(\mu\phi)\hat{}$ на S локально равна $\mu^{z}\phi^{z}\frac{i}{2}\, dz \wedge d\bar{z}$ и корректно определена на всей $S \Longrightarrow \mu$ задаёт линейный функционал $\langle \mu, \phi\rangle := \int_{S}(\mu\phi)\hat{}$ на $L^{1}_{(2,0)}(S)$ и таким образом устанавливается известная двойственность $(L^{1}_{(2,0)})^{*} = L^{\infty}_{(-1,1)}(S)$. Дифференциалы типа $(2,0)$ называют квадратичными, но под этим термином чаще понимают *голоморфные квадратичные дифференциалы*, образующие линейное подпространство $A_2(S) \subset L^{1}_{(2,0)}(S)$; поэтому для осторожности общие квадратичные мы называем просто дифференциалами типа $(2,0)$.

Если $\pi\colon \mathbb{D} \to S$ – универсальное накрытие, $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}_{z}$ и ϕ – типа $(2,0)$, то π-поднятием ϕ является дифференциал $\tilde{\phi}(dz)^2$ в $\mathbb{D}$, где функция $\tilde{\phi}$ удовлетворяет $(\tilde{\phi}\circ A)(A')^2 = \tilde{\phi}\ \ \forall\, A \in G$ (G – накрывающая группа проекции π). Любая функция ψ преобразуется в таковую $\tilde{\phi}$ так называемым θ-рядом Пуанкаре $\theta\psi = \Sigma_{A\in G}\,(\psi\circ A)(A')^2$. (Если $\tilde{\mu} \in L^{\infty}(\mathbb{D})$ преобразуется соотв. и M – фундаментальный многоугольник группы G, то

$$\int_{M}\tilde{\mu}\,(\theta\psi)\, dz \wedge d\bar{z} = \Sigma_{A\in G}\int_{A(M)}\tilde{\mu}\,\psi\, dz \wedge d\bar{z} = \int_{\mathbb{D}}\mu\psi\, dz \wedge d\bar{z},$$

т.е. ряд сходится по крайней мере в $L^{1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{D})$.) Если при этом ψ голоморфна, то θ-ряд сходится равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{D}$ (что следует из теоремы о среднем, ТФКП, упр. 2) $\Longrightarrow (\theta\psi)(dz)^2$ – корректное локальное определение квадратичного дифференциала $\phi \in A_2(S)$, причём, как известно, любой дифференциал $\phi \in A_2(S)$ представляется в таком виде (упр. 3).

На компактной р/п S рода g голоморфные 1-формы (абелевы дифференциалы первого рода) образуют $\mathbb{C}$-линейное пространство размерности g ([41], с. 74). Локально, это дифференциалы вида $h\, dz$ с голоморфными коэффициентами. Если $\phi \in A_2(S)$ и $\alpha \not\equiv 0$, то ϕ/α^2 есть мероморфная функция на S с (возможными) полюсами в нулях $\alpha \Longrightarrow$ размерность пространства $A_2(S)$ равна размерности пространства таких мероморфных функций (при фиксированном α). Это функции f, дивизоры которых (нули и полюсы с учётом кратностей, [41], с. 81) удовлетворяют неравенству $(f) + 2K \geqslant 0$, где $K \geqslant 0$ – дивизор α. Степень K (сумма кратностей) равна $2g-2$ ([41], с. 84) $\Longrightarrow$ по теореме Римана–Роха ([41], с. 83), искомая размерность равна $l(-K)+2(2g-2)-g+1$, где $l(-K)$ – размерность пространства мероморфных функций f на S, т.ч. $(f) \geqslant K$. Такие функции должны быть голоморфными на S, с нулями в нулях α. По принципу максимума, такова только $f \equiv 0 \Longrightarrow$ размерность пространства (голоморфных) квадратичных дифференциалов на компактной р/п рода g равна $3g-3$.

Если S – р/п конформного типа (g,n), то $A_2(S)$ состоит из дифференциалов, которые имеют в проколах полюса порядка $\leqslant 1$ (иначе не будет интегрируемости). Если $S^0 \supset S$ – компактная р/п и $E = S^0 \setminus S$, то мероморфная функция вида ϕ/α^2, где $\alpha \not\equiv 0$ – фиксированная голоморфная 1-форма на S^0, имеет дивизор, удовлетворяющий неравенству $(f)+2K+E \geqslant 0$. Опять же по теореме Римана–Роха, размерность пространства таких функций ($=$ размерность $A_2(S)$) равна $(4g-4+n)-g+1 = 3g-3+n$.

Наконец, пусть S – конформного типа (g,n,m) и $\widehat{S} = S \cup \Gamma \cup S^-$ – её дубль Шоттки. Дифференциал $\phi \in A_2(S)$ называем допустимым, если $\exists\, \hat{\phi} \in A_2(\widehat{S})$, т.ч. $\hat{\phi}|_S = \phi$ и сужение $\hat{\phi}|_\Gamma$ вещественно, т.е. $\hat{\phi}(v) \in \mathbb{R}\ \forall\, p \in \Gamma$ и $v \in T_p\Gamma$. Несложно посчитать (см. л. 11), что вещественная размерность $\mathbb{R}$-линейного пространства допустимых дифференциалов на S равна $6g-6+2n+3m$ (упр. 4).

В ряде задач бывает полезным “извлечь корень” из квадратичного дифференциала. На самой S это в общем невозможно, но есть же общая идея Римана о таких операциях: делайте локально и результат поднимайте на поверхность, разветвлённо накрывающую S. Пусть, например, $\tilde{\phi}(dz)^2$ – поднятие $\phi \in A_2(S)$ на универсальную накрывающую $\mathbb{D}$ и $\widetilde{S}'$ – р/п функции $(\tilde{\phi})^{1/2}$ (например, “график” $w^2 = \tilde{\phi}(z)$ в $\mathbb{D} \times \widehat{\mathbb{C}}$ с разрешёнными самопересечениями см. [41], л. 2) с естественной проекцией $\tilde{\pi}\colon \widetilde{S}' \to \mathbb{D}$. Тогда накрывающая группа G накрытия $\pi\colon \mathbb{D} \to S$ действует на $\widetilde{S}'$ собственно разрывно $\Longrightarrow$ корректно определена р/п $S' = \widetilde{S}'/G$, двулистно накрывающая S (проекцией $\pi' = \tilde{\pi} \circ \pi$) и на ней – абелев дифференциал α, т.ч. $(\pi')^*\phi = \alpha^2$. Отметим ещё, что на S'

определена голоморфная инволюция ι, "переставляющая листы" накрытия $S' \to S$, т.е. $\iota^*\alpha = -\alpha$, $\iota^2 = \mathrm{id}$ и $\pi' \circ \iota = \pi$.

9. Слоения, порождаемые квадратичными дифференциалами. Всякий квадратичный дифференциал $\phi \not\equiv 0$ на р/п S определяет на ней конформную метрику $|\phi|$ (локально, если $\phi = \phi^z(dz)^2$, то $|\phi| = |\phi^z|\, dz\, d\bar{z}$). Она вырождается в нулях ϕ, однако в остальном ничем не хуже невырожденных конформных метрик: элемент длины дуги (модуль касательного вектора) задаёт $|\phi|^{1/2} = |\phi^z|^{1/2}\, |dz|$, элемент площади есть $|\phi|\hat{} = |\phi^z| \frac{i}{2}\, dz \wedge d\bar{z}$. Для $\phi \in A_2(S)$ площадь S конечна по определению: $\int_S |\phi|\hat{} =: \|\phi\|_1 < \infty$.

Пусть $\pi\colon S' \to S$ – двулистное разветвленное (над нулями ϕ) накрытие и α – голоморфная 1-форма на S', т.ч. $\alpha^2 = \pi^*\phi$ (см. п. 8).

Дискретное множество нулей $\phi \not\equiv 0$ обозначим через b_ϕ. Если $p \notin b_\phi$, то в компонентах $\pi^{-1}(U_p)$ определены голоморфные функции $\zeta = \int_{p'}^{q'} \alpha$ $(\pi(p') = p,\ \pi(q') = q)$, которые называются ϕ-координатами и при проектировании в U_p отличаются только знаком. По построению, $d\zeta = \alpha$ и $(d\zeta)^2 = \pi^*\phi$.

Абелев дифференциал α определяет на $S' \setminus \pi^{-1}(b_\phi)$ слоение на $\mathbb{R}$-аналитические кривые, определяемые условием $\operatorname{Im}\alpha = 0$ и ориентированных условием $\alpha > 0$ (так наз. *ϕ-горизонтальные* кривые). Через точку p' с $\pi(p') \notin b_\phi$ проходит единственная такая кривая; в терминах ϕ-координаты ζ, это есть $\{\operatorname{Im}\zeta = 0\} = \zeta^{-1}(\mathbb{R})$, ориентированная по росту ζ, т.е. $d\zeta > 0$. Соседние горизонтальные кривые задаются уравнениями $\operatorname{Im}\zeta = \mathrm{const}$. Аналогично определяются *ϕ-вертикальные* кривые, определяемые условием $\operatorname{Re}\alpha = \mathrm{const}$; это слоение ортогонально первому относительно ϕ-метрики, поднятой из S.

Так как координаты $\zeta \circ \pi^{-1}$ с разных прообразов отличаются только знаком, то при проектировании в S горизонтальное слоение на S' проектируется тоже в слоение на S (которое называется ϕ-горизонтальным), но ориентация слоения (по той же причине) пропадает. Отметим, что функции $(\zeta \circ \pi^{-1})^2$, как и дифференциалы $(d(\zeta \circ \pi^{-1}))^2$, корректно определены в соотв. областях на S; упрощая обозначения, пишем там $\phi = (d\zeta)^2$. Таким образом, горизонтальное слоение в S задаётся условием $(d\zeta)^2 \equiv \phi > 0$. Аналогично вертикальное слоение проектируется в таковое на S, ортогональное к горизонтальному.

В точках $p \in b_\phi$ горизонтальное (как и вертикальное) слоение имеет особенности. Если ϕ имеет нуль нечётного порядка k в точке p, то на S' множество $\zeta^{-1}(\mathbb{R})$ состоит из $k+2$ аналитических кривых, проходящих через p и образующих одинаковые углы с соседними. Проекция π в окрестности p' в соотв. локальных координатах имеет вид $z_1 \mapsto z = z_1^2$. Поэтому каждая из указанных кривых, проходящих через p' "складывается" при этом в "луч" с концом $p = \pi(p') \Longrightarrow$ в окрестности нуля ϕ нечётного порядка множество ϕ-горизонтальных кривых с предельной точкой p состоит из $k+2$ лучей с концом p. Если же нуль ϕ в p чётный, то проекция π в окрестности каждой из двух точек в $\pi^{-1}(p)$ 1:1, поэтому на S получается та же картина, что и на S': указанное множество состоит из $(k+2)/2$ кривых через p, т.е. $k+2$ лучей с концевой точкой p и равными углами между соседними. (см. рис. 8). Наконец, для окрестности прокола p и простого полюса ϕ в p есть голоморфная координата z, т.ч. $\phi = (dz)^2/z$. На S' (разветвлённой над окрестностью p) с координатой z_1, т.ч. $z_1^2 = z$, имеем $\pi^*\phi = 4(dz)^2$, т.е. ϕ-горизонтальная кривая с пределом p' есть просто кривая $\operatorname{Im} z_1 = 0$ (а горизонтальное слоение состоит из кривых $\operatorname{Im} z_1 = \mathrm{const}$). При проектировании в S она складывается в луч $z \geqslant 0$ и горизонтальное слоение выглядит как на рис. 8c.

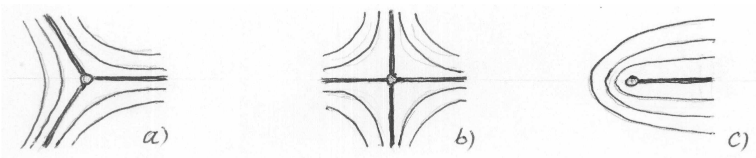

Рис. 8. a) простой нуль, b) двойной нуль, c) простой полюс

10. ϕ-геодезические. Относительно ϕ-координат метрика $|\phi|$ имеет вид $|d\zeta|^2$, т.е. евклидова $\Longrightarrow$ $|\phi|$-геодезические кривые с началом в точке $p \notin b_\phi$ – это кривые, вдоль которых аргумент ζ (точнее, непрерывной ветви $\zeta \circ \pi^{-1}$) постоянный $\pmod \pi$. Они либо неограниченно продолжаются в обе стороны, либо упираются одним концом в нуль или полюс ϕ (прокол). Неограниченно продолжаемые ϕ-геодезические называются *свободными*. В нуле ϕ порядка m геодезические имеют изломы с углами $\geqslant 2\pi/(m+2)$, см. п. 9.

Обозначим через S^0 компактную р/п, содержащую р/п S конформного типа (g,n). Дифференциал ϕ на S по определению и теореме об устранимой особенности продолжается до мероморфного дифференциала на S^0 с возможными простыми полюсами в проколах. Так как $\phi = a(w)(dw)^2/w$ в канонической окрестности U прокола b, то ϕ-геодезические на $U \setminus b$ с предельной точкой b имеют конечную ϕ-длину и в окрестности b $\exists$ единственная ϕ-геодезическая с заданным направлением в точке b, а геодезическая в окрестности прокола с полюсом, для которой b не является концевой точкой, входит и выходит в b по одной и той же геометрической кривой $\operatorname{Im} a\,(dw)^2/w = 0$ с концом в проколе.

Лемма 15. *S – р/п конформного типа (g,n) и S^0 – компактная р/п $\supset S \Longrightarrow \forall$ кривой $\gamma_0 \subset S$ с концами p,q $\exists\,!$ ϕ-геодезическая γ на S^0, предельная для некоторой последовательности кривых $\gamma_n \subset S$, гомотопных γ_0 в классе кривых на S с концами p,q, причём ϕ-длина γ не превосходит инфимума ϕ-длин кривых $\gamma' \subset S$, гомотопных γ^0 в указанном классе.*

$\triangleleft$ Локальные существование и единственность очевидны из представления в соотв. ϕ-координатах (см. выше). Параметризуя кривые с концами p,q на S натуральным параметром длины пути от начала p, получаем, что семейство таких путей длины $\leqslant 2\operatorname{dist}\phi(p,q)$ равностепенно непрерывно $\Longrightarrow$ на S^0 есть предельная кривая γ, которая реализует инфимум ϕ-длин кривых этого класса; локально она выглядит как прямая относительно соотв. ϕ-координат.

Для доказательства единственности обозначим через S' р/п, получаемую из S^0 удалением точек, которые являются полюсами для ϕ. Пусть $\pi' \colon \mathbb{D} \to S'$ – универсальное накрытие и $\tilde{\phi}\,(dz)^2$ – поднятие ϕ. Предположим, что на S^0 есть две геодезические с концами ϕ, удовлетворяющие условию леммы. Так как γ_n (свои для каждой из этих двух) гомотопны друг другу на S, то тогда, по теореме о монодромии, в $\mathbb{D}$ есть точки z_0, z_1 с $\pi'(z_0) = p$, $\pi'(z_1) = q$, соединяемые двумя различными $\tilde{\phi}$-геодезическими, которые в отдельных точках (соотв. проколам S') могут выходить на границу $\mathbb{D}$. Вначале они могут совпадать, но затем раздваиваются в некотором нуле функции $\tilde{\phi}$ (согласно описанию геодезических в окрестности простого полюса разделиться в полюсе такие кривые не могут). $\Longrightarrow \exists$ односвязная область $U \subset \mathbb{D}$, ограниченная двумя отрезками этих геодезических с концами z_0', z_1', причём угол между ними в точке z_0' положительный. Ориентируем ∂U как границу U и параметризуем: $z = z(t)$, $dz = \dot z\,dt$. Пусть θ_j – внутренние углы в изломах ∂U (в точках z_0', z_1' и возможных нулях ϕ). Тогда $\int_{\partial U} d(\arg \dot z) + \Sigma_j(\pi - \theta_j) = 2\pi$. Так как

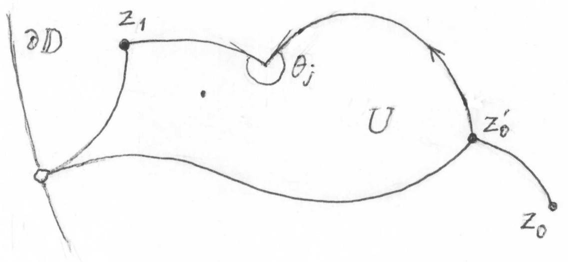

Рис. 9.

$\arg(\phi\,(dz)^2) = 0$ на гладких частях ∂U, то там $d(\arg\phi + 2\arg\dot z) = 0$ $\Longrightarrow \int_{\partial U} d\arg\phi = 2\Sigma_j(\pi - \theta_j) - 4\pi$. По принципу аргумента, левая часть $= 2\pi N + \Sigma_j \theta_j m_j$, где N – число нулей ϕ в U и m_j – порядки нулей ϕ в изломах $\partial U \Longrightarrow N + 2 = \Sigma_j(1 - \theta_j(m_j+2)/2\pi)$. Так как $\theta_j \geqslant 2\pi/(m_j+2)$ в соотв. нулях ϕ, то слагаемые в правой части, соотв. нулям ϕ на ∂U, неположительны. Остаются еще, быть может, одна или две точки из z_0', z_1', но в точке z_0' соотв. слагаемое < 1 по построению, а левая часть $\geqslant 2$. Противоречие. $\triangleright$

Для компактных р/п S формулировка значительно проще: в каждом гомотопическом классе кривых с концами p, q $\exists!$ геодезическая; ну и доказательство попроще.

Лемма 16. *$f\colon S \to S$ – гомеоморфизм р/п конформного типа (g, n), гомотопный тождественному $\Longrightarrow \exists\ d = d(f) < \infty$, т.ч. $\forall$ свободной ϕ-геодезической γ имеет место неравенство для ϕ-длин*

$$|f(\gamma)|_\phi \geqslant |\gamma|_\phi - 2d.$$

$\triangleleft$ Пусть f_t – гомотопия, $f_0 = \mathrm{id}$, $f_1 = f$. $\forall\ p \in S$ обозначим через σ_p путь $f_t(p)$, $t \in [0,1]$. Положим $\delta(p) = \inf|\gamma|_\phi$ в классе путей на S с концами $p, f(p)$, гомотопных σ_p. Функция $\delta(p)$ полунепрерывна сверху: если $\delta(p) < r$, то $\exists$ односвязная окрестность $U \ni p$, т.ч. путь $\sigma_{p'}$ гомотопен σ_p и $\mathrm{dist}_\phi(p', p) + \delta(p) + \mathrm{dist}_\phi(f(p'), f(p)) < r$ $\forall\ p' \in U \Longrightarrow \exists$ путь γ_1, соединяющий p', p в U, путь $\gamma_2 \subset S$ с концами $p, f(p)$, гомотопный σ_p, и γ_3, соединяющий $f(p), f(p')$

в $f(U)$, такие что общая длина пути $\gamma_3\gamma_2\gamma_1$ меньше r. Так как путь $(f \circ \gamma_1)\gamma_2\gamma_1$ гомотопен $\sigma_{p'}$ и любые два пути с общими концами в односвязной области гомотопны, то $\gamma_3\gamma_2\gamma_1$ гомотопен $\sigma_{p'}$ и, значит, $\delta(p') < r$ тоже.

Так как ϕ-геодезические продолжаются в проколы, а все f_t оставляют проколы на месте, то $\delta(p) \to 0$ при стремлении к проколам $\Longrightarrow S \cap \{\delta(p) \geqslant 1\}$ – компакт (или $\varnothing$) $\Longrightarrow$ полунепрерывная сверху функция $\delta(p)$ достигает на S своего максимума $\Longrightarrow$ $d = 2\max_S \delta(p) < \infty$.

Пусть теперь γ имеет концы p, q и γ_p, γ_q – пути, гомотопные σ_p, σ_q соотв. (с теми же концами), ϕ-длина котрых $< d$. Тогда $\gamma_q^{-1} f(\gamma)\gamma_p$ гомотопна γ и имеет те же концы $\Longrightarrow |\gamma_q|_\phi + |\gamma_p|_\phi + |f(\gamma)|_\phi \geqslant |\gamma|_\phi$. $\triangleright$

* * * * *

Задачи и упражнения.

1. Описать пространство $A_2(S)$ для р/п S конформного типа $(0, n)$.

2. Если функция ψ голоморфна и интегрируема в $\mathbb{D}$, то её ряд Пуанкаре сходится равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{D}$.

3^*. $\forall$ интегрируемого квадратичного дифференциала ϕ на гиперболической р/п S $\exists$ голоморфная функция $\psi \in L^1(\mathbb{D})$, т.ч. локально $\phi = (\theta\psi)\,(dz)^2$, где θ-ряд Пуанкаре берётся по накрывающей группе универсального накрытия $\mathbb{D} \to S$ (см. п. 11 л. 7).

4. S – р/п конформного типа (g, n, m), $g > 0$, $m > 0 \Longrightarrow$ Вещественная размерность пространства квадратичных дифференциалов на дубле Шоттки $\widehat{S}$, вещественных на контуре симметрии, равна $6g - 6 + 2n + 3m$.

5. При каких j дифференциалы $(z^j/\Pi)\,(dz)^2$, соотв. $(z^j/w)\,(dz)^2$, голоморфны на р/п $w^2 = \Pi(z)$ в $\widehat{\mathbb{C}}^2$, где Π – многочлен степени $2g + 1$?

6. Описать все квадратичные дифференциалы на сфере $S_0\colon w^2 = z^2 - 1$ в $\widehat{\mathbb{C}}^2$ с n проколами (a_j, b_j). То же на торе $w^2 = z(z^2 - 1)$.

7. Посчитать число нулей дифференциала $\frac{a(z)w + b(z)}{\Pi(z)}\,(dz)^2$ на р/п $w^2 = \Pi(z)$ в $\widehat{\mathbb{C}}^2$, где Π – многочлен степени $2g + 1$ с простыми нулями и a, b – многочлены степеней $k \leqslant 2g - 2$, $l \leqslant g - 3$ соотв. Их должно быть $4g - 4$; где они?

Лекция 7

Локально тривиальные дифференциалы – Определяющие функции классов Тейхмюллера – Производная Шварца – Оценки производных Шварца

11. Локально тривиальные дифференциалы. Дифференциал $\nu \in L^\infty_{(-1,1)}(S)$ называется *локально тривиальным*, если он ортогонален пространству $A_2 = A_2(S)$ голоморфных интегрируемых квадратичных дифференциалов на S, точнее, $\int_S (\nu\phi)\hat{} = 0 \ \forall\, \phi \in A_2$. Линейное пространство таких дифференциалов в $L^\infty_{(-1,1)}(S)$ обозначим через N_0. Пусть $\tilde\nu$ означает коэффициент поднятия ν на $\mathbb{D}$ универсальной проекцией π.

Лемма 17. *ν локально тривиальный* $\Longleftrightarrow \int_{\mathbb{D}} \frac{\tilde\nu\, dS_\zeta}{\zeta - z} \equiv 0$ *в* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ $\Longleftrightarrow \int_{\mathbb{D}} \tilde\nu h\, dS = 0 \ \forall\, h \in L_1 \cap \mathcal{O}(\mathbb{D})$.

(Символом $\mathcal{O}$ мы всюду обозначаем голоморфные функции.)

$\triangleleft$ (2) $\to$ (3). Так как $h(z) = \lim_{r\to 1} h(rz)$, то достаточно доказать это для h, голоморфных в окрестности $\overline{\mathbb{D}}$. Такая h по формуле Коши равна $\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R} \frac{h(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$, $R > 1$, $\Longrightarrow \int_{\mathbb{D}} \tilde\nu h\, dS_z = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R} \left(\int_{\mathbb{D}} \frac{\tilde\nu(z)\, dS_z}{\zeta - z}\right) h(\zeta)\, d\zeta = 0$.

(3) $\to$ (2) очевидно.

(1) $\to$ (3). M – фундаментальный многоугольник проекции π (группы G), $\tilde\nu \circ A = \tilde\nu\, A'/\overline{A'}$, $A \in G$, $\Longrightarrow \int_{\mathbb{D}} \tilde\nu h\, dS = \Sigma_{A\in G} \int_{A(M)} \tilde\nu h\, dS = \int_M \tilde\nu(\theta h)\, dS$ (см. л. 6, п. 8). Так как $(\theta h)(dz)^2$ – координатное представление дифференциала $\phi \in A_2$, то правая часть равна $\int_S (\nu\phi)\hat{} = 0$.

(3) $\to$ (1). Если использовать то, что $\forall\, \phi \in A_2\ \exists\, h \in L_1 \cap \mathcal{O}(\mathbb{D})$, т.ч. $\tilde\phi = \theta h$, то

$$\int_S (\nu\phi)\hat{} = \int_M \tilde\nu(\theta h)\, dS = \int_{\mathbb{D}} \tilde\nu h\, dS = \lim_{r\to 1}\int_{\mathbb{D}} \tilde\nu(z) h(rz)\, dS = 0.$$

Докажем это представление, а заодно и (3) $\to$ (1), в предположении, что S – конформного типа (g, n). В таком случае пространство A_2 конечномерно и дифференциалы с поднятиями вида $(\theta h)(dz)^2$ образуют в нём замкнутое подпространство. Если дифференциал Бельтрами ν как функционал на A_2 равен нулю на этом подпространстве, то $0 = \int_M \tilde\nu(\theta h)\, dS = \int_{\mathbb{D}} \tilde\nu h\, dS$ $\forall h \in L_1 \cap \mathcal{O}(\mathbb{D})$, т.е. это как раз наше условие (3), эквивалентное (2).

Условие (2) означает, что $\tilde\nu\, d\bar z/dz = \bar\partial((T\tilde\nu)/dz)$. Функция $T\tilde\nu$ преобразуется по правилу

$$(T\tilde\nu)\circ A = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}}\frac{\tilde\nu dS_\zeta}{\zeta - A(z)} = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}}\frac{\tilde\nu\,(A')^2 dS_\zeta}{A(\zeta)-A(z)},$$

так как $\tilde\nu\circ A = \tilde\nu\, A'/\overline{A'}$. Функция $\frac{(A'(\zeta))^2}{A(\zeta)-A(z)} - \frac{A'(z)}{\zeta - z}$ от ζ при $\zeta = z$ имеет устранимую особенность $\Longrightarrow$ голоморфна в окрестности $\overline{\mathbb{D}} \Longrightarrow$ последний интеграл в представлении $(T\tilde\nu)\circ A$ равен $(T\tilde\nu)\cdot A' \Longrightarrow$ дифференциал $(T\tilde\nu)/dz$ типа $(-1,0)$ является координатным представлением дифференциала $\hat\nu$ типа $(-1,0)$ на S такого, что $\bar\partial\,\hat\nu = \nu$ (а по существу, $\hat\nu$ – это комплексное векторное поле $(T\tilde\nu)\,\partial/\partial z$ на S, поскольку его коэффициенты преобразуются как раз по правилу векторных полей).

Если S компактна, то $\int_S (\nu\phi)\hat{} = \int_S \bar\partial(\hat\nu\phi) = \int_S d(\hat\nu\phi) = 0$.

Пусть теперь S имеет проколы, а ϕ – возможные простые полюса в проколах, и $U_j\colon 0 < |w_j| < r$ – канонические окрестности проколов (см. л. 2, п. 12). Пусть $U = \bigcup U_j$. Тогда $\int_{S\setminus U}(\nu\phi)\hat{} = -\int_{\partial U}\hat\nu\phi$. Односвязная область $V_j = U_j \setminus \{|\arg w_j| < \pi\}$ однолистно накрывается областью $W_j \subset \mathbb{D}$, лежащей между двумя дугами окружностей, ортогональных $\partial\mathbb{D}$ с общим концом $a \in \partial\mathbb{D}$. Пусть $C \in \operatorname{Aut}\mathbb{D}$ отображает указанные окружности на соприкасающиеся в точке 1 окружности, симметричные относительно $\mathbb{R}$. Тогда $w_j \mapsto z = C^{-1}(1 + 2/\log(w_j/e))$ есть конформное отображение V_j на W_j (см. п. 12, л. 2). Так как $\hat\nu = (T\tilde\nu)/dz$ относительно координаты в $\mathbb{D}$, то $\hat\nu = H_j(T\tilde\nu)w_j(\log w_j)^2/dw_j$ с ограниченной функцией H_j. Так как $\phi = h_j(dw_j)^2/w_j$ в U_j с ограниченной h_j, то $\hat\nu\phi = H_j(T\tilde\nu)h_j(\log w_j)^2/dw_j$. Так как $T\tilde\nu$ – ограниченная функция в $\mathbb{D}$, то отсюда $\int_{|w_j|=r}\hat\nu\phi \to 0$ при $r \to 0 \Longrightarrow \int_S(\nu\phi)\hat{} = 0$, т.е. ν ортогонален *всему* A_2 – локально тривиальный дифференциал.

Одновременно мы показали, что на р/п конформного типа (g,n) всякий интегрируемый квадратичный дифференциал представляется в виде θ-ряда Пуанкаре. $\triangleright$

Далее ограничиваемся р/п конформного типа (g,n).

Для такой S пространство $A_2 \equiv A_2(S)$ конечномерно и в нём естественно вводится структура евклидова (гильбертова) пространства при помощи скалярного произведения Петерсона $(\psi,\phi) = \int_S(\psi\bar\phi/\rho^2)\hat{}$, где ρ – какая-нибудь конформная метрика на S, обеспечивающая сходимость интегралов $\forall\,\phi,\psi \in A_2$ (если w – координата в канонической окрестности прокола $w = 0$ на замыкании S, то для $\rho = \lambda\,|dw|$ достаточно условия $1/\lambda^2 = O(|w|)$ при $w \to 0$; например, в качестве ρ можно брать гиперболическую метрику на S, с $1/\lambda = 2|w|\log 1/|w|$, см. л. 2).

Лемма 18. *Любой дифференциал $\mu \in L^\infty_{(-1,1)}(S)$ однозначно представляется в виде $\mu = \nu + \bar{\phi}/\rho^2$, где $\phi \in A_2$ и $\nu \in N_0$ – локально тривиальный дифференциал.*

$\lhd$ Линейный функционал $\psi \mapsto \langle \mu, \psi\rangle = \int_S (\mu\psi)\hat{}$ в гильбертовом пространстве A_2 равен, как хорошо известно, $\int_S (\bar{\phi}\psi/\rho^2)\hat{}$ для некоторого $\phi \in A_2 \Longrightarrow$ дифференциал $\mu - \bar{\phi}/\rho^2$ типа $(-1,1)$ ортогонален A_2, т.е. локально тривиальный. $\rhd$

Разложение в лемме ортогонально относительно скалярного произведения Петерсона $(\mu_1, \mu_2) = \int_S (\mu_1 \overline{\mu_2}\,\rho^2)\hat{}$, но пространство $L^\infty_{(-1,1)}(S)$ бесконечномерно и эта L^2-метрика в нём несравнима с метрикой L^∞.

12. Определяющие функции классов Тейхмюллера. Напомним, что соотношение $\mu_1 \approx \mu_2$ для элементов банахова шара $B_1(G)$ означает, что соотв. р/п (= соотв. конформные структуры на $\underline{S}$) эквивалентны по Тейхмюллеру.

Лемма 19. *$\mu_1 \approx \mu_2 \Longleftrightarrow f^{\mu_1} = f^{\mu_2}$ на $\partial\mathbb{D} \Longleftrightarrow F_{\mu_1} = F_{\mu_2}$ в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$.*

$\lhd$ (1) $\to$ (2). Пусть $S_k = (\underline{S}, J_{\mu_k})$, $f_k \colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ – нормальные решения уравнений Бельтрами с коэффициентами μ_k, $\pi_k = \pi \circ f_k^{-1} \colon \mathbb{D} \to S_k$ – универсальные накрытия и $h \colon S_1 \to S_2$ – биголоморфизм, гомотопный тождественному отображению базы $\underline{S}$. Так как $f_2 \circ f_1^{-1}$ накрывает тождественное отображение базы (см. л. 6, п. 7), то, по лемме 8 л. 2 $\exists$ поднятие $\tilde{h} \colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $\pi_2 \circ \tilde{h} = h \circ \pi_1$, совпадающее с $f_2 \circ f_1^{-1}$ на $\partial\mathbb{D}$. Так как f_1, f_2 оставляют неподвижными точки $1, i, -1$ и $\tilde{h}$ – дробно-линейное отображение, то $\tilde{h}(z) \equiv z$ на $\mathbb{D}$ и, значит, $f_2 \equiv f_1$ на $\partial\mathbb{D}$.

(2) $\to$ (1). Пусть G_k – накрывающая группа накрытия π_k. Так как $f_1 = f_2$ на $\partial\mathbb{D}$, то группы $G_k = f_k G f_k^{-1}$ совпадают на $\partial\mathbb{D}$ $\Longrightarrow G_1 = G_2 \Longrightarrow$ корректно определено биголоморфное отображение $\pi_2 \circ \pi_1^{-1} \colon S_1 \to S_2$ (см. определение накрывающей группы с учётом того, что эти р/п имеют общую гладкую базу). В терминах базовой поверхности это отображение $\pi \circ f_2^{-1} \circ f_1 \circ \pi^{-1}$. Так как $f_2^{-1} \circ f_1(z) \equiv z$ на $\partial\mathbb{D}$, то по лемме 8 л. 2 оно гомотопно тождественному $\Longrightarrow S_1 \approx S_2$.

(2) $\to$ (3). Пусть $S_k = (\underline{S}, J_{\mu_k})$ и $f_k\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ – нормальные решения уравнения Бельтрами с коэффициентами μ_k. Согласно (2) $\mu_1 \approx \mu_2 \iff f_1 = f_2$ на $\partial\mathbb{D}$. Положим $H = f_2^{-1} \circ f_1$ в $\mathbb{D}$, $H(z) = z$ в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ и рассмотрим квазиконформное отображение $A = F_2 \circ H \circ F_1^{-1}$ плоскости $\mathbb{C}$, где $F_k := F_{\mu_k}$. Оно голоморфно вне $\overline{\mathbb{D}}$, как и оба F_k, но оно голоморфно и в $\mathbb{D}$, так как там $A = F_2 \circ f_2^{-1} \circ f_1 \circ F_1^{-1}$ и F_k, f_k удовлетворяют одному и тому же уравнению Бельтрами (с коэффициентом μ_k). Поскольку A непрерывно в $\mathbb{C}$, то (ТФКП) оно голоморфно в $\mathbb{C} \Longrightarrow$ линейно. Так как $A(z) = z + o(1)$ в окрестности ∞, то $A(z) \equiv z \Longrightarrow F_1 = F_2$ в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$.

(3) $\to$ (2). Так как $F_1 = F_2$ на $\partial\mathbb{D}$, то области $F_k(\mathbb{D})$ совпадают $\Longrightarrow F_k \circ f_k^{-1}\colon \mathbb{D} \to F_k(\mathbb{D})$ – конформные отображения на одну и ту же область с равными значениями в $1, i, -1 \Longrightarrow$ они совпадают $\Longrightarrow f_1 = f_2$ на $\partial\mathbb{D} \Longrightarrow \mu_1 \approx \mu_2$. $\triangleright$

Согласно п. 2 л. 5 $(F_\mu)_{\bar z} = (1-\mu\Pi)^{-1}\mu$ ($\mu = 0$ вне $\mathbb{D}$) и $F_\mu(z) = z + (T(F_\mu)_{\bar\zeta})(z)$, где $T\phi(z) = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} \frac{\phi(\zeta)dS_\zeta}{\zeta - z}$. Оператор $\mu \mapsto F_\mu = z + T(1-\mu\Pi)^{-1}\mu$ из $B_r(G)$, $r < 1$, в $W^{1,p}(\mathbb{C}) \cap \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}})$, $p = p(r) > 2$ ($\mathcal{O}$ означает голоморфные функции) нелинейный, но, как легко видеть, комплексно дифференцируемый:

$$F_{\mu+\Delta\mu} - F_\mu = T\big((1-\mu\Pi)^{-1}\Delta\mu + \Sigma_1^\infty \Sigma_0^{k-1} (\mu\Pi)^l (\Delta\mu)(\mu\Pi)^{k-l-1}\mu\big) \\ + o(|\Delta\mu|).$$

В частности, функции $\mu \mapsto F_\mu(a)$ являются голоморфными в банаховом шаре $B_1(G)$ $\forall a \in \mathbb{C} \Longrightarrow [\mu_0]$ есть множество общих нулей голоморфных функций $F_\mu(a) - F_{\mu_0}(a)\colon B_1(G) \to \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$, т.е. $[\mu_0]$ – комплексно-аналитическое подмножество в $B_1(G)$.

Таким образом, класс $[\mu_0]$ определяется в $B_1(G)$ континуальной системой голоморфных уравнений $(F_\mu - F_{\mu_0})(a) = 0$, $a \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ (функций от μ, фиксированные $a \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ – параметры системы). Достаточно, конечно, счётного семейства таких функций, но мы покажем далее (л. 8), что в малой окрестности $[\mu_0]$ есть семейство из $N = 3g - 3 + n$ функций этого вида, полностью определяющих там $[\mu_0]$.

А пока отметим, что $F_0(z) \equiv z$ и класс $[0]$ *тривиальных дифференциалов* Бельтрами (относительно фиксированной базы S) определяется системой голоморфных (по μ) уравнений $F_\mu(a) = a$, $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$.

Локально-тривиальные дифференциалы “касаются” множества [0] в точке 0 в том смысле, что производные всех функций $F_\mu(a) - a$, $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$, определяющих [0], в направлении любого вектора $\nu \in N_0$ равны нулю:

$$(\dot{F}_\nu)(a) := \frac{d}{dt} F_{t\nu}(a)\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}(T(1 - t\tilde{\nu}\Pi)^{-1}e)t\tilde{\nu})(a)\bigg|_{t=0}$$
$$= (T\tilde{\nu})(a) = 0.$$

Согласно лемме 17 это характеристическое свойство: если $\dot{F}_\mu = 0 \ \forall\, a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$, то $(T\tilde{\mu})(a) = 0$ и, значит, $\mu \in N_0$. Поэтому по лемме 18 $\ \forall\, \phi \in A_2$, $\phi \not\equiv 0$, найдётся $a \notin \overline{\mathbb{D}}$, т.ч. $\dot{F}_\psi(a) \neq 0$, где $\psi = \bar{\phi}/\rho^2$ (это верно для всех $a \notin \overline{\mathbb{D}}$, за исключением дискретного множества значений).

Фиксируем $\phi_1 \in A_2$ и такую точку a_1. Размерность пространства тех $\phi \in A_2$, для которых $\dot{F}_\psi(a_1) = 0$, равна $N - 1$, где N – размерность A_2 (равная $N = 3g - 3 + n$ при $g > 1$). Среди них выбираем ϕ_2 и точку $a_2 \notin \overline{\mathbb{D}}$, т.ч. $\dot{F}_{\psi_2}(a_2) \neq 0$. Так по индукции построим $\phi_1, \ldots, \phi_N$ и точки $a_1, \ldots, a_N$ в $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$. Заменяя эти $\dot{F}_{\psi_j}$ их подходящими линейными комбинациями, можем считать, что $\dot{F}_{\psi_j}(a_j) \neq 0$, но $\dot{F}_{\psi_j}(a_k) = 0$ при $j \neq k \Longrightarrow$ Функции $F_\mu(a_j) - a_j$, $1 \leqslant j \leqslant N$, на $B_1(G)$ имеют в 0 линейно независимые дифференциалы и по теореме о неявной функции множество их общих нулей в малом шаре $B_r \ni 0$ есть комплексное подмногообразие коразмерности N, содержащее $[0] \cap B_r$ с малым $r > 0$. То же самое справедливо, очевидно, и для соседних классов Тейхмюллера: множества $\{\mu \in B_r \colon F_\mu(a_j) = F_{\mu_0}(a_j),\, j = 1, \ldots, N\}$ являются комплексными подмногообразиями коразмерности N и содержат соотв. $[\mu_0] \cap B_r$.

13. Производная Шварца. Отметим некоторые специфические свойства F_μ как функций от $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$.

Во-первых, они однолистны, с нормировкой $z + o(1)$ в окрестности ∞ (классическое семейство Σ, см. [16]). Во-вторых, как в л. 6 п. 6, находим: $(F_\mu \circ A)_{\bar{z}} = ((F_\mu)_{\bar{z}} \circ A)\overline{A'} = (\mu \circ A)((F_\mu)_z \circ A)\,\overline{A'} = ((\mu \circ A)\overline{A'}/A')(F_\mu \circ A)_z = \mu \cdot (F_\mu \circ A)_z$, где μ как функция в $\mathbb{C}$ равна μ в $\mathbb{D}$ и 0 вне $\mathbb{D} \Longrightarrow F_\mu \circ A$ – решение в $\mathbb{C}$ того же уравнения, что и для $F_\mu \Longrightarrow F_\mu \circ A = B \circ F_\mu$ с мероморфной функцией B. Так как F_μ – гомеоморфизм $\mathbb{C}$, то B – дробно-линейное отображение (из группы G_μ, соотв. р/п $(\underline{S}, J_\mu)$).

Используя эту специфику функций F_μ, мы построим по ним интегрируемые квадратичные дифференциалы – преобразование типа рядов Пуанкаре, но в чём-то даже проще.

В последнем свойстве функций F_μ хотелось бы убрать дробно-линейные отображения B, не относящиеся к накрывающей группе базы S. Для этого подберём по возможности простой и нетривиальный дифференциальный оператор, равный нулю на дробно-линейных функциях $\frac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc=1$. Считаем: $f'=\frac{1}{(cz+d)^2}$, $f''/f'=-\frac{2c}{cz+d}$, $(f''/f')'=\frac{2c^2}{(cz+d)^2}\Longrightarrow$

$$\left(\frac{f''}{f'}\right)'-\frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2=\frac{f'''}{f'}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2=:[f]$$

обращается в нуль на всех дробно-линейных функциях. Обратно, положим $y=f''/f'$. Тогда уравнение $[f]=0$ означает, что $y'=y^2/2\Longrightarrow y=\frac{2}{c-z}\Longrightarrow(\log f')'=-2(\log(c-z))'\Longrightarrow f'=\frac{c_1}{(c-z)^2}+2k\pi i$ в любой односвязной области $D\subset\mathbb{C}$ с некоторыми константами $c,c_1\in\mathbb{C}$, $k\in\mathbb{Z}$. Проверка (подстановка в выражение $y=f''/f'$) показывает, что $k=0\Longrightarrow f$ – дробно-линейная функция. Таким образом, $[f]=0\Longleftrightarrow f$ дробно-линейна.

Этот замечательный оператор $f\to[f]$ называется *производной Шварца* (функции f). Дальнейшие свойства: $(g\circ f)''/(g\circ f)'=\left(\frac{g''}{g'}\circ f\right)f'+\frac{f''}{f'}\Longrightarrow$

$$[g\circ f]=([g]\circ f)(f')^2+[f].$$

В частности,

$$[A\circ f]=[f],\quad [f\circ A]=([f]\circ A)\,(A')^2$$

для любого дробно-линейного преобразования A. Например, $[1/f]=[f]$ (вне нулей и полюсов f) $\Longrightarrow[f]$ голоморфно продолжается в простые полюса f, отличные от ∞. Далее, $[h(z)=f(1/z)]=[f](1/z)1/z^4$, откуда видно, что если f в ∞ голоморфна или имеет простой полюс, то $[f]$ имеет в ∞ нуль 4-го порядка $\Longrightarrow\forall$ локально однолистной мероморфной функции f в области $D\subset\widehat{\mathbb{C}}$ производная Шварца $[f]$ *голоморфна* во всей D.

И вот то, что мы не доказывали для рядов Пуанкаре:

Лемма 20. *$\forall$ голоморфной функции h в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$ $\exists$ локально однолистная мероморфная функция f в D, т.ч. $[f] = h$, и любая другая мероморфная функция с этим свойством имеет вид $A \circ f$, где A – дробно-линейное отображение.*

$\lhd$ Можно считать, что $0 \in \mathbb{D}$.

Как и выше, положим $y = f''/f'$ и сведём уравнение $[f] = h$ к уравнению Рикатти $y' - y^2/2 = h$. Стандартной подстановкой $y = -2w'/w$ получаем линейное уравнение второго порядка $w'' + \frac{1}{2} h\, w = 0$. Решаем его в окрестности 0 с нормировкой $w(z) = z + o(z)$. Тогда $w(z) = z - \frac{1}{2} \int_0^z \int_0^\zeta (h\, w)(\eta)\, d\eta\, d\zeta$ и это интегральное уравнение однозначно разрешимо в круге $\mathbb{D}_r \colon |z| < r$, если $r \max_{\mathbb{D}_r} |h| < 1$ (методом последовательных приближений – оператор с двойным интегралом сжимающий). Так как D односвязна, то это решение аналитически продолжается вдоль любого пути в D (в малых кругах решения $\exists$) и даёт голоморфное в $\mathbb{D}$ решение w_0, единственное с нормировкой $w_0(0) = 0$, $w_0'(0) = 1$.

Аналогично, решая уравнение $w(z) = 1 - \frac{1}{2} \int_0^z \int_0^\zeta (h\, w)(\eta)\, d\eta\, d\zeta$, получаем решение w_1 с нормировкой $w_1(0) = 1$, $w_1'(0) = 0$. Прямым подсчётом находим, что $(w_0' w_1 - w_1' w_0)' \equiv 0 \Longrightarrow w_0' w_1 - w_1' w_0 \equiv 1$.

Положим $f = w_0/w_1$. Тогда $f' = 1/w_1^2$, $f'' = -2w_1'/w_1^3$ и $f''/f' = -2w_1'/w_1 \Longrightarrow [f] = h$. Из соотношения $w_0' w_1 - w_1' w_0 = 1$ видно, что все нули w_1 в $\mathbb{D}$ простые $\Longrightarrow f$ – мероморфная локально однолистная в $\mathbb{D}$.

Любая другая такая функция F должна удовлетворять уравнению $F''/F' = -2w'/w$ для некоторого решения w уравнения $w'' + \frac{1}{2} h\, w$. Заменяя F её дробно-линейным преобразованием, можем считать, что $F(z) = z + o(|z|^2)$, как и f, и значит, $F''/F' = o(1)$. Так как любое решение w является линейной комбинацией w_0, w_1, то отсюда $w = C w_1 \Longrightarrow F''/F' = f''/f' \Longrightarrow$ из-за однаковых нормировок в 0, $F'/F = f'/f$ и $F = f$. $\rhd$

14. Оценки производных Шварца. Сначала заметим, что $\forall f$, локально однолистной в $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$, функция $|[f](z)|(|z|^2 - 1)^2$ на $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ ограничена в ∞ и можно определить “норму” $\ddagger[f]\ddagger = \sup\{|[f](z)|(|z|^2 - 1)^2 \colon z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}\}$ (кавычки потому, что может быть $= \infty$). Её важное свойство – инвариантность относительно любых дробно-линейных автоморфизмов $A(z) = e^{ic} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ области

$\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$, т.е. $\ddagger[f \circ A]\ddagger = \ddagger[f]\ddagger$ (упр. 1). Для (глобально) однолистных функций кавычки можно снять, согласно следующей теореме Крауса (см. [6], с. 60), которую называют теоремой Нехари.

Лемма 21. *Если f однолистна в $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$, то $\ddagger[f]\ddagger \leqslant 6$.*

$\triangleleft$ Согласно инвариантности нормы относительно автоморфизмов области, достаточно доказать неравенство в одной точке, например, в ∞. Для $R > 1$ $\exists$ диффеоморфизм f_1 сферы Римана, совпадающий с f при $|z| \geqslant R$. Поэтому

$$\frac{1}{2i} \int_{|z|=R} \bar{f}\, df = \int_{|z|<R} \frac{i}{2}\, df_1 \wedge d\bar{f}_1 > 0.$$

Так как $[A \circ f] = [f]$ $\forall$ дробно-линейного A, то можно считать, что $f(z) = z + o(1)$ в окрестности ∞. Тогда ряд Лорана для f имеет вид $f(z) = z + b_1/z + \cdots \Longrightarrow (\bar{f} f')(z) = (\bar{z} + \bar{b}_1/\bar{z} + \cdots) \times (1 - b_1/z^2 - \cdots)$. Так как $\int_{|z|=R} \bar{z}^k z^l\, dz = 2\pi i R^{2k}$ только при $k - l = 1$, а в остальных случаях $= 0$, то $\frac{1}{2i} \int_{|z|=R} \bar{f}\, df = \pi(R^2 - |b_1|^2/R^2 - \cdots) \leqslant \pi(R^2 - |b_1|^2/R^2)$. Так как $R > 1$ любое, то отсюда $|b_1| \leqslant 1$.

Поскольку $f' = 1 - b_1/z^2 - \cdots$, $f'' = 2/z^3 + \cdots$, $f''' = -6/z^4 - \cdots$, то $[f](z) = -6b_1 z^{-4} + \cdots \Longrightarrow (|z|^2 - 1)^2 |[f](z)| = 6|b_1| + o(1)$ при $z \to \infty$. $\triangleright$

Оценка в лемме 21 точная, максимум достигается для функции Кёбе, см. упр. 2.

Следующая теорема, в некотором смысле обратная к лемме 21, доказана Альфорсом (см. [1]).

Лемма 22. *h голоморфна в $\mathbb{D}$, $\ddagger h \ddagger < 2 \Longrightarrow h = [F]$, где F однолистна в $\mathbb{D}$ и продолжается до квазиконформного гомеоморфизма $\widehat{\mathbb{C}}$ с коэффициентом Бельтрами μ, т.ч. $\mu(z) = -\frac{1}{2\bar{z}^4}(|z|^2 - 1)^2 h(1/\bar{z})$, $|z| > 1$, и $\mu = 0$ в $\mathbb{D}$.*

$\triangleleft$ Пусть $f = w_0/w_1$ – функция из леммы 20, $[f] = h$. Заменяя h на $h(rz)$ с $0 < r < 1$ сколь угодно близким к 1, будем сначала считать, что h голоморфна в окрестности $\overline{\mathbb{D}}$ и w_1 не имеет нулей на $\partial\mathbb{D}$. Положим

$$g(\zeta) = \frac{w_0(\zeta) - (\zeta - 1/\bar{\zeta}) w_0'(\zeta)}{w_1(\zeta) - (\zeta - 1/\bar{\zeta}) w_1'(\zeta)}.$$

Из соотношения $w_0'w_1 - w_1'w_0 \equiv 1$ следует, что числитель и знаменатель g не имеют общих нулей. Ясно, что g непрерывно дифференцируема всюду в $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{0 \cup g^{-1}(\infty)\}$. Простой (но нудный) подсчёт даёт в этих точках выражения

$$g_{\bar\zeta} = \frac{1}{\bar\zeta^2(w_1 - (\zeta - 1/\bar\zeta)w_1')^2},$$
$$g_\zeta = -\frac{(\zeta - 1/\bar\zeta)^2 h}{2(w_1 - (\zeta - 1/\bar\zeta)w_1')^2}$$

$\Longrightarrow$ $|g_\zeta/g_{\bar\zeta}| = \frac{1}{2}|h|(|\zeta|^2 - 1)^2 < 1 \Longrightarrow g$ локально 1:1 в окрестности каждой такой точки (но меняет ориентацию). Применяя это рассуждение к $1/g$, получаем, что g локально 1:1 в $\overline{\mathbb{D}} \setminus 0$. Из $w_1 = 1 + a\zeta^2(1 + o(1))$ и $w_1''(0) = \frac{1}{2}h(0)$ получаем, что $|a| < 1/2$ и $g(\zeta) = (1 + o(1))/(\bar\zeta - 2a\zeta + o(|\zeta|))$ локально 1:1 в окрестности 0 тоже ($g(0) = \infty$).

Положим
$$F(z) = \begin{cases} f(z), & |z| \leqslant 1, \\ g(1/\bar z), & |z| > 1. \end{cases}$$

Тогда $F\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ непрерывно, $F(\infty) = \infty$, F сохраняет ориентацию и локально 1:1 в $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \partial\mathbb{D}$. Более того, вне $\overline{\mathbb{D}}$

$$F_z(z) = -g_{\bar\zeta}(1/\bar z)/z^2, \qquad F_{\bar z}(z) = -g_\zeta(1/\bar z)/\bar z^2$$

$\Longrightarrow F_{\bar z} \to 0$ и $F_z \to -1/w_1^2 = f'$ при $|z| \to 1 \Longrightarrow$ На самом деле функция F непрерывно дифференцируема всюду вне полюсов $f(z)$ и $g(1/\bar z)$, в окрестности которых она 1:1 $\Longrightarrow F\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ – накрытие $\Longrightarrow F$ – гомеоморфизм. Так как

$$\begin{aligned} \mu(z) &:= \frac{F_{\bar z}}{F_z}(z) \\ &= \frac{z^2}{\bar z^2}\frac{g_\zeta(1/\bar z)}{g_{\bar\zeta}(1/\bar z)} \\ &= -\frac{1}{2\bar z^4}(|z|^2 - 1)^2 h(1/\bar z), \end{aligned}$$

то $\|F_{\bar z}/F_z\| < 1 \Longrightarrow F$ – квазиконформный гомеоморфизм $\widehat{\mathbb{C}}$.

В общем случае (h голоморфна лишь в D), заменяя $h(z)$ на $h(rz)$ с подходящими $r < 1$ и затем переходя к пределу при $r \to 1$, получаем, что и в общем случае построенное выше отображение

F – тоже квазиконформный гомеоморфизм $\widehat{\mathbb{C}}$ с указанным дифференциалом Бельтрами. $\triangleright$

Оценка в теореме Альфорса тоже точная, см. упр. 3.

Следствие. *h голоморфна в $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$, $\ddagger h \ddagger < 2 \Longrightarrow h = [F_\mu]$, где F_μ – каноническое решение уравнения Бельтрами с коэффициентом μ, сосредоточенным в $\overline{\mathbb{D}}$ и $\|\mu\|_\infty = \frac{1}{2}\ddagger h \ddagger$.*

$\triangleleft$ Применим лемму 22 к функции $h(1/z)/z^4$, голоморфной в $\mathbb{D}$, поскольку h имеет в ∞ нуль порядка $\geqslant 4$, и $\sup(1-|z|^2)^2|h(1/z)/z^4| = \ddagger h \ddagger < 2$. Пусть F – построенное там квазиконформное продолжение $h(1/z)/z^4$ на всю $\widehat{\mathbb{C}}$, $[F](z) = h(1/z)/z^4$ в $\mathbb{D}$. Тогда $f(z) := F(1/z)$ – квазиконформный гомеоморфизм $\widehat{\mathbb{C}}$ с коэффициентом Бельтрами μ, сосредоточенным в $\overline{\mathbb{D}}$ и $[f](z) = [F](1/z)/z^4 = h(z)$ в $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$. Каноническое решение F_μ является дробно-линейной функцией от f и потому также $[F_\mu] = h$ вне $\mathbb{D}$. $\triangleright$

* * * * *

Задачи и упражнения.

1. f – голоморфная локально-однолистная функция в $D = \mathbb{D}$ или $\mathbb{D}^- := \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}} \Longrightarrow$ Функция $|[f](z)|(|z|^2-1)^2$ инвариантна относительно дробно-линейных автоморфизмов D.

2. Однолистная в $\mathbb{D}$ и в $\mathbb{D}^-$ функция $f(z) = \frac{z}{(1+z)^2}$ имеет производную Шварца (вычислить её) с нормой $\ddagger[f]\ddagger = 6$ (и там и там).

3. Функция $f(z) = \log\frac{1+z}{1-z}$ в $\mathbb{D}$ однолистна, норма её производной Шварца $\ddagger f \ddagger$ равна 2 (проверить!), но f не продолжается непрерывно даже на замыкание $\mathbb{D}$ (в точки ± 1).

Теоремы Тейхмюллера

Лекция 8

Проекция Берса – Замена базы – Структура классов Тейхмюллера – Расстояние Тейхмюллера

1. Проекция Берса. Важное свойство производной Шварца заключается в том, что если $f \circ A = B \circ f$ для некоторых дробно-линейных преобразований A, B, то $[f] = [f \circ A](A')^2$. Таким образом, квадратичный дифференциал $[f](dz)^2$ инвариантен относительно A, никак не реагируя на B! В частности, указанное свойство выполнено для функций F_μ из л. 7 п. 12, однолистных в $\mathbb{D}^- := \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}} \Longrightarrow$ квадратичный дифференциал $[F_\mu](dz)^2$ в $\mathbb{D}^-$ инвариантен относительно группы G базовой р/п $S = (\underline{S}, J)$ ($[F_\mu]$ имеет в ∞ нуль 4-го порядка, поэтому дифференциал голоморфно продолжается и в ∞) $\Longrightarrow [F_\mu](dz)^2$ определяет квадратичный дифференциал на р/п $S^- := \mathbb{D}^-/G$. Что это за р/п и как её привязать к общей базе S? Если S – с краем, то это часть дубля Шоттки. А в общем, если $w = A(z) = e^{ic}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$, то $\frac{1}{\bar{w}} = e^{ic}\frac{1-a\bar{z}}{\bar{z}-\bar{a}} = A(\frac{1}{\bar{z}})$, т.е. инверсия $z \mapsto 1/\bar{z}$ определяет антиголоморфную инволюцию $\iota\colon S \to S^-$, $\iota^2 = \mathrm{id}$, и это даёт основание называть S^- *зеркально симметричной* к S р/п. Это р/п с той же гладкой базой $\underline{S}$, но комплексная структура на ней (как оператор в $T\underline{S}$) отличается от J знаком, $S^- = (\underline{S}, -J)$ и, соответственно, ориентация на S^- противоположна ориентации S (поэтому S^- не входит в рассматриваемый нами класс р/п, которые получаются из S квазиконформными преобразованиями, сохраняющими ориентацию). Голоморфные относительно $-J$ функции – это функции, антиголоморфные относительно J и наоборот.

Лемма 23. $\mu_1 \approx \mu_2 \Longleftrightarrow [F_{\mu_1}] = [F_{\mu_2}]$ *в* $\mathbb{D}^-$.

$\triangleleft$ (1) $\to$ (2) следует из леммы 19 л. 7, согласно которой (1) $\Longrightarrow$ $F_{\mu_1} = F_{\mu_2}$ в $\mathbb{D}^-$.

(2) $\to$ (1) следует из части леммы 20 л. 7 о единственности, согласно которой (2) $\Longrightarrow F_{\mu_2} = A \circ F_{\mu_1}$ для некоторого дробно-линейного A. Но так как $F_\mu(z) = z + o(1)$ в окрестности ∞, то $A = \mathrm{id}$. $\triangleright$

Таким образом, отображение $\mu \mapsto [F_\mu](dz)^2$ индуцирует вложение пространства Тейхмюллера $T\langle S\rangle$ в пространство (голоморфных) квадратичных дифференциалов на зеркальной р/п S^-. Если S компактна, то это отображение в пространство $A_2(S^-)$. В общем случае за интегрируемость полученных квадратичных дифференциалов надо ещё побороться.

Сначала заметим, что по лемме 21 л. 7 $|[F_\mu](z)|(|z|^2-1)^2 \leqslant 6$ при $|z|>1$. Но каково поведение соотв. квадратичного дифференциала в окрестностях проколов на S^-? Повторим здесь замену координат, которая использовалась уже в л. 7 п. 2. Пусть w – голоморфная координата в канонической окрестности U прокола $w=0$ (на замыкании S^-), см. л. 2 п. 12. Тогда $V = U \cap \{|\arg z_1| < \pi\}$ однолистно накрывается областью W, лежащей между двумя дугами окружностей, ортогональных $\partial\mathbb{D}$ с общей точкой $a \in \partial\mathbb{D}$. Пусть $C \in \operatorname{Aut}\mathbb{D}$ отображает указанные окружности на соприкасающиеся в точке 1 окружности, симметричные относительно $\mathbb{R}$. Тогда $w \mapsto z = C^{-1}(1-2/\log(w/e))$ – конформное отображение V на W. Пусть $f(dw)^2$ – координатное представление дифференциала $[F_\mu](dz)^2$ в области U. Так как $dz = H\,dw/w(\log w)^2$ с ограниченной функцией H, то $f = H^2\,[F_\mu]/w^2(\log w)^4$. Так как $|[F_\mu](z)| \leqslant 6/(|z|^2-1)^2 \leqslant c\,|\log w|^2$, то $|f| \leqslant c_1/|w\log w|^2$ с некоторыми константами c, c_1, а эта последняя функция интегрируема в W. Таким образом, доказана

Лемма 24. *Если S – конформного типа (g,n), то $[F_\mu](dz)^2 \in A_2(S^-)$.*

Следствие. *Проекция Берса $\mathcal{B}\colon \mu \mapsto [F_\mu](dz)^2$ голоморфно отображает шар $B_1(G)$ в пространство $A_2(S^-)$ и задаёт вложение*

$$T\langle S\rangle \ni [\mu] \mapsto [F_\mu](dz)^2 \in A_2(S^-).$$

При этом $B_2 \subset \mathcal{B}(B_1(G)) \subset B_6$, где B_r – шар радиуса r в $A_2(S^-)$ относительно нормы $\ddagger\cdot\ddagger$ (см. п. 14 л. 7).

$\lhd$ Проекция Берса $\mathcal{B}$ голоморфна по $\mu \in B_1(G)$. В самом деле, $F_\mu = z + T(F_\mu)_{\bar z}$ и $(F_\mu)_{\bar z} = (1-\mu\Pi)^{-1}\mu$ голоморфны по μ (см. п. 12 л. 7). Поэтому производные $F_\mu^{(k)}(z) = -\frac{k!}{\pi}\int_{\mathbb{D}} \frac{(F_\mu)_{\bar\zeta}\,dS_\zeta}{(\zeta-z)^{k+1}}$ по $z \in \mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{D}}$ тоже голоморфны по $\mu \Longrightarrow [F_\mu]$ голоморфно зависит от μ. Последнее утверждение – из п. 14 л. 7. $\rhd$

Отображение $F_\mu \mapsto [F_\mu]$ взаимно-однозначно (см. п. 13 л. 7) и может показаться, что от замены F_μ на $[F_\mu](dz)^2$ мы ничего не выигрываем. Однако, функции F_μ лежат в бесконечномерном семействе однолистных в $\mathbb{D}^-$ функций, нормированных условием $z + o(1)$ в ∞, это семейство не линейно, не описано аналитически и функции F_μ в нём не выделяются какими-нибудь простыми условиями. Между тем, $A_2(S^-)$ – конечномерное $\mathbb{C}$-линейное пространство, все нормы в нём эквивалентны и таким образом мы получаем вложение $T\langle S\rangle$ в ограниченное множество в $\mathbb{C}^N$. Образ $T\langle S\rangle$ совпадает с образом шара $B_1(G)$ и является на самом деле областью в $\mathbb{C}^N$, см. ниже.

Известно, что проекция Берса не допускает глобальных голоморфных сечений, т.е. не существует голоморфного отображения $s\colon T\langle S\rangle \to B_1(S)$, т.ч. $\mathcal{B} \circ s(\phi) \equiv \phi \in T\langle S\rangle \subset A_2(S^-)$. Однако глобальные непрерывные (а значит, и гладкие) сечения есть (см. л. 9) и в окрестности каждой точки в $T\langle S\rangle$ есть *локальные* голоморфные сечения, например, $s(\phi) = \phi/\rho^2$, $s(0) = 0$, в окрестности 0, где ρ – гиперболическая метрика на $\underline{S}$, а над другими точками – по принципу замены базы, см. ниже (напомним, что голоморфные дифференциалы на S^- – это в точности антиголоморфные дифференциалы на S).

2. Замена базы. Как меняются коэффициенты Бельтрами при замене базовой р/п в классе $\langle S\rangle$ (поверхностей с конечным расстоянием τ от S)? Пусть G – накрывающая группа универсальной проекции $\pi\colon \mathbb{D} \to S$.

Лемма 25. $\mu_0 \in B_1(G)$, $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ – *нормальное решение уравнения Бельтрами с коэффициентом* μ_0, $S_0 = (\underline{S}, J_{\mu_0})$, $G_0 = fGf^{-1} \Longrightarrow$

$$\mu \mapsto \left(\frac{\mu - \mu_0}{1 - \overline{\mu_0}\mu} \cdot \frac{f_z}{\overline{f_z}}\right) \circ f^{-1} =: \mathcal{A}(\mu, \mu_0)$$

является биголоморфизмом $B_1(G)$ *на* $B_1(G_0)$, *сохраняющим расстояние* τ, *эквивалентность по Тейхмюллеру и таким образом индуцирующее гомеоморфизм* $T\langle S\rangle \to T\langle S_0\rangle$.

$\triangleleft$ Накрывающей группой поверхности S_0 является $G_0 = fGf^{-1}$ (относительно проекции $\pi_0 = \pi \circ f^{-1}$, см. п. 6 л. 6). Если $B \in G_0$, то $f^{-1} \circ B \circ f =: A \in G$ и, значит, $(B \circ f)_z = (B' \circ f)f_z = (f \circ A)_z = (f_\zeta \circ A)A'$. Обозначим $w = f(z)$, $z = f^{-1}(w)$,

$\mathcal{A}(\mu,\mu_0)=\nu$. Тогда

$$\begin{aligned}\nu(B(w)) &= \left(\frac{\mu-\mu_0}{1-\overline{\mu_0}\mu}\frac{f_\zeta}{\overline{f_\zeta}}\right)(A(z)) \\ &= \left(\frac{\mu-\mu_0}{1-\overline{\mu_0}\mu}\frac{A'}{\overline{A'}}\right)\frac{f_\zeta\circ A}{\overline{f_\zeta\circ A}}(z) \\ &= \left(\frac{\mu-\mu_0}{1-\overline{\mu_0}\mu}\right)\frac{B'\circ f}{\overline{B'\circ f}}(z) \\ &= \nu\frac{B'}{\overline{B'}}(w),\end{aligned}$$

т.е. $\nu\in B_1(G_0)$. Отображение $\mu\mapsto\nu$ сохраняет расстояние τ (см. опред. в п. 7 л. 4). Оно, очевидно, голоморфно по μ и обратное отображение $\mu=\left(\frac{\nu-\mu_{f^{-1}}}{1-\nu\overline{\mu_{f^{-1}}}}\circ f\right)\overline{\frac{f_z}{f_z}}$ тоже голоморфно (по ν).

Если g – нормальное решение уравнения Бельтрами с коэффициентом μ, то $\mathcal{A}(\mu,\mu_0)=(\mu_{g\circ f^{-1}})\circ f^{-1}$. Если $\mu_1\approx\mu_2$ и g_1,g_2 – соотв. нормальные решения, то $g_1=g_2$ на $\partial\mathbb{D}$ (п. 12 л. 7). Так как оба g_j сохраняют $1,i,-1$ то $g_j\circ f^{-1}$ – нормальные решения уравнения Бельтрами в $\mathbb{D}_w$ с коэффициентами $\nu_j=\mathcal{A}(\mu_j,\mu_0)$ соотв. Так как $g_1\circ f^{-1}=g_2\circ f^{-1}$ на $\partial\mathbb{D}$, то $\nu_1\approx\nu_2$ по лемме 19 л. 7. ▹

Геометрический смысл $\mathcal{A}(\mu,\mu_0)$ заключается в следующем: Отображение f является π-поднятием квазиконформного гомеоморфизма $\iota_0\colon S\to S_0$, тождественного на базе $\underline{S}$. Пусть g есть нормальное решение уравнения Бельтрами с коэффициентом μ (π-накрывающее тождественное отображение $\iota_\mu\colon S\to S_\mu$). Так как $\mathcal{A}(\mu,\mu_0)\circ f$ – коэффициент Бельтрами для $g\circ f^{-1}$, то $\mathcal{A}(\mu,\mu_0)$ есть коэффициент Бельтрами π_0-поднятия отображения $\iota_\mu\circ\iota_0^{-1}\colon S_0\to S_\mu$, тождественного на общей гладкой базе $\underline{S}$ (точно так же, как при $\mu_0=0$, когда, как мы знаем, $\mu=\mathcal{A}(\mu,0)$ есть коэффициент Бельтрами тождественного отображения $S\to S_\mu$).

Введя расстояние Тейхмюллера (п. 4) и комплексную структуру (л. 9) в пространствах Тейхмюллера, мы увидим, что гомеоморфизм замены базы индуцирует на самом деле изометрический биголоморфизм соотв. пространств Тейхмюллера.

Если $\mu_0\approx 0$ (т.е. S_0 эквивалентна S по Тейхмюллеру), то $f(z)\equiv z$ на $\partial\mathbb{D}$ и, следовательно, $G_0=G$, т.е. шар $B_1(G)$ при такой замене базы отображается на себя. Если g – нормальное решение уравнения Бельтрами с коэффициентом μ, то $g\circ f^{-1}=g$

на $\partial\mathbb{D}$, из чего следует (п. 12 л. 7), что $\mathcal{A}(\mu,\mu_0)\approx\mu$. Таким образом, в этом случае каждый класс Тейхмюллера переходит в себя и индуцируемый гомеоморфизм пространств Тейхмюллера тождественный, $T\langle S_0\rangle = T\langle S\rangle$. Так как замена базы сохраняет расстояние τ, то классы Тейхмюллера как бы параллельны друг другу, в частности, $\tau(\mu,0)=\tau(\mathcal{A}(\mu,\mu_0),\mu_0)$, для $\mu_0\approx 0$.

Если $h\colon S_0\to S$ – биголоморфизм, гомотопный тождественному (на $\underline{S}$) и $\iota\colon S\to S_0$ – тождественное отображение $\underline{S}$ (поднятием которого является f), то $h\circ\iota\colon S\to S$ – квазиконформный автоморфизм, гомотопный тождественному, с тем же коэффициентом Бельтрами μ_0 (на $\mathbb{D}$), что и у f (по-другому, его можно записать в виде $\pi\circ f\circ\pi^{-1}$). Обратно, если $g\colon S\to S$ – квазиконформное отображение, гомотопное тождественному, то оно поднимается до квазиконформного отображения $f\colon\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ такого, что $f(z)\approx z$ на $\partial\mathbb{D}$ (лемма 8 л. 2), и, следовательно, соотв. коэффициент Бельтрами тривиален, $\mu_0\approx 0$. Обозначим через $Q_0=Q_0(G)=Q_0(S)$ множество (группу относительно композиции) всех квазиконформных автоморфизмов S, гомотопных тождественному (которую отождествляем с группой соотв. поднятий на универсальную накрывающую, тождественных на $\partial\mathbb{D}$). Таким образом, мы видим, что Q_0 (с естественной топологией отображений метрических пространств) гомеоморфна классу $[0]$ тривиальных дифференциалов Бельтрами. Группа Q_0 непрерывно действует на $B_1(G)$ (если f – соотв. отображение $\mathbb{D}$, то действие соотв. элемента Q_0 – это отображение $\mu\mapsto\mathcal{A}(\mu,\mu_0)$, описанное выше) и её орбиты – это в точности классы Тейхмюллера. Таким образом, пространство Тейхмюллера р/п конформного типа (g,n) можно расматривать как фактор

$$T\langle S\rangle = B_1(G)/Q_0(G).$$

В п. 8 мы покажем, что классы Тейхмюллера связные $\Longrightarrow$ непрерывная группа Q_0 связная (хотя каждый элемент Q_0 гомотопен тождественному отображению, но это гомотопия в классе непрерывных отображений только; совсем не очевидно, что это изотопия, точнее, что $\exists$ гомотопия в классе квазиконформных гомеоморфизмов S).

3. Структура классов Тейхмюллера. В пространстве $A_2(S^-)$ выберем базис $\phi_1^-,\dots,\phi_N^-$ и соотв. координаты: $\phi^- = \lambda_1\phi_1^-+\dots+\lambda_N\phi_N^-$. Отображение $\phi^-\mapsto(\lambda_1,\dots,\lambda_N)$ $\mathbb{C}$-линейное

$\Longrightarrow$ биголоморфизм $A_2(S^-)$ и $\mathbb{C}^N \Longrightarrow$ Функции

$$\lambda_j(\mu) := \lambda_j([F_\mu](dz)^2)$$

на $B_1(G)$ тоже голоморфны. Согласно п. 1 класс Тейхмюллера $[\mu_0]$ есть множество общих нулей голоморфных функций $\lambda_j(\mu) - \lambda_j(\mu_0)$, $j = 1, \ldots, N$. А в п. 12 л. 7 мы показали, что $[\mu_0] \cap B_r$ при достаточно малом $r > 0$ содержится в комплексном подмногообразии B_r коразмерности N, определяемом как $\{F_\mu(a_j) = F_{\mu_0}(a_j), j = 1, \ldots, N\}$.

Лемма 26. *Пусть $\mathcal{A}$ – подмножество шара B в банаховом пространстве, определяемое как множество общих нулей голоморфных в B функций $h_1, \ldots, h_N$. Тогда если $\mathcal{A}$ содержится в связном комплексном подмногообразии $\mathcal{M}$ коразмерности N в B, то $\mathcal{A} = \mathcal{M}$.*

$\triangleleft$ Утверждение достаточно доказать в окрестности произвольной точки множества $\mathcal{A}$ (тогда оно будет открытым и замкнутым в $\mathcal{M}$). Считаем, что $0 \in \mathcal{A}$. Так как $\mathcal{M}$ – комплексное подмногообразие B, то объемлющее банахово пространство $\mathbb{C}$-линейно изоморфно пространству $T_0\mathcal{M} \times \mathbb{C}^N_w$ и $\mathcal{M}$ есть график $w_1 = f_1(z), \ldots, w_N = f_N(z)$, $z \in T_0\mathcal{M}$, с голоморфными функциями f_j в окрестности 0 в $T_0\mathcal{M}$.

При $N = 1$ множество $\mathcal{A}$ есть множество нулей голоморфной функции $h_1(z, w)$. Так как $h_1(0, 0) = 0$, то по принципу аргумента (ТФКП) в $\mathbb{C}_w$, функция $h_1(z, \cdot)$ при малых фиксированных z тоже имеет по крайней мере один нуль, стремящийся к $(0, 0)$ при $z \to 0$. Так как $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ и у $w - f_1(z)$ ровно один такой нуль, то $\mathcal{A} = \mathcal{M}$ в окрестности $(0, 0)$.

При $N > 1$ предположим, что для $N - 1$ лемма доказана, но одна из функций $h_j(z, f(z))$ скажем, с $j = 1$, $\not\equiv 0$ в любой окрестности $(0, 0)$ на $T_0\mathcal{M}$. Рассмотрим проекцию $(z, w) \mapsto (z, w_1, \ldots, w_{N-1})$ в пространство T_0^1, касательное к $\{w_N = f_N(z)\}$. Проекция $\mathcal{M}$ есть комплексное подмногообразие $\mathcal{M}^1 \subset T_0^1$ коразмерности уже $N - 1$ (график $w_j = f_j(z)$, $j < N$). Аналитическое множество $\mathcal{A}^1\colon h_j(z, w_1, \ldots, w_{N-1}, f_N(z)) = 0$, $j = 1, \ldots, N - 1$, в T_0^1 содержится в $\mathcal{M}^1$, но не равно ему в любой окрестности 0 (по выбору h_1). Но для $N - 1$ лемма верна и это противоречие показывает, что на самом деле $\mathcal{A} = \mathcal{M}$ в окрестности $0 \in B$. $\triangleright$

Предложение 5. *S – р/п конформного типа $(g,n) \Longrightarrow$ Классы Тейхмюллера $[\mu] \subset B_1(G)$ являются комплексными подмногообразиями коразмерности $N = \dim_{\mathbb{C}} A_2(S^-)$ $(= 3g-3+n$ при $g>1)$.*

$\lhd$ В п. 12 л. 7 доказано, что класс $[0]$ в окрестности 0 содержится в комплексном многообразии коразмерности N. Выше показано, что $[0]$ есть множество общих нулей N голоморфных функций $\Longrightarrow$ по лемме 26 $[0] \cap B_r$ – комплексное многообразие при малых r.

Пусть теперь μ_0 произвольное и $\mu \mapsto \mathcal{A}(\mu,\mu_0) \in B_1(G_0)$ – замена базы. Тогда $\mu_0 \mapsto 0$ и $[\mu_0] \to [0] \subset B_1(S_0)$. По доказанному (с базой S_0), $[0]$ – комплексное многообразие в малой окрестности 0 в $B_1(G_0)$. Так как замена базы биголоморфна, то $[\mu_0]$ – комплексное многообразие в окрестности μ_0 (все – коразмерности N). $\rhd$

В частности, согласно п. 11 л. 7 получаем:

Следствие. *Касательное пространство к многообразию $[0]$ в 0 есть пространство N_0 локально тривиальных дифференциалов, а линейное пространство $\Lambda = \{\bar{\phi}/\rho^2 \colon \phi \in A_2(S)\}$, где ρ – гиперболическая метрика на S, трансверсально к $[0]$ в 0.*

4. Расстояние Тейхмюллера. В шаре $B_1 = B_1(G)$ – две естественные метрики: одна из банахова пространства $L^\infty(\mathbb{D})$ и другая – введённая в п. 7 л. 4 метрика τ. Сразу отметим, что семейства шаров с центром в 0 относительно обеих метрик совпадают. Расстояния между классами Тейхмюллера естественно определять как расстояния между подмножествами B_1, но равномерное (L^∞)-расстояние не инвариантно относительно естественных преобразований комплексных структур на S и поэтому основным в теории Тейхмюллера является следующее расстояние между классами (т.е. точками пространства $T\langle S\rangle$):

$$\tau([\mu_1],[\mu_2]) = \inf\{\tau(\mu_1',\mu_2') \colon \mu_1' \approx \mu_1,\ \mu_2' \approx \mu_2\},$$

которое называется *расстоянием Тейхмюллера*. Оно было введено Тейхмюллером, который доказал, что это действительно расстояние (оно, очевидно, симметрично, но доказательство остальных свойств расстояния уже не тривиально).

Лемма 27. *$\forall \mu,\mu_0 \in B_1$ $\exists \mu' \approx \mu \colon \tau(\mu_0,\mu') = \tau(\mu_0,[\mu]) = \tau([\mu_0],[\mu])$.*

$\lhd$ Пусть $f_0, g_0 \colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ – нормальные решения уравнений Бельтрами с дифференциалами μ_0, μ соотв., $\mu_0' \approx \mu_0$, $\mu' \approx \mu$ и f, g – соотв. нормальные решения. Так как $\left\| \frac{\mu_g - \mu_f}{1 - \overline{\mu_f}\mu_g} \right\| = \|\mu_{g\circ f^{-1}}\|$ (см. п. 9 л. 4), то $\tau(\mu_0', \mu') = \frac{1}{2}\log\kappa(\|\mu_{g\circ f^{-1}}\|)$, где $\kappa(x) = \frac{1+x}{1-x}$, и

$$\tau([\mu_0], [\mu]) = \frac{1}{2}\inf\{\log\kappa(\|\mu_{g\circ f^{-1}}\|)\colon \mu_f \approx \mu_0,\ \mu_g \approx \mu\}.$$

Функции $g \circ f^{-1}$ указанного вида в $\mathbb{D}$ совпадают на $\partial\mathbb{D}$ (с $g_0 \circ f_0^{-1}$), согласно п. 12 л. 7, и удовлетворяют следующему свойству инвариантности: $g \circ f^{-1} \circ B = g \circ A \circ f^{-1} = C \circ g \circ f^{-1}$, где $A \in G$, $B \in f_0 G f_0^{-1}$ (в накрывающей группе G_0 р/п $(\underline{S}, J_{\mu_0})$), $C \in g_0 G g_0^{-1}$ (в накрывающей группе G_μ р/п $(\underline{S}, J_\mu)$).

Положим $\tau_1([\mu_0], [\mu]) = \inf\{\|\mu_h\|\colon h = g_0 \circ f_0^{-1}$ на $\partial\mathbb{D}$, $h \circ B = C \circ h\ \forall B \in G_0$ с соотв. $C \in G_\mu\}$. $\forall h$ из этого класса $\mathcal{H}$ функция $g = h \circ f_0$ удовлетворяет условиям в представлении

$$\tau(\mu_0, [\mu]) = \frac{1}{2}\ \inf\{\log\kappa(\|\mu_{g\circ f_0^{-1}}\|)\colon g = g_0 \text{ на } \partial\mathbb{D}\},$$

(см. п. 12 л. 7). Поэтому $\tau_1([\mu_0], [\mu]) \geqslant \tau(\mu_0, [\mu])$. Но функции $g \circ f^{-1}$ из определения $\tau\,([\mu_0], [\mu])$, все входят в класс $\mathcal{H}$ (опять по лемме 19 л. 7), поэтому $\tau_1([\mu_0], [\mu]) \leqslant \tau([\mu_0], [\mu])$.

Пусть теперь $h_j \in \mathcal{H}$ – последовательность, минимизирующая норму, $\|\mu_{h_j}\| \to inf_{\mathcal{H}}\,\|\mu_h\|$. Согласно п. 5 л. 5 $\exists$ подпоследовательность, равномерно сходящаяся к некоторому отображению $h_0\colon \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$, квазиконформному в $\mathbb{D}$, причём $\|\mu_{h_0}\| \leqslant inf_{\mathcal{H}}\|\mu_h\|$. Но из равномерной сходимости следует, что $h_0 \in \mathcal{H} \Longrightarrow$ коэффициент Бельтрами $\mu' := \mu_{h_0}$ вместе с μ_0 реализует расстояние между классами. $\rhd$

Следствие. *В каждом классе Тейхмюллера $[\mu]$ есть экстремальный дифференциал Бельтрами – с минимальной нормой в классе $[\mu]$.*

$\lhd$ Для $\mu_0 = 0$ представитель класса $[\mu]$, ближайший к 0 относительно метрики Тейхмюллера, имеет минимальную норму в этом классе. $\rhd$

В п. 8 мы докажем, что такой дифференциал единственный.

С леммой 27 доказательства положительной определённости и неравенства треугольника для расстояния Тейхмюллера в $T\langle S\rangle$ уже очевидны, поскольку они справедливы для расстояния τ в B_1.

Нам понадобится ещё следующая лемма о связи метрики Тейхмюллера τ и нормы в L^∞ в окрестности 0 в $B_1 = B_1(G)$ (см. [27]).

Лемма 28. $\mu \in B_1 \setminus 0 \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon, 1/\|\mu\|)$, *т.ч. если* $\|\nu\| < \delta$, *то*

$$\tau(\mu, \nu) - \tau(\mu, 0) \leqslant \|\mu - \nu\| - \|\mu\| + \varepsilon\|\nu\|.$$

$\triangleleft$ Докажем сначала неравенство

$$d\left(\left|\frac{z - tw}{1 - \bar{z}tw}\right|\right) - d(|z|) \leqslant |z - tw| - |z| + \varepsilon\, t|w|,$$

где $d(x) := \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$, для $z, w \in \mathbb{D}$, $|z| > \|\mu\|/4$ и малых $t > 0$. При $t = 0$ обе части равны нулю, производная по t левой части непосредственно вычисляется и получается равной $-\operatorname{Re}\bar{z}w/|z|$, а производная правой $-\operatorname{Re}\bar{z}w/|z| + \varepsilon|w|$, бо́льшая. При этом если $|tw| < |z|/4$ то $\exists\,\delta > 0$ (зависящее только от $1/\|\mu\|$), т.ч. производная по t левой части остаётся меньше, чем в правой части при всех $|t| < \delta$.

Теперь заметим, что $\operatorname{ess\,sup} d\big(\big|\frac{\mu-\nu}{1-\bar{\mu}\nu}\big|(p)\big)$ по всей S при $\|\nu\| < \|\mu\|/4$ совпадает с $\operatorname{ess\,sup}$ по множеству точек $p \in S$, в которых $|z := \mu(p)| > \|\mu\|/2$; обозначим это множество через K. По доказанному неравенству в круге,

$$\begin{aligned}
\tau(\mu, \nu) &= \operatorname*{ess\,sup}_K d\left(\left|\frac{\mu - \nu}{1 - \bar{\mu}\nu}\right|\right) \\
&\leqslant \operatorname*{ess\,sup}_K \big(d(|\mu|) + |\mu - \nu| - |\mu| + \varepsilon|\nu|\big) \\
&\leqslant \operatorname{ess\,sup}\big(d(|\mu|) - |\mu|\big) + \|\mu - \nu\| + \varepsilon\|\nu\|.
\end{aligned}$$

Так как функция $d(x) - x$ монотонно возрастает (производная неотрицательна) и $d(\|\mu\|) = \tau(\mu, 0)$, то $d(|\mu|) - |\mu| \leqslant \tau(\mu, 0) - \|\mu\|$. $\triangleright$

Лекция 9

Теорема Крушкаля–Гамильтона – Теорема существования – Деформации Тейхмюллера – Теорема единственности – Вложение Тейхмюллера

5. Теорема Крушкаля–Гамильтона. Так как $L^\infty_{(-1,1)}$ является сопряжённым к пространству $L^1_{(2,0)}$ интегрируемых дифференциалов типа $(2,0)$ на S, то

$$\|\mu\| = \sup\left\{\left|\int_S (\mu\psi)\hat{}\right| : \psi \in L^1_{(2,0)},\ \int_S |\psi|\hat{} \leqslant 1\right\}.$$

Через $\|\mu|_A\|$ обозначим такой же *sup* по $\psi \in A_2(S)$ (т.е. норму сужения μ как функционала на подпространство $A_2 \subset L^1_{(2,0)}$).

Предложение 6. *Пусть μ – локально экстремальный представитель своего класса Тейхмюллера, т.е. $\|\mu\| \leqslant \|\mu'\|$ $\forall\, \mu' \approx \mu$ в некоторой окрестности μ. Тогда $\|\mu\| = \|\mu|_A\|$.*

Для р/п конечного типа это теорема С. Л. Крушкаля (см. [5]). Приводимое ниже геометрическое доказательство взято из работы Р. Гамильтона [27], в которой теорема Крушкаля распространена на произвольные р/п (с более жёстким условием эквивалентности по Тейхмюллеру, чем в нашем тексте, см. л. 4).

$\triangleleft$ По теорема Хана–Банаха $\exists$ дифференциал Бельтрами $\tilde\mu$, т.ч. $\tilde\mu|_A = \mu|_A$ и $\|\tilde\mu\| = \|\mu|_A\|$. Предположим, что $\|\mu|_A\| < \|\mu\|$. Тогда $(\mu - \tilde\mu)|_A = 0 \Longrightarrow \mu - \tilde\mu$ – локально тривиальный дифференциал, $\Longrightarrow \mu - \tilde\mu$ касается многообразия $[0]$ в 0 (см. следствие в п. 3) $\Longrightarrow$ $\exists$ гладкий путь $[0,1] \ni t \mapsto \mu_t \in [0]$, т.ч. $\mu_0 = 0$ и $\frac{d}{dt}\mu_t\big|_{t=0} = \mu - \tilde\mu$ $\Longrightarrow \|\mu_t - t(\mu - \tilde\mu)\|/t \to 0$ при $t \to 0$.

Согласно лемме 28 $\tau(\mu,\mu_t) - \tau(\mu,0) \leqslant \|\mu - \mu_t\| - \|\mu\| + \varepsilon\|\mu_t\|$ $\forall\varepsilon > 0$ и $t < t(\varepsilon, 1/\|\mu\|)$. Представим $\mu - \mu_t = (1-t)\mu + t\tilde\mu - \mu_t + t(\mu - \tilde\mu)$, тогда по неравенству треугольника

$$\begin{aligned}\tau(\mu,\mu_t) - \tau(\mu,0) &\leqslant (1-t)\|\mu\| + t\|\tilde\mu\| \\ &\qquad + \|\mu_t - t(\mu - \tilde\mu)\| - \|\mu\| + \varepsilon\|\mu_t\| \\ &\leqslant t(\|\tilde\mu\| - \|\mu\|) + o(t) + \varepsilon K t\end{aligned}$$

(поскольку $\|\mu_t\| \leqslant Kt$ с некоторой константой K) $\Longrightarrow$ Если $\varepsilon K < \|\mu\| - \|\tilde\mu\|$ и $t > 0$ достаточно мало, то $\tau(\mu,\mu_t) - \tau(\mu,0) < 0$.

Так как $\mu_t \approx 0$, то замена базы $\mu' \mapsto \mathcal{A}(\mu', \mu_t)$ является τ-изометрией шара $B_1(G)$, переводящей μ_t в 0 и μ в $\mathcal{A}(\mu, \mu_t) \approx \mu$ $\Longrightarrow \tau(\mu_t, \mu) = \tau(0, \mathcal{A}(\mu, \mu_t)) \geqslant \tau(0, \mu)$, если t достаточно мало (ввиду локальной экстремальности μ). Однако, это противоречит доказанному выше неравенству $\tau(0, \mu) > \tau(\mu_t, \mu)$. $\triangleright$

6. Теорема существования. Основным результатом теории Тейхмюллера является следующая теорема.

Теорема. *S – гиперболическая р/п конформного типа (g, n) $\Longrightarrow$ в каждом классе Тейхмюллера $[\mu_0] \neq [0]$ дифференциалов Бельтрами на S $\exists$, притом единственный, дифференциал вида $\mu = k\bar{\phi}/|\phi|$, где ϕ – голоморфный квадратичный дифференциал, интегрируемый на S, и $k = \min\{\|\mu'\|\colon \mu' \approx \mu_0\}$.*

Дифференциалы вида $k\bar{\phi}/|\phi|$ называются *дифференциалами Тейхмюллера*. Квадратичный дифференциал ϕ здесь определён однозначно с точностью до постоянного положительного множителя.

$\triangleleft$ (Существование). Согласно следствию леммы 27 в классе $[\mu_0]$ $\exists$ дифференциал μ с минимальной нормой. По теореме Крушкаля–Гамильтона

$$\operatorname{ess\,sup}|\mu| = \|\mu\| = \sup\left\{\left|\int_S (\mu\psi)\right|\hat{}\colon \psi \in A_2(S),\ \int_S |\psi|\hat{} = 1\right\}.$$

Пространство $A_2 = A_2(S)$ конечномерно $\Longrightarrow \exists\, \phi \in A_2$, т.ч. $\int_S |\phi|\hat{} = 1$ и $\|\mu\| = \int_S (\mu\phi)\hat{}$. Так как $\phi \neq 0$ п.в., то из этого следует, что $|\mu| = \|\mu\|$ п.в., а аргументы коэффициентов μ и ϕ в локальных координатах отличаются лишь знаками $\Longrightarrow \mu = \|\mu\|\bar{\phi}/|\phi|$. $\triangleright$

Эта теорема была объявлена Тейхмюллером в 1940 г., но строгое доказательство в части существования было дано в 1953 г. Альфорсом (см. [2]). Единственность для компактных р/п доказана самим Тейхмюллером (см. ниже п. 8).

7. Деформации Тейхмюллера. Квазиконформные отображения с дифференциалами Тейхмюллера называются *деформациями Тейхмюллера*. Наиболее просто они выглядят в координатах, связанных с квадратичными дифференциалами (см. л. 6 п. 9). Пусть $\phi(dz)^2$ – квадратичный дифференциал в $\mathbb{D}$, $(\phi \circ A) \times (A')^2 = \phi\ \forall\, A \in G$, где G – накрывающая группа S и $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ – нормальное решение уравнения Бельтрами с коэффициентом

$\mu_f = k\bar{\phi}/|\phi|$. Отображение f накрывает тождественное отображение $\iota\colon S \to S' = (\underline{S}, J_{\mu_f})$. В окрестности произвольной точки z_0 с $\phi(z_0) \neq 0$ определена функция $\eta = \int_{z_0}^{z} (\phi^{1/2}\, dz + k\overline{\phi^{1/2}}\, d\bar{z})$. Её коэффициент Бельтрами равен $k\overline{\phi^{1/2}}/\phi^{1/2} = k\bar{\phi}/|\phi|$, такой же, как у $f \Longrightarrow \eta = \Phi(w)$, где Φ – обычная голоморфная функция и $w = f(z)$. Так как локально η определена однозначно с точностью до константы, то $(d\eta)^2$ – голоморфный квадратичный дифференциал на $\mathbb{D}_w \setminus f(\{\phi = 0\})$. В координатах z это дифференциал $\phi(dz)^2 + 2k|\phi|\,|dz|^2 + k^2\bar{\phi}(d\bar{z})^2$, который очевидно опрелён и в нулях ϕ.

Итог в терминах р/п:

Лемма 29. *Если $\mu = k\bar{\phi}/|\phi|$ – дифференциал Тейхмюллера на S и $\iota\colon S \to S' = (\underline{S}, J_\mu)$ – тождественное отображение базы, то на S $\exists$ квадратичный дифференциал ψ, т.ч. $\iota^*\psi = \phi + 2k|\phi| + k^2\bar{\phi}$.*

Напомним, что локальная координата $\zeta = \int_{p_0}^{p} \phi^{1/2}$ на S называется ϕ-координатой (соотв., $\eta = \int_{p_0}^{p} \psi^{1/2}$ есть ψ-координата на S'). В терминах этих локальных координат (в окрестности p_0 с $\phi(p_0) \neq 0 \neq \psi(p_0)$) деформация Тейхмюллера ι выглядит совсем просто: $d\eta\circ\iota = \iota^*\psi^{1/2} = \phi^{1/2} + k\overline{\phi^{1/2}} = d\zeta + k\, d\bar{\zeta} \Longrightarrow \eta = \zeta + k\bar{\zeta}$ – аффинное преобразование! (Здесь мы рассматриваем ζ, η как функции на единой базе $\underline{S}$, где $\eta = \eta\circ\iota$.) В вещественных координатах, $\operatorname{Re}\eta = (1+k)\operatorname{Re}\zeta$, $\operatorname{Im}\eta = (1-k)\operatorname{Im}\zeta$, т.е. по ϕ-горизонтальным кривым ($\phi > 0$) растяжение, по вертикальным – сжатие, и это уже глобальное описание деформации Тейхмюллера, поскольку ϕ-горизонтальное и ϕ-вертикальное слоения определены всюду на $S \setminus \{\phi = 0\}$.

Замена $\eta = (1-k)\eta'$ (т.е. $\psi = (1-k)\psi'$) даёт отображение $\eta' = (\zeta + k\bar{\zeta})/(1-k)$: растяжение с коэффициентом $K = \frac{1+k}{1-k}$ по горизонтали, вертикальная координата не меняется. Наконец, замена $\eta = (1-k^2)\tilde{\eta}$ даёт аффинное отображение с растяжениями в $\sqrt{K}$ по горизонтали, $1/\sqrt{K}$ по вертикали $\Longrightarrow$ сохраняет площадь.

8. Теорема единственности. Единственность дифференциалов Тейхмюллера в каждом классе доказана ещё самим Тейхмюллером при помощи свойств ϕ-геодезических (п. 10 л. 6) и в основном всюду повторяется.

Лемма 30. *$S' = (\underline{S}, J_\mu)$ с $\mu = k\bar{\phi}/|\phi|$ и $f\colon S \to S'$ – квазиконформное отображение, гомотопное тождественному $\Longrightarrow$ $\|\mu_f\| \geqslant k$, причём равенство имеет место $\Longleftrightarrow$ $f = \mathrm{id}$ как отображение общей базы.*

$\triangleleft$ Пусть $\iota\colon S \to S'$ – тождественное отображение базы и ψ – квадратичный дифференциал на S', т.ч. $\iota^*\psi = \phi + 2k|\phi| + k^2\bar{\phi}$ (см. п. 7). Пусть ζ и η соотв. ϕ- и ψ-координаты на S, S' в окрестностях точек p, $f(p)$, где ϕ, ψ не имеют нулей и $\xi = \mathrm{Re}\,\zeta$ – параметр на ϕ-горизонтальных геодезических γ. Тогда ι в координатах ζ, η представляется аффинным отображением $\eta = \frac{\zeta + k\bar{\zeta}}{1-k}$, $\mathrm{Re}\,\eta = K\xi$, где $K = \frac{1+k}{1-k}$. Положим $\lambda_f = |f_\xi|$ и $J_f = |f_\zeta|^2 - |f_{\bar{\zeta}}|^2$. Отображение f имеет координатное представление $\eta = f(\zeta)$ и $|f \circ \gamma|_\psi = \int_\gamma \lambda_f\, d\xi$. Положим $\kappa_f = \frac{1+|\mu_f|}{1-|\mu_f|}$, $K_f = \operatorname{ess\,sup} \kappa_f$, тогда

$$\begin{aligned}\kappa_f J_f &= \frac{|f_\zeta| + |f_{\bar{\zeta}}|}{|f_\zeta| - |f_{\bar{\zeta}}|}(|f_\zeta|^2 - |f_{\bar{\zeta}}|^2) \\ &= (|f_\zeta| + |f_{\bar{\zeta}}|)^2 \geqslant |f_\zeta + f_{\bar{\zeta}}|^2 = |f_\xi|^2 = \lambda_f^2. \qquad (1)\end{aligned}$$

С каждой точкой $p' \in S'$, лежащей на свободной горизонтальной ψ-геодезической, свяжем дугу γ' этой геодезической длины $2a$ с центром p'. Сужение квазиконформного отображения $h = f \circ \iota^{-1}\colon S' \to S'$ на γ' в координатах η имеет производную по $\xi' = \mathrm{Re}\,\eta$, равную $(f_\xi \circ \iota^{-1})(\iota^{-1})_{\xi'} \Longrightarrow \lambda_h := |h_{\xi'}| = \lambda_f/K$. (см. выше представление ι в координатах ζ, η). Так как h гомотопно тождественному отображению S', то по лемме 16 л. 6 $\exists\, d < \infty$, т.ч. $2(a-d) \leqslant \int_{\gamma'} \lambda_h\, d\xi'$. Интегрируя это неравенство по $p' \in S'$ и меняя затем порядок интегрирования, получаем

$$2(a-d)\int_{S'} |\psi|\hat{} \leqslant \int_{S'}\Big(\int_{\gamma'} \lambda_h d\xi'\Big)|\psi|\hat{} = 2a\int_{S'} \lambda_h |\psi|\hat{}.$$

Устремляя $a \to \infty$, приходим к неравенству $\int_{S'} |\psi|\hat{} \leqslant \int_{S'} \lambda_h |\psi|\hat{}$. По неравенству Шварца $\int_{S'} \lambda_h |\psi|\hat{} \leqslant \big(\int_{S'} |\lambda|^2 |\psi|\hat{}\big)^{1/2}\big(\int_{S'} |\psi|\hat{}\big)^{1/2}$, откуда

$$\int_{S'} |\psi|\hat{} \leqslant \int_{S'} \lambda_h^2 |\psi|\hat{}. \qquad (2)$$

Так как $\lambda_h = \lambda_f/K$, то $\int_{S'} \lambda_h^2 |\psi|\hat{} = \frac{1}{K^2}\int_{S'} (\lambda_f^2 \circ \iota^{-1})|\psi|\hat{}$. Так как якобиан отображения ι (в координатах ζ, η) равен K, то последний интеграл равен $\frac{1}{K}\int_S \lambda_f^2 |\phi|\hat{}$. Так как $\lambda_f^2 \leqslant K_f J_f$ (см. (1)), то этот интеграл $\leqslant \frac{K_f}{K}\int_{S'}|\psi|\hat{}$. Таким образом,

$$\int_{S'}\lambda_h^2|\psi|\hat{}\leqslant \frac{K_f}{K}\int_{S'}|\psi|\hat{}.$$

Сопоставляя это с полученным выше неравенством (2), получаем, что $K_f \geqslant K$ и равенство возможно лишь когда $\lambda_h^2 = 1$ п.в.

Предположим, есть равенство, $K_f = K$ и $\lambda_h = 1$ п.в.; тогда равенства должны быть по всей цепочке, в частности, $\lambda_f^2 = KJ_f$. Отображение ι в координатах ζ, η удовлетворяет уравнению $\iota_{\bar\zeta} = k\iota_\zeta$. А как с f? Равенство $\lambda_f^2 = KJ_f$ означает, что $|f_\zeta + f_{\bar\zeta}|^2 = K(|f_\zeta|^2 - |f_{\bar\zeta}|^2)$. С другой стороны, $|f_\zeta| + |f_{\bar\zeta}| \leqslant K(|f_\zeta| - |f_{\bar\zeta}|) \Longrightarrow (|f_\zeta| + |f_{\bar\zeta}|)^2 \leqslant K(|f_\zeta|^2 - |f_{\bar\zeta}|^2) = |f_\zeta + f_{\bar\zeta}|^2 \Longrightarrow \arg f_\zeta = \arg f_{\bar\zeta}$ и $|f_{\bar\zeta}/f_\zeta| = k$ п.в. $\Longrightarrow f_{\bar\zeta} = kf_\zeta$, то же уравнение, что и для $\iota \Longrightarrow h = f\circ\iota^{-1}$ – конформное (биголоморфное) отображение S', гомотопное тождественному $\Longrightarrow h = \mathrm{id}$ (см. п. 16 л. 2) и $f = \mathrm{id}$. ▷

Предложение 7. *Во всяком классе Тейхмюллера на S $\exists$ единственный дифференциал Тейхмюллера.*

◁ В доказательстве леммы 30 мы не использовали того, что μ экстремален в своём классе, а использовали только представление $\mu = k\bar\phi/|\phi|$. Поэтому если такого вида μ_1, μ_2 эквивалентны по Тейхмюллеру, S_1, S_2 – соотв. р/п, $\iota_j\colon S \to S_j$ – тождественные отображения базы и $h\colon S_1 \to S_2$ – биголоморфизм, гомотопный тождественному, то $f = h\circ\iota_1\colon S \to S_2$ удовлетворяет условию леммы 30 $\Longrightarrow k_1 = |\mu_{\iota_1}| = |\mu_f| \geqslant k_2$. Аналогично, $k_2 \leqslant k_1 \Longrightarrow k_1 = k_2$. Но тогда f удовлетворяет условию равенства в лемме 30 $\Longrightarrow f = \mathrm{id}$ как отображение базы $\Longrightarrow h = \iota_2\circ\iota_1^{-1}$.

В ψ_j-координатах η_j отображение h имеет вид $\eta_2 = h(\eta_1)$, голоморфная функция. Так как $\iota_j^*\psi_j{}^{1/2} = \phi_j{}^{1/2} + k\overline{\phi_j{}^{1/2}}$, то $g = \iota_2^{-1}\circ h^{-1}\circ\iota_1$ имеет вид $\zeta_2 = g(\zeta_1)$, тоже голоморфна $\Longrightarrow k_1 = \mu_{\iota_1}(\zeta_1) = \mu_{h^{-1}\circ\iota_2\circ g}(\zeta_1) = \mu_{\iota_2\circ g}(\zeta_1) = \mu_{\iota_2}(\zeta_2)\overline{g'}/g' = k_2\overline{g'}/g' \Longrightarrow g' \in \mathbb{R}\setminus 0 \Longrightarrow g' \equiv \mathrm{const} \Longrightarrow \zeta_2 = c\,\zeta_1 \Longrightarrow \phi_2 = (d\zeta_2)^2 = c^2(d\zeta_1)^2 = c^2\phi_1$. ▷

Следствие. *Классы Тейхмюллера в $B_1(G)$ линейно связные.*

◁ Пусть M – связная компонента класса $[\mu] \neq [0]$ Согласно п. 5 л. 5 $\exists\,\mu_0 \in M$, т.ч. $\|\mu_0\| \leqslant \|\mu\|$, $\forall\,\mu \in M$. По предл. 6 (п. 5) и доказательству теоремы существования (п. 6) μ_0 – дифференциал Тейхмюллера. По теореме единственности Тейхмюллера, такой дифференциал в классе μ единственный $\Longrightarrow$ $[\mu] = M$ связный $\Longrightarrow$ линейно связный, так как $[\mu]$ – многообразие. Меняя базу, видим, что и класс $[0]$ линейно связный. $\triangleright$

Обозначим через $Q(G)$ множество (группу по композиции) всех квазиконформных автоморфизмов S (которую отождествляем с группой соотв. поднятий на универсальную накрывающую с неподвижными $1, i, -1$). В п. 2 мы определили подгруппу $Q_0 = Q_0(G)$, состоящую из отображений, гомотопных тождественному на $\underline{S}$ и показали, что $T\langle S\rangle = B_1(G)/Q_0$ (гомеоморфизм) и Q_0 гомеоморфно $[0]$. Теперь мы можем добавить к этому, что Q_0 – связное множество. Так как близкие квазиконформные отображения р/п конформного типа (g, n) гомотопны между собой (см. л. 2), то отсюда следует, что Q_0 – связная компонента $Q(G)$, содержащая тождественное отображение (компонента единицы).

9. Вложение Тейхмюллера. Обозначим через $\mathbb{B}$ единичный шар в конечномерном пространстве $A_2(S)$ относительно какой-нибудь фиксированной нормы $\|\cdot\|$, например, сужения L^1-нормы из $L^1_{(2,0)}(S) \supset A_2(S)$. $\forall$ дифференциала Тейхмюллера $\mu = k\bar{\phi}/|\phi|$ $\exists!$ представитель $\phi/\|\phi\| \in \partial\mathbb{B} \Longrightarrow$ имеет место гомеоморфизм $T\langle S\rangle \ni [k\bar{\phi}/|\phi|] \mapsto k\varphi/\|\varphi\| \in \mathbb{B} \Longrightarrow$

Пространство Тейхмюллера $T\langle S\rangle$ гиперболической р/п S гомеоморфно шару в $\mathbb{C}^N$ с $N = \dim_{\mathbb{C}} A_2(S)$, в частности, стягиваемо по себе в точку.

Как видно из явного представления, этот гомеоморфизм существенно зависит от выбора р/п S в качестве базовой и не очень гладкий, а в $[0]$ – всего лишь липшицев. Топологическое многообразие $\{\mu \in B_1(G)\colon \mu = k\bar{\phi}/|\phi|,\ \phi \in A_2(S),\ 0 \leqslant k < 1\}$ взаимно-однозначно проектируется на $T\langle S\rangle$ при фактор-проекции по Тейхмюллеру, т.е. является глобальным непрерывным сечением этой проекции. Как уже отмечалось, глобальных *голоморфных* сечений у этой проекции нет.

Несмотря на то, что пространства $A_2(S)$ и $A_2(S^-)$ канонически изоморфны ($\mathbb{R}$-линейным отображением комплексного сопряжения $\phi \mapsto \bar{\phi}$), связь вложений Тейхмюллера и Берса очень нелинейная:

$$\mathbb{B} \ni \phi \mapsto \mu = \|\phi\|\bar{\phi}/|\phi| \mapsto F_\mu \mapsto [F_\mu](dz)^2 \mapsto \psi \in A_2(S^-),$$

хотя это и гомеоморфизм.

* * * * *

Задачи и упражнения.

1. f однолистна в $\mathbb{D}^- = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}} \Longrightarrow \ddagger[f \circ A]\ddagger = \ddagger[f]\ddagger \ \forall A \in \operatorname{Aut}\mathbb{D}^-$.

2. $S = \mathbb{D}/G$ голоморфно эквивалентна своей зеркально симметричной р/п $(\widehat{\mathbb{C}}\setminus\overline{\mathbb{D}})/G \Longleftrightarrow \exists$ дробно-линейное C: орбита 0 по группе CGC^{-1} симметрична относительно $\mathbb{R}$.

3. Проекция Берса имеет глобальные гладкие и $\mathbb{R}$-аналитические сечения.

Структуры на пространствах Тейхмюллера

Лекция 10

Комплексная структура – Вложения в $\mathbb{C}^N$ – Псевдовыпуклость $T_{g,n}$ – Диски Тейхмюллера и метрика Кобаяси – Модулярная группа

1. Комплексная структура. Пространство Тейхмюллера $T\langle S\rangle$ р/п конформного типа (g,n) является фактором банахова шара $B_1(G)$ по отношению эквивалентности Тейхмюллера. Как показано в л. 8, классы Тейхмюллера являются комплексными подмногообразиями B_1 коразмерности $N = \dim_{\mathbb{C}} A_2(S)$ и в малой окрестности U произвольной точки $\mu_0 \in B_1$ определено голоморфное отображение $F\colon U \to \mathbb{C}^N$ максимального ранга N. В окрестности 0 $F = (F_\mu(a_1),\dots,F_\mu(a_N))$ с некоторыми $a_j \in \mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{D}}$, см. п. 12 л. 7. В окрестности 0 имеется $\mathbb{C}$-линейное сечение $\{\mu = \bar\phi/\rho^2\colon \phi\in A_2(S)\}$ этой проекции F, см. п. 11 л. 7. В окрестности μ_0 вместо индексов μ надо поставить $A(\mu,\mu_0)$, см. п. 2 л. 8.

Лемма 31. $\forall\,[\mu_0] \subset B_1(G)\ \exists$ *окрестность $\mathcal{U}$ и нигде не вырожденное голоморфное отображение $F_{\mathcal{U}}\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}^N$, т.ч. $F_{\mathcal{U}}^{-1}(F_{\mathcal{U}}(\mu)) = [\mu]\ \forall\ \mu\in\mathcal{U}$.*

$\lhd$ Так как отображение замены базы $\mu\mapsto A(\mu,\mu_0)$ является биголоморфизмом $B_1(G)$ на $B_1(G_0)$ (G_0– накрывающая группа $S_0 = (\underline{S}, J_{\mu_0})$) относительно проекции $\pi\circ(f^{\mu_0})^{-1}$), сохраняющим эквивалентность по Тейхмюллеру (см. л. 8), то достаточно построить такую окрестность для класса $[0]\subset B_1(G_\circ)$.

Отображение F окрестности $U_0 \ni 0$, указанное выше, обладает следующими свойствами: ранг F равен N всюду в U_0, $F^{-1}(F(\mu))\cap U_0 = [\mu]\cap U_0\ \forall\,\mu\in U_0$ и $\exists\mathbb{C}$-линейное N-мерное сечение Λ отображениия F, точнее, сужение $F|_{\Lambda\cap U_0}$ 1:1.

Отображение F определено и голоморфно во всём $B_1(G)$.

Пусть Σ – окрестность 0 на Λ, т.ч. $\overline{\Sigma}$ (замыкание в $B_1(G)$) принадлежит U_0, и $\mathcal{U} := F^{-1}(F(\Sigma))$. Тогда $F_{\mathcal{U}} := F|_{\mathcal{U}}$ голоморфно. Так как функции $F_\mu(a_j)$ постоянны на классах Тейхмюллера (п. 12 л. 7), то $F_{\mathcal{U}}^{-1}(F_{\mathcal{U}}(\mu))$ состоит из классов Тейхмюллера. Но по построению, каждый класс $[\nu] \subset \mathcal{U}$ пересекает Σ ровно в одной точке. Так как $F|\Sigma \to F(\Sigma)$ 1:1, то $[\nu] \subset F_{\mathcal{U}}^{-1}(F_{\mathcal{U}}(\mu)) \Longleftrightarrow [\nu] = [\mu]$.

Если Σ' – другое комплексное многообразие размерности N в $\mathcal{U}$, пересекающее каждый класс Тейхмюллера не более чем в одной точке (сечение), то $F|\Sigma' \to F(\Sigma') \subset \mathbb{C}^N$ – голоморфное 1:1 $\Longrightarrow$ биголоморфное отображение (см. прил. 2) $\Longrightarrow F_{\mathcal{U}}$ нигде не вырождено в $\mathcal{U}$. $\triangleright$

Пусть $\Pi\colon B_1(G) \to T\langle S\rangle$ – фактор-отображение (проекция) и $\{V_j\}$ – покрытие $T\langle S\rangle$ областями, т.ч. $\Pi^{-1}(V_j) =: \mathcal{U}_j$ – окрестности классов, описанные в лемме 31, с соотв. голоморфными сечениями Σ_j и отображениями $F_j : \mathcal{U}_j \to F_j(\Sigma_j)$, т.ч. $F_j|_{\Sigma_j}$ – биголоморфизмы.

Для $[\mu] \in V_j$ положим $h_j([\mu]) = F_j(\mu_j)$, где $\mu_j = [\mu] \cap \Sigma_j$; таким образом, определено непрерывное отображение $h_j\colon V_j \to \mathbb{C}^N$. Для $[\mu_0] \in V_i \cap V_j$ и $[\mu]$ в малой окрестности $V \ni [\mu_0]$ отображение $\mu_i \mapsto \mu_j$ есть описанный выше биголоморфизм H_{ij} сечений Π над окрестностью $[\mu_0] \Longrightarrow F_i(\mu_i) = F_i \circ H_{ij}(\mu_j)$ и $h_j \circ h_i^{-1}$ – голоморфное отображение $h_i(V)$ в $h_j(V)$. Таким образом, карты (V_j, h_j) составляют голоморфный атлас на $T\langle S\rangle$, определяющий на этом пространстве структуру комплексного многообразия.

Предложение 8. *S – гиперболическая р/п конформного типа $(g,n) \Longrightarrow$ на пространстве Тейхмюллера $T\langle S\rangle$ $\exists$, притом единственная, комплексная структура, относительно которой фактор-проекция $\Pi\colon B_1(G) \to T\langle S\rangle$ голоморфна и нигде не вырождена (ранга $N = \dim A_2(S)$).*

Отображение Берса $\mathcal{B}\colon T\langle S\rangle \to A_2(S^-)$ является биголоморфизмом $T\langle S\rangle$ на область в $A_2(S^-) \simeq \mathbb{C}^N$, диффеоморфную шару.

Отображение $\mu \mapsto A(\mu, \mu_0)$ замены базы S на $S_0 = (\underline{S}, J_{\mu_0})$ индуцирует биголоморфизм $T\langle S\rangle$ на $T\langle S_0\rangle$, изометричный относительно метрик Тейхмюллера.

$\triangleleft$ Единственность очевидно следует из того, что $\forall$ комплексного многообразия $\Sigma \subset B_1(G)$, т.ч. сужение $\Pi|\Sigma \to \Pi(\Sigma)$ 1:1, это сужение должно быть голоморфным $\Longrightarrow$ Оно биголоморфно относительно любой комплексной структуры J на $T\langle S\rangle$, т.ч. $\Pi\colon B_1(G) \to (T\langle S\rangle, J)$ голоморфно (здесь мы опять используем то, что голоморфное 1:1 отображение конечномерных компл. многообразий биголоморфно, см. прил. 2).

Проекция Берса $\mathcal{B}\colon B_1(G) \to A_2(S^-)$ голоморфна (п. 1 л. 8) и прообраз каждой точки из $\mathcal{B}(B_1)$ есть класс Тейхмюллера. $\Longrightarrow$ сужения $\mathcal{B}$ на описанные выше сечения Σ 1:1 $\Longrightarrow$ $\mathcal{B}\colon T\langle S\rangle \to A_2(S^-)$ – голоморфное 1:1 отображение.

Наконец, $\mu \mapsto A(\mu, \mu_0)$ – биголоморфное отображение $B_1(G)$ на $B_1(G_0)$, сохраняющее эквивалентность по Тейхмюллеру и расстояния Тейхмюллера $\Longrightarrow$ Отображение $[\mu] \mapsto [A(\mu, \mu_0)]$ обладает указанными свойствами. $\triangleright$

Последнее утверждение говорит, что пространства р/п конформного типа (g, n) для различных баз неразличимы ни как комплексные многообразия, ни как метрические (относительно метрик Тейхмюллера) пространства. Это единое комплекное многообразие обозначается $T_{g,n}$; конечно, плотная работа с ним требует выбора базы и всего с нею связанного.

2. Вложения в $\mathbb{C}^N$. Пространства Тейхмюллера $T_{g,n}$ "равномерно толстые" в след. смысле:

Лемма 32. $\exists\, r > 0$, *зависящее только от* $N = \dim_{\mathbb{C}} T_{g,n}$, *со следующим свойством*: $\forall s \in T_{g,n}$ $\exists$ *голоморфное вложение* $f\colon T_{g,n} \to \mathbb{C}^N$, *т.ч.*

$$f(s) = 0 \quad \text{и} \quad \mathbb{B}_r \subset f(T_{g,n}) \subset \mathbb{B}_1,$$

где $\mathbb{B}_R\colon |z| < R$.

$\triangleleft$ Докажем сначала следующее утверждение:

V – конечномерное нормированное $\mathbb{C}$-линейное пространство, B_1^V – единичный шар в V. $\Longrightarrow$ $\exists\, \rho = \rho_N > 0$, зависящее только от размерности N пространства V, и $\mathbb{C}$-линейный гомеоморфизм $l\colon V \to \mathbb{C}^N$, т.ч. $\mathbb{B}_\rho \subset l(B_1^V) \subset \mathbb{B}_1$.

• Индукция по N. При $N = 1$ утверждение очевидно. В общем случае фиксируем произвольный единичный вектор $v_1 \in V$ и комплексную прямую $\lambda v_1 \colon \lambda \in \mathbb{C}$. Функция λ на этой прямой $\mathbb{C}$-линейная. По теореме Хана – Банаха $\exists\,\mathbb{C}$-линейная функция z_1 на V, т.ч. $z_1(\lambda v_1) = \lambda$ и $|z_1| < 1$ в B_1^V. Гиперплоскость $V'\colon z_1 = 0$ с нормой-сужением из V является $\mathbb{C}$-линейным пространством размерности $N-1$. По предположению индукции $\exists\,\mathbb{C}$-линейное отображение $l'\colon V' \to \mathbb{C}^{N-1}$, т.ч. $\mathbb{B}'_{\rho'} \subset l'(V' \cap B_1^V) \subset \mathbb{B}'_1$, где $\rho' = \rho_{N-1} > 0$ и $\mathbb{B}'_R\colon |z'| < R$ в $\mathbb{C}^{N-1}$ с координатами $z' = (z_2, \ldots, z_N)$. Всякий вектор $v \in V$ однозначно представляется в виде $v = \lambda v_1 + v'$, где $\lambda \in \mathbb{C}$ и $v' \in V'$. Положим

$l(v) = (\lambda, l'(v'))$. Тогда $l(B_1^V)$ содержит круг $|z_1| < 1$ и шар $|z'| < \rho'$. Так как $l(B_1^V)$ – выпуклое множество, то оно содержит шар радиуса $\rho'/\sqrt{1+(\rho')^2}$ с центром в 0. Так как $|z_1| < 1$ на $l(B_1^V)$ и все точки с $z_1 = 0, |z'| = 1$ лежат вне $l(B_1^V)$, то $l(B_1^V) \subset \{|z_1| < 1, |z'| < 2\} \subset \mathbb{B}_R$, $R < 3$. •

Пусть теперь $s = [S]$ и $\mathcal{B}\colon T\langle S\rangle \to A_2(S^-) =: V$ – вложение Берса. Нормируем V, полагая $\|\phi\| = \sup\{|\tilde{\phi}|(|z|^2-1)^2,\ |z| > 1\}$, где $\tilde{\phi}(dz)^2$ – поднятие квадратичного дифференциала $\phi \in A_2(S^-)$ на универсальную накрывающую $\widehat{\mathbb{C}}\backslash\overline{\mathbb{D}}$ р/п S^-. Согласно п. 14 л. 7 $\mathcal{B}(T\langle S\rangle)$ содержится в шаре радиуса 6 и содержит шар радиуса 2 относительно этой нормы. По доказанному выше, $\exists\,\mathbb{C}$-линейный гомеоморфизм $l\colon V \to \mathbb{C}^N$, т.ч. $\mathbb{B}_\rho \subset l(B_1^V) \subset \mathbb{B}_1$, и в качестве f мы можем взять $\frac{1}{6}\, l \circ \mathcal{B}$. ▷

3. Псевдовыпуклость $\boldsymbol{T_{g,n}}$. Область $D \subset \mathbb{C}^N$ называется *областью голоморфности*, если $\exists$ функция, голоморфная в D, которая аналитически не продолжается ни в одну граничную точку D. Отрицанием этого является следующее свойство: $\exists$ точка $a \in \partial D$, шар $B \ni a$ и связная компонента U множества $D \cap B$, т.ч. $\forall f \in \mathcal{O}(D)\ \exists\, \tilde{f} \in \mathcal{O}(B)$, т.ч. $\tilde{f} = f$ в U (подробнее см. [44], [15]).

Предложение 9. *$T_{g,n}$ – область голоморфности.*

◁ Согласно лемме 32 (п. 2) $T_{g,n}$ биголоморфно эквивалентно области $D \subset \mathbb{C}^N$, лежащей в единичном шаре $\mathbb{B}_1$ и содержащей шар $\mathbb{B}_r := \{|z| < r = r_N\}$. Предположим, что утверждение неверное, т.е. $\exists$ точка $a \in \partial D$, шар $B \ni a$ и компонента $U \subset D \cap B$, т.ч. всякая голоморфная в D функция аналитически продолжается в B через U (как объяснено выше). Пусть $a_j \in U$, $a_j \to a$ при $j \to \infty$.

Согласно лемме 32 $\forall\, j\ \exists$ биголоморфизм $f_j\colon D \to D_j \subset \mathbb{C}^N$, т.ч. $f_j(a_j) = 0$ и $\mathbb{B}_r \subset D_j \subset \mathbb{B}_1$. Так как компоненты отображения f_j по модулю не превосходят 1 в D, то это это остаётся верным и после аналитического их продолжения в B (через U). По известным оценкам для голоморфных функций в шаре (даже в круге), отсюда следует, что для любого меньшего шара B', $a \in B' \Subset B$ $\exists$ константа $M < \infty$, т.ч. $|df_j| < M$ в B' для всех j. С другой стороны, так как $a_j \to a \in \partial D$, то расстояние от a_j до (какой-нибудь) ближайшей к ней точке b_j на $f_j^{-1}(\partial\mathbb{B}_r)$ стремится к 0, а образ $[0, f_j(b_j)]$ отрезка $[a_j, b_j]$ при отображении f_j имеет длину $\geqslant r_N > 0$, независимо от j.

Полученное противоречие доказывет то, что утверждается. ▷

Точно так же (с соотв. ссылкой на многомерный комплексный анализ) доказывается, что $T_{g,n}$ – область ограниченной голоморфности, т.е. $\exists$ *равномерно ограниченная* голоморфная в $T_{g,n}$ функция, которая не продолжается аналитически ни в одну точку границы (это теорема С. Л. Крушкаля).

В $\mathbb{C}^N$ класс областей голоморфности совпадает с классом псевдовыпуклых областей (см. [15]). Комплексное многообразие X псевдовыпукло, если на нём есть плюрисубгармоническая функция исчерпания, т.е. полунепрерывная сверху функция $u\colon X \to [-\infty, +\infty)$, $u \not\equiv -\infty$, т.ч. множества $\{u < c\}$ относительно компактны $\forall\, c \in \mathbb{R}$ и функция $u \circ f$ субгармонична в $\mathbb{D}$ $\forall$ голоморфного отображения $f\colon \mathbb{D} \to X$. Это определение не требует понятия граничной точки и во многих отношениях более удобно. Доказанное предложение эквивалентно тому, что на $T_{g,n}$ есть *гладкая строго плюрисубгармоническая* функция исчерпания, но это требует ещё дополнительных ссылок (u строго плюрисубгармонична, если функция $u \circ f$ строго субгармонична $\forall$ голоморфного диска $f\colon \mathbb{D} \to X$ с нигде не вырожденным дифференциалом.)

На самом деле о псевдовыпуклости $T_{g,n}$ можно сказать намного больше. С. Л. Крушкаль [35] доказал, что $T_{g,n}$, вложенное, как выше в $\mathbb{C}^N$, является *полиномиально выпуклой* областью (по-другому, областью Рунге). Он же показал, что на этом пространстве есть так называемая *плюрикомплексная функция Грина* с произвольно заданным полюсом, точнее, плюрисубгармоническая функция $g(z, w) < 0$, т.ч. множества $\{z\colon g(z, w) < -\varepsilon\}$ компактны $\forall \varepsilon > 0$ (используем координатное вложение в $\mathbb{C}^N$) и сужения $g(z, w)$ на все диски Тейхмюлера, проходящие через w, гармоничны вне w (см. [33], [34]). В частности, на $T_{g,n}$ есть *ограниченная сверху* плюрисубгармоническая функция исчерпания (такие многообразия называются ещё *гипервыпуклыми*).

Функция Грина $T_{g,n}$ замечательным образом связана с метрикой Тейхмюллера, а именно, $g(z, w) = \log \operatorname{th} \tau(z, w)$, из чего следует ещё ряд интересных свойств конечномерных пространств $T_{g,n}$. Однако, их доказательство требует привлечения совсем другой техники, чем разработанная выше (в частности, техники так называемых голоморфных движений), поэтому мы здесь лишь констатируем результаты, отсылая заинтересованного читателя к статьям Крушкаля.

4. Диски Тейхмюллера и метрика Кобаяси. S – р/п конформного типа (g,n). $\forall\ \phi \in A_2(S)\setminus 0$ определено голоморфное отображение $\mathbb{D} \ni \lambda \mapsto \lambda\bar\phi/|\phi| \in B_1(G)$ и дальнейшая проекция $\lambda \mapsto \Pi(\lambda\bar\phi/|\phi|)$ в $T\langle S\rangle$. Её образ Δ называется *диском Тейхмюллера* с центром в $[0]$. Так как $\lambda\bar\phi/|\phi| = |\lambda|\overline{e^{it}\phi}/|e^{it}\phi|$, $t = -\arg\lambda$, то все точки диска Δ являются дифференциалами Тейхмюллера.

Диск Тейхмюллера с центром $[\mu_0]$ определяется как прообраз такового с центром в $[0] \in T\langle S_{\mu_0}\rangle$ при описанном выше биголоморфизме (замене базы) $T\langle S\rangle \to T\langle S_{\mu_0}\rangle$. По теореме единственности (л. 9) $\mathbb{D} \to \Delta$ 1:1. Так как дифференциалы $\lambda\bar\phi/|\phi|$ покидают любой шар B_r, $r<1$, при $|\lambda| \to 1$, то отображение $\lambda \mapsto \Pi(\lambda\bar\phi/|\phi|)$ являются собственным (прообраз любого компакта – компакт).

Предложение 10. $\forall\ [\mu_1] \ne [\mu_2] \in T\langle S\rangle\ \exists!$ *(с точностью до дробно-линейной замены параметра λ) диск Тейхмюллера $f\colon \mathbb{D} \to \Delta$, проходящий через эти точки. Если λ_1, λ_2 – соотв. этим точкам значения параметра λ, то $\tau([\mu_1],[\mu_2]) = \frac12 \log\kappa\bigl(\bigl|\frac{\lambda_2-\lambda_1}{1-\bar\lambda_1\lambda_2}\bigr|\bigr)$, т.е. отображение f является изометрией относительно метрики Тейхмюллера в $T\langle S\rangle$ и метрики Пуанкаре в $\mathbb{D}$.*

(Здесь $\kappa(x) = \frac{1+x}{1-x}$.)

$\triangleleft$ При доказательстве $\exists$ и единственности можно считать $\mu_1 = 0$. По теореме Тейхмюллера, в классе $[\mu_2] \subset B_1\ \exists!$ дифференциал Тейхмюллера $k\bar\phi/|\phi| \Longrightarrow [\mu_2] = \Pi(k\bar\phi/|\phi|)$ лежит в образе отображения $\lambda \mapsto \Pi(\lambda\bar\phi/|\phi|)$ и имеет параметр $\lambda = k$; при этом $\tau([0],[\mu_2]) = \tau(0, k\bar\phi/|\phi|) = \frac12\log\frac{1+k}{1-k}$.

Далее можно считать, что $\mu_j = \lambda_j\bar\phi/|\phi|$ – дифференциалы Тейхмюллера. Пусть $\phi_j = \phi\bar\lambda_j/|\lambda_j|$, $S_j = (\underline{S}, J_{\mu_j})$ и $\iota_j\colon S \to S_j$ – тождественные отображения базы. Согласно п. 7 л. 9 на S_j есть квадратичный дифференциал ψ_j, т.ч. в соотв. ϕ_j- и ψ_j-координатах эти отображения ι_j являются деформациями Тейхмюллера, точнее, аффинными растяжениями по ϕ_j-горизонтальным геодезическим. В окрестности точки $p \in \underline{S}$, где ϕ_j, ψ_j не имеют нулей, это координаты ζ_j, η_j, т.ч. $(d\zeta_j)^2 = \phi_j$ и $(d\eta_j)^2 = \psi_j$.

Отображения ι_j имеют вид $\eta_j = \frac{\zeta_j + k\bar\zeta_j}{1-k_j}$, обратные к ним $\zeta_j = \frac{\eta_j - k_j\bar\eta_j}{1+k_j}$. Так как $\zeta_2 = e^{i\theta}\zeta_1$, $\theta = \frac12\arg\lambda_2/\lambda_1$, то отсюда

$$\eta_2 = \bigl((e^{i\theta} - k_1k_2e^{-i\theta})\eta_1 + (k_2e^{-i\theta} - k_2e^{i\theta})\bar\eta_1\bigr)/(1+k_1)(1-k_2)$$

– $\mathbb{R}$-линейное преобразование с коэффициентом Бельтрами $\frac{\lambda_1-\lambda_2}{1-\bar\lambda_1\lambda_2}$ $\Longrightarrow$ Отображение $\iota_2\circ\iota_1^{-1}\colon S_1\to S_2$, тождественное на общей базе, является деформацией Тейхмюллера на р/п S_1 (с точностью до замены ψ_1 на $e^{ic}\psi_1$ с подходящей c) $\Longrightarrow$ Соотв. ему дифференциал Бельтрами с модулем $\left|\frac{\lambda_1-\lambda_2}{1-\bar\lambda_1\lambda_2}\right|$ является дифференциалом Тейхмюллера. Так как замены базы являются изометриями относительно метрики Тейхмюллера (предл. 1 п. 1), то $\tau([\mu_1],[\mu_2])=d_\Pi\bigl(|\frac{\lambda_1-\lambda_2}{1-\bar\lambda_1\lambda_2}|,0\bigr)$. $\triangleright$

Диаметры в $\mathbb{D}$ – геодезические относительно метрики Пуанкаре $\Longrightarrow$ по доказанному, их образы в дисках Тейхмюллера являются геодезическими относительно метрики Тейхмюллера. Учитывая это свойство, диски Тейхмюллера называются также геодезическими дисками в $T\langle S\rangle$.

Семейство дисков Тейхмюллера, проходящих через фиксированную точку в $T\langle S\rangle$, очевидно, компактно. Поэтому, переходя к пределам при $[\mu_2]\to[\mu_1]$, получаем

Следствие 1. *Через каждую точку $T\langle S\rangle$ в любом заданном направлении проходит единственный диск Техмюллера.*

$\triangleleft$ Существование обосновали.

Доказательство единственности достаточно провести в базовой точке $[0]$. Пусть μ_j – дифференциалы Тейхмюллера, $\mu_j\to 0$ так, что $\mu_j/\|\mu_j\|\to\nu$, Δ_j – диски Тейхмюллера, содержащие $[0]$ и $[\mu_j]$, соотв., и Δ – диск Тейхмюллера, проходящий через $[0]$ и $[\nu/2]$. Тогда $[\mu_j/2\|\mu_j\|]\in\Delta_j$ и стремятся к $[\nu/2]$ $\Longrightarrow$ Предельный для Δ_j диск Тейхмюллера пересекает Δ в двух точках $\Longrightarrow$ (по предл. 10) совпадает с ним. $\triangleright$

Следствие 2. *Определённая в п. 1 комплексная структура на $T\langle S\rangle$ – это единственная комплексная структура, относительно которой все диски Техмюллера в $T\langle S\rangle$ голоморфны.*

Метрика Тейхмюллера на $T_{g,n}$ полностью определяется комплексной структурой, как объясняется ниже.

$\forall\, z,w\in T_{g,n}$ обозначим $d_1(z,w)=\inf\{d_\Pi(0,f^{-1}(z)\}$, где inf берётся по всем голоморфным отображениям $f\colon\mathbb{D}\to T_{g,n}$, т.ч. $f(0)=w$ и d_Π – расстояние Пуанкаре в $\mathbb{D}$. Положим

$$d_k(z,w)=\inf\Sigma_1^k\, d_1(p_{j-1},p_j),$$

где inf берётся по всем наборам из $k+1$ точек $z=p_0,p_1,\dots,p_k=w$. Ясно, что $d_k(z,w)$ не возрастает с ростом k и, значит, $\exists$

$\lim_{k\to\infty} d_k(z,w) =: d_K(z,w)$, который называется *расстоянием Кобаяси* между z и w. В общем это всего лишь псевдометрика (расстояние между различными точками может равняться нулю), но в ограниченных областях в $\mathbb{C}^N$ это обычное расстояние со стандартными свойствами.

Напомним, что если $f\colon \mathbb{D} \to T_{g,n}$ – диск Тейхмюллера с $f(0) = w$, $f(\lambda) = z$, то $\tau(z,w) = d_\Pi(0,\lambda)$ и, следовательно,

$$\tau(z,w) \geqslant d_1(z,w) \geqslant d_K(z,w).$$

Доказательство обратного неравенства значительно сложнее, а вместе они составляют известную теорему Ройдена–Гардинера (см. [40], [25], [20]) о том, что

Метрика Тейхмюллера на $T_{g,n}$ совпадает с метрикой Кобаяси.

(Как обычно, предполагается, что р/п конформного типа (g,n) гиперболична.) Из определения метрики Кобаяси очевидно следует, что она (а значит, и метрика Тейхмюллера) инвариантна относительно голоморфных автоморфизмов комплексного многообразия $T_{g,n}$ (см. ниже).

5. Модулярная группа. Как уже отмечалось в п. 2 л. 8, квазиконформное отображение $f\colon S \to S$ гомотопное тождественному, сохраняет все классы Тейхмюллера и соотв. отображение $[\mu] \mapsto [\mathcal{A}(\mu,\mu_f)]$ пространства $T\langle S\rangle$ тождественное. Какие ещё квазиконформные отображения обладают этим свойством? Если f – биголоморфизм (а топология любая), то его дифференциал Бельтрами равен нулю, как и у тождественного отображения, т.е. на уровне $B_1(S)$ это f неотличимо от тождественного. На универсальной накрывающей оно соответствует замене координаты z на другую дробно-линейную координату и замене накрывающей группы G группой CGC^{-1} с некоторым $C \in \operatorname{Aut}\mathbb{D}$. Таким образом, на уровне универсальных накрытий и накрывающих групп отличие f от тождественного ещё заметно, но на шаре $B_1(S)$ дифференциалов Бельтрами, не зависящем от поднятий в $\mathbb{D}$, это отличие исчезает, f соответствует дифференциалу $\equiv 0$.

Напомним обозначение: $Q_0 = Q_0(S)$ – группа квазиконформных автоморфизмов S, гомотопных тождественному. Это, очевидно, нормальная подгруппа группы $Q = Q(S)$ всех квазиконформных автоморфизмов р/п S (т.е., $g \circ f \circ g^{-1} \in Q_0$ для всех $f \in Q_0$, $g \in Q$). Через Q_0^* обозначим минимальную нормальную подгруппу в Q, содержащую Q_0 и $\operatorname{Aut} S$ (нормализатор подгруппы, порождаемой совместно Q_0 и $\operatorname{Aut} S$). Из определения очевидно следует, что Q_0^* состоит в точности из тех квазиконформных автоморфизмов $f\colon S \to S$, которые индуцируют тождественное преобразование $T\langle S\rangle$; для остальных f замена базы уже нетривиальна. (Несложно доказывается, что $\operatorname{Aut} S = \{\mathrm{id}\}$, т.е. $Q_0^* = Q_0$, для "п.в." S, точнее, множество классов Тейхмюллера тех р/п, которые имеют голоморфные автоморфизмы, отличные от тождественного, является собственным комплексно-аналитическим подмножеством $T\langle S\rangle$, в частности, его вещественная коразмерность $\geqslant 2$; мы этим пользоваться не будем.)

Для любого квазиконформного $f\colon S \to S$ оператор замены базы $\mu \mapsto \mathcal{A}(\mu, \mu_f)$ (при фиксированном универсальном накрытии) переводит классы Тейхмюллера друг в друга. Таким образом, группа $Q = Q(S)$ всех квазиконформных автоморфизмов S голоморфно действует на $B_1(S)$ и на классах Тейхмюллера. Её нормальная подгруппа Q_0^* действует на классы тождественно и, значит, на $T\langle S\rangle$ определено голоморфное действие фактор-группы Q/Q_0^*, которая называется *модулярной группой* р/п S и обозначается $\operatorname{Mod}(S)$. Если $f \in Q$, то соотв. элемент $f^* \in \operatorname{Mod}(S)$ действует по правилу $[\mu] \mapsto [\mathcal{A}(\mu, \mu_f)]$. Теорема Ройдена [40], которую мы здесь не разбираем, утверждает, что $\operatorname{Aut} T\langle S\rangle = \operatorname{Mod}(S)$, т.е. модулярная группа совпадает с группой всех голоморфных автоморфизмов пространства Тейхмюллера, и уже одно это показывает её важность для всей теории.

Какие классы Тейхмюллера можно получить из базового $[S]$ действием $\operatorname{Mod}(S)$? Более общó, каковы орбиты $\operatorname{Mod}(S)$ на $T\langle S\rangle$?

Предположим, что действие $\operatorname{Mod}(S)$ не является собственно разрывным в некоторой точке; без ограничения общности можно считать, что это точка $[S] \Longrightarrow \forall$ окрестности $U \ni [S]$ есть последовательность различных элементов $f_\nu^* \in \operatorname{Mod}(S)$ таких, что $f_\nu^*(U) \cap U$ непусто. Диагональным процессом выделяем последовательность различных f_k^*, т.ч. $f_k^*[S] \to [S]$. По определению, $f_k^*[S]$ есть класс Тейхмюллера р/п $S_k' = (\underline{S}, (f_k^{-1})^* J)$. Сходимость означает, что есть $S_k'' \approx S_k'$, т.ч. $S_k'' \to S$ по метрике Тейхмюллера, и есть биголоморфизмы $H_k\colon S_k' \to S_k''$, гомотопные тождественным. Рассматривая H_k как отображения базы S, мы получаем, что $H_k \in Q_0$ и $H_k \circ f_k \to \mathrm{id}$. Так как H_k гомотопны тождественному, то отсюда и п. 15 л. 2 следует, что f_k гомотопны тождественному (т.е. $\in Q_0$) для всех достаточно больших k. Но тогда

$f_k^* = \mathrm{id}$ для $k \gg 1$, а это противоречит предположению, что все f_k^* различны. Таким образом, мы получаем, что $\mathrm{Mod}(S)$ действует на $T\langle S\rangle$ вполне разрывно. Так как отображения f^* являются изометриями в метрике Тейхмюллера, то отсюда ещё следует, что орбиты $\mathrm{Mod}(S)$ на $T\langle S\rangle$ дискретны.

А какие классы Тейхмюллера лежат в одной орбите относительно $\mathrm{Mod}(S)$?

Лемма 33. $[S_2] = f^*[S_1]$ *для некоторого* $f \in Q \iff S_2$ *голоморфно эквивалентна* S_1 (*т.е.* $S_2 \sim S_1$, *эквивалентность по Риману*).

$\triangleleft$ 1) $\to$ 2). Пусть $\iota_1\colon S \to S_1$ квазиконформное отображение, тождественное на базе $\underline{S}$, с дифференциалом Бельтрами μ_1, μ_1' – дифференциал Бельтрами отображения $\iota_1 \circ f^{-1}$, S_1' – соотв. р/п и $\iota_1'\colon S \to S_1'$ – тождественное отображение $\underline{S}$. Тогда ι_1' имеет тот же дифференциал Бельтрами $\mu_1' \implies$ отображение $\iota_1 \circ f^{-1} \circ (\iota_1')^{-1}\colon S_1' \to S_1$ биголоморфно. Так как коэффициент поднятия дифференциала Бельтрами отображения $\iota_1 \circ f^{-1}$ на универсальную накрывающую равен $\mathcal{A}(\mu, \mu_f)$ то 1) одначает, что $S_2 \approx S_1' \implies S_2$ и S_1 голоморфно эквивалентны.

2) $\to$ 1). 2) $\implies \exists$ биголоморфизм $h\colon S_1 \to S_2$. Соотв. ему отображение базы $g_2^{-1} \circ h \circ g_1 =: f\colon S \to S$ квазиконформно. Так как $g_1 \circ f^{-1} = h^{-1} \circ g_2$ и h^{-1} голоморфно, то дифференциалы Бельтрами g_2 и $g_1 \circ f^{-1}$ совпадают $\implies S_1'$ (образ S_1 под действием f, соотв. дифференциалу Бельтрами $g_1 \circ f^{-1}$) и S_2 (соотв. дифференциалу Бельтрами g_2) эквивалентны по Тейхмюллеру. $\triangleright$

Таким образом, классы эквивалентности в $T\langle S\rangle$ по действию $\mathrm{Mod}(S)$ – это в точности классы Римана голоморфно эквивалентных р/п в $\langle S\rangle$.

По теореме А. Картана (продвинутый многомерный комплексный анализ), фактор комплексного многообразия по собственно разрывному действию подгруппы биголоморфных автоморфизмов является нормальным комплексным пространством. Не расшифровывая всей терминологии, укажем только, что из этого следует, что у каждой точки такого пространства есть окрестность, которая допускает голоморфное вложение в комплексно-аналитическое подмножество в некотором $\mathbb{C}^l$. Это в общем не комплексное многообразие, но в нём есть особое замкнутое комплексное подпространство комплексной коразмерности $\geqslant 2$, дополнение к которому уже является комплексным многообразием, Особые точки в нашем случае – это в точности фактор-проекции тех классов Тейхмюллера, элементы которых допускают нетривиальные автоморфизмы (так, например, все гиперэллиптические классы в $T\langle S\rangle$ проектируются в особые точки $R(S)$).

Подведём итог:

Предложение 11. *S – гиперболическая р/п конформного типа $(g, n) \Longrightarrow$ Группа $\mathrm{Mod}(S)$ действует на $T\langle S\rangle$ как группа биголоморфных автоморфизмов, изометричных относительно метрики Тейхмюллера, причём это действие собственно разрывное (дискретное). Фактор-пространство $T\langle S\rangle / \mathrm{Mod}(S)$ есть пространство Римана $R_{g,n}$.*

Мамфорд и др. доказали (см. [31]), что комплексное пространство $R_{g,n}$ является квазипроективным, т.е. голоморфно вкладывается в некоторое $\mathbb{CP}^l$ в виде $A \setminus B$ где A и B – алгебраические подмножества $\mathbb{CP}^l$ (множества общих нулей некоторых наборов однородных многочленов). Но это уже за пределами нашего курса.

Лекция 11

Тейхмюллер → Торелли – $T_{g,n+1} \to T_{g,n}$ – Универсальные семейства р/п – Классифицирующие отображения

6. Тейхмюллер → Торелли. Для фиксированной базовой р/п S естественно определена фактор-проекция $\lambda\colon T\langle S\rangle \to \mathcal{T}(S)$ пространства Тейхмюллера на пространство Торелли: классы Тейхмюллера $[S'], [S'']$ эквивалентны по Торелли, если (какие-нибудь, а тогда и любые) их представители эквивалентны по Торелли, т.е. $\exists$ биголоморфизм $S' \to S''$, гомологичный тождественному на общей гладкой базе.

Далее предполагаем, что S – конформного типа (g, n).

Так как классы Торелли являются объединениями соотв. классов Тейхмюллера, то $T\langle S\rangle$ разбивается на подмножества $[S']_{\mathcal{T}}$, состоящие из классов Тейхмюллера, представители которых эквивалентны по Торелли. Обозначим через $I_{\mathcal{T}} \subset \mathrm{Mod}(S)$ подгруппу преобразований, переводящих каждое множество $[S']_{\mathcal{T}}$ в себя; тогда $\mathcal{T}(S)$ как множество естественно отождествляется с $T\langle S\rangle/I_{\mathcal{T}}$. Покажем, что отображения из $I_{\mathcal{T}}$ не имеют в $T\langle S\rangle$ неподвижных точек.

Предположим противное. Тогда $\exists$ квазиконформное отображение $f\colon S \to S$, не гомотопное, но гомологичное тождественнному, которому соответствует биголоморфизм f^* пространства Тейхмюллера $T\langle S\rangle$, т.ч. $f^*[S'] = [S']$ для некоторого класса $[S'] \in T\langle S\rangle$. По построению f^* (л. 10 п. 5), $\exists$ р/п $S'' \approx S'$ и биголоморфизм $h\colon S' \to S''$, совпадающий с f на базе $\underline{S}$, в частности, гомологичный тождественному. Так как $S'' \approx S'$, то есть также биголоморфизм $g\colon S'' \to S'$, гомотопный тождественному на $\underline{S}$. Но тогда $g \circ h\colon S' \to S'$ – биголоморфизм, гомологичный тождественному на $\underline{S}$ и, значит, сам тождественный по лемме 7 л. 2 $\Longrightarrow$ Отображение $h = g^{-1}$ гомотопно тождественному $\Longrightarrow$ f гомотопно тождественному, в противоречии с исходным предположением.

Итак, $I_{\mathcal{T}}$ действует на $T\langle S\rangle$ собственно разрывно (как подгруппа в $\mathrm{Mod}(S)$) и без неподвижных точек $\Longrightarrow$ $\mathcal{T}(S) = T\langle S\rangle/I_{\mathcal{T}}$ наделяется структурой комплексного многообразия, однозначно определяемой условием, что $T\langle S\rangle \to T\langle S\rangle/I_{\mathcal{T}}$ – голоморфное накрытие. Замена базы в $T\langle S\rangle$ голоморфна, изометрична относительно метрики Тейхмюллера и переводит множества $[S']_{\mathcal{T}}$ в такие же. Поэтому многообразия $\mathcal{T}(S)$ для различных баз одинакового конформного типа (g, n) биголоморфно эквивалентны и таким образом определено общее абстрактное комплексное многообразие $\mathcal{T}_{g,n}$ (биголоморфно эквивалентное $\mathcal{T}(S)$); при этом на $\mathcal{T}_{g,n}$ естественно определено расстояние Тейхмюллера, так что накрытие $T_{g,n} \to \mathcal{T}_{g,n}$ является локальной изометрией.

На $\mathcal{T}_{g,n}$ очевидно действует группа $\mathrm{Mod}_{g,n}/I_{\mathcal{T}}$, которая по теореме Ройдена совпадает с $\mathrm{Aut}\,\mathcal{T}_{g,n}$. Как и для $T\langle S\rangle$, по (другой) теореме Ройдена, расстояние Тейхмюллера в $\mathcal{T}_{g,n}$ совпадает с расстоянием Кобаяси (см. [44], с. 388).

Остаётся ещё заметить, что $T_{g,n}$ – односвязное многообразие и, значит, фактор-проекция $T_{g,n} \to \mathcal{T}_{g,n}$ является универсальным накрытием. Таким образом, доказано следующее.

Предложение 12. *Пространство Торелли $\mathcal{T}_{g,n}$ есть комплексное многообразие, универсальная накрывающая которого биголоморфно эквивалентна $T_{g,n}$.*

(Как обычно, мы рассматриваем только те пары (g, n), для которых соотв. пространства нетривиальны, т.е. не одноточечны; таким образом, здесь исключаются типы $(0, n)$ с $n \leqslant 3$. Случай торов разобран в л. 3.)

Следствие [10]. $T_{0,3+n}$ – *универсальная накрывающая области*

$$M_n = (\mathbb{C} \setminus \{0, 1\})^n \setminus \left(\bigcup_{i \neq j} \{\lambda_i = \lambda_j\} \right) \subset \mathbb{C}^n_\lambda.$$

$\triangleleft$ Согласно л. 4 п. 12, M_n гомеоморфна $\mathcal{T}_{0,3+n}$ и надо только показать, что описанный там гомеоморфизм $\pi_{\mathcal{T}} \colon \mathcal{T}_{0,3+n} \to M_n$ является голоморфным отображением комплексных многообразий, т.е. комплексно дифференцируемым в каждой точке по всем направлениям. А это, как уже обычно, достаточно проверить в базовой точке $[S]_{\mathcal{T}}$. Пусть ϕ – квадратичный дифференциал на S и $\tau\bar{\phi}/|\phi|$, $\tau \in \mathbb{D}$, – соотв. диск Тейхмюллера, проекция которого в $\mathcal{T}_{0,3+n}$ голоморфна по определению комплексной структуры в $\mathcal{T}_{0,3+n}$. Обозначим через f_τ квазиконформный гомеоморфизм $\widehat{\mathbb{C}}$ с дифференциалом Бельтрами $\tau\bar{\phi}/|\phi|$ и фиксированными точками $0, 1, \infty$. По теореме Альфорса – Берса (см. [8] и л. 5 упр. 6), это отображение голоморфно зависит от параметра τ. В частности, если $S = \mathbb{C} \setminus \{0, 1, \lambda^0_1, \ldots, \lambda^0_n\}$, то точки $\lambda_j = f_\tau(\lambda^0_j) \in \mathbb{C}$ голоморфно зависят от $\tau \in \mathbb{D}$. По построению в л. 4 п. 12, $\pi_{\mathcal{T}}$ отображает класс Торелли, соответствующий дифференциалу Бельтрами

$\tau\bar{\phi}/|\phi|$, в $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in M_n \Longrightarrow \pi_{\mathcal{T}}$ голоморфно по τ. Так как дифференциалы Тейхмюллера представляют все направления в точке $[S]_{\mathcal{T}}$, то отображение $\pi_{\mathcal{T}}$ голоморфно. Так как оно 1:1, то оно биголоморфно и, значит, $\mathcal{T}_{0,3+n} = M_n$ как комплексные многообразия. ▷

7. $\mathbf{T_{g,n+1} \to T_{g,n}}$**.** Канонические решения F_μ уравнений Бельтрами задают над $T(G)$, где $G \subset \operatorname{Aut}\mathbb{D}$ – фуксова группа, расслоенное пространство

$$F(G) = \big\{([\mu], w)\colon \mu \in B_1(G),\ w \in F_\mu(\mathbb{D})\big\} \subset T(G) \times \mathbb{C}$$

с естественной проекцией $([\mu], w) \mapsto [\mu]$ в $T(G)$ и "вертикальными" слоями $D_\mu = F_\mu(G)$ (не зависящими от выбора μ в классе Тейхмюллера, см. п. 12, л. 7). Дополнение к нему в $T(G) \times \widehat{\mathbb{C}}$ расслаивается на (попарно не пересекающиеся) комплексные гиперповерхности $\Gamma_a\colon w = F_\mu(a)$, $a \in \mathbb{D}^-$, и отображение $([\mu], z) \mapsto ([\mu], F_\mu(z))$ является биголоморфизмом $T(G) \times \mathbb{D}^-$ на $(T(G) \times \widehat{\mathbb{C}}) \setminus \overline{F(G)}$, который продолжается непрерывно на $T(G) \times \partial\mathbb{D}$. Комплексные (голоморфные) гиперповерхности Γ_a, $a \in \partial\mathbb{D}$, расслаивают также границу $F(G)$ так сказать, в "горизонтальном" направлении, но само $F(G)$ в общем не допускает глобальных голоморфных сечений проекции F. (Непрерывные, а значит, и гладкие сечения есть; например, если обозначить через $\tau(\mu)$ коэффициент дифференциала Тейхмюллера, единственного в классе $[\mu]$, то $\{w = F_{\tau(\mu)}(a)\}$, $a \in \mathbb{D}$, – глобальные непрерывные сечения проекции F.)

Если группы G_1, G_2 сопряжены в $\operatorname{Aut}\mathbb{D}$ (р/п $\mathbb{D}/G_1$ и $\mathbb{D}/G_2$ голоморфно эквивалентны), то расслоенные пространства $F(G_1)$, $F(G_2)$ тоже голоморфно эквивалентны, причём так, что вертикальные слоения сохраняются (упр. 3). Поэтому корректно определены абстрактные комплексные многообразия $F_{g,n}$ соотв. р/п конформного типа (g, n) и голоморфные проекции $f\colon F_{g,n} \to T_{g,n}$ со слоями, голоморфно эквивалентными кругу.

Пусть $S = \mathbb{D}/G$ и $\pi\colon \mathbb{D} \to S$ – фактор-проекция. Фиксируем произвольную точку $a \in \mathbb{D}$ и через S' обозначим р/п $S \setminus b$, где $b = \pi(a)$. Шар $B_1(S)$ дифференциалов Бельтрами на S биголоморфно эквивалентен шару $B_1(G)$ (отображение $\underline{\mu} \mapsto \mu$, где $\mu\, d\bar{z}/dz = \pi^*\underline{\mu}$), поэтому пространство $T(G)$ можно интерпретировать как $B_1(S)/Q_0(S)$, где $Q_0(S)$ – группа квазиконформных автоморфизмов S, гомотопных тождественному (см. п. 2 л. 8). Так как дифференциалы Бельтрами класса L^∞ определены лишь почти всюду, то $B_1(S') = B_1(S)$. Так как всякий квазиконформный автоморфизм S' непрерывно продолжается в точку b до квазиконформного автоморфизма S, то $Q_0(S')$ – подгруппа в $Q_0(S)$, состоящая из отображений с неподвижной точкой b $\Longrightarrow$ Классы Тейхмюллера $[\mu]' \in T\langle S'\rangle$, рассматриваемые как подмножества $B_1(S') = B_1(S)$ целиком содержатся в соотв. классах $[\mu] \in T\langle S\rangle \Longrightarrow$ Имеет место естественное отображение (проекция) $P\colon T\langle S'\rangle \to T\langle S\rangle$, $[\mu]' \mapsto [\mu]$, очевидно, голоморфное, так как любой голоморфный диск в $B_1(S')$ является таковым и $B_1(S)$ и комплексные структуры в пространствах Тйхмюллера эту голоморфность наследуют.

При замене базы $S \to S_1$ группа $Q_0(S)$ переходит в $Q_0(S_1)$ и т.д. $\Longrightarrow$ Определённая выше проекция P переносится и на абстрактные пространства Тейхмюллера, $P\colon T_{g,n+1} \to T_{g,n}$. Размерность $T_{g,n+1}$ на 1 выше размерности $T_{g,n}$, так что проекции P и f весьма похожи, что и подтверждается следующей теоремой Берса (см. [7], 5.3.2).

Предложение 13. *Существует биголоморфное отображение* $\alpha\colon T_{g,n+1} \to F_{g,n}$, *т.ч.* $f \circ \alpha = P$. *Если* S *– р/п конформного типа* (g,n), $\pi\colon \mathbb{D} \to S$ *– универсальное накрытие,* $a \in \mathbb{D}$, $b = \pi(a)$ *и* $S' = S \setminus b$, *то* α *реализуется как отображение*

$$\alpha\colon [\mu]' \mapsto ([\mu], w) = (P([\mu]'), F_\mu(a)),$$

где $\mu \in B_1(G')$ *и* $[\mu]'$ *– класс Тейхмюллера в* $T(G') = T\langle S'\rangle$.

$\triangleleft$ Между прочим, здесь говорится, что если μ_0, μ_1 эквивалентны по Тейхмюллеру в $B_1(G')$, то $F_{\mu_0}(a) = F_{\mu_1}(a)$. Вот и начнём с доказательства этого утверждения.

Обозначим через f_0, f_1 нормальные решения уравнений Бельтрами с коэффициентами μ_0, μ_1 соотв. Тогда $f_0 = f_1$ на $\partial\mathbb{D}$ и, значит, накрывающие группы G_j р/п $S_j = (\underline{S}, J_{\mu_j})$ совпадают. Так как f_j накрывают соотв. отображения $S \to S_j$, тождественные на общей гладкой базе, то $f_j(a)$ лежат в G_0-орбите точки a. Так как группа $G_0 = G_1$ дискретна, то $\exists\, \varepsilon > 0$, т.ч. расстояния Пуанкаре между любыми двумя различными точками этой орбиты $> \varepsilon$ (напомним, что расстояние Пуанкаре инвариантно относительно $\operatorname{Aut}\mathbb{D}$) $\Longrightarrow$ Если $\tau(\mu_0, \mu_1)$ достаточно мало, то отсюда следует, что $f_0(a) = f_1(a)$. Теперь вспомним, что классы Тейхмюллера линейно связные (п. 8 л. 9) $\Longrightarrow \exists$ путь $\mu_t \in [\mu]'$, соединяющий μ_0, μ_1. Множество $\{t\colon f_t(a) = f_0(a)\}$, по доказанному выше, открыто и, очевидно, замкнуто в $[0,1]$. $\Longrightarrow f_1(a) = f_0(a)$. Остаётся заметить, что $F_{\mu_0} = F_{\mu_1}$ на $\partial\mathbb{D} \Longrightarrow F_{\mu_j} = h \circ f_j$, где $h\colon \mathbb{D} \to D_{\mu_0}(= D_{\mu_1} = D_\mu)$ – конформное отображение (см. п. 12 л. 7).

Теперь покажем, что $\{F_\nu(a)\colon \nu \in [\mu]\} = D_\mu$, т.е. отображение α сюръективно. Как и выше, достаточно показать, что $\{f^\nu(a)\colon \nu \in [\mu]\} = \mathbb{D}$ для соотв. нормированных решений f^ν. Так как это утверждение не зависит от выбора базовой р/п, то достаточно доказать его для класса $[0]$. Пусть $a_t = a + t(a_1 - a) \in \mathbb{D}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Тогда, очевидно, $\exists$ непрерывное семейство квазиконформных диффеоморфизмов $g_t\colon S \to S$, т.ч. $g_0 = \mathrm{id}$ и $g_t(b) = \pi(a_t)$. Пусть μ_t есть коэффициент Бельтрами в $\mathbb{D}$, который получается из π-поднятия дифференциала Бельтрами отображения g_t, $S_t = (\underline{S}, J_{\mu_t})$ и f_t – нормальное решение уравнения Бельтрами с коэффициентом μ_t. Тогда $\mu_t \approx 0$, $f_t(z) \equiv z$ на $\partial\mathbb{D}$ и f_t накрывает отображение $S \to S_t$, тождественное на базе $\underline{S}$, с тем же дифференциалом Бельтрами, что и у g_t. Так как g_t гомотопно тождественному на $\underline{S}$, то (п. 17 л. 2) $\exists$ его π-поднятие $\tilde{g}_t$, т.ч. $\tilde{g}_t(z) \equiv z$ на $\partial\mathbb{D}$. Но тогда f_t и $\tilde{g}_t$ являются решениями одного и того же уравнения Бельтрами и совпадают на $\partial\mathbb{D} \Longrightarrow \tilde{g}_t \equiv f_t$, т.е. f_t накрывает g_t, $\pi \circ f_t = g_t \circ \pi$. Так как $g_t(b) = \pi(a_t)$ и π-поднятие пути из S в $\mathbb{D}$ однозначно при заданном начале a, то $f_1(a) = a_1$, поскольку $g_1(b) = \pi(a_1)$. Так как $a_1 \in \mathbb{D}$ любая, то мы показали, что отображение α 1:1.

Так как $F_\mu(a)$ голоморфно по μ (и не зависит от выбора μ в классе Тейхмюллера на S), то отображение α голоморфно $\Longrightarrow$ α биголоморфно (см. приложение 2). А остальное – по построению. $\triangleright$

Следствие. *$P\colon T_{g,n+1} \to T_{g,n}$ – голоморфное отображение коранга 1 со слоями, голоморфно эквивалентными $\mathbb{D}$.*

8. Универсальные семейства р/п. Накрывающая группа G универсальной проекции $\pi\colon \mathbb{D} \to S$ действует на многообразие $F(G)$ послойно (переводя каждый слой в себя) по правилу

$$A([\mu], w) = ([\mu], F_\mu \circ A \circ F_\mu^{-1}(w)), \quad A \in G.$$

Напомним, что отображения $F_\mu \circ A \circ F_\mu^{-1}$ дробно-линейные (лемма 13 л. 6) и что они не зависят от выбора представителя в классе Тейхмюллера $[\mu]$. Более того, из определения комплексной структуры в $T(G)$ и леммы 14 л. 6 очевидно следует, что $F_\mu \circ A \circ F_\mu^{-1}(w)$

голоморфно зависят и от w (будучи дробно-линейными по w) и от $[\mu]$, поскольку проекция Берса $\mathcal{B}\colon B_1(G) \to T(G)$ допускает локальные голоморфные сечения (см. п. 1 л. 8) $\Longrightarrow$ группа G действует на $F(G)$ голоморфно (указанное выше отображение – биголоморфизм). Так как $F(G)$ послойно гомеоморфно $T(G) \times \mathbb{D}$ (упр. 2) и G на $\mathbb{D}$ действует собственно разрывно, то это свойство сохраняется и при действии на $F(G) \Longrightarrow$ $V'(G) := F(G)/G$ – комплексное многообразие с голоморфной проекцией $\Pi'\colon V'(G) \to T(G)$ и слоями D_μ/G_μ, где $G_\mu = F_\mu G F_\mu^{-1}$.

Считаем, что $S = \mathbb{D}/G$ – конформного типа (g, n). Для дальнейшего полезно послойно компактифицировать многообразие $V'(G)$, добавляя ("заклеивая") проколы. Топологически это несложно, но мы хотим сохранить при этом комплексную структуру. что уже непросто, так что читателям, интересующимся только компактными р/п ($n = 0$) дальнейшее в этом разделе лучше пропустить.

Лемма 34. *Послойная компактификация $V(G)$ многообразия $V'(G)$ является комплексным многообразием с голоморфным вложением $V'(G) \to V(G)$ и голоморфной проекцией $\Pi\colon V(G) \to T(G)$ коранга 1, т.ч. $\Pi|_{V'(G)} = \Pi'$. При этом*

$$V'(G) = V(G) \setminus \bigcup_1^n \Sigma_j,$$

где Σ_j – попарно не пересекающиеся графики голоморфных сечений проекции Π.

$\triangleleft$ Р/п $S_\mu := D_\mu/G_\mu$ типа (g, n) имеет вид $S_\mu^0 \setminus \sigma_\mu$, где S_μ^0 – компактификация S_μ, компактная р/п рода g и $\#\sigma_\mu = n$. На языке фуксовых групп она описывается так: в група G выделяется подгруппа G^0, которая порождается стандартными жордановыми петлями-образующими (с концами в фиксированной базовой точке) компактной р/п S_μ^0 (петли $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$) и фактор D_μ/G_μ^0 и есть эта самая компактификация. Пусть $\pi_\mu^0\colon D_\mu \to S_\mu^0$ – универсальное накрытие и $\tilde\sigma_\mu = (\pi_\mu^0)^{-1}(\sigma_\mu)$. Из определения D_μ и G_μ видно, что $\sigma_\mu = F_\mu(\sigma_0)$. Так как $\mu \in B_1(G)$ то, как в доказательстве предл. 13, σ_μ зависит лишь от класса $[\mu] \in T(G)$. Универсальное накрытие $\pi_\mu\colon D_\mu \to S_\mu$ представляется теперь в виде композиции $\pi^0_\mu \circ \tilde{\pi}_\mu$, где $\tilde{\pi}_\mu\colon D_\mu \to D_\mu \setminus \tilde{\sigma}_\mu$ – универсальное накрытие,

$$\begin{array}{ccc} D_\mu & \xrightarrow{\tilde{\pi}_\mu} & D_\mu \setminus \tilde{\sigma}_\mu \\ {\scriptstyle \pi_\mu}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi^0_\mu} \\ S_\mu & = \!= \!= & S^0_\mu \setminus \sigma_\mu\,. \end{array}$$

А теперь склеим послойные компактификации в единое расслоение. Обозначим через G' накрывающую группу универсального накрытия $\tilde{\pi}_0\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D} \setminus \sigma_0$. Так как все точки любого слоя этого накрытия лежат в одной G-орбите, то G' – подгруппа в $G \Longrightarrow$ G' действует на $F(G)$ (по той же формуле) $\Longrightarrow$ фактор $F(G)/G'$ есть комплексное многообразие с проекцией на $T(G)$ коранга 1, наследуемой из $F(G)$, и слоями $D_\mu \setminus \tilde{\sigma}_\mu$. Это многообразие естественно вложено в $F(G)$; дополнение $\widetilde{\Sigma}$ замкнуто в $F(G)$, состоит из попарно не пересекающихся графиков непрерывных сечений (проекции $f\colon F(G) \to T(G)$) и в слое над $[\mu]$ совпадает с $[\mu] \times \tilde{\sigma}_\mu$. Это – первый шаг.

Теперь подключим фактор-проекции по G^0_μ. Группа $G^0 := G^0_0$ действует на $F(G)$ как подгруппа G (в слое над $[\mu]$ это действие группы G^0_μ). Фактор $F(G)/G^0 =: V(G)$ с проекцией Π в $T(G)$, наследуемой из $F(G)$, имеет компактные слои $D_\mu/G^0_\mu = S^0_\mu$ рода g. Сужение фактор-проекции на $F(G) \setminus \widetilde{\Sigma}$ даёт в слоях поверхности $S^0_\mu \setminus \sigma_\mu = S_\mu = D_\mu/G_\mu$. Таким образом мы получаем послойное голоморфное вложение $V'(G) \to V(G)$, т.ч. $V(G) \setminus V'(G) = \bigcup_1^n \Sigma_j$, где Σ_j – непрерывные сечения (графики) проекции Π.

Остаётся показать, что сечения Σ_j голоморфные. Как мы знаем, проекция Берса $B_1(G) \to T(G)$ допускает голоморфные сечения в окрестности каждой точки в $T(G)$. Пусть $\mu(t)$, $t \in U \subset T(G)$, – такое сечение и $F_{\mu(t)}$ – канонические решения уравнения Бельтрами с коэффициентами $\mu(t)$ соотв. Так как F_μ голоморфны по μ, то $F_{\mu(t)}(a)$, $t \in U$, $a \in \mathbb{D}$, – голоморфные сечения проекции $f\colon F(G) \to T(G)$ над U. Так как F_μ – гомеоморфизмы $\mathbb{C}$, то эти сечения при различных a попарно не пересекаются и заполняют $F^{-1}(U)$. (Это слоение зависит от выбора конкретных $\mu(t)$, а не от их классов $[\mu(t)]$, в отличие от множества $\widetilde{\Sigma}$.) Если $a \in \mathbb{D} \setminus \sigma_0$, то соотв. сечение лежит в $F(G) \setminus \widetilde{\Sigma}$ (по построению, $\widetilde{\Sigma}$ соответствует проколам) $\Longrightarrow$ $\widetilde{\Sigma}$ состоит из голоморфных графиков. Так как фактор-проекция по действию G^0 локально 1:1, то все Σ_j тоже голоморфны. $\triangleright$

Замена базы в $T(G)$ индуцирует очевидную биголоморфную замену $V(G)$ и, таким образом, определено абстрактное комплексное многообразие $V_{g,n}$ с голоморфной проекцией $\Pi\colon V_{g,n} \to T_{g,n}$ коранга 1, слоями которой являются компактные р/п рода g с n отмеченными точками, расположенными на n попарно не пересекающихся голоморфных сечениях Σ_j (сохраним обозначение) проекции Π. Это слоение называется *универсальным семейством отмеченных р/п типа* (g, n). Почему – объясняем в след. разделе.

9. Классифицирующие отображения. Голоморфное семейство р/п есть тройка (E, p, B) где E и B – комплексные многообразия и $p\colon E \to B$ – сюръективное голоморфное отображение коранга 1 (всюду), слоями которого являются р/п. Если слои компактны (а это для нас основной случай), то расслоенное пространство $p\colon E \to B$ локально C^∞-тривиальное (по теореме Эресмана [21]), в частности, все его слои диффеоморфны друг другу и некоторой выделенной среди них базовой р/п $S \Longrightarrow \exists$ тривиализующее покрытие B областями U_α и C^∞-диффеоморфизмы $f_\alpha\colon p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times S$, сохраняющие ориентацию и т.ч. $p = \pi_\alpha \circ f_\alpha$, где $\pi_\alpha\colon U_\alpha \times S \to U_\alpha$ – обычная проекция. Подробнее, $f_\alpha(Z) = (p(Z), g_\alpha(Z))$ и на $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$ возникают диффеоморфизмы переходов $g_{\alpha\beta}(b)\colon S \to S$, определяемые равенствами $g_\alpha(Z) = g_\beta(Z)$, $Z \in p^{-1}(b)$. Диффеоморфизмы компактных р/п являются квазиконформными отображениями $\Longrightarrow \forall\, b \in U_\alpha$ определён дифференциал Бельтрами отображения $g_\alpha\colon S \to S_b$ и соотв. коэффициент Бельтрами $\mu_b^\alpha \in B_1(G)$, где G – накрывающая группа универсального накрытия $\mathbb{D} \to S$.

Голоморфное семейство с описанной выше локальной тривиализацией называется *маркированным* (или семейством Тейхмюллера), если все диффеоморфизмы $g_{\alpha\beta}(b)$ гомотопны тождественному отображению S. Для такого семейства коэффициенты Бельтрами μ_b^α и μ_b^β эквивалентны по Тейхмюллеру $\Longrightarrow$ Определено гладкое отображение $h\colon B \to T(G)$, $b \mapsto h(b) = [\mu_b^\alpha]$, если $b \in U_\alpha$. Это h называется *классифицирующим отображением* маркированного семейства (E, p, B) и если слои компактны и задано отождествление (биголоморфизм) $T(G)$ и $T_{g,0}$, то h – отображение в $T_{g,0}$.

n-пунктированным семейством р/п назовём голоморфное семейство (E, p, B) с компактными слоями, в котором выделены n попарно не пересекающихся графиков σ_j голоморфных сечений проекции p. Обозначим $E' = E \setminus \bigcup_1^n \sigma_j$. n-пунктированное семейство называется *маркированным*, если оно локально тривиализовано, как выше, диффеоморфизмы переходов гомотопны тождественному и сужения тривиализаций на $\pi^{-1}(U_\alpha) \cap E'$ являются диффеоморфизмами на $U_\alpha \times (S \setminus \sigma)$, где S – один из слоёв p (базовый) и $\#\sigma = n$. Примером такого семейства является (по определениям) тройка $(V_{g,n}, \Pi, T_{g,n})$, построенная в п. 7.

Морфизмом n-пунктированных голоморфных семейств (E_1, p_1, B_1) и (E_2, p_2, B_2) называется пара голоморфных отображений $\xi\colon E_1 \to E_2$, $\eta\colon B_1 \to B_2$, т.ч. диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\xi} & E_2 \\ {\scriptstyle p_1}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle p_2} \\ B_1 & \xrightarrow{\eta} & B_2 \end{array}$$

коммутативна, $\xi(E_1') = E_2'$, $\xi|\pi_1^{-1}(b_1) \to p_2^{-1}(\eta(b_1))$ – биголоморфизмы компактных р/п и ξ переводит маркирующую локальную тривиализацию E_1 в аналогичную тривиализацию для E_2.

Универсальность семейства объясняет следующая теорема Гротендика – Ирла (см. [18], [7], 5.4; Гротендик доказал её для случая $n = 0$).

Предложение 14. *Для произвольного маркированного n-пунктированного голоморфного семейства (E, p, B) р/п рода $g > 1$ $\exists$ единственный морфизм таких семейств*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{H} & V_{g,n} \\ {\scriptstyle p}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \Pi} \\ B & \xrightarrow{h} & T_{g,n}\,. \end{array}$$

Из определений очевидно следует, что h здесь обязательно является классифицирующим отображением, которое определено однозначно. Поэтому по-другому теорему можно сформулировать так: всякое (E, p, B), описанное выше, является прообразом универсального семейства над $T_{g,n}$ относительно классифицирующего отображения.

$\triangleleft$ Отображение H, определяемое послойно, однозначно определяется отображением h, поэтому единственность ясна и "остаётся" показать, что отображения h и H голоморфны.

Начнём с доказательства голоморфности h. Утверждение локальное, поэтому можно считать, что E послойно диффеоморфно $B \times S$, причём $E' = E \setminus \bigcup_1^n \sigma_j$ переходит в $B \times (S \setminus \sigma)$.

Разберём главный частный случай $B = \mathbb{D}$. Согласно определению комплексной структуры в $T(G)$, достаточно доказать, что $\forall\, a \in \mathbb{D}\ \exists$ гладкий диск $h_a \colon \mathbb{D} \to B_1(G)$, накрывающий h (т.е. $\mathcal{B} \circ h_a = h$), и т.ч. касательное к h_a отображение в точке a $\mathbb{C}$-линейное. (Тогда касательные отображения к h $\mathbb{C}$-линейные во всех точках $\mathbb{D}$ и, значит, h голоморфно.) Это достаточно доказать для $a = 0$, причём (учитывая свойства замены базы) можно считать $S_0 = S$.

Сначала мы подправим тривиализацию $\chi_0 \colon E \to \mathbb{D} \times S$, не меняя её на $S_0 = S$ (от этого классифицирующее отображение, очевидно, не изменится). Пусть $\zeta \colon \mathbb{D}\times S \to \mathbb{D}$ – обычная проекция, $\zeta = \xi + i\eta$. Положим $\gamma_w = \chi_0^{-1}((-1,1) \times w)$, тогда $\gamma_w \subset \sigma_j$, если $w \in \sigma_j$. Многообразие E комплексное, поэтому в его (вещественном) касательном расслоении TE определён послойно-линейный оператор $\mathbb{J}$, т.ч. $\mathbb{J}^2 = -\operatorname{id}$ и $\forall$ поля v (сечения Tv) комплексное поле $v + i\mathbb{J}v$ обращается в нуль на всех (локально) голоморфных функциях. Обозначим через X прообраз поля $\partial/\partial\xi$ относительно χ_0 и положим $Y = \mathbb{J}X$. Согласно началам теории обыкновенных дифференциальных уравнений, траектории поля Y, пересекающие γ_w, образуют гладкое двумерное многообразие s_w, эти s_w заполняют окрестность S_0 и попарно не пересекаются. Сужая $\mathbb{D}$, можем считать, что $p(s_w) = \mathbb{D}\ \forall\ w \in S_0$. Так как σ_j – голоморфные сечения, то $s_w = \sigma_j$, если $w \in \sigma_j$. Слоение на диски s_w задаёт новую тривиализацию $\chi \colon E \to \mathbb{D} \times S$, переводящую точки $Z \in s_w$ в $(p(Z), w)$ соотв. Сужение её на E' задаёт тривиализацию $E' \to \mathbb{D} \times (S \setminus \sigma)$, т.е. E с выделенными σ_j и этой новой тривиализацией тоже является маркированным n-пунктированным голоморфным семейством. По построению, диски s_w имеют $\mathbb{C}$-линейные касательные плоскости в соотв. точках слоя S_0 и проекция p в точке $w = s_w \cap S_0$ $\mathbb{C}$-дифференцируема $\Longrightarrow$ Касательное отображение к χ во всех точках $w \in S_0$ $\mathbb{C}$-линейно – и именно для этого мы меняли тривиализацию.

Пусть $\pi \colon \mathbb{D} \to S$ – универсальное накрытие, G – соотв. группа и $T_{g,n}$ реализовано как $T(G)$. Обратное к χ отображение задаёт квазиконформные диффеоморфизмы $S \to S_\zeta = p^{-1}(\zeta)$; обозначим через $\mu(\zeta, z)$ коэффициент π-поднятия дифференциала Бельтрами этого отображения. Отображения, определяемые тривиализацией χ, очевидно, гомотопны таковым для χ_0, поэтому классифицирующее отображение h от замены χ_0 на χ не изменилось. Тривиализация χ определяет на $\mathbb{D} \times S$ комплексную структуру с локально-голоморфными функциями вида $f \circ \chi^{-1}$, где f голоморфна в соотв. области на E. Эта комплексная структура $\mathbb{J}'$ в общем отлична от структуры произведения комплексных многообразий $\mathbb{D}$ и S и её удобнее представить в координатной форме. Так как универсальное накрытие $\mathbb{D}\times\mathbb{D} \to \mathbb{D}\times S$, $(\zeta, z) \mapsto (\zeta, \pi(z))$ локально 1:1, то $\mathbb{J}'$ поднимается до комплексной структуры $\tilde{\mathbb{J}}$ на $\mathbb{D}\times\mathbb{D}$. Функция ζ (поднятие) остаётся $\tilde{\mathbb{J}}$-голоморфной и в окрестности каждой точки $(0, z_0)$ есть другая голоморфная функция, скажем, f, т.ч. дифференциалы $d\zeta$ и df в точке $(0, z_0)$ $\mathbb{C}$-линейно независимы. По построению сужение структуры $\tilde{\mathbb{J}}$ на диски $\zeta \times \mathbb{D}$ имеет $(1,0)$-форму $dz + \mu(\zeta, z)\, d\bar{z} \Longrightarrow df = a(dz + \mu\, d\bar{z}) + b\, d\zeta + c\, d\bar{\zeta}$. Так как $d(df) = 0$, то

$$
\begin{aligned}
da \wedge (dz + \mu\, d\bar{z}) + a\frac{\partial\mu}{\partial\bar{\zeta}}\, d\bar{\zeta} \wedge d\bar{z}& \\
+ dc \wedge d\bar{\zeta} + \left(db - a\frac{d\mu}{d\zeta}\, d\bar{z}\right) \wedge d\zeta = 0.&
\end{aligned}
$$

Так как отображение χ $\mathbb{C}$-дифференцируемо в точках S_0, то $\tilde{\mathbb{J}}$ в точках $(0, z)$ совпадает со стандартной комплексной структурой с $(1,0)$-базисом $d\zeta, dz \Longrightarrow df(0, z) = a\, dz + b\, d\zeta \Longrightarrow \mu(0, z) \equiv c(0, z) \equiv 0 \Longrightarrow \frac{\partial\mu}{\partial z}(0, z) = \frac{\partial c}{\partial\bar{z}}(0, z) = 0 \Longrightarrow$ В точке $(0, z_0)$ единственный член в разложении $d(df) = 0$, содержащий $d\bar{\zeta}\wedge d\bar{z}$, имеет коэффициент $a\frac{\partial\mu}{\partial\bar{\zeta}} \Longrightarrow \frac{\partial\mu}{\partial\bar{\zeta}}(0, z_0) = 0$, так как $a(0, z_0) \neq 0$ по выбору f. Так как $z_0 \in \mathbb{D}$ любая, то мы получаем, что отображение $\zeta \mapsto \mu(\zeta, \cdot) \in B_1(G)$ $\mathbb{C}$-дифференцируемо по ζ при $\zeta = 0$ и это доказывает голоморфность h для случая $B = \mathbb{D}$.

Если теперь база B произвольная и $\lambda\colon \mathbb{D} \to B$ – голоморфный диск, то к сужению E над $\lambda(\mathbb{D})$ применимо приведённое выше доказательство $\Longrightarrow h\circ\lambda\colon \mathbb{D} \to T(G)$ – голоморфное отображение. Так как λ произвольно, то h тоже голоморфно.

Остаётся доказать голоморфность H, что уже легче. Опять можно считать, что $B = \mathbb{D}$. Утверждение локальное, не зависящее от выбора базисного слоя, поэтому достаточно доказать $\mathbb{C}$-дифференцируемость H в точках слоя $S = p^{-1}(0)$. По определению H, его сужение на слой $p^{-1}(\zeta)$ есть биголоморфизм этого слоя и р/п $D_{\mu(\zeta,\cdot)}/G_{\mu(\zeta,\cdot)}$. При $\zeta = 0$ и то и другое есть поверхность S. Так как $\mu(\zeta,\cdot)$ $\mathbb{C}$-дифференцируем при $\zeta = 0$, то канонические решения $F_{\mu(\zeta,\cdot)}$ уравнений Бельтрами такие же $\Longrightarrow$ Дробно-линейные элементы группы $G_{\mu(\zeta,\cdot)}$ тоже $\mathbb{C}$-дифференцируемы по ζ (покоэффициентно, см. п. 6 л. 6) при $\zeta = 0 \Longrightarrow H$ в локальных координатах (ζ, z) $\mathbb{C}$-дифференцируемо при $\zeta = 0$ как по ζ, так и по z, а это уже эквивалентно голоморфности H, как это оговорено выше. ▷

Теорема Гротендика–Ирла верна и при более слабом ограничении $2g - 2 + n > 0$ (= поверхность $S' = S \setminus \sigma$ гиперболична). Доказательство в случаях $g = 0, 1$ аналогично вышеприведённому, только универсальные накрытия другие.

* * * * *

Задачи и упражнения.

1. Используя накрытие $\mathcal{T}_2 \to \mathcal{T}_{0,6}$ (упр. 7 л. 4) и п. 5, доказать биголоморфную эквивалентность $T_2 = T_{0,6}$.

2. Многообразие $F(S)$ послойно гомеоморфно $T(S) \times \mathbb{D}$ (воспользуйтесь глобальным непрерывным сечением проекции Берса).

3. Р/п $\mathbb{D}/G_1$ и $\mathbb{D}/G_2$ голоморфно эквивалентны $\Longleftrightarrow F(G_1)$ и $F(G_2)$ послойно голоморфно эквивалентны.

4.* Расслоенное пространство $F_{g,n}$ не имеет глобальных голоморфных сечений над $T_{g,n}$.

5. $\forall k > 0$ определена голоморфная проекция $P_k\colon T_{g,n+k} \to T_{g,n}$, слои которой (прообразы точек) биголоморфно эквивалентны $\mathbb{D}^k$.

6. $\forall \mu' \in [\mu]$ отображение $\mathbb{D} \ni z \mapsto w = F_{\mu'}(z) \in D_\mu$ корректно определяет квазиконформный гомеоморфизм $S = \mathbb{D}/G$ на $V_{[\mu]} = D_\mu/(F_{\mu'} G F_{\mu'}^{-1})$.

Лекция 12

Поверхности с краем – Гиперэллиптическая база – Гиперэллиптические модули – Периоды абелевых дифференциалов

10. Поверхности с краем. Пусть S – гип. р/п конформного типа (g, n, m) и $\widehat{S} = S \cup \Gamma \cup S^-$ – её дубль Шоттки. Напоминаем конструкцию: если G – накрывающая группа универсальной проекции $\pi\colon \mathbb{D} \to S$ и $\sigma(G)$ – её предельное множество, то G действует дискретно, без неподвижных точек на $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \sigma(G)$ и фактор $(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \sigma(G))/G$ как раз и есть $\widehat{S}$. На р/п $\widehat{S}$ действует антиголоморфная инволюция $\hat{\imath}$, поднятие которой на $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \sigma(G)$ есть инволюция $\iota\colon z \mapsto 1/\bar{z}$ относительно $\partial\mathbb{D}$. Группа $\operatorname{Aut}\mathbb{D}$ инвариантна относительно ι, точнее, $\overline{A \circ \iota} = A\ \forall\, A \in \operatorname{Aut}\mathbb{D}$ (легко проверяется). Подчеркнём, что инволюция $\hat{\imath}$ дубля $\widehat{S}$ произвольной $S = (\underline{S}, J)$ как отображение базы не зависит от J: все накрывающие группы G принадлежат $\operatorname{Aut}\mathbb{D}$ и инвариантны относительно одной и той же ι (т.е. в координате z базы, $\hat{\imath}$ – это отображение $z \mapsto 1/\bar{z}$, для всех J на $\underline{S}$). Каждому дифференциалу Бельтрами μ на S соответствует дифференциал Бельтрами $\hat{\mu}$ на $\widehat{S}$ симметричный относительно Γ в том смысле, что $\overline{\hat{\mu} \circ \hat{\imath}} = \hat{\mu}$. Он получается фактор-проекцией дифференциала на $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \sigma(G)$, равного $\tilde{\mu}$ в $\mathbb{D}$ (π-поднятие μ) и $\overline{\tilde{\mu} \circ \iota}$ вне $\overline{\mathbb{D}}$.

Пусть р/п $S_j = (\underline{S}, J_j)$ эквивалентны по Тейхмюллеру и $h\colon S_1 \to S_2$ – биголоморфизм, гомотопный тождественному на базе; тогда он изотопный тождественному (см. [22]), причём эту изотопию можно продолжить до изотопии $S \cup \Gamma$ (это несложное чисто топологическое утверждение, которое примем без доказательства). Поднятие h на $\mathbb{D}$ дробно-линейно $\Longrightarrow$ аналитически продолжается через идеальную границу $\partial\mathbb{D} \setminus \sigma(G_1)$, накрывающую Γ_1 и превращается в биголоморфизм $\hat{h}\colon \widehat{S}_1 \to \widehat{S}_2$. Это продолжение (согласно сказанному выше об h) тоже гомотопно тождественному (на базе $\underline{\widehat{S}}$). Таким образом, если $J_1 \approx J_2$, то соотв. симметричные структуры $\hat{J}_1, \hat{J}_2$ (= структуры с симметричными дифференциалами Бельтрами) на $\widehat{S}$ тоже эквивалентны по Тейхмюллеру $\Longrightarrow$ определено непрерывное отображение $T\langle S\rangle \to T\langle \widehat{S}\rangle$, индуцируемое переходом $S \mapsto \widehat{S}$ к дублю.

Если $h\colon \widehat{S} \to \widetilde{S} = (\underline{\widehat{S}}, J)$ – биголоморфизм, то $\widetilde{S} = h(S) \cup h(\Gamma) \cup h(S^-)$ и инволюция $h \circ \iota \circ h^{-1}$ на $\widetilde{S}$ антиголоморфна $\Longrightarrow$ $\widetilde{S}$ есть дубль р/п $h(S) \Longrightarrow$ Образы классов Тейхмюллера на S при отображении $S' \mapsto \widehat{S}'$ являются классами Тейхмюллера на $\widehat{S}$ (а не только содержатся в таковых).

Могут ли неэквивалентным по Тейхмюллеру р/п S_j соответствовать эквивалентные $\widehat{S}_j$? Пусть $\hat{h}\colon \widehat{S}_1 \to \widehat{S}_2$ – биголоморфизм, гомотопный тождественному ($\Longrightarrow \hat{h}(S_1) \cap S_2$ непусто). Пусть ι_j – антиголоморфная симметрия $\widehat{S}_j$ с неподвижным множеством Γ_j (для проекции инволюции ι на $\widehat{S}_j$). Тогда $\iota_2 \circ \hat{h} \circ \iota_1$ – тоже биголоморфизм $\widehat{S}_1 \to \widehat{S}_2$ (поскольку $\hat{J}_j$ симметричны, см. выше), тоже гомотопный тождественному (поскольку $\iota_j = \hat{\iota}$ на базе) $\Longrightarrow$ $\iota_2 \circ \hat{h} \circ \iota_1 \circ \hat{h}^{-1}$ – тождественное отображение (см. л. 2 п. 16) $\Longrightarrow$ $\hat{h} \circ \iota_1 = \iota_2 \circ \hat{h} \Longrightarrow \hat{h}$ переводит Γ_1 в Γ_2 и S_1 в S_2. Покажем, что $h = \hat{h}|_{S_1}$ гомотопно тождественному отображению базы $\underline{S}$. Пусть $\hat{h}_t$ – гомотопия id и $\hat{h}$ и $H_t(p) = \hat{h}_t(p)$, если $\hat{h}_t \in S_2 \cup \Gamma_2$ и $= i_2(\hat{h}_t(p))$, если $\hat{h}_t(p) \in S_2^-$. Тогда H_t – гомотопия id и h на $S_1 \cup \Gamma_1$. Так как окрестность каждой компоненты Γ_2 на $\widehat{S}_2$ гомеоморфна кольцу, то $\exists$ непрерывное семейство g_t отображений $S_2 \cup \Gamma_2$ в себя, т.ч. $g_t(S_2 \cup \Gamma_2) \subset S_2$, а $g_0 = g_1 = \mathrm{id} \Longrightarrow h_t := g_t \circ H_t$ – гомотопия id и h на S_1. Таким образом, мы получаем, что описанное выше отображение $T\langle S\rangle \to T\langle \widehat{S}\rangle$ является вложением.

Каков его образ? Выше показано, что класс Тейхмюллера на $\widehat{S}$ входит в образ $T\langle S\rangle \Longrightarrow$ Все соотв. ему дифференциалы Бельтрами на $\widehat{S}$ симметричны относительно Γ. Таким образом, мы доказали бóльшую часть следующего утверждения.

Предложение 15. *S – гиперболическая р/п конформного типа (g, n, m) с $m > 0 \Longrightarrow$ Отображение перехода к дублю $S' \mapsto \widehat{S}'$ индуцирует каноническое вложение $T\langle S\rangle \to T\langle \widehat{S}\rangle$. Образ $T\langle S\rangle$ состоит из классов, представляемых дифференциалами Тейхмюллера (и $[0]$), симметричными относительно антиголоморфной инволюции дубля $\widehat{S}$, и является вещественно-аналитическим вполне вещественным подмногообразием в $T\langle \widehat{S}\rangle$, причём $\dim_{\mathbb{R}} T\langle S\rangle = \dim_{\mathbb{C}} T\langle \widehat{S}\rangle$.*

($\mathbb{R}$-аналитическое вполне вещественное многообразие в комплексном многообразии M – это локально образ $\mathbb{R}^k \cap U \subset \mathbb{C}^l$ при голоморфном вложении области $U \subset \mathbb{C}^l$ в M.)

$\triangleleft$ Последние утверждения инвариантны относительно замены базы $\widehat{S}$ на базу-дубль $\widehat{S}_1$, поэтому достаточно доказать их в окрестности $[0] \in T\langle\widehat{S}\rangle$. Каждый класс Тейхмюллера в окрестности $[0]$ представляется дифференциалом Бельтрами вида $\bar{\psi}/\rho^2$ из $\mathbb{C}$-линейного пространства Λ, трансвесального к $[0]$ в 0 (где $\psi \in A_2(\widehat{S})$ и ρ – гиперболическая метрика на $\widehat{S}$. Для малой окрестности $\Sigma \ni 0$ в Λ сужение фактор-проекции $B_1(\widehat{S}) \to T\langle\widehat{S}\rangle$ на Σ есть биголоморфизм Σ на окрестность $[0]$ в $T\langle\widehat{S}\rangle$. Так как гиперболическая метрика инвариантна относительно инволюции, то в $T\langle S\rangle$ из Σ проектируются в точности дифференциалы вида $\bar{\phi}/\rho^2$ с симметричными ϕ, т.е. $\overline{\phi \circ \hat{\imath}} = \phi$. Так как $\psi = (\psi + \overline{\psi \circ \hat{\imath}})/2 + i((\psi + \overline{\psi \circ \hat{\imath}})/2i)$, то симметричные дифференциалы на Λ образуют $\mathbb{R}$-линейное подпространство $\Lambda_{\mathbb{R}} \subset \Lambda$ половинной вещественной размерности, поскольку $\Lambda_{\mathbb{R}} \cap i\Lambda_{\mathbb{R}} = 0$. Последнее свойство означает, что $\Lambda_{\mathbb{R}}$ вполне вещественно в Λ ($\exists$ $\mathbb{C}$-линейный изоморфизм $\Lambda \to \mathbb{C}^l$, переводящий $\Lambda_{\mathbb{R}}$ в $\mathbb{R}^l$) $\Longrightarrow T\langle S\rangle$ в окрестности $[0] \in T(\langle\widehat{S}\rangle$ вполне вещественно. $\triangleright$

Так как род $\widehat{S}$ равен $2g + m - 1$, а число проколов $2n$, то, при $g > 1$, $\dim_{\mathbb{R}} T\langle S\rangle = 3(2g + m - 1) - 3 + 2n = 6g - 6 + 2n + 3m$.

Наконец, отметим, что мы также распространили теорему Тейхмюллера на р/п S типа (g, n, m) в след. форме:

В каждом классе $[\mu_0] \subset B_1(S) \setminus 0$ *существует единственный дифференциал Тейхмюллера* $\mu = k\bar{\phi}/|\phi|$, *где* $0 < k < 1$ *и* $\phi \in A_2(S)$ *– квадратичный дифференциал, непрерывно продолжающийся на компонентны края и вещественный на них. При этом* $\|\mu\| \leqslant \|\mu'\|\ \forall\, \mu' \in [\mu_0]$.

11. Гиперэллиптическая база. В качестве компактной базовой поверхности S во многих отношениях удобно брать гиперэллиптическую р/п в $\widehat{\mathbb{C}}^2$, задаваемую явно уравнением $w^2 = \Pi(z)$, где $\Pi(z)$ – многочлен степени $2g+1$ с простыми нулями (g – род S, см. [41], л. 2, п. 10); конкретный вид $\Pi(z) = c(z-\lambda_1)\ldots(z-\lambda_{2g+1})$ пока не важен.

Любая мероморфная функция f на S является сужением на неё рациональной функции в $\widehat{\mathbb{C}}^2$, линейной по w, а именно $a(z)w + b(z)$, где $b(z) = (f(z,\sqrt{\Pi}) + f(z,-\sqrt{\Pi}\,))/2$ и $a(z) = (f(z,\sqrt{\Pi}) - f(z,\sqrt{\Pi}\,))/2\sqrt{\Pi}$ при $z \neq \lambda_j$ (в каждом выражении ветвь корня одинакова), а в точках $(\lambda_j, 0)$ доопределяются по непрерывности с возможным значением ∞ (доопределение получается с учётом того, что $\sqrt{\Pi} = w$ – локальная координата в окрестности $(\lambda_j, 0)$).

Локальной координатой на S во всех точках, кроме где $w = 0$ и (∞, ∞), является функция z. В точках $(\lambda_j, 0)$ это функция w (локально, $z = \lambda_j + w^2 h$ с голоморфной $h \neq 0$), а в окрестности (∞, ∞) локальной координатой является, например, функция z^g/w, доопределённая нулем в точке (∞, ∞), но можно и по-другому, задавая S в окрестности (∞, ∞) параметрически как $z = 1/\zeta^2, w = \zeta^{-2g-1}h(\zeta)$, $|\zeta| < r = 1/\max|\lambda_j|^{1/2}$. Исходя из этих представлений, мы получаем, что формы $\alpha = \frac{p(z)}{w}\,dz$, где $p(z)$ – произвольный многочлен степени $k \leqslant g-1$, голоморфны на S: $dz/w = 2dw$ в окрестностях $(\lambda_j, 0)$, а в окрестности (∞, ∞) форма α равна $h_1\zeta^{-2k}\zeta^{2g+1}\zeta^{-3}\,d\zeta = h_1\zeta^{2(g-1-k)}\,d\zeta$. Базис в пространстве таких α составляют формы $(z^j/w)dz$, $j = 0, \ldots, g-1$ $\Longrightarrow$ все голоморфные 1-формы на S имеют такой вид.

С квадратичными дифференциалами картина похожая: при $g > 1$ есть $2g - 1$ "чётных" голоморфных дифференциалов $(z^j/\Pi(z))(dz)^2$, $j = 0, \ldots, 2g-2$, зависящих только от z и $g-2$ "нечётных" голоморфных дифференциала $(z^j/w)(dz)^2$, $j = 0, \ldots, g-3$, все вместе линейно независимы и натянутое на них пространство квадратичных дифференциалов имеет размерность $3g-3 \Longrightarrow$ (см. п. 8 л. 6) других нет. (При $g = 2$ голоморфных дифференциалов второго вида нет). Единообразно, квадратичные дифференциалы на S имеют вид $\frac{a(z)w+b(z)}{\Pi(z)}\,(dz)^2$, где a, b – многочлены степеней $\leqslant g-3$ и $\leqslant 2g-2$ соотв. Если $S_1 = S \setminus \{(a_j, b_j)\}_1^n$, то к $A_2(S)$ добавляются голоморфные и интегрируемые на S дифференциалы $\frac{w+b_j}{z-a_j}\frac{(dz)^2}{\Pi(z)}$, $j = 1, \ldots, n$, и линейные комбинации всего построенного дают всё $A_2(S_1)$ (размерности $3g-3+n$).

Достаточно явно в гиперэллиптической ситуации выписывается и р/п $\sqrt{\phi}$: в $\widehat{\mathbb{C}}^3$ она задаётся двумя уравнениями, $w^2 = \Pi(z)$ и $w_1^2 = (a(z)w + b(z))/\Pi(z)$, и проекцией $(z, w, w_1) \mapsto (z, w)$ двулистно накрывает S. Исключая w, её можно спроектировать в $\widehat{\mathbb{C}}^2_{z,w_1}$, на поверхность $(w_1^2\Pi - b)^2 = a^2\Pi$, с двулистной проекцией $(z, w_1) \mapsto (z, (\Pi w_1^2 - b)/a)$ на S.

12. Гиперэллиптические модули. Гиперэллиптические р/п выделяются среди общих компактных р/п наглядностью представления, явным видом абелевых и квадратичных дифференциалов (п. 11) и специфическми приложениями (см., например, [11]). Стандартное представление такой поверхности рода g – это двулистная разветвлённая накрывающая $S\colon w^2 = \Pi(z)$ сферы

Римана $\widehat{\mathbb{C}}_z$ в $\widehat{\mathbb{C}}_z \times \widehat{\mathbb{C}}_w$, где Π – многочлен степени $2g+1$ с простыми нулями.

На S действует голоморфная инволюция $\iota\colon p = (z,w) \mapsto (z,-w)$, $\iota^2 = \mathrm{id}$. Она имеет ровно $2g+2$ неподвижные точки и при $g > 1$ однозначно определяется этим условием. В самом деле, пусть ι' – другая такая инволюция на S. Тогда $(z - z \circ \iota')^2$ – рациональная функция на S с $\geqslant 2g+2$ нулями, а число её полюсов с учётом кратностей не превосходит $4 \Longrightarrow z \equiv z \circ \iota' \Longrightarrow$ ι' переставляет (z,w) и $(z,-w)$, т.е. совпадает с ι.

Наличие такой инволюции является характеристическим свойством гиперэллиптичности. В самом деле, пусть S – компактная р/п рода g, допукающая голоморфную инволюцию ι с $2g+2$ неподвижными точками и S_0 – р/п, котрая получается из S отождествлением пар $p, \iota(p)$ (если ζ – голоморфная координата на S в окрестности неподвижной для ι точки p с $\zeta(p) = 0$ и $\eta = \zeta - \zeta \circ \iota$, то $\eta \circ \iota = -\eta. \Longrightarrow \eta^2$ – локальная голоморфная координата в окрестности образа $p = \iota(p)$ при этом отождествлении). По формуле Римана–Гурвица (см. [41], с. 21),

$$2 - 2g = 2((2-2g_0) - (2g+2)) + (2g+2) = -4g_0 + 2 - 2g \quad \Longrightarrow$$

род g_0 поверхности S_0 равен 0, т.е. S_0 – сфера Римана $\Longrightarrow$ р/п S гиперэллиптическая.

Из единственности инволюции легко следует, что всякая р/п, биголоморфно эквивалентная гиперэллиптической сама такая же. В самом деле, если $f\colon S \to S'$ – биголоморфизм и ι – инволюция на S с $2g+2$ неподвижными точками, то $f \circ \iota \circ f^{-1}$ – такая же инволюция на S'. Таким образом, если в классе Римана есть гиперэллиптическая р/п, то весь этот класс (а значит, и все входящие в него классы Торелли и ещё меньшие классы Тейхмюллера) состоит из гиперэллиптических р/п.

Множество классов Тейхмюллера в T_g, представимых гиперэллиптическими р/п, обозначим через $\mathcal{H}_g$.

Лемма 35. *$\forall r \in (0,1)$ $\exists \varepsilon > 0$, т.ч. если $\|\mu_0\| \leqslant r$, $\|\mu\| \leqslant r$, S_0, S – гиперэллиптические р/п с конформными структурами $J_0 = J_{\mu_0}, J = J_\mu$, инверсиями ι_0, ι и $\tau(J_0, J) < \varepsilon$, то $\exists$ квазиконформное отображение $f\colon S_0 \to S$, гомотопное тождественному отображению базы и сохраняющее инверсию, $f \circ \iota_0 = \iota \circ f$.*

$\triangleleft$ Можно считать S_0 базовой поверхностью. В классе Тейхмюллера $[S]$ есть р/п $S_1 = (\underline{S}, J_1)$ с инволюцией ι_1, т.ч. дифференциал

Бельтрами структуры J_1 является дифференциалом Тейхмюллера. Ввиду экстремальности последних, $\tau(J_1, J_0) \leqslant \tau(J_0, J)$.

Рассматривая голоморфные инволюции как отображения общей базы $\underline{S}$, мы видим, что близким относительно τ гиперэллиптическим структурам соответствуют близкие инволюции, причём эта близость равномерна для $\mu \in B_r(S_0)$ с фиксированным $r < 1$. В самом деле, поскольку семейство квазиконформных отображений с дифференциалами Бельтрами из $B_r(S_0)$ компактно (л. 5 п. 5), в противном случае на предельной р/п было бы две (голоморфные) инволюции, а выше показано, что такая инволюция на р/п (если $\exists$) единственна.

Если $S \notin [S_0]$, то обозначим через $f_1 \colon S_0 \to S_1$ отображение Тейхмюллера (оно гомотопно тождественному на базе $\underline{S}$) и положим $g = \iota_1 \circ f_1 \circ \iota$. Если ε достаточно мало, то f_1 достаточно близко́ к тождественному, тогда ι_1 близка к ι и g близко к тождественному $\Longrightarrow$ гомотопно тождественному (л. 2 п. 15). Так как ι_0, ι_1 голоморфны, то $\|\mu_g\| = \|\mu_{f_1}\| \Longrightarrow$ По теореме единственности Тейхмюллера (л. 9 п. 8), $g = f_1 \Longrightarrow \iota_1 \circ f_1 = f_1 \circ \iota_0$.

Так как $S_1 \approx S$, то $\exists$ биголоморфизм $h \colon S_1 \to S$, гомотопный тождественному. $\Longrightarrow f := h \circ f_1 \colon S_0 \to S$ – квазиконформное отображение, гомотопное тождественному. По доказанному перед леммой, h сохраняет инволюцию, т.е. $h \circ \iota_1 = \iota \circ h \Longrightarrow f \circ \iota_0 = h \circ \iota_1 \circ f_1 = \iota \circ f$.

Если $S \approx S_0$, то в качестве f просто берём биголоморфизм $S_0 \to S$, гомотопный тождественному на $\underline{S}$; он сохраняет инволюцию.

Равномерность по структурам, соотв. $B_r(S)$, как уже отмечено, следует из компактности соотв. семейства квазиконформных отображений S (л. 5 п. 5). $\triangleright$

Далее через $\mathcal{H}_S$ мы обозначим подмножество $\mathcal{H}_g$, состоящее из классов р/п, которые получаются из S квазиконформными преобразованиями $f \colon S \to S'$, гомотопными тождественному отображению базы и сохраняющими инволюцию, т.е. такими, что $f \circ \iota = \iota' \circ f$.

Лемма 36. *S_0 – гиперэллиптическая р/п, ϕ – квадратичный дифференциал на S_0, $k \in (0,1)$ и $f \colon S_0 \to S$ – соответствующее ϕ, k отображение Тейхмюллера. Если S – гиперэллиптическая р/п и $f \circ \iota_0 = \iota \circ f$, то ϕ – чётный квадратичный дифферен-*

циал, т.е. $\iota_0^*\phi = \phi$. *Обратно, если* ϕ *чётный, то* S *– гиперэллиптическая р/п и* $f \circ \iota_0 = \iota \circ f$.

◁ Пусть $z\colon S_0 \to \widehat{\mathbb{C}}$, $\zeta\colon S \to \widehat{\mathbb{C}}$ – нормальные проекции и ψ – квадратичный дифференциал на S, соотв. ϕ при отображении f. Тогда $\phi = \Phi\,(dz)^2$, $\psi = \Psi\,(d\zeta)^2$ и отображение f определяется соотношением

$$\Psi^{1/2} d\zeta = \Phi^{1/2}\,dz + k\overline{\Phi^{1/2}}\,d\bar{z}$$

с константой $k \in (0,1)$ и подходящими ветвями корня в точках, где ϕ и ψ соотв. не имеют нулей (см. л. 9 п. 7). Так как $z \circ \iota_0 = z$, $\zeta \circ \iota = \zeta$ и $f \circ \iota_0 = \iota \circ f$, то

$$(\Psi^{1/2} \circ \iota)\,d\zeta = (\Phi^{1/2} \circ \iota_0)\,dz + k\overline{(\Phi^{1/2} \circ \iota_0)}\,d\bar{z}.$$

Так как $(\Psi^{1/2} \circ \iota)/\Psi^{1/2}$ зависит только от точки на S и не зависит от направлений в ней (соответствующих $d\bar{z}/dz$), то $\overline{\Phi^{1/2} \circ \iota_0}/\Phi^{1/2} \circ \iota_0 = \overline{\Phi^{1/2}}/\Phi^{1/2} \Longrightarrow (\Phi^{1/2} \circ \iota_0)/\Phi^{1/2}$ – вещественная мероморфная функция $\Longrightarrow$ константа $c \in \mathbb{R}$. Так как $\iota_0^2 = \mathrm{id}$, то $c = 1/c \Longrightarrow \phi \circ \iota_0 = c^2\phi = \phi$.

Обратное проще: Пусть $\phi = \Phi(dz)^2$ чётный, $\Phi \circ \iota_0 = \Phi$ и $f\colon S_0 \to S$ – отображение Тейхмюллера, сотв. ϕ и $k \in (0,1)$. Так как Φ не зависит от w, то f переводит пары $(z, \pm w) \in S_0$ в соотв. пары $(\zeta, \pm\omega) \in S \Longrightarrow$ Отображение $f \circ \iota_0 \circ f^{-1}$ является голоморфной инволюцией на $S \Longrightarrow S$ гиперэллиптическая. ▷

Предложение 16. $\mathcal{H}_g$ *– замкнутое комплексное подмногообразие в* T_g *комплексной размерности* $2g-1$. *Связная компонента* $\mathcal{H}_g$, *содержащая* $[S]$, *совпадает с* $\mathcal{H}_S$.

◁ Согласно лемме 36 $\mathcal{H}_{S_0}$ состоит из классов $[S]$, соответствующих чётным квадратичным дифференциалам на р/п S_0. Представим её как поверхность $w^2 = \Pi(z)$ в $\widehat{\mathbb{C}}^2$, где Π – многочлен степени $2g+1$ с простыми нулями, и тогда мы видим, что чётные голоморфные квадратичные дифференциалы на S_0 – это дифференциалы $\phi = a(dz)^2/\Pi$, где a – произвольный многочлен от z степени $\leqslant 2g-2$ (см. п. 11). Комплексная размерность пространства таких дифференциалов равна $2g-1$. Близким (покоэффициентно) дифференциалам соответствуют поверхности, близкие по Тейхмюллеру $\Longrightarrow \mathcal{H}_g$ – топологическое многообразие (размерности $4g-2$).

Пусть $\underline{\iota}$ – отображение гладкой базы $\underline{S}$, соотв. инволюции р/п S_0. Если S соответствует дифференциалу Бельтрами $\mu \in B_1(S_0)$

и $\mu(z,w) = \mu(z,-w)$ ("чётный"), то отображение $\iota\colon S \to S$, равное $\underline{\iota}$ как отображение $\underline{S}$, сохраняет $\mu \Longrightarrow$ является голоморфной инволюцией S. В окрестности $[S_0]$ проекция Берса имеет голоморфное сечение, состоящее из дифференциалов Бельтрами вида $\bar{\phi}/\rho^2$, где $\phi \in A_2(S_0)$ и ρ – гиперболическая метрика на S_0. "Чётными" среди них являются $\bar{\phi}/\rho^2$ с чётными ϕ. Они, очевидно, образуют комплексное многообразие в $B_1(S_0)$ комплексной размерности $2g-1$. Проекция этого многообразия в $T\langle S_0\rangle$ содержится в $(4g-2)$-мерном топологическом многообразии $\mathcal{H}_g \Longrightarrow \mathcal{H}_g$ в окрестности $[S_0]$ есть комплексное многообразие $\Longrightarrow \mathcal{H}_g$ комплексное всюду.

Если S – предельная точка для $\mathcal{H}_{S_0}$, то найдётся последовательность гиперэллиптических S_j, $j = 1, 2, \ldots$, т.ч. $\tau(S_j, S) \to 0$ при $j \to \infty \Longrightarrow$ Можно считать $\tau(S_j, S) < \varepsilon$ с ε из лем. 35 (с подходящим $r < 1$). А тогда $\exists$ последовательность квазиконформных отображений $f_j\colon S_0 \to S_j$, гомотопных тождественному на $\underline{S}$ с соотв. инволюциями ι_j, равными $f_j \circ \iota_0 \circ f_j^{-1}$. Из $\{f_j\}$, согласно п. 5 л. 5, можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к квазиконформному отображению $f\colon S_0 \to S$. Тогда отображение $\iota = f \circ \iota_0 \circ f^{-1}$ удовлетворяет условию $\iota^2 = \mathrm{id}$ и отлично от тождественного. В самом деле, $\iota = \lim \iota_j$ как отображения базы $\underline{S}$, а если ι_j близка к тождественному, то она гомотопна ему и, значит равна id (л. 2 п. 15), чего нет $\Longrightarrow S$ гиперэллиптическая $\Longrightarrow \mathcal{H}_g$ – замкнутое подмногообразие в T_g.

Наконец, по лемме 35 $\mathcal{H}_S$ открыто в $\mathcal{H}_g$, а по лемме 36 $\mathcal{H}_S$ параметризуется чётными квадратичными дифференциалами на S как на базе $\Longrightarrow \mathcal{H}_S$ связно. $\triangleright$

13. Периоды абелевых дифференциалов. При создании теории пространств Тейхмюллера основным требованием к комплексной структуре на них было условие голоморфности периодов нормированных абелевых дифференциалов на компактной р/п.

Пусть $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$ – гладкие петли на такой поверхности S, образующие стандартный базис в группе гомологий $H_1(\underline{S}, \mathbb{Z})$, с индексами пересечений $a_i \wedge a_j = 0 = b_i \wedge b_j$, $a_i \wedge b_j = \delta_{ij}$. Тогда в пространстве (голоморфных) абелевых дифференциалов на S есть двойственный базис $\alpha_1, \ldots, \alpha_g$, т.ч. $\int_{a_i} \alpha_j = \delta_{ij}$ (см. [41] л. 9). Вот эти α_j и называются нормированными, а матрица $\left(\tau_{ij} = \int_{b_i} \alpha_j\right)$ называется *матрицей Римана*. При вариации комплексных структур на $\underline{S}$ базис в гомологиях не меняется, но меняются абелевы дифференциалы $\alpha_j \Longrightarrow$ элементы матрицы Римана являются функциями от комплексной структуры на $\underline{S}$. Альфорс показал, что их можно использовать в качестве локальных координат в пространстве $T\langle S\rangle \approx T_g$, $g > 1$, выбирая подходящие $3g-3$ элементов матрицы в окрестности каждой точки в $T\langle S\rangle$, и что при этом функции переходов являются голоморфными. Таким образом на пространствах T_g была впервые определена комплексная структура, совместимая с другими структурами, в частности, с метрикой Тейхмюллера (см. [2]).

Сначала заметим, что матрица Римана постоянна на классах Торелли (а тем более – на классах Тейхмюллера). В самом деле, пусть $f\colon S \to S'$ – биголоморфное отображение, гомологичное тождественному на общей гладкой базе $\underline{S}$. Тогда $\alpha'_j = (f^{-1})^*\alpha_j$ – базис в пространстве абелевых дифференциалов на S' и $\int_{a_i}\alpha'_j = \int_{f\circ a_i}\alpha'_j = \int_{a_i}\alpha_j = \delta_{ij}$ (первое равенство – из гомологичности петель α_i, $f\circ\alpha_i$ и замкнутости α'_j, второе – замена переменных при интегрировании). Таким образом, элементы τ'_{ij} матрицы Римана для S' равны соотв. $\int_{b_i}\alpha'_j = \int_{f\circ b_i}\alpha'_j = \int_{b_i}\alpha_j = \tau_{ij}$, т.е. те же, что и у S.

Для дальнейшего удобно представлять периоды как интегралы по S. Пусть γ – произвольная гладкая петля (или, более общо, замкнутая 1-цепь) на S. Она определяет линейный функционал $\phi \mapsto \int_\gamma \phi$ на гладких 1-формах, т.е. поток $[\gamma]$ размерности 1 (и степени 1) на S (см. [41], л. 4). Так как $\int_\gamma df = 0$ для гладких функций f, то этот поток замкнут ($d[\gamma] = 0$). Обозначим через γ^ε гладкую регуляризацию $[\gamma]$, сосредоточенную в ε-окрестности γ (относительно, скажем, гип.метрики). Тогда γ^ε – замкнутая 1-форма, определяющая поток $[\gamma^\varepsilon]$, $\phi \mapsto \int_S \gamma^\varepsilon \wedge \phi$. По теореме де Рама ([41], л. 4), поток $[\gamma] - [\gamma^\varepsilon]$ точный $\Longrightarrow \int_\gamma \phi = \int_S \gamma^\varepsilon \wedge \phi$ $\forall$ замкнутой ϕ.

Беря в качестве γ петли a_i, а в качестве ϕ – формы b_j^ε и проводя регуляризацию в координатной окрестности точки пересечения (см. [41], л. 4, упр. 8), получаем, что $\int_S a_i^\varepsilon \wedge b_j^\varepsilon = \delta_{ij}$, а так как различные петли a_i, a_j (как и b_i, b_j) попарно не пересекаются, то ещё $\int a_i^\varepsilon \wedge a_j^\varepsilon = \int b_i^\varepsilon \wedge b_j^\varepsilon = 0$ (интегралы по S, где не указано другого).

Занумеруем $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$ в таком порядке как $c_1, \dots, c_{2g}$. Тогда (см. [41], л. 9) $\exists$ гармонические 1-формы h_j на S, т.ч. $\int_{c_i} h_j = \delta_{ij}$, в частности, $\int a_i^\varepsilon \wedge h_j = 0\ \forall\, j \neq g+i$, а $\int a_i^\varepsilon \wedge h_{g+i} =$

$\int a_i^\varepsilon \wedge b_i^\varepsilon = 1$. Но тогда $\int_{c_i}(b_i^\varepsilon - h_{g+i}) = 0$ для всех $c_i \Longrightarrow b_i^\varepsilon = h_{g+i}+dp_i$. Аналогично, $a_i^\varepsilon = -h_i+dq_i$ (поскольку $b_i^\varepsilon \wedge a_i^\varepsilon = -a_i^\varepsilon \wedge b_i^\varepsilon$). Отсюда, в частности, периоды $\int_{b_i} \alpha_j = \int b_i^\varepsilon \wedge \alpha_j = \int h_{g+i} \wedge \alpha_j$, с формами h, зависящими только от базы S.

Следуя [7], голоморфную зависимость периодов нормированных абелевых дифференциалов от коэффициентов Бельтрами мы выведем из классических билинейных соотношений Римана, которые легко получаются из проведённых выше представлений в виде поверхностных интегралов.

Лемма 37 (Билинейные соотношения Римана). *S – компактная р/п рода $g \Longrightarrow$*

$$\sum_1^g \left(\int_{a_i} \phi \int_{b_i} \psi - \int_{a_i} \psi \int_{b_i} \phi \right) = \int_S \phi \wedge \psi$$

$\forall$ гладких замкнутых 1-форм ϕ, ψ.

$\triangleleft$ Так как любая замкнутая форма ϕ на S с точностью до точного слагаемого совпадает с гармонической формой (см. [41], л. 9), то достаточно проверить это соотношение для базисных гармонических форм $\phi = h_j$, построеных выше. Для $j \leqslant g$ в левой части лишь одно слагаемое возможно отличное от нуля, а именно, $-\int_{a_j} \psi \int_{b_j} h_j = -\int_{a_j} \psi = -\int a_j^\varepsilon \wedge \psi = \int (h_j - dq_j) \wedge \psi = \int h_j \wedge \psi$, но это то же, что и справа. Точно так же, для $\phi = h_{g+j}$, $j \leqslant g$, слева одно слагаемое, $\int_{a_j} h_{g+j} \int_{b_j} \psi = \int b_j^\varepsilon \wedge \psi = \int h_{g+i} \wedge \psi$. $\triangleright$

Предложение 17. *Периоды абелевых дифференциалов – элементы матриц Римана – являются голоморфными функциями на пространствах Тейхмюллера T_g и пространствах Торелли $\mathcal{T}_g$.*

$\triangleleft$ Для $g = 1$ это доказано в л. 3 п. 4 (см. также [41], л. 10, п. 4). Так как универсальное накрытие $T_g \to \mathcal{T}_g$ локально биголоморфно и матрица Римана постоянна на классах Торелли, то достаточно доказать утверждение для T_g.

Фиксируем базовую компактную р/п S рода g и универсальное накрытие $\pi\colon \mathbb{D} \to S$ с сотв. группой G. По определению комплексной структуры на $T\langle S\rangle$, достаточно доказать голоморфность элементов матрицы Римана относительно коэффициентов Бельтрами $\mu \in B_1(G)$. Функция на $B_1(G)$ голоморфна, если она комплексно дифференцируема в каждой точке по каждому направлению (см. приложение 2). Так как замена базы в $T\langle S\rangle$ индуцирует биголоморфное преобразование в $B_1(G)$ (см. л. 8, п. 2), то достаточно доказать комплексную дифференцируемость по $t \in \mathbb{D}$ при $t = 0$ матрицы Римана для $S_t = (\underline{S}, J_{t\mu})$ и произвольного $\mu \in B_1(G)$.

Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_g$ – нормированный базис абелевых дифференциалов на S и $\alpha_1(t), \ldots, \alpha_g(t)$ – такой же базис на S_t, т.е. $\int_{a_i} \alpha_j(t) = \delta_{ij}$. Применим билинейные соотношения Римана к замкнутым (на общей базе $\underline{S}$) формам $\phi = \alpha_j(t) - \alpha_j$ и $\psi = \bar{\phi}$. Тогда левая часть соотношения равна нулю $\Longrightarrow \int_S \phi \wedge \psi = 0$. Относительно локальных голоморфных координат z, w на S, S_t соотв., определённых п.в. на $\underline{S}$ (при помощи фундаментальных многоугольников в $\mathbb{D}$), $\alpha_j = A_j\, dz$, $\alpha_j(t) = A_j^t\, dw$. Так как $S_t = (\underline{S}, J_{t\mu})$, то $dw = w_z(dz + t\mu\, d\bar{z}) \Longrightarrow$

$$\begin{aligned}\phi \wedge \psi &= (|A_j|^2 - 2\,\mathrm{Re}\, A_j \overline{A_j^t}) + |A_j^t|^2(1 - |t\mu|^2))\, dz \wedge d\bar{z}\\ &= (|A_j - A_j^t w_z|^2 - |t\mu\, A_j^t w_z|^2)\, dz \wedge d\bar{z}.\end{aligned}$$

Интегрируя по $\underline{S}$ и интерпретируя результат в L^2 относительно меры на $\underline{S}$, соответствующей 2-форме $\frac{i}{2}\, dz \wedge d\bar{z}$, получаем, что

$$\|A_j^t w_z - A_j\|_2 = \|t\mu\, A_j^t w_z\|_2 \leqslant \|t\mu\|_\infty \|A_j^t w_z\|_2.$$

Отсюда и из неравенства треугольника для левой части получаем, что $\|A_j^t w_z\|_2 \leqslant \|A_j\|_2/(1 - \|t\mu\|_\infty) \Longrightarrow$

$$\|A_j^t w_z - A_j\|_2 \leqslant \|t\mu\|_\infty \|A_j\|_2/(1 - \|t\mu\|_\infty).$$

Теперь применим лемму к формам $\phi = \alpha_i$ и $\psi = \alpha_j(t) - \alpha_j$. Слева там будет одно слагаемое $\int_{b_i}(\alpha_j(t) - \alpha_j)$, а справа $\int_{\underline{S}} \alpha_i \wedge (\alpha_j(t) - \alpha_j) = \int_{\underline{S}} \alpha_i \wedge \alpha_j(t) \Longrightarrow$

$$\begin{aligned}\tau_{ij}(t) - \tau_{ij} &= \int_S \alpha_i \wedge \alpha_j(t) = \int_S (A_i A_j^t w_z t\mu)\, dz \wedge d\bar{z}\\ &= t \int_S A_i A_j \mu\, dz \wedge d\bar{z} + \eta_{ij},\end{aligned}$$

где $\eta_{ij} = t \int_S A_i(A_j^t w_z - A_j)\mu\, dz \wedge d\bar{z}$. Обозначая через $\underline{\mu}$ дифференциал Бельтрами на S, поднятием которого является $\mu\, d\bar{z}/dz$, это соотношение перепишем в виде

$$\tau_{ij}(t) - \tau_{ij} = t \int_S (\alpha_i \alpha_j \underline{\mu})\hat{} + \eta_{ij}.$$

Так как $\|A_j^t w_z - A_j\|_2 = O(|t|)$ по доказанному выше, то $|\eta_{ij}| = O(|t|^2) \Longrightarrow$ Функция $\tau_{ij}(t)$ комплексно дифференцируема по t при $t = 0$, что и требовалось доказать. ▷

Следствие. *Дифференциал функции* $\tau_{ij} : T\langle S\rangle \to \mathbb{C}$ *в базовой точке* $[0]$ *пространства Тейхмюллера есть* $\mathbb{C}$*-линейное отображение* $[\mu] \mapsto \int_S (\alpha_i\alpha_j\mu)\hat{}$.

Как хорошо известно (см., например, [23]), матрицы периодов (τ_{ij}) имеют положительно определённые мнимые части. Комплексные $g \times g$-матрицы с этим свойством образуют так называемую верхнюю полуплоскость Зигеля Z_g, биголоморфно эквивалентную ограниченной области, обобщённому единичному шару (см. [44]). Отображение $[S]_{\mathcal{T}} \mapsto (\tau_{ij})$, как показано выше, голоморфно. Его образ $\mathcal{P}_g$ есть $(3g-3)$-мерное комплексно-аналитическое подмножество в Z_g (мы это не доказываем). Замечательная теорема Торелли утверждает, что это отображение периодов $\mathcal{T}_g \to \mathcal{P}_g$ есть двулистное накрытие, разветвлённое над образами гиперэллиптических поверхностей, т.е. у "гиперэллиптических" матриц ровно 1 прообраз, а у остальных матриц из $\mathcal{P}_g$ – ровно 2 прообраза (см. упр. 3). Известное доказательство теоремы Торелли (см. [9]) чисто алгебро-геометрическое; более простого я, к сожалению, не знаю и потому не могу здесь привести.

* * * * *

Задачи и упражнения.

1. Для каких многочленов $\Pi(z)$ с простыми нулями соотв. р/п $w^2 = \Pi(z)$ в $\widehat{\mathbb{C}}^2$

a) обладает антиголоморфной инволюцией?

b) является дублем Шоттки некоторой р/п?

2. $\bar{\iota}$ – антиголоморфная инволюция р/п $\{w^2 = \Pi(z)\} \subset \widehat{\mathbb{C}}^2$ ($\bar{\iota} \neq \mathrm{id}$, $\bar{\iota}^2 = \mathrm{id}$) $\Longrightarrow$ $\overline{z \circ \bar{\iota}}$ – дробно-линейная функция от z.

3. S – как в упр. 2, $\mu(z,w)$ и $\mu(z,-w)$ – коэффициенты дифференциалов Тейхмюллера на S и $S_\pm$ – соотв. р/п $\Longrightarrow$ Матрицы Римана для S_+ и S_- совпадают.

Приложение

1. Аппроксимационные теоремы. Работать с гомеоморфизмами в аналитических задачах весьма затруднительно. Но в проблемах классификации р/п важны не сами отображения, а их гомотопические классы, и в каждом таком классе, оказывается, есть вполне гладкие (и даже $\mathbb{R}$-аналитические) представители.

Начнём со следующего простого утверждения:

1. *f – гомеоморфизм окружности $\partial\mathbb{D} \subset \mathbb{C} \Longrightarrow \exists$ диффеоморфизм $\tilde{f}$ круга $\mathbb{D}$, непрерывный в замыкании и совпадающий с f на $\partial\mathbb{D}$. При этом если f гладкий, с положительной производной на некоторой дуге $\gamma \subset \partial\mathbb{D}$, то $\tilde{f}$ – диффеоморфизм $\mathbb{D}\cup\gamma$ на $\mathbb{D}\cup f(\gamma)$.*

$\triangleleft$ Можно считать, что f сохраняет ориентацию. Представим $f(e^{i\theta})$ в виде $e^{ih(\theta)}$, где $h(t)$ – монотонно возрастающая функция на $\mathbb{R}$, $h(t+2\pi) = h(t) + 2\pi$, и положим

$$\tilde{h}(r,\theta) = \int_{\mathbb{R}} h(\theta + \lambda_1(r)t)\,\lambda_2(t)\,dt\, = \frac{1}{\lambda_1(r)}\int_{\mathbb{R}} h(s)\lambda_2\left(\frac{s-\theta}{\lambda_1(r)}\right)\,ds\,,$$

где λ_1, λ_2 – гладкие (C^∞) функции, $\lambda_1(r) = 0$ при $r \geqslant 1$, > 0 при $r < 1$ и $= 1$ при $r < 1/2$, а λ_2 чётная ($\lambda_2(-t) = \lambda_2(t)$), $= 0$ при $|t| > 1$, $\geqslant 0$, $\lambda'(t) < 0$ при $0 < t < 1$ и $\int \lambda_2(t)\,dt = 1$. Ясно, что $\tilde{h} = h$ на $\partial\mathbb{D}$ и $\tilde{h}$ гладкая в $\mathbb{D}$, $\tilde{h}(r,\theta+2\pi) = \tilde{h}(r,\theta) + 2\pi$ и

$$\begin{aligned}\frac{\partial\tilde{h}}{\partial\theta}(r,\theta) &= -\frac{1}{\lambda_1^2(r)}\int_{\mathbb{R}} h(t+\theta)\lambda_2'\left(\frac{t}{\lambda_1(r)}\right)\,dt = \\ &= \frac{1}{\lambda_1^2(r)}\int_0^\infty (h(\theta+t) - h(\theta-t))\,|\lambda_2'|\left(\frac{t}{\lambda_1(r)}\right)\,dt > 0\end{aligned}$$

так как h – строго монотонно возрастающая функция.

Положим $\tilde{f}(re^{i\theta}) = r\exp i[\lambda_1(r)\theta + (1-\lambda_1(r))\tilde{h}(r,\theta)]$. Тогда $\tilde{f} \in C^\infty(\mathbb{D})$ и, поскольку $|\tilde{f}(re^{i\theta})| \equiv r$, то якобиан $\tilde{f}$ в полярных координатах положителен. Так как $\tilde{f} = f$ на $\partial\mathbb{D}$, то это значит, что отображение $\tilde{f}|\,\mathbb{D}$ собственное (прообраз любого компакта – компакт) и локально 1:1 $\Longrightarrow$ это диффеоморфизм $\mathbb{D}$.

Последнее утверждение следует из определения $\tilde{h}$: в первом интеграле можно дифференцировать под его знаком, там, где h гладкая. $\triangleright$

Нам понадобится ещё одно более-менее очевидное утверждение о сглаживании.

2. *U – окрестность $\mathbb{R}$ в $\mathbb{C}$, $f\colon U \to f(U)$ – гомеоморфизм, такой что $f(x,0) \equiv x$ и сужения $f|U \cap \{\pm y \geqslant 0\}$ – диффеоморфизмы (т.е. f – кусочно диффеоморфное отображение) $\Longrightarrow$ $\exists$ окрестность $V \supset \mathbb{R}$ с $\overline{V} \subset U$ и дифеоморфизм $\tilde f\colon U \to f(U)$, который совпадает с f в $U \setminus V$, причём $t\tilde f(z) + (1-t)f(z) \in f(U)$, $\forall\, z \in U$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.*

$\lhd$ По условию, функция $\partial f/\partial x$ непрерывна в U и равна 1 на $\mathbb{R}$. Можно считать, что f сохраняет ориентацию и тогда существует гладкая функция $\delta(x) > 0$ и окрестность $W \supset \mathbb{R}$ в U такие, что $\operatorname{Im}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) > \delta(x)$ в $W \setminus \mathbb{R}$. Окрестность $V \supset \mathbb{R}$, $\overline{V} \subset W$, выберем так, что $\big(\operatorname{Im}\frac{\partial f}{\partial x}\operatorname{Re}\frac{\partial f}{\partial y}\big)(x,y) < \delta(x)/3$ в $V \setminus \mathbb{R}$ (это возможно, так как $\operatorname{Im}\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ на $\mathbb{R}$). Фиксируем функцию $\lambda_1 \in C^\infty(U)$, равную 1 в окрестности $\mathbb{R}$ и $= 0$ в окрестности $U \setminus V$. Положим

$$f^\varepsilon(x,y) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x + \varepsilon(x)\xi, y + \varepsilon(x)\eta)\, \lambda_2(\xi,\eta)\, d\xi d\eta\,,$$

где $\lambda_2 \geqslant 0$ – гладкая функция, $= 0$ при $|(\xi,\eta)| > 1$, $\int \lambda_2\, d\xi\, d\eta = 1$, а $\varepsilon(x) > 0$ – гладкая функция, которую мы выберем в дальнейшем.

"Склеим" f и f^ε, полагая $\tilde f = \lambda_1 f^\varepsilon + (1-\lambda_1)f$. Функция $\tilde f$ гладкая в U и равна f в $U \setminus V$. Поэтому если ε достаточно мала (в это понятие включаем достаточно быстрое убывание на бесконечности), то значения функций $t\tilde f + (1-t)f$ в U принадлежат $f(U)$. Так как f кусочно-гладкая, то для вычисления производных f^ε можно дифференцировать под знаком интеграла (таким образом получаются, очевидно, обобщённые производные f^ε, которые равны обычным, поскольку f^ε гладкая) $\Longrightarrow$ $\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial x} \to \frac{\partial f}{\partial x}$ при $\varepsilon, \varepsilon' = \frac{d\varepsilon}{dx} \to 0$ и $\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial y} \to \frac{\partial f}{\partial y}$ в $U \setminus \mathbb{R}$ при $\varepsilon \to 0$, оставаясь локально равномерно ограниченными в U. Далее, $\frac{\partial \tilde f}{\partial x} = \lambda_1\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial x} + (1-\lambda_1)\frac{\partial f}{\partial x} + (f^\varepsilon - f)\frac{\partial \lambda_1}{\partial x} \to \frac{\partial f}{\partial x}$ при $\varepsilon, \varepsilon' \to 0$ и, аналогично, $\frac{\partial \tilde f}{\partial y}$ локально равномерно ограничены в U и $\frac{\partial \tilde f}{\partial y} \to \frac{\partial f}{\partial y}$ в $U \setminus \mathbb{R}$.

Таким образом, если ε достаточно мала вместе с ε', то якобиан $\tilde f$,

$$\left(\operatorname{Re}\frac{\partial \tilde f}{\partial x}\operatorname{Im}\frac{\partial \tilde f}{\partial y} - \operatorname{Im}\frac{\partial \tilde f}{\partial x}\operatorname{Re}\frac{\partial \tilde f}{\partial y}\right)(x,y) \geqslant \delta(x)/2$$

всюду в V и $\tilde f(z) \to \infty$ при $z \to \infty$ в U. Так как $\tilde f = f$ в $U \setminus V$, то якобиан $\tilde f$ положителен всюду в U и, значит (как и в 1.), $\tilde f \colon U \to f(U)$ – диффеоморфизм. $\triangleright$

Лемма 38. *$f \colon S \to S'$ – гомеоморфизм римановых поверхностей $\Longrightarrow \exists$ диффеоморфизм $F \colon S \to S'$, гомотопный f.*

$\triangleleft$ Пусть $U_1, U_2, \ldots$ – локально-конечное покрытие S односвязными областями с $\mathbb{R}$-аналитическими границами, $\mathcal{U}_k = \bigcup_{j \leqslant k} U_j$ и $\phi_k \colon U_k \to \mathbb{D}$ – конформные отображения на единичный круг $\mathbb{D}$. По принципу симметрии (ТФКП), ϕ_k конформно продолжается в окрестность замыкания $\overline{U}_k$.

Положим $F_0 = f$ и определим гомеоморфизмы $F_k \colon S \to S'$, $k = 1, 2, \ldots$, по индукции, полагая $F_k = F_{k-1}$ в $S \setminus U_k$ и заменяя $F_{k-1}|U_k$ подходящим диффеоморфизмом. Итак, предположим, что гомеоморфизм F_{k-1}, гомотопный f, построен, равен f на $S \setminus \mathcal{U}_k$ и его сужение на $\mathcal{U}_{k-1}$ является диффеоморфизмом этого открытого множества на $f(\mathcal{U}_{k-1})$. Будем строить F_k с аналогичными свойствами.

Сначала продолжим F_{k-1} с ∂U_k до диффеоморфизма U_k на $F_{k-1}(U_k)$, используя утв. 1. Для этого заметим, что $F_{k-1}(U_k)$ – жорданова область и потому существует конформное отображение $\psi_k \colon F_{k-1}(U_k) \to \mathbb{D}$, гомеоморфное в её замыкании (теорема Каратеодори, ТФКП). Функция $f_k = \psi_k \circ F_{k-1} \circ \phi_k^{-1}$ задаёт гомеоморфизм $\partial\mathbb{D}$ и значит, согласно утв. 1, существует диффеоморфизм $\tilde f_k$ круга $\mathbb{D}$, продолжающий f_k с границы. Определим $H_k = F_{k-1}$ в $S \setminus U_k$ и $H_k = \psi_k^{-1} \circ \tilde f_k \circ \phi_k$ в U_k. Тогда H_k – гомеоморфизм $S \to S'$, гомотопный F_{k-1} (а значит, и f): гомотопия задаётся, например, семейством $H_k^t = F_{k-1}$ в $S \setminus U_k$, $H_k^t = \psi^{-1} \circ (t\tilde f_k + (1-t) f_k) \circ \phi_k$ в U_k, $0 \leqslant t \leqslant 1$. По построению, отображение H_k кусочно-диффеоморфно в $\mathcal{U}_k$, возможен разрыв первых производных на $\partial U_k \cap \mathcal{U}_{k-1}$.

Пользуясь утв. 2, сгладим такой излом на каждой компоненте-дуге γ этого множества. Пусть $\widetilde{U}$ – окрестность γ в $\mathcal{U}_{k-1}$ и ϕ – диффеоморфизм $\widetilde{U}$ на окрестность U вещественной прямой $\mathbb{R}$ в $\mathbb{C}$, 1:1 отображающий γ на $\mathbb{R}$. Так как $\widetilde{U} \subset \mathcal{U}_{k-1}$, то $H_k(\gamma) = F_{k-1}(\gamma)$ – тоже гладкая дуга (на S') и $\phi \circ F_{k-1}^{-1}$ – диффеоморфизм окрестности $H_k(\gamma)$ на окрестность $\mathbb{R}$, 1:1 отображающий $H_k(\gamma)$ на $\mathbb{R}$. Функция $h_k = \phi \circ F_{k-1}^{-1} \circ F_k \circ \phi^{-1}$ удовлетворяет условиям утв. 2

и потому существует диффеоморфизм $\tilde{h}_k : U \to h_k(U)$, совпадающий с h_k вне некоторой окрестности $V \supset \mathbb{R}$, $\overline{V} \subset U$, и гомотопный h_k в U, как в утв. 2.

Определим, наконец, отображение F_k, полагая $F_k = H_k$ в $S \setminus \widetilde{U}$ и $F_k = F_{k-1} \circ \phi^{-1} \circ \tilde{h}_k \circ \phi$ в $\widetilde{U}$. Тогда F_k – гомеоморфизм S на S', гомотопный f, как и H_k. Так как $F_k = f$ в $S \setminus \mathcal{U}_k$, то F_k – диффеоморфизм $\mathcal{U}_k$ на $f(\mathcal{U}_k)$. Индукция завершена.

Так как $\{U_k\}$ – локально конечное покрытие, то для любого компакта $K \subset S$ найдётся n_K такое, что $F_n = F_{n+1}$ при $n > n_K$. Поэтому $F = lim\, F_k$ существует и является искомым диффеоморфизмом S на S'. $\triangleright$

Гомотопия, о которой говорится в лемме, – это гомотопия в классе непрерывных, не обязательно гомеоморфных, отображений S в S'. Известно (см. [22]), что из такой гомотопии гомеоморфизмов р/п конечного топологического типа следует гомотопия и в классе гомеоморфизмов (изотопия), но мы это не используем.

Следствие. $\varepsilon(p) > 0$ – *произвольная непрерывная функция на р/п* $S \Longrightarrow \forall$ *гомеоморфизма р/п* $f_0 : S \to S'$ *и любой функции расстояния* ρ *на* S' $\exists$ *диффеоморфизм* $f_1 : S \to S'$, *гомотопный* f_0, *с гомотопией* f_t, *т.ч.* $\rho(f_0(p), f_t(p)) < \varepsilon(p)$, $\forall\, p \in S$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

$\triangleleft$ Покрытие $\{U_j\}$ из доказательства леммы измельчим так, что диаметр U_j относительно ρ меньше $\inf \varepsilon$ на U_j – тогда построенный выше диффеоморфизм F удовлетворяет указанной оценке. $\triangleright$

Эта интуитивно понятная лемма важна для переходя от топологии к анализу. Обычно вместо диффеоморфизмов доказывается (или объявляется очевидным) существование квазиконформных отображений, гомотопных данному гомеоморфизму компактных р/п (см. [5], с. 27–29, [6], с. 181). Или просто в определении классов Тейхмюллера вместо гомеоморфизмов рассматривают одни квазиконформные отображения р/п (как в [7]).

Для р/п конформного типа (g, n) существование квазиконформного диффеоморфизма легко следует из доказанного выше.

Предложение 18. $f : S \to S'$ – *гомеоморфизм р/п конформного типа* $(g, n) \Longrightarrow \exists$ *квазиконформный диффеоморфизм* $S \to S'$, *гомотопный* f.

$\triangleleft$ Отображение f непрерывно продолжается до гомеоморфизма $f_0 : S_0 \to S_0'$ соотв. компактификаций, $S = S_0 \setminus E$, $S' =$

$S_0' \setminus (E' = f_0(E))$, $\#E = n$. Согласно следствию (с $\rho = 0$ на E'), $\exists$ гомеоморфизм $f_1 \colon S_0 \to S_0'$, сужение которого на S является диффеоморфизмом $S \to S'$.

Пусть $V_j \Subset U_j$ – окрестности точек $a_j \in E$, диффеоморфные кругу, разные U_j не пересекаются. Тогда, очевидно, $\exists$ диффеоморфизмы $F_j \colon U_j \to F_j(U_j) \subset S_0'$, т.ч. $f_j(a_j) = f_0(a_j)$ и $f_j = f_0$ на $U_j \setminus V_j$, гомотопные f_0 в U_j с этими же свойствами промежуточных отображений гомотопии. Отображение F, равное f в $S_0 \setminus \cup U_j$, и равное F_j в U_j, является диффеоморфизмом компактных р/п и потому квазиконформно $\Longrightarrow$ Сужение $F|_S$ есть искомое отображение. $\triangleright$

2. Голоморфные функции в банаховом пространстве. Пусть X, Y – банаховы пространства над полем $\mathbb{C}$ и U – открытое подмножество в X. Отображение $f \colon U \to Y$ называется комплексно ($\mathbb{C}$-) дифференцируемым в точке $a \in U$, если $\exists$ $\mathbb{C}$-линейное непрерывное отображение (оператор) $Df(a) \colon X \to Y$, т.ч.

$$\|f(a+h) - f(a) - Df(a)(h)\|_Y / \|h\|_X \to 0 \text{ при } h \to 0 \text{ в } X.$$

Отображение $Df(a)$ называется дифференциалом (или производной) f в точке a. Отображение, $\mathbb{C}$-дифференцируемое во всех точках U, называется *голоморфным* в U. Если при этом $f(U)$ открыто в U, $f^{-1} \exists$ и тоже голоморфно, то f называется *биголоморфным*. Композиция голоморфных отображений, очевидно, голоморфна там, где она определена.

Частные случаи определения – это $X = \mathbb{C}$ (отображения $\mathbb{C} \supset U \to Y$ называются *голоморфными кривыми* в Y) и $Y = \mathbb{C}$ (*голоморфные функции* в U).

Теория голоморфных кривых во многом повторяет классическую ТФ КП: в задачах, где функции входят линейно, обычно неважно, каково множество значений, $\mathbb{C}$ или какое-нибудь банахово пространство. Дословно повторяя лемму Гурса, получаем для голоморфных кривых $f \colon U \to Y$ в области $U \subset \mathbb{C}_z$ интегральную теорему Коши, из неё – интегральную формулу Коши, из неё – голоморфность всех производных по z и т.д.

Аналогично, для $X = \mathbb{C}^N$ "линейная" теория голоморфных отображений повторяет многомерный комплексный анализ. В частности, в любом поликруге $D_1 \times \cdots \times D_N$ справедлива интегральная формула Коши по остову $\partial D_1 \times \cdots \times \partial D_N$ и те же следствия: голоморфность всех частных производных и т.п.

Как и в классическом случае, важную роль в бесконечномерном комплексном анализе играет следующая обобщённая лемма Шварца.

Лемма 39. *B_X, B_Y – единичные шары в X, Y соотв., $f\colon B_X \to B_Y$ голоморфное отображение и $f(0) = 0 \Longrightarrow \|f(x)\|_Y \leqslant \|x\|_X$ $\forall\, x \in B_X$ и $\|Df(0)\|_Y \leqslant 1$.*

$\triangleleft$ При фиксированном $x \in \partial B_X$, отображение $\mathbb{D} \ni \lambda \mapsto f(\lambda x) \in B_Y$ голоморфно в единичном круге. Обозначим через Y^* банахово пространство, сопряжённое к Y (пространство непрерывных $\mathbb{C}$-линейных функционалов на Y). Тогда $\|y\|_Y = \sup\{|l(y)|\colon l \in Y^*, \|l\|_{Y^*} \leqslant 1\}$ (по существу, это определение нормы в Y^*). Для $l \in Y^*$, $\|l\|_{Y^*} \leqslant 1$, отображение $l(f(\lambda x))\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ – уже обычная голоморфная функция, $0 \mapsto 0 \Longrightarrow |l(f(\lambda x))| \leqslant |\lambda|$ по классической лемме Шварца. Применяя это к $x/\|x\|_X$ и $\lambda = \|x\|_X$, получаем утверждение леммы. $\triangleright$

Из леммы Шварца легко выводится следующее.

Предложение 19. *Ограниченное отображение $f\colon U \to Y$ голоморфно $\Longleftrightarrow$ $\forall\, a \in U$, $x \in X$ отображение $f(a + \lambda x)$ голоморфно в окрестности нуля в $\mathbb{C}_\lambda$.*

$\triangleleft$ 1) $\to$ 2) очевидно из определения.

2) $\to$ 1). Обозначим через $D_x f(a)$ дифференциал голоморфного отображения $f(a + \lambda x)$ при $\lambda = 0$ (и фиксированном x); по линейности, $D_x f(a)(\lambda) = \lambda D_x f(a)(1)$. Применяя лемму Шварца к отображению $(f(a+\lambda x) - f(a))/\lambda - D_x f(a)(\lambda)$ (доопределённому нулём в 0), получаем оценку

$$\|f(a + \lambda x) - f(a) - \lambda D_x f(a)(1)\|_Y \leqslant \frac{2M}{r}|\lambda|^2,$$

если шар $B_X(a, r) \in U$, $\|x\|_X \leqslant 1$ и $\|f\|_Y \leqslant M$ в U.

Оператор $\mathcal{D}f(a)\colon x \to D_x f(a)(1)$ является, очевидно, $\mathbb{C}$-однородным отображением из X в Y, т.е. $\mathcal{D}_{tx} f(a)(1) = t\mathcal{D}_x f(a)(1)$, $t \in \mathbb{C}$. Далее, $D_{x_1+x_2} f(a)(1) - D_{x_1} f(a)(1) = \big(f(a + \lambda(x_1 + x_2)) - f(a + \lambda x_2)\big)/\lambda + O(\lambda) = D_{x_2}(a + \lambda x_1) + O(\lambda)$. При фиксированных $x_1, x_2 \in X$, $f(a + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$ есть отображение окрестности $0 \in \mathbb{C}^2_{\lambda_1,\lambda_2}$ в пространство Y. Как объяснено перед леммой Шварца, его частные производные голоморфны. Производная по λ_2 при $\lambda_2 = 0$ совпадает, очевидно, с $D_{x_2} f(a + \lambda x_1)(1)$ $\Longrightarrow D_{x_2} f(a + \lambda x_1)(1) = D_{x_2} f(a)(1) + O(\lambda)$ и таким образом мы получаем, что оператор $\mathcal{D}f(a)\colon X \to Y$ аддитивен $\Longrightarrow$ $\mathcal{D}f(a)$ – линейный ограниченный оператор из X в $Y \Longrightarrow \mathcal{D}f(a) = Df(a)$, дифференциал f в точке $a \Longrightarrow f$ всюду в U $\mathbb{C}$-дифференцируемо. $\triangleright$

В лекциях неоднократно используется следующая теорема о голоморфности обратного отображения.

Предложение 20. *X, Y – конечномерные банаховы пространства над полем $\mathbb{C}$ одинаковой размерности, U – область в X и $f\colon U \to V$ – голоморфное $1:1$ отображение U на область $V \subset Y$ $\Longrightarrow$ Отображение f^{-1} тоже голоморфно.*

$\triangleleft$ Нормы в X, Y здесь несущественны, поэтому можно считать, что $X = Y = \mathbb{C}^N$. Обозначим через Σ множество критических значений отображения f, т.е. образ множества критических точек f (в которых якобиан J_f отображения f равен нулю). Так как f 1:1, то Σ имеет нулевой объём.

Функция $1/J_f \circ f^{-1}$, доопределённая нулём на Σ, непрерывна на V и голоморфна в $V \setminus \Sigma \Longrightarrow$ По классической теореме Радо она голоморфна на $\Lambda \cap V$, где Λ – произвольная комплексная прямая $\Longrightarrow$ по предл. 19 она голоморфна в $V \Longrightarrow$ по теореме единственности либо всё $\Lambda \cap V$ принадлежит Σ, либо $\Sigma \cap \Lambda$ является дискретным множеством. Во втором случае непрерывная функция f^{-1} голоморфна на $\Lambda \cap V$ по теореме об устранимой особенности (ТФКП). Так как такие Λ приближают любую комплексную прямую (Σ – нулевого объёма), то f^{-1} голоморфна на всех $\Lambda \cap V \Longrightarrow$ f голоморфна на V. $\triangleright$

Другое доказательство см. в [44], § 4.

3. Координаты Фрике. Исторически первыми числовыми координатами в пространствах модулей р/п были координаты, предложенные Фрике в начале прошлого века (задолго до работ Тейхмюллера). В книге Абикофа [1] приведено весьма лаконичное описание упрощённого варианта таких координат; ниже это описание слегка детализировано и сразу увязано с классами Тейхмюллера.

Пусть $S = (\underline{S}, J)$ – компактная р/п рода $g > 1$. Фиксируем точку $\circ$ и выбираем для $\pi_1(\underline{S}, \circ)$ стандартный базис жордановых петель $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$ с началом $\circ$ и единственным соотношением $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots = 1$ (см. л. 1). В качестве универсальной накрывающей здесь удобнее брать полуплоскость $\mathbb{H}$. Как объяснено в лекции 1, обход по каждой петле в S индуцирует автоморфизм универсальной накрывающей и это соответствие задаёт групповой мономорфизм $\pi_1(S, \circ) \to \operatorname{Aut}\mathbb{H}$. Преобразования, соответствующие a_j, b_j обозначим A_j, B_j соотв. По построению, $A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} \cdots = 1$, тождественное отображение. Если $\pi\colon \mathbb{H} \to S$ – универсальное накрытие и $\psi \in \operatorname{Aut}\mathbb{H}$, то $\pi \circ \psi\colon \mathbb{H} \to S$ – тоже универсальное накрытие. Поэтому, подбирая ψ, мы можем нормировать накрывающую группу G для S след. условиями: B_g имеет неподвижными точки $0, \infty$ причём 0 – отталкивающая (т.е. $B_g\colon z \mapsto k^2 z$, $k > 1$) и A_g имеет неподвижную точку 1.

Если р/п $S' = (\underline{S}, J')$ эквивалентна S по Тейхмюллеру, то $\exists$ голоморфное отображение $h\colon S \to S'$, гомотопное тождественному на $\underline{S}$ квазиконформному отображению $\iota\colon S \to S'$. Если $\pi'\colon \mathbb{H} \to S'$ – универсальное накрытие, то $\exists$ поднятие $\tilde{h}\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, которое совпадает с поднятием ι на $\mathbb{R}$, т.е. с тождественным $z \mapsto z$ (для компактной поверхности $\sigma(G') = \partial\mathbb{H}$ в $\widehat{\mathbb{C}}$) $\Longrightarrow G' = \tilde{h} G \tilde{h}^{-1} = G$ и, значит, р/поверхности S' соответствует та же накрывающая подгруппа в $\operatorname{Aut}\mathbb{H}$, с теми же образующими A_j, B_j. Таким образом, мы получаем 1:1 соответствие пространства Тейхмюллера T_g и множества нормированных мономорфизмов $\pi_1(\underline{S}, \circ) \to \operatorname{Aut}\mathbb{H}$.

Соотношение на образующие означает, что

$$[B_g, A_g] = \Pi_1^{g-1}\,[A_j, B_j],$$

где $[A, B] = ABA^{-1}B^{-1}$ – коммутатор (и Π упорядочено). Отображениям из $\operatorname{Aut}\mathbb{H}$ соответствуют матрицы $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{R})$, (т.е. $ad - bc = 1$), определённые с точностью до знака (умножения на ± 1), причём композиции отображений соответствует произведение матриц. Условия нормировки означают, что $B_g \sim \left(\begin{smallmatrix} k & 0 \\ 0 & 1/k \end{smallmatrix}\right)$, $k > 1$, и $A_g \sim \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right)$, с $\alpha + \beta = \gamma + \delta$. Правой части соотношения коммутирования соответствует матрица $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ из $SL_2(\mathbb{R})$ с $a \neq 1$, и мы получаем равенство $\left(\begin{smallmatrix} k & 0 \\ 0 & 1/k \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1/k & 0 \\ 0 & k \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right)$. Это однородная система линейных уравнений относительно $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, а именно

$$(a-1)\alpha + b\gamma = c\alpha + (d - 1/k^2)\gamma = (a - k^2)\beta + b\delta = c\beta + (d-1)\delta = 0.$$

Определитель этой системы с точностью до знака равен

$$[(a-1)(d-1/k^2) - bc][(a-k^2)(d-1) - bc]$$

и ненулевые решения возможны только когда он $= 0$. Тогда, если $bc = 0$, то $ad = 1$ и $k^2 = a$. Если же $bc \neq 0$, то $d \neq 1$, как и a (по условию) и, значит, $k^2 = (1-a)/(d-1)$. (Зависимость k от параметров a, d, как легко убедиться, непрерывна.) Из дополнительных условий $\alpha + \beta = \gamma + \delta$ и $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ с $\alpha \geqslant 0$ получаем $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ как однозначные функции от $a, b, c, d \Longrightarrow$ от коэффициентов дробно-линейных отображений A_j, B_j.

Перенумеруем их и соотв. матрицы запишем единообразно как $\left(\begin{smallmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{smallmatrix}\right)$ с $a_i > 0$, а если $a_i = 0$, то $b_i > 0$. Коэффициенты d_i определяем из условий $a_i d_i - b_i c_i = 1$, если $a_i > 0$. Но если некоторое $a_i = 0$, то композиции этой матрицы с B_g^n соответствует отображение $z \mapsto k^{2n}b^2/(db - z)$ с неподвижной точкой $\frac{1}{2}(bd + b\sqrt{d^2 - 4k^{2n}}) \in \mathbb{H}$, чего не бывает у элементов накрывающих групп $\Longrightarrow$ все $a_i > 0$. Таким образом, нормированным накрывающим группам компактных р/п рода $g > 1$ однозначно соответствуют наборы параметров $(a_1, b_1, c_1, \ldots, a_{g-1}, b_{g-1}, c_{g-1})$, причём эквивалентным по Тейхмюллеру р/п соответствуют одинаковые наборы, а не эквивалентным – разные. Этим определено отображение $T_g \to \mathcal{F}(T_g) = \mathcal{F}_g \subset \mathbb{R}^{6g-6}$, которое называется *отображением Фрике*, а точки в образе – параметрами Фрике соотв. классов Тейхмюллера. Таким образом, мы получаем следующую теорему.

Предложение 21. *Отображение Фрике* $\mathcal{F}\colon T_g \to \mathbb{R}^{6g-6}$ *является непрерывным* $1:1$ *отображением на связное открытое подмножество области* $a_1 > 0, \ldots, a_{g-1} > 0$.

$\triangleleft$ Единственное здесь, что надо доказать, это непрерывность. Но если расстояния между структурами J, J' на $\underline{S}$ мало́, то тождественное отображение $\underline{S}$ является квазиконформным отображением $(\underline{S}, J)$ на $(\underline{S}, J')$ с малым дифференциалом Бельтрами μ. Это отображение накрывается квазиконформным автоморфизмом f_μ полуплоскости $\mathbb{H}$ с соотв. малым коэффициентом $\tilde{\mu}$ $\Longrightarrow$ мало отличается от тождественного $\Longrightarrow$ образующие группы $G' = f_\mu G f_\mu^{-1}$ мало отличаются от образующих G, а это и означает непрерывность отображения Фрике. $\triangleright$

Аналогичное построение можно провести и для гиперболической р/п любого конечного конформного типа (g, n, m) (с гиперболическим дублем), получая вложение $T_{g,n,m}$ в $\mathbb{R}^N$ с $N = 6g - 6 + 2n + 3m$ (см. [1]).

Основные ссылки

[1] У. Абикоф, *Вещественно аналитическая теория пространств Тейхмюллера*, Мир, М., 1985.

[2] Л. Альфорс, Л. Берс, *Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения*, ИЛ, М., 1961.

[3] L. Ahlfors et al. (eds), *Advances in the theory of Riemann surfaces*, Annals of Math. Studies, **66**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1971.

[4] Л. Альфорс, *Лекции по квазиконформным отображениям*, Мир, М., 1969.

[5] С. Л. Крушкаль, *Квазиконформные отображения и римановы поверхности*, Наука, Новосибирск, 1975.

[6] O. Lehto, *Univalent Functions and Teichmüller Spaces*, Springer-Verlag, New York, 1987.

[7] S. Nag, *The Complex Analytic Theory of Teichmüller Spaces*, J. Wiley & Sons, New York, 1988.

Дополнительная литература

[8] L. Ahlfors, L. Bers, “Riemann's mapping theorem for variable metrics”, *Ann. of Math.* (2), **72** (1960), 385–404.

[9] A. Andreotti, “On a theorem of Torelli”, *Amer. J. Math.*, **80** (1958), 801–828.

[10] L. Bers, H. Royden, “Holomorphic families of injections”, *Acta Math.*, **157** (1986), 259–286.

[11] А. Б. Богатырёв, *Экстремальные многочлены и римановы поверхности*, МЦНМО, М., 2005.

[12] Б. В. Боярский, “Гомеоморфные решения систем Бельтрами”, *ДАН СССР*, **102** (1955), 661–664.

[13] Б. В. Боярский, “Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами”, *Матем. сб.*, **43(85)** (1957), 451–503.

[14] И. Н. Векуа, *Обобщённые аналитические функции*, Наука, М., 1988.

[15] Р. Ганнинг, Х. Росси, *Аналитические функции многих комплексных переменных*, Мир, М., 1969.

[16] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Наука, М., 1966.

[17] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, В. Т. Фоменко, *Современная геометрия. Методы теории гомологий*, Наука, М., 1984.

[18] C. J. Earle, “On holomorphic families of pointed Riemann surfaces”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **79** (1973), 163–166.

[19] C. J. Earle, “The Teichmüller distance is differentiable”, *Duke Math. J.*, **44** (1977), 389–397.

[20] C. J. Earle, I. Kra, S. L. Krushkal’, “Holomorphic motions and Teichmüller spaces”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **343** (1994), 927–948.

[21] C. Ehresmann, “Les connexions infinitesimales dans un espace fibré differentiable”, *Colloque de Topologie*, *Bruxelles*, 1950, 29–55.

[22] D. B. A. Epstein, “Curves on 2-manifolds and isotopies”, *Acta Math.*, **115** (1966), 83–107.

[23] H. Farkas, I. Kra, *Riemann surfaces*, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1980.

[24] О. Форстер, *Римановы поверхности*, Мир, М., 1980.

[25] F. Gardiner, *Teichmüller theory and quadratic differentials*, Wiley-Intescience, New York, 1987.

[26] A. M. Garsia, “An embedding of closed Riemann surfaces in Euclidean space”, *Comm. Math. Helv.*, **35** (1961), 93–110.

[27] R. S. Hamilton, “Extremal quasiconformal mappings with prescribed boundary values”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **138** (1969), 399–406.

[28] Дж. Харрис, Я. Моррисон, *Модули кривых. Вводный курс*, Мир, Научный мир, 2004.

[29] М. Хирш, *Дифференциальная топология*, Мир, М., 1979.

[30] Y. Imayoshi, M. Taniguchi, *An introduction to Teichmüller spaces*, Springer-Verlag, New York, 1992.

[31] F. Knudsen, D. Mamford, “The projectivity of the moduli space of stable curves, I”, *Math. Scand.*, **39** (1976), 19–55; F. Knudsen, II, *Math. Scand.*, **52** (1983), 161–199; III, *Math. Scand.*, **52** (1983), 200–212.

[32] С. Л. Крушкаль, “К теореме Тейхмюллера об экстремальных квазиконформных отображениях”, *Сиб. Матем. Журн.*, **8** (1967), 313–332.

[33] С. Л. Крушкаль, “Комплексная геометрия универсального пространства Тейхмюллера”, *Сиб. Матем. Журн.*, **45** (2004), 780–808.

[34] S. L. Krushkal, “The Green function of Teichmüller spaces with applications”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **27** (1992), 143–147.

[35] S. L. Krushkal, “Polynomial convexity of Teichmüller spaces”, *J. London Math. Soc.* (2), **52** (1995), 147–156.

[36] O. Lechto, K. I. Virtanen, *Quasiconformal mappings in the plane*, Springer-Verlag, 1973.

[37] М. Маззокко, Л. О. Чехов, “Орбифолдные римановы поверхности: пространства Тейхмюллера и алгебры геодезических функций”, *УМН*, **64**:6 (2009), 117–168.

[38] С. М. Натанзон, *Модули римановых поверхностей, вещественных алгебраических кривых и их суперналоги*, МЦНМО, М., 2003.

[39] Р. Неванлинна, *Униформизация*, ИЛ, М., 1955.

[40] H. L. Royden, “Automorphisms and isometries of Teichmüller spaces”, *Advances in the theory of Riemann surfaces*, Annals of Math. Studies, **66**, eds. L. Ahlfors et al., Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1971, 369–383.

[41] Е. М. Чирка, *Римановы поверхности*, МИАН, М., 2006.

[42] Дж. Спрингер, *Введение в теорию римановых поверхностей*, ИЛ, М., 1960.

[43] И. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, М., 1973.

[44] Б. В. Шабат, *Введение в комплексный анализ*. Т. 1, 2, Наука, М., 1985.

[45] В. Г. Шеретов, *Классическая и квазиконформная теория римановых поверхностей*, РХД, Ижевск, 2007.

Научное издание

Лекционные курсы НОЦ

Выпуск 15

Чирка Евгений Михайлович

Пространства Тейхмюллера

Сдано в набор 16.05.2010. Подписано в печать 23.06.2010.
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 9.5. Тираж 200 экз.

Отпечатано в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН
Москва, 119991, ул. Губкина, 8.
`http://www.mi.ras.ru/noc/` e-mail: `pavlov@mi.ras.ru`