МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. В. А. СТЕКЛОВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

Выпуск 23

Издание выходит с 2003 года

Теория чисел и приложения, 1

*К 80-летию со дня рождения
профессора Анатолия Алексеевича Карацубы*

Москва
2016

УДК 511+512+517+519.7

ББК 22

С56

Редакционная коллегия:

*А. Г. Сергеев (главный редактор),
А. М. Зубков, С. П. Коновалов, Д. О. Орлов,
Ю. А. Пупырев (ответственный секретарь), Д. В. Трещёв*

Редакционный совет:

*С. И. Адян, С. М. Асеев, О. В. Бесов,
С. В. Болотин, И. В. Волович, А. Д. Изаак, С. П. Новиков,
А. Н. Паршин, А. А. Славнов, А. С. Холево, Е. М. Чирка*

Редактор тома:

Е. А. Карацуба

С56 **Теория чисел и приложения.** К 80-летию со дня рождения профессора Анатолия Алексеевича Карацубы – М.: МИАН, 2016. – 114 с. – (Современные проблемы математики, ISSN 2226-5929; Вып. 23).

ISBN 978-5-98419-072-5

Серия “Современные проблемы математики” – рецензируемое продолжающееся издание Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук (МИАН). Публикация работ осуществляется по решению Редакционного совета, в который входят представители администрации и заведующие отделами МИАН.

DOI: 10.4213/book1640

ISBN 978-5-98419-072-5

© Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук, 2016

Анатолий Алексеевич Карацуба
(31.01.1937–28.09.2008)

Содержание

О локальном представлении нуля формой	7
<i>А. А. Карацуба</i>	
О нулях некоторых рядов Дирихле	12
<i>А. А. Карацуба</i>	
Космология и Дзета	17
<i>А. А. Карацуба</i>	
1. Дзета.....	17
2. Космология.....	19
3. Мозеровская космология.....	21
Условная оптимальная оценка сверху аргумента дзета-функции Римана на критической прямой	24
<i>Ф. Бланк</i>	
1. Введение.....	24
2. Основные результаты.....	25
3. Предварительные результаты.....	27
4. Доказательства теорем.....	31
Диофантовы экспоненты решеток	35
<i>О. Н. Герман</i>	
1. Введение.....	35
2. Экспоненты решеток.....	36
3. Теорема переноса.....	38
4. На пути к спектру.....	40
Периодические ядерные разложения кубических иррациональностей в цепные дроби	43
<i>В. Г. Журавлёв</i>	
Введение.....	43
1. Согласованные тройки векторов и их производные.....	44
2. Индуцированные разбиения тора.....	45
3. Возвратные отображения.....	49
4. Разложение в произведение элементарных возвратных матриц.....	52
5. Неподвижные точки возвратных матриц.....	54
6. Дифференцирования и нормирования звезды.....	54
7. Приближения на торе.....	56
8. Двумерная ядерная аппроксимация.....	61
9. Числовые примеры.....	63

О способе равномерного упорядочения вещественных алгебраических чисел	69
<i>Д. Коледа</i>	
1. Введение	69
2. О равномерном упорядочении	74
Распределение значений сверток L-функций эллиптических кривых	79
<i>А. Лауринчикас, Р. Мацайтене</i>	
1. Введение	79
2. Предельные теоремы	81
3. Доказательство теорем универсальности	83
4. Доказательство теоремы 5	84
Гипотеза Римана в терминах собственных чисел специальных ганкелевых матриц	87
<i>Ю. В. Матиясевич</i>	
1. Введение	87
2. Подгипотезы гипотезы Римана	87
3. Приближения Паде и теорема Монтессу де Болора	89
4. Определители и собственные числа	90
5. Визуальное представление собственных чисел	91
6. Дальнейшие переформулировки и новые предположения	97
Лестницы Иакова, факторизация и метаморфозы в качестве приложения к функциональному уравнению Римана для $\zeta(s)$ на критической прямой	102
<i>Я. Мозер</i>	
1. Введение и первый результат	102
2. Факторизация, осциллирующая Q -система и ее метаморфозы в качестве общего функционального дополнения к уравнению Римана на критической прямой	105
3. Теорема; факторизация как аналог функционального уравнения Римана на критической прямой	107
4. О множестве метаморфоз, которые соответствуют формуле (26)	109
5. О декомпозиции результата метаморфоз (34) на три части: сигнал, шум и погрешность	110
6. Множество различных метаморфоз в (34)	112

О локальном представлении нуля формой (Доклад в Чандигархе)

А. А. Карацуба

karatsuba@mi.ras.ru

Проблема поставлена Артином и состоит в следующем. Пусть p – простое число, Q_p – поле p -адических чисел. Пусть $F = F(x_1, \dots, x_k)$ – форма от переменных $x_1, \dots, x_k$ степени n с целыми коэффициентами, т.е.

$$F = \sum_{n_1 + \dots + n_k = n} a(n_1, \dots, n_k) x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k},$$

$a(n_1, \dots, n_k)$ – целые числа.

ГИПОТЕЗА (Артин). Если $k > n^2$, то существуют $x_1, \dots, x_k$, не все равные нулю и такие, что

$$F(x_1, \dots, x_k) = 0 \quad \text{в } Q_p.$$

При $n = 2$ это теорема Минковского–Хассе. При $n = 3$ это теорема Демьянова–Льюиса.

В 1966 г. Терджанян (Terjanian) опроверг эту гипотезу. Он доказал [1], что существуют формы, у которых число переменных

$$k \geq n^{\log_4 20},$$

и из $F(x_1, \dots, x_k) = 0$ в Q_p следует $x_1, \dots, x_k = 0$. В том же 1966 г. этот результат был усилен Бровкиным (Browkin) [2] до

$$k \geq n^{3-\varepsilon},$$

$\varepsilon > 0$ сколь угодно мало.

В 1981 г. автор и Г. И. Архипов доказали [3], что

$$k \geq e^u, \quad u = \frac{n}{\ln n \ln \ln n \dots \underbrace{\ln \dots \ln n}_r (\underbrace{\ln \dots \ln n}_{r+1})^3},$$

т.е., грубо говоря, k должно иметь порядок $\exp n$.

Мы получим этот результат здесь. Проблему можно сформулировать на языке теории сравнений. Везде ниже мы рассматриваем формы $F = F(x_1, \dots, x_k)$ от k переменных $x_1, \dots, x_k$ степени n с целыми коэффициентами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что форма $F = F(x_1, \dots, x_k)$ тривиально представляет нуль по модулю p , если при некотором натуральном числе r из сравнения

$$F(x_1, \dots, x_k) \equiv 0 \pmod{p^r}$$

следует, что

$$x_1 \equiv \dots \equiv x_k \equiv 0 \pmod{p}.$$

Например, пусть $p = 2$. Тогда форма

$$F = F(x_1, \dots, x_k) = x_1^n + \dots + x_k^n,$$

где $n = 2^h$, $h \geq 2$, тривиально представляет нуль по модулю 2, если $k < 4n$. Действительно, рассмотрим сравнение

$$x_1^n + \dots + x_k^n \equiv 0 \pmod{4n}.$$

Если $x_j \equiv 0 \pmod{2}$, то $x_j^n \equiv 0 \pmod{4n}$, так как из $2^n \geq 4n$ следует $2^{n-2} \geq n$, $n \geq 4$.

Если $x_j \equiv 1 \pmod{2}$, то $x_j = 1 \pm 4y_j$,

$$x_j^n = (1 \pm 4y_j)^n = 1 + \binom{n}{1}(\pm 4y_j) + \binom{n}{2}(\pm 4y_j)^2 + \dots \equiv 1 \pmod{4n},$$

и если $k < 4n$ и хотя бы одно $x_j \not\equiv 0 \pmod{2}$, то

$$x_1^n + \dots + x_k^n \not\equiv 0 \pmod{4n}.$$

Эта форма – левая часть формулы известной проблемы Варинга.

Из определения легко доказать следующую лемму.

ЛЕММА. Если $F = F(x_1, \dots, x_k)$ тривиально представляет нуль по модулю p , то для любого $m \geq 1$ найдется M такое, что из сравнения

$$F(x_1, \dots, x_k) \equiv 0 \pmod{p^M}$$

следует

$$x_1 \equiv \dots \equiv x_k \equiv 0 \pmod{p^m}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $M = mn + r$. Легко видеть, что если $x_j = px'_j$, то

$$p^n F(x'_1, \dots, x'_k) \equiv 0 \pmod{p^M},$$

откуда

$$F(x'_1, \dots, x'_k) \equiv 0 \pmod{p^{M-n}}$$

и т.д. при $x'_j = px''_j, \dots, x_j = p^m x_j^{(m)}$.

Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Пусть p – простое число. Для любого натурального $r \geq 1$ существует $n_0 = n_0(r)$ такое, что при любом $n \geq n_0$ существует форма $F = F(x_1, \dots, x_k)$ степени, не превосходящей n , с целыми коэффициентами, число переменных которой k ,

$$k \geq e^u, \quad u = \frac{n}{\ln n \ln \ln n \dots \underbrace{\ln \dots \ln}_r n (\underbrace{\ln \dots \ln}_{r+1} n)^3},$$

тривиально представляющая нуль по модулю p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы докажем теорему для $p = 2$. Для любого другого p она доказывается аналогично.

Основой доказательства является следующая лемма.

ОСНОВНАЯ ЛЕММА. Пусть $1024 \leq n \leq 96m$, $j_1, \dots, j_m$ – любые целые числа с условием

$$\frac{3n}{16} < j_1 < \dots < j_m \leq \frac{n}{2}.$$

$$\begin{cases} x_1^{2^{j_1}} + \cdots + x_k^{2^{j_1}} \equiv 0 \pmod{2^{2^{j_1}}}, \\ \dots\dots\dots \\ x_1^{2^{j_s}} + \cdots + x_k^{2^{j_s}} \equiv 0 \pmod{2^{2^{j_s}}}, \\ \dots\dots\dots \\ x_1^{2^{j_m}} + \cdots + x_k^{2^{j_m}} \equiv 0 \pmod{2^{2^{j_m}}}. \end{cases}$$
$$k \geq 2^u, \quad u \geq \frac{n}{32}.$$
$$x_j \equiv \pm 5^{\alpha_j} \pmod{2^n}.$$
$$f(t) = t^{\alpha_1} + \dots + t^{\alpha_k}.$$
$$f(1) = k \geq 1.$$
$$f(1) \equiv 0 \pmod{2^u}, \quad u \geq \frac{n}{32}.$$
$$f(5^{2j_s}) = (t^{\alpha_1})^{2j_s} + (t^{\alpha_2})^{2j_s} + \cdots + (t^{\alpha_k})^{2j_s} \equiv 0 \pmod{2^{2j_s}}, \quad s = 1, 2, \dots, m.$$
$$(t - 5^{2j_m}) \cdots (t - 5^{2j_s}) \cdots (t - 5^{2j_1}).$$
$$f(t) = \varphi(t) + (t - 5^{2j_m}) \cdots (t - 5^{2j_s}) \cdots (t - 5^{2j_1})q(t),$$
$$\varphi(5^{2j_s}) = f(5^{2j_s}) \equiv 0 \pmod{2^{2j_s}}, \quad s = 1, 2, \dots, m.$$
$$\varphi(t) = \sum_{s=1}^m \frac{(t - 5^{2j_1}) \cdots (t - 5^{2j_{s-1}})(t - 5^{2j_{s+1}}) \cdots (t - 5^{2j_m})}{(5^{2j_s} - 5^{2j_1}) \cdots (5^{2j_s} - 5^{2j_{s-1}})(5^{2j_s} - 5^{2j_{s+1}}) \cdots (5^{2j_s} - 5^{2j_m})} \varphi(5^{2j_s}).$$
$$2^{\delta(v)} \mid v, \quad \text{HO} \quad 2^{\delta(v)+1} \nmid v.$$
$$\delta(5^a - 1) = \delta(a) + 2,$$

$$\begin{aligned} 5^a - 1 &= (5 - 1)(5^{a-1} + 5^{a-2} + \cdots + 1) \\ &= 4(1 + (4 + 1) + (4 + 1)^2 + \cdots + (4 + 1)^{a-1}) = 4(a + 4a + 8a + \cdots) = 4a(1 + 2A), \\ \delta(a!) &= \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a}{2^2} \right\rfloor + \cdots < \frac{a}{2} + \frac{a}{2^2} + \cdots = a. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \delta \left(\varphi(5^{2j_s}) \frac{(1-5^{2j_1}) \cdots (1-5^{2j_{s-1}})(1-5^{2j_{s+1}}) \cdots (1-5^{2j_m})}{(1-5^{2(j_s-j_1)}) \cdots (1-5^{2(j_s-j_{s-1})})(1-5^{2(j_{s+1}-j_s)}) \cdots (1-5^{2(j_m-j_s)})} \right) \\ &= \delta(\varphi(5^{2j_s})) + 2(s-1) + \delta(2j_1) + \cdots + \delta(2j_{s-1}) + \delta(2j_{s+1}) + \cdots + \delta(2j_m) - 2(s-1) \\ &\quad - \delta(2(j_s-j_1)) - \cdots - \delta(2(j_s-j_{s-1})) - \delta(2(j_{s+1}-j_s)) - \cdots - \delta(2(j_m-j_s)) \\ &\geq 2j_s - \delta(j_s-j_1) - \cdots - \delta(j_s-j_{s-1}) - \delta(j_{s+1}-j_s) - \cdots - \delta(j_m-j_s). \end{aligned} \quad (*)$$
$$\begin{aligned}\delta(j_s - j_1) + \cdots + \delta(j_s - j_{s-1}) &= \delta((j_s - j_1) \cdots (j_s - j_{s-1})) \leq \delta((j_s - j_1)!) < j_s - j_1, \\ \delta(j_{s+1} - j_s) + \cdots + \delta(j_m - j_s) &= \delta((j_{s+1} - j_s) \cdots (j_m - j_s)) \leq \delta((j_m - j_s)!) < j_m - j_s,\end{aligned}$$
$$2j_s - (j_s - j_1) - (j_m - j_s) = 2j_s + j_1 - j_m > \frac{9n}{16} - \frac{n}{2} = \frac{n}{16}.$$
$$\delta(g(1)(1-5^{2j_m})\dots(1-5^{2j_1})) \geq 3m > \frac{3n}{96} = \frac{n}{32},$$

Теперь вернемся к доказательству теореме. Оно состоит в построении формы F с большим количеством переменных, тривиально представляющей нуль по модулю 2. Форму F будем строить последовательно.

$$F = y_0^r + \cdots + y_{r-1}^r, \quad r = 2^h, \quad h \geq 8.$$

$$y_j = s_{2j}s_{4r-2j}, \quad j = 0, 1, \dots, r-1, \quad s_\nu = x_0^\nu + x_1^\nu + \dots + x_{k-1}^\nu, \quad k = 2^{r/16}.$$

$$F \equiv 0 \pmod{2^M}$$
$$y_j \equiv 0 \pmod{2^{8r}}, \quad j = 0, 1, \dots, r-1,$$
$$s_{2j}s_{4r-2j} \equiv 0 \pmod{2^{8r}},$$
[illegible]
$$\frac{3r}{4} \leq j_{3r/4+1} < \cdots < j_r < 2r = \frac{n}{2}, \quad m = r - \left(\frac{3r}{4} + 1\right) + 1 = \frac{r}{4} = \frac{n}{16} \geq \frac{n}{96}.$$
$$k < 2^{n/32}.$$
$$k = 2^{r/16} = 2^{\sqrt{4r^2}/32}.$$

Если n – степень, то $k = 2^{\sqrt{n}/32}$.

Шаг 2. Рассмотрим форму $G = G(z_0, \dots, z_{K-1})$, $G = F(x_0, \dots, x_{k-1})$, где

$$x_j = S_{2j}S_{4k-2j}, \quad j = 0, 1, \dots, k-1, \quad S_\nu = z'_0 + \dots + z'_{K-1}, \quad K = 2^{k/16}.$$

Форма G тривиально представляет нуль по модулю 2. Степень G равна $4k \cdot 4r^2 = 16kr^2$, число переменных $K = 2^{k/16}$. Но $k = 2^{r/16}$, т.е. $r = 16 \log_2 k$; степень G равна $16^2 k \log_2^2 k$, т.е. $n = 16^2 k \log_2^2 k$, откуда

$$k = c_1 \frac{n}{\ln^2 n}, \quad K = 2^{c_2 n / \ln^2 n}.$$

Повторяя вышеприведенные действия несколько раз, получаем утверждение теоремы.

Мы считаем, что имеет место следующая гипотеза.

ГИПОТЕЗА. Пусть степень F равна n . Если

$$k \geq p^{(1+\varepsilon)(\alpha_p(n!)+2)},$$

то F нетривиально представляет нуль по модулю p . Существуют бесконечная последовательность n и такие формы степени n с числом переменных

$$k \geq p^{(1-\varepsilon)(\alpha_p(n!)+2)},$$

которые только тривиально представляют нуль по модулю p .

Список литературы

- [1] G. Terjanian, “Un contre-exemple à une conjecture d’Artin”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, **262** (1966), 612.
- [2] J. Browkin, “On forms over p -adic fields”, *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, **14** (1966), 489–492.
- [3] Г. И. Архипов, А. А. Карацуба, “О локальном представлении нуля формой”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **45**:5 (1981), 948–961.
- [4] Г. И. Архипов, А. А. Карацуба, “О представлении нуля формой в поле p -адических чисел”, *Докл. АН СССР*, **262**:1 (1982), 11–13.

О нулях некоторых рядов Дирихле

(Доклад в Обервольфахе)

А. А. Карацуба

karatsuba@mi.ras.ru

Некоторые проблемы теории чисел тесно связаны с нулями специальных функций, к которым, например, относятся дзета-функция Римана $\zeta(s)$, функции Дирихле $L(s, \chi)$, дзета-функции алгебраических числовых полей и др. Эти функции задаются рядами Дирихле в полуплоскости $\operatorname{Re} s > a$ и имеют функциональное уравнение. Например, дзета-функция Римана $\zeta(s)$ задается при $\operatorname{Re} s > 1$ рядом Дирихле вида

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}, \quad (1)$$

продолжается на всю s -плоскость и удовлетворяет функциональному уравнению

$$\xi(s) = \xi(1-s), \quad \xi(s) = \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s). \quad (2)$$

Условия (1) и (2) очень жесткие, они однозначно определяют $\zeta(s)$. Г. Гамбургер доказал следующую теорему.

ТЕОРЕМА. Пусть $G(s)$ – целая функция конечного порядка, $P(s)$ – многочлен, $f(s) = G(s)/P(s)$, и пусть ряд

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) n^{-s}$$

абсолютно сходится при $\operatorname{Re} s > 1$. Пусть, далее,

$$\pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) f(s) = \pi^{-(1-s)/2} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) g(1-s), \quad (3)$$

где ряд

$$g(1-s) = \sum_{n=1}^{\infty} b(n) n^{-1+s}$$

абсолютно сходится при $\operatorname{Re} s < -\alpha < 0$. Тогда

$$f(s) = C \zeta(s), \quad C - \text{постоянная.}$$

Заметим, что (3) даже слабее, чем (2). Естественно возник вопрос: не будет ли функциональное уравнение типа (2) определять местоположение нулей соответствующей функции? Оказалось, что это не так. Простейшей функцией, которая дает отрицательный ответ на поставленный вопрос, является функция $f(s)$, введенная Г. Дэвепортом и Г. Хейльбронном в 1936 г.,

$$f(s) = \frac{1-i\kappa}{2} L(s, \chi_1) + \frac{1+i\kappa}{2} L(s, \bar{\chi}_1),$$

где

$$\kappa = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}-2}{\sqrt{5}-1},$$

$\chi_1 = \chi_1(n)$ – характер Дирихле по модулю 5, причем $\chi_1(2) = i$, $i^2 = -1$,

$$L(s, \chi_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_1(n) n^{-s}, \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

Функция $f(s)$ при $\operatorname{Re} s > 0$ имеет следующее представление в виде ряда Дирихле:

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} r(n) n^{-s},$$

где

$$r(1) = 1, \quad r(2) = \varkappa, \quad r(3) = -\varkappa, \quad r(4) = -1, \quad r(5) = 0$$

и

$$r(n) = r(n+5).$$

Кроме того, $f(s)$ удовлетворяет такому функциональному уравнению:

$$g(s) = g(1-s), \quad g(s) = \left(\frac{\pi}{5}\right)^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) f(s). \quad (4)$$

Сходство (2) и (4) очевидно. Однако для $f(s)$ аналог гипотезы Римана – все комплексные нули $f(s)$ лежат на одной прямой – не выполняется.

Чтобы удобно было формулировать результаты о нулях $f(s)$, введем три функции $N(T)$, $N_0(T)$ и $N(\sigma, T)$, которые соответственно обозначают количества нулей $f(s)$: в полосе $0 < \operatorname{Im} s \leq T$; в той же полосе, но лежащие на прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$; в той же полосе, но с $\operatorname{Re} s > \sigma$.

Следующие результаты были известны до 1989 г.:

- 1) $N_0(T) \geq cT$, $c > 0$;
- 2) $N(1, T) \geq c_1 T$, $c_1 > 0$;
- 3) $N(\sigma_1, T) - N(\sigma_2, T) \geq c_2 T$, $c_2 = c_2(\sigma_1, \sigma_2) > 0$, $1/2 < \sigma_1 < \sigma_2 \leq 1$;
- 4) $N_0(T) \geq c_3 T \exp(0.05 \sqrt{\log \log \log \log T})$, $c_3 > 0$;
- 5) $N(T) - N_0(T) \geq c_4 T \sqrt{\log \log T}$, $c_4 > 0$.

Утверждения 1) и 2) доказаны Г. Дэвенпортом и Г. Хейльбронном (1936 г.), утверждения 3) и 4) доказаны С.М. Ворониным (1977, 1980 гг.), утверждение 5) доказано А. Сельбергом (сообщено Э. Бомбьери в Амальфи, сентябрь 1989 г.).

Отметим также доклад Д. Хейчала (Международный конгресс математиков в Беркли, 1986 г.), в котором сообщается, что “Сельбергу был известен результат, аналогичный 4), в 1942 г.”, и статью Э. Бомбьери и Д. Хейчала (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 1987), “которая проливает новый свет на нули арифметических рядов Дирихле, имеющих функциональное уравнение, но не эйлерово произведение”.

В 1989 г. автор разработал метод, с помощью которого доказал, что

$$N_0(T) > T(\log T)^{1/2-\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0 \text{ любое}, \quad T \geq T_0(\varepsilon) > 0. \quad (5)$$

Справедливы и более общие утверждения. Для их формулировки введем ряд новых обозначений:

- k – произвольное натуральное число;
- χ – произвольный примитивный характер по модулю k ;
- $L(s, \chi)$ – ряд Дирихле, отвечающий χ ;
- $a = (\chi(1) - \chi(-1))/2$;

- $\tau(\chi)$ – сумма Гаусса,

$$\tau(\chi) = \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{m=1}^k \chi(m) e^{2\pi i m/k}, \quad \varepsilon(\chi) \tau(\chi) = i^a \sqrt{k},$$

$$e^{i\theta(t, \chi)} = \left\{ \varepsilon(\chi) \left(\frac{k}{\pi} \right)^{it} \frac{\Gamma(1/4 + a/2 + it/2)}{\Gamma(1/4 + a/2 - it/2)} \right\}^{1/2}, \quad Z(t, \chi) = e^{i\theta(t, \chi)} L\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right).$$

Пользуясь функциональным уравнением для $L(s, \chi)$,

$$\xi(1-s, \bar{\chi}) = \varepsilon(\chi) \xi(s, \chi), \quad \xi(s, \chi) = \left(\frac{\pi}{k} \right)^{-(s+a)/2} \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right) L(s, \chi),$$

легко доказать, что $Z(t, \chi)$ принимает вещественные значения при вещественных t и, следовательно, вещественные нули $Z(t, \chi)$ являются нулями $L(s, \chi)$, лежащими на критической прямой. При $k = 1$ полагаем $\chi(n) = 1$ при любом n ; в этом случае

$$Z(t, \chi) = Z(t) = e^{i\theta(t)} \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right).$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть ε и ε_1 – произвольно малые фиксированные положительные числа, не превосходящие 0.01. Пусть $H = T^{27/82+\varepsilon_1}$, $m \geq 2$, $k_1, \dots, k_m$ – произвольные натуральные числа, $\chi_1, \dots, \chi_m$ – произвольные примитивные характеры Дирихле по модулям $k_1, \dots, k_m$ соответственно.

Пусть, далее, $a_1, \dots, a_m$ – произвольные вещественные числа,

$$G(t) = a_1 Z(t, \chi_1) + \dots + a_m Z(t, \chi_m).$$

Тогда функция $G(t)$ имеет на промежутке $(T, T+H)$ не меньше, чем

$$H(\log T)^{\beta-\varepsilon}$$

нулей нечетного порядка, где $\beta\varphi(k) = 1$, $\varphi(k)$ – функция Эйлера, $K = [k_1, \dots, k_m]$ – наименьшее общее кратное чисел $k_1, \dots, k_m$, $T \geq T_0(\varepsilon, \varepsilon_1)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполняются условия теоремы 1, и пусть, кроме того, $K \geq 3$, и характеры $\chi_1, \dots, \chi_m$ имеют одинаковую четность.

Тогда функция $G(t)$ имеет на промежутке $(T, T+H)$ не меньше, чем

$$H(\log T)^{2\beta-\varepsilon}$$

нулей нечетного порядка.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $p \geq 3$, p – простое число, $\chi_1, \dots, \chi_m$ – четные (нечетные) характеры по модулю p , $a_1, \dots, a_m$ – произвольные вещественные числа,

$$G(t) = a_1 Z(t, \chi_1) + \dots + a_m Z(t, \chi_m).$$

Тогда $G(t)$ имеет на промежутке $(0, T)$ не меньше, чем

$$T(\log T)^{2/(p-1)-\varepsilon}$$

нулей нечетного порядка, где $\varepsilon > 0$ любое, $T \geq T_0(\varepsilon) > 0$.

Отсюда при $p = 5$ получаем аналог (5).

Новые идеи, которые позволили получить (5) и доказать теоремы 1 и 2, состоят в следующем. Основой изучения нулей, скажем $Z(t)$, служит идея Харди–Литтлвуда–Ландау сравнивать интегралы I_1 и I_2 , где

$$I_1 = \int_t^{t+h} |Z(u)| du, \quad I_2 = \left| \int_t^{t+h} Z(u) du \right|.$$

Если $I_1 \neq I_2$, то $Z(u)$ на промежутке $(t, t+h)$ меняет знак, т.е. на $(t, t+h)$ лежит нуль нечетного порядка $Z(u)$. Эта идея впоследствии была дополнена важным соображением А. Сельберга, который вместо $Z(u)$ стал рассматривать функцию $F(u)$,

$$F(u) = Z(u)|f(u)|^2,$$

где $f(u)$ выбирается так, чтобы $F(u)$ в среднем была близка к константе. При выборе $f(u)$ А. Сельберг существенно пользовался тем, что $\zeta(s)$ имеет эйлерово произведение (как подчеркивает сам А. Сельберг, это соображение было впервые применено Г. Бором и Э. Ландау в их исследованиях, касающихся $N(\sigma, T)$ для фиксированного $\sigma > 1/2$).

Функции $G(t)$, определенной в теоремах 1 и 2, отвечает функция $\Phi(s)$,

$$\Phi(s) = \sum_{j=1}^m a_j (\rho(s, \chi_j))^{-1/2} L(s, \chi_j),$$

где

$$\rho(s, \chi_j) = \varepsilon(\bar{\chi}_j) \left(\frac{k}{\pi} \right)^{1/2-s} \frac{\Gamma((1-s)/2 + a/2)}{\Gamma(s/2 + a/2)},$$

т.е.

$$G(t) = \Phi\left(\frac{1}{2} + it\right).$$

Функция $\Phi(s)$, вообще говоря, не имеет эйлерова произведения. Однако $\Phi(s)$ при $\operatorname{Re} s > 1$ делится на эйлерово произведение $h(s)$,

$$h(s) = \prod_{p \equiv 1 \pmod{K}} \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-1}, \quad K = [k_1, \dots, k_m],$$

так как на $h(s)$ делится каждое $L(s, \chi_j)$, $j = 1, \dots, m$. Поэтому для $G(t)$ существует такая функция $f(t)$, что произведение

$$F(t) = G(t)|f(t)|^2$$

хотя и растет в среднем, но растет “не очень быстро”. Одно только это соображение еще не приводит к желаемой цели. Другим соображением является идея сравнивать малые положительные степени аналогов интегралов I_1 и I_2 , т.е. сравнивать I_1^a и I_2^a , $a \rightarrow +0$,

$$I_1 = \int_t^{t+h} |F(u)| du, \quad I_2 = \left| \int_t^{t+h} F(u) du \right|.$$

Малая положительная степень a интегралов I_1 и I_2 нейтрализует в определенной мере рост среднего значения $F(t)$.

Эти две идеи позволили получить (5) и доказать теоремы 1 и 2. Ясно, как применять эти соображения при изучении нулей и более сложных функций, чем $\Phi(s)$ и $G(t)$.

Список литературы

- [1] А. А. Карацуба, “Распределение нулей функции $\zeta(1/2 + it)$ ”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **48**:6 (1984), 1214–1224.
- [2] А. А. Карацуба, “О нулях функции Дэвенпорта–Хейльбронна, лежащих на критической прямой”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54**:2 (1990), 303–315.
- [3] А. А. Карацуба, “О нулях специального вида функций, связанных с рядами Дирихле”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **55**:3 (1991), 483–514.
- [4] A. Selberg, “On the zeros of Riemann’s zeta-function”, *Skr. Norske Vid. Akad. Oslo I*, **10** (1942), 1–59.
- [5] А. А. Карацуба, “О нулях функции $\zeta(s)$ на коротких промежутках критической прямой”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **48**:3 (1984), 569–584.
- [6] А. А. Карацуба, “Дзета-функция Римана и ее нули”, *УМН*, **40**:5 (245) (1985), 19–70.
- [7] А. А. Карацуба, *Основы аналитической теории чисел*, Наука, М., 1983.
- [8] R. M. Gabriel, “Some results concerning integrals of moduli of regular functions along curves of certain types”, *Proc. London Math. Soc.*, **2** (1927), 112–117.

Космология и Дзета

(Доклад в Москве)

А. А. Карацуба

karatsuba@mi.ras.ru

1. Дзета

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Обозначим

$$Z(t) = e^{i\theta(t)} \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right). \quad (1)$$

При вещественных t функция $Z(t)$ вещественная. Возьмем логарифмическую производную от (1):

$$\frac{Z'(t)}{Z(t)} = i\theta'(t) + i \frac{\zeta'(1/2 + it)}{\zeta(1/2 + it)} = -\operatorname{Im} \frac{\zeta'(1/2 + it)}{\zeta(1/2 + it)}. \quad (2)$$

Из теории дзета-функции знаем, что

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n} \right) + C, \quad (3)$$

где C – абсолютная постоянная, вещественное число. Подставим в (3) $s = 1/2 + it$:

$$\begin{aligned} \frac{\zeta'(1/2 + it)}{\zeta(1/2 + it)} &= -\frac{1}{-1/2 + it} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1/2 - \beta_n + i(t - \gamma_n)} + \frac{1}{\beta_n + i\gamma_n} \right) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1/2 + 2n + it} - \frac{1}{2n} \right) + C. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\operatorname{Im} \frac{\zeta'(1/2 + it)}{\zeta(1/2 + it)} = \frac{t}{t^2 + 1/4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t - \gamma_n}{(1/2 - \beta_n)^2 + (t - \gamma_n)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t}{(2n + 1/2)^2 + t^2}. \quad (4)$$

Из (2) и (4) получили:

$$\frac{Z'(t)}{Z(t)} = -\frac{t}{t^2 + 1/4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t - \gamma_n}{(1/2 - \beta_n)^2 + (t - \gamma_n)^2} + t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n + 1/2)^2 + t^2}. \quad (5)$$

СЛЕДСТВИЕ. Пусть есть RH, т.е. $\beta_n = 1/2$. Тогда из (5)

$$\frac{Z'(t)}{Z(t)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{t - \gamma_n} + t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n + 1/2)^2 + t^2} - \frac{t}{t^2 + 1/4}. \quad (6)$$

Собирая в (6) члены с одним значением γ_n , приходим к формуле

$$\frac{Z'(t)}{Z(t)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a(k)}{t - \gamma_k} + t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n + 1/2)^2 + t^2} - \frac{t}{t^2 + 1/4}, \quad (7)$$

где

$$0 < |\gamma_1| < |\gamma_2| < \dots < |\gamma_k| < |\gamma_{k+1}| < \dots$$

и $a(k) \geq 1$ ($a(k)$ – кратности нулей). Пусть теперь $0 < \gamma_k < \gamma_{k+1}$, $k \geq 1$. Рассмотрим промежуток $\gamma_k < t < \gamma_{k+1}$. Выделяя соответствующее слагаемое в (7), получим

$$\frac{Z'(t)}{Z(t)} = \frac{a(k)}{t - \gamma_k} + \frac{a(k+1)}{t - \gamma_{k+1}} + \Phi_k(t),$$

где $\Phi_k(t)$ – непрерывная на $\gamma_k \leq t \leq \gamma_{k+1}$ функция и, следовательно, ограниченная, т.е.

$$|\Phi_k(t)| \leq c(k) \quad \text{при} \quad \gamma_k \leq t \leq \gamma_{k+1}.$$

Поэтому график $Z'(t)/Z(t)$ выглядит, как на рис. 1.

Рис. 1

То, что функция $Z'(t)/Z(t)$ является монотонно убывающей на интервале (γ_k, γ_{k+1}) , следует из отрицательности ее производной на (γ_k, γ_{k+1}) . Действительно,

$$\frac{d}{dt} \frac{Z'(t)}{Z(t)} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a(k)}{(t - \gamma_k)^2} + K(t),$$

где

$$K(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n + 1/2)^2 + t^2} - 2t^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{((2n + 1/2)^2 + t^2)^2} - \frac{1}{t^2 + 1/4} + \frac{2t^2}{(t^2 + 1/4)^2}.$$

Следовательно, при $t \geq 1$

$$|K(t)| \leq \sum_{1 \leq n \leq t} \frac{1}{t^2} + \sum_{n > t+1} \frac{1}{4n^2} + 2t^2 \sum_{1 \leq n \leq t} \frac{1}{t^4} + 2t^2 \sum_{n > t+1} \frac{1}{16n^4} + \frac{1}{t^2} + \frac{2}{t^2} \leq \frac{8}{t}.$$

Так как $\gamma_{k+1} - \gamma_k \leq 1$ при $k \geq k_0$, то при $k \geq k_0$ и $\gamma_k < t < \gamma_{k+1}$ имеем

$$\frac{a(k)}{(t - \gamma_k)^2} \geq 1, \quad \frac{d}{dt} \frac{Z'(t)}{Z(t)} \leq -1 + \frac{8}{\gamma_k} < 0.$$

Получили, что $Z(t)$ на (γ_k, γ_{k+1}) имеет ровно одно экстремальное значение, т.е. при положительном $Z(t)$ график $Z(t)$ выглядит, как на рис. 2.

Отметим, что из (6) следует также

$$\frac{Z'(t)}{Z(t)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a(k)}{t - \gamma_k} + K_1(t),$$

где

$$K_1(t) = O\left(\frac{1}{t}\right), \quad t \geq t_1 > 0.$$

Рис. 2

2. Космология

Уравнения гравитационного поля Эйнштейна–Фридмана имеют вид (см. [1; с. 604])

$$\begin{cases} \frac{\zeta}{G^2} + \frac{G'^2}{G^2} + 2\frac{G''}{G} = 0, \\ \frac{\zeta}{G^2} + \frac{G'^2}{G^2} - \frac{1}{3}\varkappa\varrho = 0, \end{cases} \quad (8)$$

где ζ/G^2 равно кривизне в пространственном сечении $t = \text{const}$. Пространство однородно и изотропно по пространственным переменным. Случай положительной кривизны: $\zeta = +1$.

Здесь G – относительная мера метрического расстояния между двумя материальными точками как функция времени; $\varkappa > 0$ – постоянная, ϱ – плотность.

Можно считать, что $G = R(t)$, $\varrho = \varrho(t)$.

Уравнения Фридмана (в его статье [2; с. 324]):

$$\begin{cases} \frac{(R')^2}{R^2} + \frac{2RR''}{R^2} + \frac{c^2}{R^2} - \lambda = 0, \\ \frac{3(R')^2}{R^2} + \frac{3c^2}{R^2} - \lambda = \varkappa c^2 \varrho, \end{cases} \quad (9)$$

где λ – космологический член,

$$\frac{1}{R} \frac{dR}{dt} = H$$

– постоянная Хаббла. Ясно, что при $\lambda = 0$ с точностью до постоянного множителя уравнения (8) и (9) совпадают.

В статье Мозера (см. [3; с. 116]) уравнения Эйнштейна–Фридмана имеют вид

$$\begin{cases} \frac{\varkappa c^2}{3} \varrho(t) = \left(\frac{R'}{R}\right)^2 + \frac{kc^2}{R^2}, \\ \varkappa p(t) = -\frac{2R''}{R} - \left(\frac{R'}{R}\right)^2 - \frac{kc^2}{R^2}, \end{cases} \quad (10)$$

где $k = -1, 0, +1$ и $p = p(t)$ – давление, $\varrho = \varrho(t)$ – средняя плотность вещества. Случай сферической Вселенной (положительная кривизна): $k = +1$.

В случае нулевого давления

$$p(t) = 0 \quad (11)$$

получаем из (10) уравнение (8). По теории Эйнштейна должно быть

$$0 \leq p(t) \leq \frac{c^2}{3} \varrho(t). \quad (12)$$

Случай (11) соответствует Вселенной, равномерно заполненной пылью, случай $p(t) = (c^2/3)\varrho(t)$ соответствует Вселенной заполненной излучением.

Неравенства (12) эквивалентны таким:

$$E(t) = \frac{\kappa c^2}{3} \varrho(t) - \kappa p(t) \geq 0, \quad p(t) \geq 0, \quad (13)$$

причем

$$E(t) = \frac{2R''}{R} + 2\left(\frac{R'}{R}\right)^2 + \frac{2kc^2}{R^2}. \quad (14)$$

Отметим, что при $p(t) \equiv 0$ второе из уравнений (10) интегрируется. Действительно, запишем его так:

$$a + 2RR'' + R'^2 = 0, \quad a = kc^2, \quad (15)$$

$$R = R(t). \quad (16)$$

Дифференцируя (16) по R , находим

$$R'_t = \frac{1}{t'_R}, \quad R''_{tt} t'_R = \left(\frac{1}{t'_R}\right)'_R,$$

или

$$R''_{tt} = \frac{1}{t'_R} \left(\frac{1}{t'_R}\right)'.$$

Положим $1/t'_R = u = u(R)$. Тогда (15) переписывается так:

$$a + 2Ruu' + u^2 = 0$$

или

$$a + (Ru^2)'_R = 0.$$

Отсюда

$$aR + Ru^2 = R_0, \quad u^2 = \frac{R_0}{R} - a.$$

Но

$$u = \frac{1}{t'_R} = \frac{dR}{dt},$$

т.е.

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{R_0}{R} - a. \quad (17)$$

При $k = +1$, $a = c^2$ из (17) следует, что

$$\frac{R_0}{R} - c^2 \geq 0, \quad 0 \leq R \leq \frac{R_0}{c^2}$$

и

$$\frac{dR}{dt} = \pm \sqrt{\frac{R_0}{R} - c^2}.$$

Рис. 3

График R выглядит, как на рис. 3.

Складывая уравнения (10), видим, что

$$-\frac{2R''}{R} = \frac{\kappa c^2}{3} \varrho(t) + \kappa p(t) \geq 0,$$

т.е. $R'' \leq 0$, и R' – монотонно убывающая функция, которая начиная с положительных значений переходит через нуль и идет к отрицательным значениям. Тем самым, R идет от нуля до своего максимального значения, равного R_0 , и далее к нулю.

3. Мозеровская космология

Ян Мозер заметил сходство рис. 2 и рис. 3, а также сходство поведения $R(t)$ и $Z(t)$. Поэтому он предложил рассматривать $R(t)$ в виде

$$R(t) = \mu |Z(t)|,$$

или, предполагая $Z(t) \geq 0$ при $\gamma_k \leq t \leq \gamma_{k+1}$,

$$R(t) = \mu Z(t),$$

где $\mu > 0$ – постоянная (Мозера). При данном $k \geq k_1$ получается модель сферической Вселенной.

Каковы могут быть физические интерпретации этого предположения?

Более точно.

ПОСТУЛАТ МОЗЕРА. При $\gamma_k < t < \gamma_{k+1}$ положим

$$R(t) = \alpha(t_0) |Z(t)|, \quad (18)$$

где

$$\alpha(t_0) = \frac{c}{|Z(t_0)|} \left\{ \beta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a(k)}{(t_0 - \gamma_k)^2} \right\}^{-1/2}, \quad (19)$$

β – постоянная, $1 < \beta < 2$, а число t_0 – корень уравнения $Z'(t_0) = 0$ (см. рис. 2).

Тем самым, между любыми соседними нулями $Z(t)$ есть (может быть построена) модель сферической Вселенной.

Будем предполагать далее справедливость постулата Мозера.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Физической областью* назовем множество $t \in (\gamma_k, \gamma_{k+1})$ таких, что

$$p(t) \geq 0, \quad (20)$$

$$E(t) \geq 0, \quad (21)$$

где функции $p(t)$ и $E(t)$ определяются системой (10) и соотношением (13) соответственно.

ТЕОРЕМА (Мозер). *При $k \geq k_1$ каждый промежуток (γ_k, γ_{k+1}) содержит в себе физическую область, которая является непустым интервалом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (10) имеем

$$\kappa p(t) = -\frac{2R''}{R} - \left(\frac{R'}{R}\right)^2 - \frac{c^2}{R^2}.$$

В п. 1 имели

$$\frac{d}{dt} \frac{Z'(t)}{Z(t)} = \frac{Z''(t)}{Z(t)} - \left(\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right)^2 = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a(k)}{(t - \gamma_k)^2} + O\left(\frac{1}{t}\right).$$

Поэтому, предполагая $Z(t) \geq 0$ при $\gamma_k \leq t \leq \gamma_{k+1}$, получаем

$$\kappa p(t) = 2 \sum_{\gamma} \frac{1}{(t - \gamma)^2} - 3 \left(\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right)^2 - \beta \left(\frac{Z(t_0)}{Z(t)}\right)^2 \sum_{\gamma} \frac{1}{(t_0 - \gamma)^2} + O\left(\frac{1}{t}\right), \quad (22)$$

$$E(t) = -2 \sum_{\gamma} \frac{1}{(t - \gamma)^2} + 4 \left(\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right)^2 + 2\beta \left(\frac{Z(t_0)}{Z(t)}\right)^2 \sum_{\gamma} \frac{1}{(t_0 - \gamma)^2} + O\left(\frac{1}{t}\right). \quad (23)$$

Полагая в (22) и (23) $t = t_0$, находим

$$\begin{aligned} \kappa p(t_0) &= (2 - \beta) \sum_{\gamma} \frac{1}{(t_0 - \gamma)^2} + O\left(\frac{1}{t_0}\right), \\ E(t_0) &= 2(\beta - 1) \sum_{\gamma} \frac{1}{(t_0 - \gamma)^2} + O\left(\frac{1}{t_0}\right). \end{aligned}$$

Так как $\gamma_k < t < \gamma_{k+1}$ и

$$\gamma_{k+1} - \gamma_k \leq \frac{c_1}{\log \log \gamma_k}, \quad (24)$$

то

$$\begin{aligned} \kappa p(t_0) &\geq \frac{2 - \beta}{c_1} \log \log \gamma_k - c_2 \frac{1}{\gamma_k}, \\ E(t_0) &\geq \frac{2(\beta - 1)}{c_1} \log \log \gamma_k - c_3 \frac{1}{\gamma_k}. \end{aligned}$$

Следовательно, при $k \geq k_1$ имеем

$$\begin{cases} \kappa p(t_0) > 0, \\ E(t_0) > 0. \end{cases}$$

В силу непрерывности функций $p(t)$ и $E(t)$ в промежутке (γ_k, γ_{k+1}) последние неравенства выполняются в некоторой окрестности точки t_0 , т.е. в промежутке $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, что и требовалось доказать.

Вместо (24) можно пользоваться безусловным результатом

$$\gamma_{k+1} - \gamma_k \leq c_1, \quad c_1 - \text{постоянная,}$$

и, далее,

$$\begin{aligned} \kappa p(t_0) &\geq \frac{2 - \beta}{c_1} - c_2 \frac{1}{\gamma_k} > 0, \\ E(t_0) &\geq \frac{2(\beta - 1)}{c_1} - c_3 \frac{1}{\gamma_k} > 0 \end{aligned}$$

при $k \geq k_1 > 0$.

Далее, Я. Мозер изучает физические области, их тополого-геометрические возможности (связность и т.д.). В частности, что правая окрестность γ_k и левая окрестность γ_{k+1} содержат не физические области.

Что все это значит?

Как указывает Мозер, это красивая математическая связь двух красивых научных теорий: космологии и теории простых чисел, которыми в свою очередь “располагается” функция $\zeta(s)$.

Список литературы

- [1] А. Эйнштейн, *Собрание научных трудов*, Т. 2, Наука, М., 1966.
- [2] А. А. Фридман, “О кривизне пространства”, *Альберт Эйнштейн и теория гравитации*, Мир, М., 1979, 320–330.
- [3] Я. Мозер, “Дзета-функция Римана и уравнения Эйнштейна–Фридмана”, *Acta Math. Univ. Comenian*, **44-45** (1984), 115–125.

Условная оптимальная оценка сверху аргумента дзета-функции Римана на критической прямой

Ф. Бланк

Haute École d'Ingénierie et de Gestion du Canton de Vaud, Switzerland

philippe.blanc@heig-vd.ch

1. Введение

Пусть ζ есть дзета-функция Римана, определяемая при $\operatorname{Re}(s) > 1$ как

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

а в остальном – аналитическим продолжением, и пусть Z есть функция Харди, определяемая равенством

$$Z(t) = e^{i\theta(t)} \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right),$$

где

$$\theta(t) = \arg\left(\pi^{-it/2} \Gamma\left(\frac{1}{4} + i\frac{t}{2}\right)\right),$$

а аргумент определяется непрерывным варьированием t , начиная со значения 0 при $t = 0$. Можно показать (см. [1]), что

$$\theta(t) = \frac{t}{2} \log \frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8} + O\left(\frac{1}{t}\right).$$

Вещественные нули Z совпадают с нулями ζ , расположенными на прямой с вещественной частью $1/2$. Если гипотеза Римана верна, то для числа нулей Z на интервале $]0, t]$ справедливо соотношение (см. [1])

$$N(t) = \frac{1}{\pi} \theta(t) + 1 + S(t),$$

где

$$S(t) = \frac{1}{\pi} \arg \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right),$$

если t не является нулем Z , и $\arg \zeta(1/2 + it)$ определяется непрерывной вариацией вдоль прямых соединяющих 2 , $2 + it$ и $1/2 + it$, начиная с исходного значений $\arg \zeta(2) = 0$. Если t – это нуль Z , положим

$$S(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} S(t + \epsilon).$$

Известно (см. [1]), что если гипотеза Римана верна, то

$$S(t) = O\left(\frac{\log t}{\log \log t}\right),$$

но предполагается, что

$$S(t) = O((\log t)^{1/2+o(1)}).$$

В настоящей статье мы получим при некоторых условиях оценку

$$S(t) = O((\log t)^{1/2} \log \log \log t).$$

Поводом к нашему исследованию послужила захватывающая статья Ивича [2], в которой автор дает среди прочего условное опровержение гипотезы Римана, применяя производные Z высокого порядка.

В настоящей статье используются стандартные обозначения: $\lfloor x \rfloor$ и $\lceil x \rceil$ для обычных функций антье и потолка (округление до ближайшего целого в большую сторону) и $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$. Запись $f(x) \ll g(x)$ означает, что существуют x_0 и положительная константа C такие, что $|f(x)| \leq Cg(x)$ при $x \geq x_0$, где $g(x)$ положительна при $x \geq x_0$; аналогично $f(x) \gg g(x)$ и $f(x) \asymp g(x)$ означает, что $g(x) \ll f(x) \ll g(x)$. Многочлены Бернулли и Чебышёва степени n обозначаются через $B_n(x)$ и $T_n(x)$ соответственно и определяются как

$$\int_x^{x+1} B_n(t) dt = x^n \quad \text{и} \quad T_n(\cos \theta) = \cos n\theta.$$

Наконец, при $r \geq 1$ и $t \geq t_r$ положим $\log_1 t \equiv \log t$ и $\log_r t = \log(\log_{r-1} t)$ при $r \geq 2$.

Статья организована следующим образом: в п. 2 представлены основные результаты. Пункт 3 посвящен ключевому тождеству, доказанному автором в [3], и предварительным леммам. Доказательства теорем даны в п. 4.

В настоящей статье мы предполагаем справедливой гипотезу Римана и для простоты представления предполагаем также, что нули ζ являются простыми.

2. Основные результаты

В вычислениях, проведенных в [3], мы обнаружили, что функции $(-1)^{k+1} Z^{(2k-1)}$ из [3] имеют, вообще говоря, те же знаки, и поступая как в [4] можно показать, что если t_n таково, что $\theta(t_n) = (n+1/2)\pi$, то для достаточно больших n числа $(-1)^{k+1} Z^{(2k-1)}(t_n)$ имеют одинаковые знаки при $k \in [(3/4)\theta'(t_n), (7/8)\theta'(t_n)]$. Несмотря на то, что это не используется в наших доказательствах, это показывает, что производные высокого порядка Z имеют правильное поведение.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть T достаточно велико, $(\log T)^{-1/2} \ll a \ll (\log \log T)^{-1}$ такое, что $Z(T \pm a) \neq 0$, и

$$(-1)^{k+1} Z^{(2k-1)}(T \pm a) \geq 0 \quad \text{при} \quad k = 1, 2, \dots, \left\lceil \frac{\theta'(T)}{4} \right\rceil. \quad (1)$$

Далее, предполагаем, что существует положительная постоянная c такая, что $Z'(T \pm a) \gg \theta'(T)^{-c}$. Тогда

$$S(T+a) - S(T-a) \leq 2 + \frac{4 \log 2}{\pi^2} a^2 \log T (1 + o(1)).$$

Из доказательства этой теоремы следует, что ее утверждение справедливо, если заменить неравенства (1) одним неравенством, включающим линейную комбинацию производных Z нечетного порядка, вычисленных в $T \pm a$. Чтобы увидеть, что достаточные условия (1) могут быть удовлетворены, когда $S(T+a) - S(T-a)$ “большое”, имеет смысл построить графики функций $S(T+t)$ и

$$f_{2k-1}(t) := (-1)^{k+1} \frac{Z^{(2k-1)}(T+t)}{\theta'(T)^{2k-1}}$$

для значений T , расположенных в окрестности точек, в которых S “большое”, и при $k = 1, \dots, \lceil \theta'(T)/4 \rceil$. Заметим, что член $\theta'(T)^{-(2k-1)}$ – это просто масштабный коэффициент. На

рис. 1 и 2 эти графики изображены для значения $T = 7.1934200352263673 \times 10^{14}$, для которого

$$S(T + 0.46009) = 2.545 \dots, \quad Z(T + 0.9443) = 738.756 \dots, \quad \left\lceil \frac{\theta'(T)}{4} \right\rceil = 5.$$

Другой выбор T порождает похожие графики.

Рис. 1. График $S(T+t)$

Рис. 2. Графики f_{2k-1}

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть существуют последовательность (T_j) и положительная константа c такие, что $T_{j+1} - T_j \asymp (\log T_j)^{-1/2}$, $Z(T_j) \neq 0$ и $Z'(T_j) \gg \theta'(T_j)^{-c}$ при $j = 0, 1, \dots$. Пусть, далее,

$$(-1)^{k+1} Z^{(2k-1)}(T_j) \geq 0 \quad \text{при} \quad k = 1, 2, \dots, \left\lceil \frac{\theta'(T_{j+1})}{4} \right\rceil, \quad j = 0, 1, \dots$$

Тогда

$$S(T) = O((\log T)^{1/2} \log_3 T). \quad (2)$$

Заметим, что (2) соответствует гипотезе Монтгомери [5], которая утверждает, что $S(T) = O((\log T)^{1/2} (\log_2 T)^{-1/2})$. Также уместно процитировать статью Мозера [6], на которую было указано рецензентом и в которой автор доказывает, что если число пар последовательных ординат γ_n, γ_{n+1} нулей ζ , расположенных на $]T, 2T[$ и удовлетворяющих неравенству

$$0 < \gamma_{n+1} - \gamma_n \leq \frac{4\pi^2}{(\log T)^2},$$

есть $o(T \log T)$, то для положительной доли интервалов $]\gamma_n, \gamma_{n+1}[\subset]T, 2T[$ имеем $S(t) = O((\log t)^{1/2} (\log_2 t)^{2/3})$ для любого $t \in]\gamma_n, \gamma_{n+1}[$.

3. Предварительные результаты

Ключом к нашей аргументации является соотношение, которое связывает значение функции $f \in C^{2r}[-a, a]$ в x_0 , нули f и значения ее производных нечетного порядка на границах интервала.

ЛЕММА 3.1. Пусть $r \in \mathbb{N}^*$, $a > 0$, $f \in C^{2r}[-a, a]$ и $x_0 \in]-a, a[$ такое, что $f(x_0) \neq 0$. Предположим, что f имеет только конечное число нулей в $]-a, a[$, все они простые, обозначаемые x_k с $k \neq 0$ и так пронумерованные, что $-a < x_{-m} < \dots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \dots < x_n < a$. Далее, при $l \geq 1$ пусть Ψ_{2l-1} определяется как

$$\Psi_{2l-1}(x) = \frac{(4a)^{2l-1}}{(2l)!} \sum_{k=-m}^n \mu_k \left(B_{2l} \left(\frac{1}{2} + \frac{x+x_k}{4a} \right) + B_{2l} \left(\left\{ \frac{x-x_k}{4a} \right\} \right) \right), \quad (3)$$

где $\mu_k = \alpha_k / \alpha_0$ и

$$\alpha_k = \frac{1}{\prod_{\substack{-m \leq j \leq n \\ j \neq k}} \left(\sin \left(\pi \frac{x_k}{2a} \right) - \sin \left(\pi \frac{x_j}{2a} \right) \right)} \quad \text{при } k = -m, \dots, n.$$

Тогда

$$f(x_0) = \sum_{k=1}^r \Psi_{2k-1}(a) f^{(2k-1)}(a) - \sum_{k=1}^r \Psi_{2k-1}(-a) f^{(2k-1)}(-a) - \int_{-a}^a \Psi_{2r-1}(x) f^{(2r)}(x) dx. \quad (4)$$

Мы доказали в [3], что тождество (4) справедливо для функций Ψ_{2l-1} , определяемых равенством (3), единственно лишь условиями $\mu_0 = 1$ и $\sum_{k=-m}^n \mu_k = 0$. Наш особый выбор коэффициентов μ_k имеет решающее значение для получения хороших свойств функции Ψ_{2l-1} , что станет понятным при доказательстве леммы 3.6. В [3] мы доказали также, что лемма 3.1 распространяема на кратные нули.

ЛЕММА 3.2. Пусть Ψ_{2l-1} функция, определяемая равенством (3), и пусть

$$\bar{t} = \frac{1}{m+n+1} \sum_{k=-m}^n \sin \left(\pi \frac{x_k}{2a} \right).$$

Тогда

$$(-1)^{n+l+1} \Psi_{2l-1}(a) > 0 \quad \text{и} \quad (-1)^{m+l+1} \Psi_{2l-1}(-a) > 0. \quad (5)$$

Кроме того,

$$(-1)^n \Psi_1(a) > \frac{2a(1+\bar{t})^{m+n}}{3|\alpha_0|\pi^2(m+n)^2}, \quad (6)$$

$$(-1)^m \Psi_1(-a) > \frac{2a(1-\bar{t})^{m+n}}{3|\alpha_0|\pi^2(m+n)^2}. \quad (7)$$

Для доказательства леммы 3.2 требуются два технических результата, полученные в леммах 3.3 и 3.4.

ЛЕММА 3.3. Для всех $l, k \in \mathbb{N}^*$ и $x \in [0, 1[$ имеем неравенства

$$\begin{aligned} (-1)^{l+1} \frac{d^k}{dx^k} B_{2l} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{Arcsin} \sqrt{x} \right) &> 0, \\ \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dx^k} B_2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{Arcsin} \sqrt{x} \right) &> \frac{2^{2k}}{6\pi^2 k^2} x^k. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое неравенство доказано в [3]. Для получения второго утверждения, заметим, что $B_2(1/2 + x) = -1/12 + x^2$,

$$B_2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{Arcsin} \sqrt{x} \right) = -\frac{1}{12} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^{2j}((j-1)!)^2}{2(2j)!} x^j$$

и, следовательно, имеем

$$\frac{1}{k!} \frac{d^k}{dx^k} B_2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{Arcsin} \sqrt{x} \right) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{j=k}^{\infty} \frac{2^{2j}((j-1)!)^2 j!}{2(2j)!(j-k)!k!} x^{j-k} > c_k \frac{2^{2k}}{\pi^2 k^2} x^k, \quad (8)$$

где сумма тривиально оценивается снизу членом с индексом $j = 2k$ и

$$c_k = \frac{2^{2k}((2k-1)!)^2(2k)!}{2(4k)!((k-1)!)^2}.$$

Далее, замечаем, что

$$\frac{c_{k+1}}{c_k} = \frac{(4k+2)^2}{(4k+2)^2 - 1} > 1,$$

откуда следует, что $c_k > c_1 = 1/6$, и мы завершаем доказательство, пользуясь (8).

ЛЕММА 3.4. Пусть $I =]-a, a[$, функция $f \in C^{m+n+2}(I)$ такая, что $f^{(m+n+2)} > 0$ на I , и пусть $t_{-m}, \dots, t_n \in I$ — попарно различные числа. Тогда

$$\sum_{k=-m}^n \frac{f(t_k)}{\prod_{\substack{-m \leq j \leq n \\ j \neq k}} (t_k - t_j)} > \frac{f^{(m+n)}(\bar{t})}{(m+n)!},$$

где $\bar{t} = (\sum_{k=-m}^n t_k)/(m+n+1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение — непосредственное следствие результата Флоатера [7], который утверждает, что существует $\eta \in [t_{-m}, t_n]$ такое, что

$$\sum_{k=-m}^n \frac{f(t_k)}{\prod_{\substack{-m \leq j \leq n \\ j \neq k}} (t_k - t_j)} = \frac{f^{(m+n)}(\bar{t})}{(m+n)!} + R_{m+n+2},$$

где

$$R_{m+n+2} = \frac{1}{2(m+n+1)} \left(\sum_{-m \leq i < j \leq n} (t_j - t_i)^2 \right) \frac{f^{(m+n+2)}(\eta)}{(m+n+2)!}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.2. Неравенства (5) доказаны в работе [3]. Поскольку $B_2(x) = B_2(1-x)$, имеем

$$\Psi_1(\pm a) = 4a \sum_{k=-m}^n \mu_k B_2\left(\frac{3}{4} \pm \frac{x_k}{4a}\right)$$

и, следовательно,

$$(-1)^n \Psi_1(\pm a) = \left(\frac{(-1)^n}{\alpha_0} \right) 4a \sum_{k=-m}^n \alpha_k h_{\pm}(t_k),$$

где $h_{\pm}(t) = B_2(3/4 \pm (1/(2\pi)) \operatorname{Arcsin} t)$, и $t_k = \sin(\pi x_k/(2a))$. Первый член в правой части положителен, и тождества

$$\frac{3}{4} \pm \frac{1}{2\pi} \operatorname{Arcsin} t = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{Arcsin} \sqrt{\frac{1 \pm t}{2}} \quad \text{при } t \in [-1, 1]$$

вместе с леммой 3.3 показывают, что $h_+^{(m+n+2)}$ и $(-1)^{(m+n)} h_-^{(m+n+2)}$ положительны на $] -1, 1[$. Доказательство (6) и (7) завершается использованием леммы 3.4 и леммы 3.3 для вычисления нижних оценок для $h_+^{(m+n)}(\bar{t})$ и $(-1)^{(m+n)} h_-^{(m+n)}(\bar{t})$.

ЛЕММА 3.5. Пусть $b_{r,s}$ – числа, определенные для целых $r \geq 3$ и $s \geq 0$ как

$$b_{r,s} = \left(\frac{r}{r+s} \right)^{2r \log r / \log_2 r - 1} \binom{2r+s-1}{s}.$$

Тогда

$$\sum_{s=0}^{\infty} b_{r,s}^2 = e^{o(r)} \quad \text{при } r \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $b_{r,s} = O_r(s^{-2r \log r / \log_2 r + 2r}) = O_r(s^{-1})$, эта сумма сходится. Пользуясь формулой $\log n! = n \log n - n + O(\log n)$ и полагая $p = 2r \log r / \log_2 r - 1$, имеем $\log b_{r,s} = \phi_r(s) + O(\log r)$ при $1 \leq s \leq r$, где ϕ_r есть функция, определенная на отрезке $[1, r]$ как

$$\phi_r(x) = -p \log \left(1 + \frac{x}{r} \right) + (2r+x-1) \log(2r+x-1) - x \log x - (2r-1) \log(2r-1).$$

При достаточно больших r проверяется, что $\phi'_r(1) > 0$, $\phi'_r(r) < 0$ и ϕ''_r имеет единственную перемену знака, которая подразумевает, что ϕ_r имеет единственный максимум, расположенный в $x_r^* \in]1, r[$. Переписав уравнение $\phi'_r(x) = 0$ в виде

$$x = 2r e^{-p/r} \left(e^{px/(r(r+x))} \left(1 + \frac{x}{2r} - \frac{1}{2r} \right) \right),$$

закключаем, что

$$x_r^* = 2r^{1-2/\log_2 r} (1 + O(r^{-1/\log_2 r})), \quad \phi_r(x_r^*) = 2r^{1-2/\log_2 r} (1 + O(r^{-1/\log_2 r})),$$

откуда

$$\sum_{s=1}^r b_{r,s}^2 \leq r e^{2\phi_r(x_r^*) + O(\log r)} = e^{o(r)}.$$

При $s \geq r$ введем числа $c_{r,s} := b_{r,s+1}/b_{r,s}$ и проверим, что

$$s \log c_{r,s} = -sp \log \left(1 + \frac{1}{r+s} \right) + s \log \left(1 + \frac{2r-1}{s+1} \right) \leq -sp \left(\frac{1}{r+s} - \frac{1}{2(r+s)^2} \right) + 2r.$$

Замечая, что последнее выражение убывает с s , выбираем $s = r$, чтобы получить неравенство

$$s \log c_{r,s} \leq -p \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8r} \right) + 2r \leq -1.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{b_{r,s+1}}{b_{r,s}} \leq e^{-1/s} \leq \frac{s}{s+1},$$

что подразумевает

$$b_{r,s} \leq \frac{r b_{r,r}}{s} \quad \text{при} \quad s = r, r+1, \dots$$

а поскольку $b_{r,r} \leq e^{\phi_r(x_r^*) + O(\log r)}$, мы заключаем, что $\sum_{s=r+1}^{\infty} b_{r,s}^2 = e^{o(r)}$.

ЛЕММА 3.6. Пусть Ψ_{2l-1} есть функция, определяемая (3), пусть $m+n$ достаточно большое и $l \geq (m+n) \log(m+n)/\log_2(m+n)$. Тогда

$$\|\Psi_{2l-1}\|_2 \leq \frac{2^{(m+n)(1+o(1))}}{|\alpha_0| \sqrt{a}} \left(\frac{2a}{(m+n)\pi} \right)^{2l} \quad \text{при} \quad m+n \rightarrow \infty,$$

где

$$\|\Psi_{2l-1}\|_2^2 = \int_{-a}^a (\Psi_{2l-1}(x))^2 dx.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя разложение в ряд Фурье

$$B_{2l}(x) = (-1)^{l+1} 2((2l)!) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j\pi)^{2l}} \cos(2j\pi x) \quad \text{для} \quad x \in [0, 1]$$

и тождество

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right),$$

приходим к выражению

$$\Psi_{2l-1}(x) = (-1)^{l+1} 2 \frac{(2a)^{2l-1}}{\alpha_0 \pi^{2l}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{2l}} \left(\sum_{k=-m}^n \alpha_k \cos \left(j\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{x_k}{2a} \right) \right) \right) \cos \left(j\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2a} \right) \right).$$

Пользуясь тождеством

$$\cos \left(j\pi \left(\frac{1}{2} + y \right) \right) = (-1)^j T_j(\sin(\pi y))$$

и полагая

$$a_{j,k} = (-1)^j T_j \left(\sin \left(\pi \frac{x_k}{2a} \right) \right),$$

имеем

$$\sum_{k=-m}^n \alpha_k a_{j,k} = 0 \quad \text{при} \quad j = 1, \dots, m+n-1.$$

Последнее обосновывает наш особый выбор α_k при определении Ψ_{2l-1} . Отсюда имеем

$$\Psi_{2l-1}(x) = (-1)^{l+1} 2 \frac{(2a)^{2l-1}}{\alpha_0 \pi^{2l}} \sum_{j=m+n}^{\infty} \frac{1}{j^{2l}} \left(\sum_{k=-m}^n \alpha_k a_{j,k} \right) \cos \left(j\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2a} \right) \right). \quad (9)$$

Применяя стандартный результат, касающийся разделенных разностей, возводя в квадрат (9) и интегрируя по отрезку $[-a, a]$, получаем

$$\|\Psi_{2l-1}\|_2^2 = \left(2 \frac{(2a)^{2l-1}}{\alpha_0 \pi^{2l}}\right)^2 \sum_{j=m+n}^{\infty} \frac{1}{j^{4l}} \left(\frac{T_j^{(m+n)}(\tau_j)}{(m+n)!}\right)^2 a$$

для некоторых $\tau_j \in]-1, 1[$. Известно (см. [8]), что

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |T_j^{(m+n)}(x)| = T_j^{(m+n)}(1) = 2^{m+n-1} (m+n-1)! j \binom{m+n+j-1}{j-m-n}$$

при $j = m+n, m+n+1, \dots$, и, следовательно,

$$\|\Psi_{2l-1}\|_2^2 \leq \left(\frac{2^{m+n-1}}{\alpha_0 \sqrt{a}} \left(\frac{2a}{(m+n)\pi}\right)^{2l}\right)^2 \sum_{j=m+n}^{\infty} \left(\frac{m+n}{j}\right)^{4l-2} \binom{m+n+j-1}{j-m-n}^2.$$

Положим $j = m+n+s$, а так как $l \geq (m+n) \log(m+n)/\log_2(m+n)$, имеем

$$\begin{aligned} \|\Psi_{2l-1}\|_2^2 &\leq \left(\frac{2^{m+n-1}}{\alpha_0 \sqrt{a}} \left(\frac{2a}{(m+n)\pi}\right)^{2l}\right)^2 \sum_{s=0}^{\infty} \left(\left(\frac{m+n}{m+n+s}\right)^{2l-1} \binom{2(m+n)+s-1}{s}\right)^2 \\ &\leq \left(\frac{2^{m+n-1}}{\alpha_0 \sqrt{a}} \left(\frac{2a}{(m+n)\pi}\right)^{2l}\right)^2 \sum_{s=0}^{\infty} b_{m+n,s}^2, \end{aligned}$$

и мы завершаем доказательство, пользуясь леммой 3.5.

4. Доказательства теорем

Для достаточно большого T и для $(\log T)^{-1/2} \ll a \ll (\log \log T)^{-1}$ такого, что $Z(T \pm a) \neq 0$ и $\Delta S := S(T+a) - S(T-a) \geq 0$, существуют $t_0 \in]T-a, T+a[$ и положительные целые числа m и n (четное и нечетное соответственно) такие, что $Z(t_0) > 0$ и

$$\gamma_{-m-2} < T-a < \gamma_{-m} < \dots < \gamma_{-1} < t_0 < \gamma_1 < \dots < \gamma_n < T+a < \gamma_{n+2},$$

где γ_k — нули Z . Следует отметить, что мы не принимаем во внимание нули γ_{-m-1} и γ_{n+1} , даже если они принадлежат отрезку $[T-a, T+a]$. Поэтому

$$m+n = \frac{1}{\pi}(\theta(T+a) - \theta(T-a)) + \Delta S^*,$$

где $\Delta S^* = \Delta S - q$ и $q = 0, 1, 2$ в соответствии с положением γ_{-m-1} и γ_{n+1} относительно $T-a$ и $T+a$. Тожество (4) записывается как

$$Z(t_0) = \sum_{k=1}^K \Psi_{2k-1}(a) Z^{(2k-1)}(T+a) - \sum_{k=1}^K \Psi_{2k-1}(-a) Z^{(2k-1)}(T-a) + R, \quad (10)$$

где

$$R = - \int_{-a}^a \Psi_{2K-1}(x) Z^{(2K)}(T+x) dx,$$

и x_k , которые неявно используются в определении Ψ_{2l-1} , определяются как $x_0 = t_0 - T$ и $x_k = \gamma_k - T$ при $k \neq 0$.

ЛЕММА 4.1. Пусть T достаточно велико, пусть $(\log T)^{-1/2} \leq a \leq (\log \log T)^{-1}$ и $K = \lceil \theta'(T)/4 \rceil$. Предположим, далее, что $\Delta S^* \geq 0$. Тогда

$$|R| \leq \frac{1}{|\alpha_0|} \exp \left(\left(\left(\frac{2a}{\pi} \theta'(T) + \Delta S^* \right) \log 2 \right) (1 + o(1)) - \frac{\theta'(T)}{2} \log \left(1 + \pi \frac{\Delta S^*}{2a\theta'(T)} \right) \right). \quad (11)$$

Доказательство этой оценки требует следующей теоремы, доказанной автором в [4], которая справедлива без предположения справедливости гипотезы Римана.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть t достаточно велико, и пусть $c \geq e$ – фиксированная константа. Тогда при $0 \leq k \leq (c/2)\theta'(t)$ имеем равномерно по k

$$Z^{(k)}(t) = 2 \sum_{1 \leq n \leq \sqrt{t/(2\pi)}} \frac{1}{\sqrt{n}} (\theta'(t) - \log n)^k \cos \left(\theta(t) - t \log n + k \frac{\pi}{2} \right) + O(t^{(1/4)(c \log c - c - 1)} \theta'(t)^{k+1}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.1. При $t \in [T - a, T + a]$ с учетом $2K \leq \theta'(T)/2 + 2$ и $\theta''(t) = O(1/t)$ можно воспользоваться теоремой 4.1 с $c = e$ для получения оценки

$$|Z^{(2K)}(t)| \leq \left(2 \left(\sum_{1 \leq n \leq \sqrt{t/(2\pi)}} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{\log n}{\theta'(t)} \right)^{2K} \right) + O(t^{-1/4} \theta'(t)) \right) \theta'(t)^{2K}.$$

Кроме того, $2K \geq \theta'(T)/2$, $\theta'(T)/\theta'(t) = 1 + O(a/T)$ и, следовательно, имеют место неравенства

$$\left(1 - \frac{\log n}{\theta'(t)} \right)^{2K} \leq e^{-2K \log n / \theta'(t)} \leq n^{-1/2 + O(a/T)} \leq 2n^{-1/2}$$

при $1 \leq n \leq \sqrt{t/2\pi}$ и достаточно большом T . Отсюда следует, что

$$|Z^{(2K)}(t)| \leq \left(4 \left(\sum_{1 \leq n \leq \sqrt{t/(2\pi)}} \frac{1}{n} \right) + O(t^{-1/4} \theta'(t)) \right) \theta'(t)^{2K} \leq 4(\log T) \theta'(T)^{2K}.$$

Пользуясь формулой Тейлора и оценкой $\theta'''(t) = O(1/t^2)$, имеем

$$m + n = \frac{2a}{\pi} \theta'(T) + \Delta S^* + O\left(\frac{a^3}{T^2}\right). \quad (12)$$

Отсюда $K \geq (m + n) \log(m + n) / \log_2(m + n)$, так как $\Delta S^* = O(\log T / \log_2 T)$, если гипотеза Римана верна. Поэтому применяется лемма 3.6 и, пользуясь неравенством Коши–Шварца, получаем

$$|R| \leq 4\sqrt{2} \log T \frac{2^{(m+n)(1+o(1))}}{|\alpha_0|} \exp \left(-2K \log \left(\frac{(m+n)\pi}{2a\theta'(T)} \right) \right).$$

Для завершения доказательства воспользуемся (12) и заметим, что $KO(a^2/(\theta'(T)T^2))$ есть $o(a\theta'(T))$ и $4\sqrt{2} \log T$ может быть покрыто членом $e^{(2a/\pi)\theta'(T)o(1)}$.

ЛЕММА 4.2. Для достаточно малого $\epsilon > 0$ допустим, что $x \geq 0$ и $x = o(1)$ при ϵ , стремящемся к 0, и

$$(\epsilon + x) \log 2 + o(\epsilon) + o(x) - \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{x}{\epsilon} \right) \geq 0.$$

Тогда $x \in [0, (2 \log 2)\epsilon^2 + o(\epsilon^2)]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Пусть T достаточно велико, и пусть a , K , ΔS^* , t_0 , m и n такие, какими определены в начале пункта. Заметим, что

$$S(T+a) - S(T-a) - 2 = \Delta S^* + q - 2 \leq \Delta S^*,$$

и, значит, теорема 2.1 верна, если $\Delta S^* \leq 0$. Следовательно, можно предположить, что $\Delta S^* > 0$, так что применима лемма 4.1. Из тождества (10) следует, что

$$R > - \sum_{k=1}^K \Psi_{2k-1}(a) Z^{(2k-1)}(T+a) + \sum_{k=1}^K \Psi_{2k-1}(-a) Z^{(2k-1)}(T-a),$$

и из (1) и (5) мы получаем

$$-\Psi_{2k-1}(a) Z^{(2k-1)}(T+a) \geq 0, \quad \Psi_{2k-1}(-a) Z^{(2k-1)}(T-a) \geq 0 \quad \text{при } k = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{\theta'(T)}{4} \right\rfloor.$$

Выбирая $k = 1$ и пользуясь (6) и (7) вместе с неравенством $(1 + \bar{t})^{m+n} + (1 - \bar{t})^{m+n} \geq 2$, получаем

$$R \gg \frac{a\theta'(T)^{-c}}{|\alpha_0|(m+n)^2},$$

откуда заключаем в силу (11), что

$$\left(\frac{2a}{\pi} \theta'(T) + \Delta S^* \right) \log 2 + o(a\theta'(T)) + o(\Delta S^*) - \frac{\theta'(T)}{2} \log \left(1 + \pi \frac{\Delta S^*}{2a\theta'(T)} \right) \geq 0.$$

Разделив на $\theta'(T)$, полагая $\epsilon = 2a/\pi$ и $x = \Delta S^*/\theta'(T)$ и замечая, что $x = o(1)$ при ϵ , стремящемся к 0, применением лемму 4.2 и получим

$$\Delta S^* \leq (2 \log 2) \epsilon^2 \theta'(T) (1 + o(1)) = 2 \log 2 \left(\frac{2a}{\pi} \right)^2 \theta'(T) (1 + o(1)).$$

Доказательство завершено, поскольку $\theta'(T) = (1/2) \log T (1 + o(1))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.2. Пусть T достаточно велико, и предположим сначала, что $S(T) > 0$. В соответствии с [9], если гипотеза Римана верна, существует $\underline{t} < T$ такое, что $S(\underline{t}) < 0$ и $T - \underline{t} \ll \log_3 T$. По условию теоремы существуют целые $j < k$ такие, что

$$T_j < \underline{t} \leq T_{j+1} < \dots < T_{k-1} \leq T < T_k,$$

и вместе с тем $k - j = O((\log T)^{1/2} \log_3 T)$. Отсюда заключаем, что

$$\begin{aligned} S(T) &\leq S(T) - S(\underline{t}) = S(T_j) - S(\underline{t}) + \left(\sum_{l=j}^{k-1} S(T_{l+1}) - S(T_l) \right) + S(T) - S(T_k) \\ &\leq \frac{1}{\pi} (\theta(\underline{t}) - \theta(T_j)) + O((\log T)^{1/2} \log_3 T) + \frac{1}{\pi} (\theta(T_k) - \theta(T)) = O((\log T)^{1/2} \log_3 T), \end{aligned}$$

так как по теореме 2.1 существует константа C такая, что $S(T_{l+1}) - S(T_l) \leq C$. Теперь если $S(T) < 0$, то существуют $\bar{t} > T$ такое, что $S(\bar{t}) > 0$ и $\bar{t} - T \ll \log_3 T$, и целые числа $j < k$ такие, что

$$T_j < T \leq T_{j+1} < \dots < T_{k-1} \leq \bar{t} < T_k$$

и $k - j = O((\log T)^{1/2} \log_3 T)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} -S(T) &\leq -S(T) + S(T_j) + \left(\sum_{l=j}^{k-1} S(T_{l+1}) - S(T_l) \right) + S(\bar{t}) - S(T_k) \\ &\leq \frac{1}{\pi} (\theta(T) - \theta(T_j)) + O((\log T)^{1/2} \log_3 T) + \frac{1}{\pi} (\theta(T_k) - \theta(\bar{t})) = O((\log T)^{1/2} \log_3 T), \end{aligned}$$

и доказательство завершено.

Список литературы

- [1] A. Ivić, *The Theory of Hardy's Z-function*, Cambridge Tracts in Math., **196**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2013.
- [2] A. Ivić, "On some reasons for doubting the Riemann hypothesis", *The Riemann Hypothesis. A Resource for the Afficionado and Virtuoso Alike*, Springer, New York, 2008, 130–160.
- [3] Ph. Blanc, "An unexpected property of odd order derivatives of Hardy's function", *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.)*, **95 (109)** (2014), 173–188.
- [4] Ph. Blanc, "Optimal upper bound for the maximum of the k -th derivative of Hardy's function", *J. Number Theory*, **154** (2015), 105–117.
- [5] H.L. Montgomery, "Extreme values of the Riemann zeta function", *Comment. Math. Helv.*, **52:4** (1977), 511–518.
- [6] J. Moser, "The function $S(t)$ in the theory of the Riemann zeta-function", *Acta Arith.*, **30:2** (1976), 145–158.
- [7] M.S. Floater, "Error formulas for divided difference expansions and numerical differentiation", *J. Approx. Theory*, **122:1** (2003), 1–9.
- [8] T.J. Rivlin, *Chebyshev Polynomials. From Approximation Theory to Algebra and Number Theory*, John Wiley and Sons, New York, 1990.
- [9] J. Mueller, "On the Riemann zeta-function $\zeta(s)$ -gaps between sign changes of $S(t)$ ", *Mathematika*, **29:2** (1983), 264–269.

Диофантовы экспоненты решеток

О. Н. Герман

Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, г. Москва

german.oleg@gmail.com

1. Введение

Существует множество задач, в которых естественным образом возникают разного рода *диофантовы экспоненты*. В самой общей постановке имеется n линейно независимых линейных форм $\ell_1(\mathbf{z}), \dots, \ell_n(\mathbf{z})$ от d вещественных переменных, $n < d$. И вопрос заключается в том, *насколько малым может быть набор $(\ell_1(\mathbf{z}), \dots, \ell_n(\mathbf{z}))$, если $\mathbf{z}$ пробегает множество ненулевых точек с целыми координатами*. Есть два классических способа измерения «величины» этого набора: во-первых, можно рассматривать какую-нибудь норму, во-вторых – произведение модулей элементов. После чего исследуется вопрос, насколько быстро эта величина может стремиться к нулю с ростом «размера» $\mathbf{z}$.

Два примера для $n < d$. В качестве простейших примеров, иллюстрирующих два описанных выше подхода, можно привести задачу о совместных приближениях двух вещественных чисел и знаменитую гипотезу Литтлвуда (см. также [1], [2]). И там, и там речь идет о двух формах $\ell_1(\mathbf{z}), \ell_2(\mathbf{z})$ от трех переменных, коэффициенты которых записаны в строках матрицы

$$\begin{pmatrix} \theta_1 & 1 & 0 \\ \theta_n & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $|\cdot|$ обозначает $\sup$ -норму. Тогда супремум вещественных γ таких, что неравенство

$$\max_{i=1,2} |\ell_i(\mathbf{z})| \leq |\mathbf{z}|^{-\gamma}$$

имеет бесконечно много решений в $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^3$, называется *диофантовой экспонентой* пары (θ_1, θ_2) и описывает, насколько хорошо можно одновременно приблизить θ_1 и θ_2 рациональными числами с одним и тем же знаменателем.

С другой стороны, знаменитая гипотеза Литтлвуда утверждает, что для любого $\varepsilon > 0$ неравенство

$$\prod_{i=1,2} |\ell_i(\mathbf{z})| \leq \varepsilon z_1^{-1}$$

имеет бесконечно много решений в $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{Z}^3$, $z_1 \neq 0$. Как и в случае совместных приближений, *мультипликативная диофантова экспонента* пары (θ_1, θ_2) определяется как супремум вещественных γ таких, что неравенство

$$\prod_{i=1,2} |\ell_i(\mathbf{z})|^{1/2} \leq z_1^{-\gamma}$$

имеет бесконечно много решений в $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{Z}^3$, $z_1 \neq 0$.

Случай $n = d$. В приведенных выше примерах было важно, что количество линейных форм строго меньше размерности объемлющего пространства. Благодаря этому условию область, в которой мы ищем целые точки, хотя бы не ограничена. Но если $n = d$, а формы линейно независимы, то «норменный» подход дает нам ограниченную область, параллелепипед, для которого можно определять что-нибудь типа последовательных минимумов, но никак не диофантовы экспоненты. Однако если рассматривать произведение координат, то все намного интереснее. В такой постановке мы приходим к понятию *диофантовой экспоненты решетки*.

2. Экспоненты решеток

Напомним (см. [3]), что гипотеза Литтлвуда тесно связана с так называемой гипотезой Оппенгейма для линейных форм, которая имеет дело с решеткой

$$\Lambda = \{(\ell_1(\mathbf{z}), \dots, \ell_d(\mathbf{z})) \mid \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d\}, \quad (1)$$

где $\ell_1(\mathbf{z}), \dots, \ell_d(\mathbf{z})$ – линейно независимые линейные формы от d переменных. Она утверждает, что при $d \geq 3$ величина

$$N(\Lambda) = \inf_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} \prod_{1 \leq i \leq d} |\ell_i(\mathbf{z})|, \quad (2)$$

называемая *норменным минимумом* решетки Λ , положительна тогда и только тогда, когда Λ эквивалентна по модулю действия группы диагональных матриц решетке полного модуля вполне вещественного алгебраического расширения $\mathbb{Q}$ степени d (о таких *алгебраических* решетках см. [4]). Таким образом, если для каждого $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ положить

$$\Pi(\mathbf{x}) = \prod_{1 \leq i \leq d} |x_i|^{1/d},$$

можно сказать, что гипотеза Оппенгейма предлагает критерий отделимости от нуля величины $\Pi(\mathbf{x})$ в ненулевых точках решетки Λ . Но если эта величина принимает сколь угодно близкие к нулю значения, то можно говорить о соответствующей диофантовой экспоненте. Как и прежде, через $|\cdot|$ будем обозначать *sup*-норму.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем называть *диофантовой экспонентой* решетки Λ супремум вещественных γ таких, что неравенство

$$\Pi(\mathbf{x}) \leq |\mathbf{x}|^{-\gamma}$$

имеет бесконечно много решений в $\mathbf{x} \in \Lambda$. Обозначать эту величину будем $\omega(\Lambda)$.

Из теоремы Минковского о выпуклом теле следует, что для любой решетки Λ справедливо тривиальное неравенство

$$\omega(\Lambda) \geq 0.$$

В то же время $\omega(\Lambda) = 0$ всякий раз, когда $N(\Lambda) > 0$, например когда Λ – решетка полного модуля вполне вещественного алгебраического расширения $\mathbb{Q}$, откуда, кстати, следует «достаточность» в утверждении гипотезы Оппенгейма.

Есть еще одно семейство решеток, для которых $\omega(\Lambda) = 0$ в силу знаменитой теоремы о подпространствах, доказанной В. М. Шмидтом [5] в 1972 г. (см. также [6]).

ТЕОРЕМА 1 (теорема Шмидта о подпространствах, 1972). *Если $\ell_1(\mathbf{z}), \dots, \ell_d(\mathbf{z})$ – линейно независимые линейные формы от d переменных с алгебраическими коэффициентами, то для любого $\varepsilon > 0$ существует лишь конечное число собственных подпространств $\mathbb{Q}^d$, содержащих все целочисленные решения неравенства*

$$\prod_{1 \leq i \leq d} |\ell_i(\mathbf{z})| < |\mathbf{z}|^{-\varepsilon}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\ell_1(\mathbf{z}), \dots, \ell_d(\mathbf{z})$ – линейно независимые линейные формы от d переменных с алгебраическими коэффициентами. Пусть также для любого k -набора $(i_1, \dots, i_k)$, $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq d$, $1 \leq k \leq d$, коэффициенты поливектора

$$\ell_{i_1} \wedge \dots \wedge \ell_{i_k}$$

линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует лишь конечное число точек $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d$ таких, что

$$\prod_{1 \leq i \leq d} |\ell_i(\mathbf{z})| < |\mathbf{z}|^{-\varepsilon}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из ограничения на коэффициенты следует, что в любом k -мерном рациональном подпространстве $\mathcal{L}$ пространства $\mathbb{R}^d$ любые k из заданных линейных форм индуцируют k линейно независимых линейных форм в $\mathcal{L}$.

Пусть теперь $\mathcal{L}$ – одно из рациональных подпространств, о которых идет речь в теореме о подпространствах. Можно считать, что $\dim \mathcal{L} = d - 1$. Тогда ранг решетки $\mathcal{L} \cap \mathbb{Z}^d$ равен $d - 1$. Выберем в этой решетке произвольный базис $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{d-1}$ и дополним его до базиса $\mathbb{Z}^d$ каким-нибудь вектором $\mathbf{b}_d$. Обозначим через B матрицу, в столбцах которой записаны координаты векторов $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_d$, и рассмотрим линейное преобразование с матрицей B^{-1} . При этом преобразовании $\mathcal{L}$ переходит в подпространство

$$\{\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{R}^d \mid z_d = 0\},$$

естественно отождествляемое с $\mathbb{R}^{d-1}$, а решетка $\mathcal{L} \cap \mathbb{Z}^d$ – в решетку

$$\{\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{Z}^d \mid z_d = 0\},$$

естественно отождествляемую с $\mathbb{Z}^{d-1}$.

Тогда исходные формы $\ell_1(\mathbf{z}), \dots, \ell_d(\mathbf{z})$ индуцируют новые формы $\tilde{\ell}_1(\tilde{\mathbf{z}}), \dots, \tilde{\ell}_d(\tilde{\mathbf{z}})$ от $d - 1$ -й переменной с алгебраическими коэффициентами, причем любые $d - 1$ из этих форм линейно независимы. Существует константа R , зависящая лишь от коэффициентов этих форм такая, что множество

$$\left\{ \tilde{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^{d-1} \mid \prod_{1 \leq i \leq d} |\tilde{\ell}_i(\tilde{\mathbf{z}})| < |\tilde{\mathbf{z}}|^{-\varepsilon}, |\tilde{\mathbf{z}}| > R \right\}$$

содержится в объединении

$$\bigcup_{1 \leq j \leq d} \left\{ \tilde{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^{d-1} \mid \prod_{\substack{1 \leq i \leq d \\ i \neq j}} |\tilde{\ell}_i(\tilde{\mathbf{z}})| < |\tilde{\mathbf{z}}|^{-\varepsilon} \right\}.$$

Остается применить индукцию по размерности, ибо база ее – случай $d = 2$ – очевидна.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть линейные формы $\ell_1(\mathbf{z}), \dots, \ell_d(\mathbf{z})$ – такие же, как в следствии 1, и пусть Λ – решетка, определяемая (1). Тогда

$$\omega(\Lambda) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно заметить, что

$$|\mathbf{z}| \asymp \max_{1 \leq i \leq d} |\ell_i(\mathbf{z})|, \quad (3)$$

и применить следствие 1.

Возникает естественный вопрос: достигается ли каждое положительное значение $\omega(\Lambda)$. Однако соответствующие примеры еще предстоит построить. А пока мы хотели бы обратиться к принципу переноса.

3. Теорема переноса

Пусть Λ – произвольная решетка в $\mathbb{R}^d$ ранга d . Рассмотрим *двойственную* решетку

$$\Lambda^* = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d \mid \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \in \mathbb{Z} \text{ для любого } \mathbf{x} \in \Lambda\},$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение. Оказывается, так же, как и во многих других задачах теории диофантовых приближений, можно доказывать теоремы переноса, т.е. утверждения, связывающие $\omega(\Lambda)$ и $\omega(\Lambda^*)$.

Конечно, при $d = 2$ решетка Λ^* совпадает с точностью до гомотетии с решеткой Λ , повернутой на $\pi/2$, так что в двумерном случае справедливо очевидное равенство $\omega(\Lambda) = \omega(\Lambda^*)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $d \geq 3$. Тогда

$$\omega(\Lambda) \geq \frac{\omega(\Lambda^*)}{(d-1)^2 + d(d-2)\omega(\Lambda^*)}. \quad (4)$$

Здесь имеется в виду, что при $\omega(\Lambda^*) = \infty$ справедливо

$$\omega(\Lambda) \geq \frac{1}{d(d-2)}.$$

Мы докажем теорему 2 при помощи понятия *псевдоприсоединенного параллелепипеда* (см. также [7]) и при помощи общей теоремы переноса, доказанной в [8]. Мы дадим соответствующее определение в самом простом случае, ибо этого случая нам вполне достаточно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $\eta_1, \dots, \eta_d$ – положительные вещественные числа. Рассмотрим параллелепипед

$$\mathcal{P} = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid |x_i| \leq \eta_i, i = 1, \dots, d\}.$$

Тогда параллелепипед

$$\mathcal{P}^* = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid |x_i| \leq \frac{1}{\eta_i} \prod_{1 \leq j \leq d} \eta_j, i = 1, \dots, d \right\}$$

называется *псевдоприсоединенным* к $\mathcal{P}$.

Принцип переноса, открытый Хинчиным [9] в одном частном случае, привел в итоге к следующему довольно общему наблюдению (см. [8]).

ТЕОРЕМА 3 (Г., Евдокимов, 2015). Пусть $c = d^{1/2(d-2)}$ и $\det \Lambda = 1$. Пусть $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}^*$ – как в определении 2. Тогда

$$\mathcal{P}^* \cap \Lambda^* \neq \{\mathbf{0}\} \implies c\mathcal{P} \cap \Lambda \neq \{\mathbf{0}\}.$$

Выведем теорему 2 из теоремы 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Поскольку $\omega(\Lambda)$ инвариантна относительно гомотетий, можно считать, что $\det \Lambda = 1$. Мы рассмотрим два случая.

Случай I. На координатных плоскостях нет ненулевых точек решетки Λ^* .

Зафиксируем произвольное положительное ε . Тогда найдется бесконечно много ненулевых точек $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d) \in \Lambda^*$ таких, что

$$\Pi(\mathbf{u}) = |\mathbf{u}|^{-\gamma}, \quad \gamma = \gamma(\mathbf{u}) \geq \begin{cases} \omega(\Lambda^*) - \varepsilon & \text{при } \omega(\Lambda^*) < \infty, \\ \frac{1}{\varepsilon} & \text{при } \omega(\Lambda^*) = \infty. \end{cases}$$

Рассмотрим любую из этих точек и положим

$$\mathcal{P}_{\mathbf{u}} = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid |x_i| \leq |u_i|, i = 1, \dots, d\}.$$

Поскольку все u_i отличны от нуля, множество $\mathcal{P}_{\mathbf{u}}$ является невырожденным параллелепипедом. Более того, $\mathcal{P}_{\mathbf{u}} = \mathcal{P}^*$ для

$$\mathcal{P} = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid |x_i| \leq \eta_i, i = 1, \dots, d\},$$

где

$$\eta_i = |u_i|^{-1} \prod_{1 \leq j \leq d} |u_j|^{1/(d-1)}.$$

Стало быть, по теореме 3 параллелепипед $c\mathcal{P}$ содержит ненулевую точку $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_d)$ решетки Λ . Для этой точки имеем

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}| &\leq c \max_{1 \leq i \leq d} |\eta_i| \leq c \cdot \frac{\prod_{1 \leq i \leq d} |\eta_i|}{\min_{1 \leq i \leq d} |\eta_i|^{d-1}} = c \cdot \frac{\max_{1 \leq i \leq d} |u_i|^{d-1}}{\prod_{1 \leq i \leq d} |u_i|^{d-2/(d-1)}} \\ &= c \cdot \frac{|\mathbf{u}|^{d-1}}{\Pi(\mathbf{u})^{d(d-2)/(d-1)}} = c |\mathbf{u}|^{d-1+d(d-2)/(d-1)\gamma} \end{aligned}$$

и

$$\Pi(\mathbf{v}) \leq c \cdot \prod_{1 \leq i \leq d} |\eta_i|^{1/d} = c \cdot \prod_{1 \leq i \leq d} |u_i|^{1/d(d-1)} = c \Pi(\mathbf{u})^{1/(d-1)} = c |\mathbf{u}|^{-\gamma/(d-1)}.$$

Таким образом,

$$\Pi(\mathbf{v}) \leq c_1 |\mathbf{v}|^{-\frac{\gamma}{(d-1)^2 + d(d-2)\gamma}}, \quad c_1 = c_1(d, \gamma). \quad (5)$$

Отметим, что $|\mathbf{u}|$ может принимать сколь угодно большие значения. Стало быть, $\min_{1 \leq i \leq d} |\eta_i|$ может принимать сколь угодно малые значения, ибо

$$\min_{1 \leq i \leq d} |\eta_i| = \max_{1 \leq i \leq d} |u_i|^{-1} \prod_{1 \leq j \leq d} |u_j|^{1/(d-1)} = |\mathbf{u}|^{-1} \Pi(\mathbf{u})^{d/(d-1)} = |\mathbf{u}|^{-1-d\gamma/(d-1)}.$$

Это наблюдение в случае отсутствия в координатных плоскостях ненулевых точек решетки Λ дает нам бесконечно много точек Λ , удовлетворяющих (5), откуда немедленно следует (4). Если же в какой-нибудь координатной плоскости все же есть ненулевая точка решетки Λ , то, очевидно, $\omega(\Lambda) = \infty$, и тогда неравенство (4) тривиально.

Случай II. На координатных плоскостях имеются ненулевые точки решетки Λ^* .

В этом случае $\omega(\Lambda^*) = \infty$, и нам нужно показать, что

$$\omega(\Lambda) \geq \frac{1}{d(d-2)}. \quad (6)$$

Можно считать, что в решетке Λ^* имеется ненулевая точка $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d)$ такая, что $u_d = 0$. Тогда $(d-1)$ -мерное подпространство, ортогональное $\mathbf{u}$, содержит последнюю координатную ось, а также некоторую подрешетку $\Gamma \subset \Lambda$ ранга $d-1$. Применяя теорему Минковского о выпуклом теле, получаем, что существует бесконечно много точек $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_d) \in \Gamma$, $v_d \rightarrow \infty$ таких, что

$$\max_{1 \leq i \leq d-1} |v_i| \leq c_2 |v_d|^{-1/(d-2)}, \quad c_2 = c_2(\mathbf{u}).$$

Для каждой такой точки $\mathbf{v}$ справедливо

$$\Pi(\mathbf{v}) \leq (c_2^{d-1} |v_d|^{1-(d-1)/(d-2)})^{1/d} = c_2^{(d-1)/d} |\mathbf{v}|^{-1/d(d-2)},$$

откуда немедленно следует (6).

4. На пути к спектру

Как и в других диофантовых задачах (см. [10]–[12]), естественно возникает вопрос описания соответствующего спектра – подмножества $(\mathbb{R} \cup \{\infty\})^2$, задаваемого парами $(\omega(\Lambda), \omega(\Lambda^*))$, если Λ пробегает все пространство решеток ранга d , содержащихся в $\mathbb{R}^d$.

Как мы уже заметили, при $d = 2$ справедливо равенство $\omega(\Lambda) = \omega(\Lambda^*)$. Кроме того, в этом простейшем случае все можно описать в терминах цепных дробей (см. [13], [14]), так что в случае $d = 2$ легко убедиться, что все неотрицательные значения $\omega(\Lambda)$ достигаются.

При $d \geq 3$ имеют место неравенства

$$\omega(\Lambda) \geq 0, \quad \omega(\Lambda^*) \geq 0, \quad \omega(\Lambda) \geq \frac{\omega(\Lambda^*)}{(d-1)^2 + d(d-2)\omega(\Lambda^*)},$$

и интересен вопрос, все ли точки задаваемого ими множества принадлежат спектру пары $(\omega(\Lambda), \omega(\Lambda^*))$.

Пока что известно довольно мало. Мы знаем примеры решеток Λ , для которых $\omega(\Lambda) = \omega(\Lambda^*) = 0$. Это решетки с положительным норменным минимумом (2) и решетки, удовлетворяющие условиям следствий 1 и 2. Действительно, с одной стороны, известно (см. [15]–[17]), что

$$N(\Lambda) > 0 \iff N(\Lambda^*) > 0.$$

С другой стороны, если $\ell_1(\mathbf{z}), \dots, \ell_d(\mathbf{z})$ линейно независимы и если $\ell_1^*(\mathbf{z}), \dots, \ell_d^*(\mathbf{z})$ – двойственный набор форм, то коэффициенты поливектора $\ell_{i_1}(\mathbf{z}) \wedge \dots \wedge \ell_{i_k}(\mathbf{z})$ совпадают с точностью до знака с коэффициентами поливектора $\ell_{i_{k+1}}^*(\mathbf{z}) \wedge \dots \wedge \ell_{i_d}^*(\mathbf{z})$, где $(i_1, \dots, i_d)$ – перестановка из $(1, \dots, d)$. Стало быть, эти наборы коэффициентов одновременно являются линейно независимыми над $\mathbb{Q}$, откуда следует, что если Λ удовлетворяет условию следствия 1, то ему удовлетворяет и Λ^* .

Оказывается, при помощи теоремы о подпространствах можно привести примеры решеток Λ , для которых

$$\omega(\Lambda) = \frac{1}{d(d-2)}, \quad \omega(\Lambda^*) = \infty,$$

доказав таким образом точность теоремы 2 в одном граничном случае.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\ell_1(\mathbf{z}), \dots, \ell_d(\mathbf{z})$ – линейно независимые линейные формы от d переменных с алгебраическими коэффициентами. Пусть первый коэффициент поливектора

$$\ell_1 \wedge \dots \wedge \ell_{d-1}$$

равен нулю, а все остальные линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Пусть также для любого k -набора $(i_1, \dots, i_k)$, отличного от $(1, \dots, d-1)$, $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq d$, $1 \leq k \leq d$, коэффициенты поливектора

$$\ell_{i_1} \wedge \dots \wedge \ell_{i_k}$$

линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Наконец, пусть Λ – решетка, определяемая (1). Тогда

$$\omega(\Lambda) = \frac{1}{d(d-2)}, \quad \omega(\Lambda^*) = \infty. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку первый коэффициент $\ell_1 \wedge \dots \wedge \ell_{d-1}$ равен нулю, в плоскости

$$\mathcal{L}_1 = \{\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{R}^d \mid z_d = 0\}$$

есть ненулевая точка решетки Λ^* . Следовательно, $\omega(\Lambda^*) = \infty$, и в силу теоремы 2 достаточно показать, что

$$\omega(\Lambda) \leq \frac{1}{d(d-2)}. \quad (8)$$

Из условия следует, что если $\mathcal{L}$ – произвольное рациональное подпространство $\mathbb{R}^d$, отличное от $\mathcal{L}_1$, $\dim \mathcal{L} = k$, то любые k из исходных форм индуцируют k линейно независимых линейных форм в $\mathcal{L}$. Стало быть, повторяя рассуждение из доказательства следствия 1, можно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d \setminus \mathcal{L}_1$ выполняется

$$\prod_{1 \leq i \leq d} |\ell_i(\mathbf{z})| \geq c_3 |\mathbf{z}|^{-\varepsilon}, \quad c_3 = c_3(\varepsilon, \ell_1, \dots, \ell_d). \quad (9)$$

Что же касается $\mathcal{L}_1$, по условию любые $d - 1$ форм

$$\ell_{i_1}(\mathbf{z}), \dots, \ell_{i_{d-2}}(\mathbf{z}), \ell_d(\mathbf{z}), \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_{d-2} \leq d - 1,$$

индуцируют линейно независимые линейные формы $\tilde{\ell}_1(\tilde{\mathbf{z}}), \dots, \tilde{\ell}_{d-1}(\tilde{\mathbf{z}})$ в $\mathcal{L}_1$, удовлетворяющие условию следствия 1. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$, любого $j \in \{1, \dots, d - 1\}$ и любого ненулевого $\mathbf{z} \in \mathcal{L}_1$ справедливо

$$\prod_{\substack{1 \leq i \leq d \\ i \neq j}} |\ell_i(\mathbf{z})| \geq c_4 |\mathbf{z}|^{-\varepsilon}, \quad c_4 = c_4(\varepsilon, \ell_1, \dots, \ell_d).$$

Отсюда

$$|\ell_d(\mathbf{z})| \left(\prod_{1 \leq i \leq d} |\ell_i(\mathbf{z})| \right)^{d-2} = \prod_{1 \leq j \leq d-1} \left(\prod_{\substack{1 \leq i \leq d \\ i \neq j}} |\ell_i(\mathbf{z})| \right) \geq c_4^{d-1} |\mathbf{z}|^{-(d-1)\varepsilon}.$$

Таким образом, учитывая (3), получаем, что для каждого $\varepsilon > 0$ и каждого ненулевого $\mathbf{z} \in \mathcal{L}_1$ справедливо

$$\prod_{1 \leq i \leq d} |\ell_i(\mathbf{z})| \geq c_5 |\mathbf{z}|^{-1/(d-2)-\varepsilon}, \quad c_5 = c_5(\varepsilon, \ell_1, \dots, \ell_d). \quad (10)$$

Учитывая еще раз (3), получаем из (9) и (10), что для любого $\varepsilon > 0$ и любого $\mathbf{x} \in \Lambda$ справедливо

$$\Pi(\mathbf{x}) \geq c_6 |\mathbf{x}|^{-1/d(d-2)-\varepsilon}, \quad c_6 = c_6(\varepsilon, \Lambda),$$

откуда немедленно следует (8).

Несложно видеть, что аналогичное рассуждение можно применить для построения решеток таких, что $\omega(\Lambda^*) = \infty$, а $\omega(\Lambda)$ равно любому из значений из серии

$$\frac{k(d-k-l)}{dl}, \quad k \in \{1, \dots, d-2\}, \quad l \in \{1, \dots, d-k-1\}. \quad (11)$$

Чтобы построить соответствующую решетку, нужно рассмотреть линейные формы $\ell_1(\mathbf{z}), \dots, \ell_d(\mathbf{z})$ с алгебраическими коэффициентами такими, что k -мерное подпространство

$$\ell_1(\mathbf{z}) = \dots = \ell_{d-k}(\mathbf{z}) = 0$$

содержится в рациональном подпространстве размерности $k + l \leq d - 1$, но не содержится ни в каком рациональном подпространстве меньшей размерности. Тогда теорема Минковского о выпуклом теле даст неравенство

$$\omega(\Lambda) \geq \frac{k(d-k-l)}{dl},$$

а теорема о подпространствах – обратное.

Однако числа (11) – единственные нетривиальные значения $\omega(\Lambda)$, которые дает этот метод. Существование же решеток с конечной ненулевой экспонентой, отличной от (11), пока не доказано.

Список литературы

- [1] J. W. S. Cassels, *An Introduction to the Geometry of Numbers*, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [2] P. M. Gruber, C. G. Lekkerkerker, *Geometry of Numbers*, North-Holland Math. Library, **37**, North-Holland Publ., Amsterdam, 1987.
- [3] J. W. S. Cassels, H. P. F. Swinnerton-Dyer, “On the product of three homogeneous linear forms and indefinite ternary quadratic forms”, *Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A*, **248** (1955), 73–96.
- [4] A. I. Borevich, I. R. Shafarevich, *Number Theory*, Pure Appl. Math., **20**, Academic Press, New York, 1966.
- [5] W. M. Schmidt, “Norm form equations”, *Ann. of Math. (2)*, **96** (1972), 526–551.
- [6] E. Bombieri, W. Gubler, *Heights in Diophantine Geometry*, New Math. Monogr., **4**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006.
- [7] W. M. Schmidt, *Diophantine Approximation*, Lecture Notes in Math., **785**, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [8] О. Н. Герман, К. Г. Евдокимов, “Усиление теоремы переноса Малера”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **79**:1 (2015), 63–76.
- [9] A. Ya. Khintchine, “Über eine Klasse linearer Diophantischer Approximationen”, *Rend. Sirc. Mat. Palermo*, **50**:2 (1926), 170–195.
- [10] M. Laurent, “Exponents of Diophantine approximation in dimension two”, *Canad. J. Math.*, **61**:1 (2009), 165–189.
- [11] A. Marnat, *About Jarnik’s-Type Relation in Higher Dimension*, arXiv: 1510.06334.
- [12] A. Marnat, “There is no analogue to Jarnik’s relation for twisted diophantine approximation”, *Monats. Math.*, **181** (2016), 675–688, arXiv: 1409.6665.
- [13] J. W. S. Cassels, *An Introduction to Diophantine Approximation*, Cambridge Tracts in Math. and Math. Phys., **45**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1957.
- [14] A. Ya. Khintchine, *Continued Fractions*, Dover Publ., Mineola, NY, 1997.
- [15] О. Н. Герман, “Паруса и норменные минимумы решеток”, *Матем. сб.*, **196**:3 (2005), 31–60.
- [16] O. N. German, “Klein polyhedra and lattices with positive norm minima”, *J. Theor. Nombres Bordeaux*, **19**:1 (2007), 175–190.
- [17] Б. Ф. Скубенко, “Минимумы разложимых форм степени n от n переменных при $n \geq 3$ ”, *Модулярные функции и квадратичные формы. 1*, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **183**, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1990, 142–154.

Периодические ядерные разложения кубических иррациональностей в цепные дроби

В. Г. Журавлёв

Владимирский государственный университет

vzhuravlev@mail.ru

Введение

0.1. Теорема Лагранжа. Пусть $x = (x_1, x_2)$ – произвольная точка с координатами из $\mathbb{R}$ и $F_x = \mathbb{Q}(x_1, x_2)$ – расширение поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$, получающееся добавлением к нему чисел x_1, x_2 . Определим степень точки x над $\mathbb{Q}$, полагая $\deg(x) = \deg F_x$, где $\deg F_x = [F_x : \mathbb{Q}]$ – степень поля F_x над $\mathbb{Q}$.

В [1] была доказана

ТЕОРЕМА 0.1. Пусть точка $x = (x_1, x_2)$ будет иррациональной, т.е. числа $1, x_1, x_2$ линейно независимы над кольцом целых рациональных чисел $\mathbb{Z}$. Если она при этом является неподвижной точкой некоторого отображения δ из полугруппы двумерных возвратных отображений $\mathcal{D}$, то ее степень $\deg(x) = 3$.

Отображения из $\mathcal{D}$ представляют собой обобщение одномерного возвратного отображения $\delta: [0, 1) \rightarrow [0, 1)$, определяемого условиями

$$\delta(x) = \frac{x}{1-x} \quad \text{или} \quad \delta(x) = \frac{2x-1}{x}$$

для $0 \leq x < 1/2$ или $1/2 \leq x < 1$ соответственно. С помощью отображения δ происходит разложение чисел в обычные цепные дроби. Для них теорема Лагранжа утверждает [2]: иррациональность допускает периодическое разложение в цепную дробь тогда и только тогда, когда она является квадратичной.

Приведенная выше теорема 0.1 представляет собой обобщение первой части теоремы Лагранжа для кубических иррациональностей, так как в данном случае неподвижность точки x влечет за собой периодичность разложения ее в двумерную цепную дробь.

0.2. Приближения кубических единиц. В настоящей работе доказывается вторая часть обобщения теоремы Лагранжа (теорема 0.2) для некоторого трехпараметрического семейства кубических иррациональностей, точнее для точек $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ с координатами $\alpha_1 = \theta^2$, $\alpha_2 = \theta$, где $0 < \theta < 1$ – вещественный корень многочлена

$$f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \tag{0.1}$$

с коэффициентами a_i из кольца $\mathbb{Z}$ и со свободным членом $a_0 = \pm 1$. Такие числа θ являются единицами кубического поля $\mathbb{Q}(\theta)$. Для описанных в предложениях 4.1 и 4.2 иррациональностей $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ в теореме 8.1 доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 0.2. 1. Существуют период $p \geq 1$ и такие рекуррентные последовательности Q^a, R_1^a, R_2^a третьего порядка с постоянными коэффициентами, что для всех $i = ap + b$, где $0 \leq b < p$, точка

$$v_{\min}^{(i)} = (-Q^a\alpha_1 + R_1^a, -Q^a\alpha_2 + R_2^a)$$

обладает минимальным свойством:

$$v_{\min}^{(i)} \in T^{(i)} \quad \text{с минимальным целым } Q^a \geq 1,$$

где $T^{(i)}$ – явно определяемая последовательность выпуклых шестиугольников, площадь которых $s(T^{(i)}) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow +\infty$. Это означает, что ни одна из точек орбиты $x_j \equiv -j\alpha \bmod \mathbb{Z}^2$ не попадает

$$x_j \notin T^{(i)} \quad \text{для всех } 1 \leq j < Q^a$$

в шестиугольник $T^{(i)}$.

2. Для всех $a = 0, 1, 2, \dots$ имеет место неравенство

$$|Q^a \alpha_1 - R_1^a| + |Q^a \alpha_2 - R_2^a| \leq c \varrho(\mathbf{A})^a, \quad (0.2)$$

если некоторая калибровочная 2×2 -матрица $\mathbf{A}$ имеет простой спектр, где $\varrho(\mathbf{A})$ – спектральный радиус матрицы $\mathbf{A}$ и $c > 0$ – константа, не зависящая от a .

Минимальное свойство указывает на наилучшее ядерное приближение (karyon approximation). Это означает, что точки $v_{\min}^{(i)}$ наилучшим образом приближаются к $0 \bmod \mathbb{Z}^2$ относительно $T^{(i)}$ -нормы (ядерной нормы), в качестве выпуклых тел для которой выбраны шестиугольники $T^{(i)}$ – ядра индуцированных разбиений двумерного тора $\mathbb{T}^2$. Данные шестиугольники $T^{(i)}$ согласованы с орбитой точек $x_j \equiv -j\alpha \bmod \mathbb{Z}^2$ для $j = 0, 1, 2, \dots$ и, следовательно, напрямую согласованы с интересующей нас точкой $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$. Неравенства же (0.2) записаны в фиксированной ромбической норме $|x|_s = |x_1| + |x_2|$. Можно выбрать и любую другую норму, например, $|x| = (|x_1|^2 + |x_2|^2)^{1/2}$. Фиксированные нормы удобны для количественных оценок скорости приближений, но в их терминах не удастся описывать наилучшие приближения.

В п. 9.2 показано, как неравенства (0.2) можно перенести на другие числа кубического поля $\mathbb{Q}(\theta)$, отличные от единиц. В качестве примера рассмотрена совместная аппроксимация для кубических корней $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{4}$.

0.3. История и методы. Доказательство того, что приближения в теореме 0.2 являются наилучшими относительно $T^{(i)}$ -норм, опирается на метод дифференцирования индуцированных разбиений многомерных торов [1]. Для вывода же количественных оценок (0.2) используются многомерные возвратные отображения [1]. Ранее одномерные возвратные отображения применялись в теории динамических систем [3], [4], а двумерные возвратные отображения – для проверки периодичности разложений кубических корней [5].

Перечислим некоторые работы, в которых непосредственно рассматриваются разложения кубических иррациональностей в цепные дроби: периодичность разложений с помощью алгоритма Якоби [6], [7]; наилучшие приближения в евклидовой метрике алгоритмом Якоби–Перрона [8], [9] для корней многочленов (0.1) с коэффициентами $a_2 = 0$ и $a_0 = -1$; а также кубические иррациональности многочленов (0.1), имеющие свободный член $a_0 = -1$ и комплексные корни [10]–[12].

1. Согласованные тройки векторов и их производные

1.1. Согласованные тройки векторов. Обозначим через Σ совокупность всех сочетаний σ двух элементов: $\{0, 1\}$, $\{0, 2\}$, $\{1, 2\}$, из множества индексов $\{0, 1, 2\}$. Пусть v_0, v_1, v_2 – произвольные векторы из $\mathbb{R}^2$, $\sigma = \{k_1, k_2\}$ из Σ и $\sigma' = \{k_3\} = \{0, 1, 2\} \setminus \sigma$ – дополнительный к σ индекс. Далее мы будем рассматривать неупорядоченные тройки векторов $\{v_0, v_1, v_2\}$, где индексы лишь обозначают векторы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть $v_k \neq 0$ – любой вектор из $\{v_0, v_1, v_2\}$ и $H_{\sigma'}$ обозначает прямую, проходящую через начало координат и имеющую направляющий вектор v_{k_3} . Тогда такое множество векторов $\{v_0, v_1, v_2\}$ назовем *звездой*, если для всех сочетаний $\sigma = \{k_1, k_2\} \in \Sigma$ векторы

v_{k_1}, v_{k_2} не принадлежат прямой $H_{\sigma'}$ и лежат по отношению к ней в разных полуплоскостях $H_{\sigma'}^+$ и $H_{\sigma'}^-$.

Как следствие из определения звезды вытекает линейная независимость любых двух векторов из тройки $v = \{v_0, v_1, v_3\}$.

Название “звезда” вытекает из следующего критерия.

КРИТЕРИЙ 1.1. Обозначим через $\Delta(v)$ натянутый на векторы звезды v замкнутый треугольник, и пусть $\Delta^{\text{int}}(v)$ – его внутренняя часть. Тогда условие на множество векторов v быть звездой равносильно условию

$$0 \in \Delta^{\text{int}}(v). \quad (1.1)$$

1.2. Производные тройки векторов. Далее мы будем использовать обозначения

$$X = X_1 \sqcup X_2, \quad X = X_1 \cup X_2 \quad (1.2)$$

для *строгого* и *нестрогого разбиений* множества X в случае, если

$$X_1 \cap X_2 = \emptyset \quad \text{и} \quad X_1^{\text{int}} \cap X_2^{\text{int}} = \emptyset$$

соответственно, где X_k^{int} – множество внутренних точек из X_k .

Из определения 1.1 вытекает следующее утверждение.

ЛЕММА 1.1. *Предположим, что для некоторого сочетания $\sigma = \{k_1, k_2\}$ из Σ сумма векторов $v_\sigma = v_{k_1} + v_{k_2}$ звезды $v = \{v_0, v_1, v_2\}$ не принадлежит прямой $H_{\sigma'}$, где σ' – дополнительное сочетание для σ . Тогда при этом условии только одно из множеств*

$$v(\sigma) \sqcup v(\sigma') \quad (1.3)$$

будет звездой. Здесь $v(\sigma) = \{v_{k_1}, v_\sigma\}$ или $v(\sigma) = \{v_\sigma, v_{k_2}\}$ в зависимости от того, какие из пар векторов v_{k_1}, v_σ или v_{k_2}, v_σ принадлежат разным полуплоскостям $H_{\sigma'}^\pm$, и $v(\sigma')$ – дополнительный для $v(\sigma)$ вектор из звезды v .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Обозначим через $v^\sigma = v(\sigma) \sqcup v(\sigma')$ то множество векторов из (1.3), которое образует звезду. Если существуют множества векторов v^σ для всех сочетаний $\sigma \in \Sigma$, т.е. для всех σ выполняется условие леммы 1.1, то будем говорить, что звезда $v = \{v_0, v_1, v_2\}$ невырождена.

Таким образом, согласно определению 1.2 для всех сочетаний $\sigma = \{k_1, k_2\}$ из Σ на множестве невырожденных звезд $v = \{v_0, v_1, v_2\}$ определено отображение

$$v \xrightarrow{\sigma} v^\sigma = \{v_0^\sigma, v_1^\sigma, v_2^\sigma\}, \quad (1.4)$$

где $v_{k_1}^\sigma = v_{k_1}$, $v_{k_2}^\sigma = v_\sigma$ или $v_{k_1}^\sigma = v_\sigma$, $v_{k_2}^\sigma = v_{k_2}$ выбираются в согласии с (1.3) и $v_{k'}^\sigma = v_{k'}$ для остальных $k' \in \sigma'$.

Звезду v^σ из (1.4) назовем σ -производной невырожденной звезды v . Если нужно выделить индексы k_1, k_2 в сочетании $\sigma = \{k_1, k_2\}$, то будем для σ -производной (1.4) использовать еще и другое развернутое обозначение $v^\sigma = v^{\{k_1, k_2\}}$.

2. Индуцированные разбиения тора

2.1. Перекладывающиеся развертки тора. Пусть $L = \mathbb{Z}[l_1, l_2]$ – полная решетка в $\mathbb{R}^2$ с базисом l_1, l_2 , т.е. векторы l_1, l_2 линейно независимы на поле вещественных чисел $\mathbb{R}$, и пусть T – некоторое подмножество из $\mathbb{R}^2$. Будем говорить, что T является *разверткой тора*

$\mathbb{T}_L^2 = \mathbb{R}^2/L$, если отображение $T \rightarrow \mathbb{T}_L^2: x \mapsto x \bmod L$ – биекция. Развертка T называется *перекладываемой*, если заданы ее разбиение

$$T = T_0 \sqcup T_1 \sqcup T_2 \quad (2.1)$$

и перекладывание

$$T \xrightarrow{S'} T: S'(x) = x + v_{\text{col}(x)}$$

на векторы v_0, v_1, v_2 , связанные с базисом решетки L равенствами

$$l_k = v_k - v_0 \quad \text{для } k = 1, 2. \quad (2.2)$$

Здесь использовано обозначение $\text{col}(x) = k$ для цвета точек x , принадлежащих подмножеству T_k , где $k = 0, 1, 2$. Заметим, что при переходе (2.2) от векторов перекладывания v_0, v_1, v_2 к базису l_1, l_2 решетки L нарушается симметрия, когда выделяется вектор v_0 . Удобно для него ввести дополнительное обозначение

$$v_0 = \alpha'. \quad (2.3)$$

В частности, из равенств (2.2) и (2.3) вытекают сравнения $v_k \equiv \alpha' \bmod L$ для всех $k = 0, 1, 2$. Поэтому перекладывание S' представляет собой сдвиг тора $S' = S'_{\alpha'}$,

$$T \xrightarrow{S'} T: S'(x) \equiv x + \alpha' \bmod L \quad (2.4)$$

на вектор $\alpha' \bmod L$

2.2. Шестиугольная развертка тора. Обозначим через T_{k_1, k_2} замкнутый параллелограмм, натянутый на векторы v_{k_1}, v_{k_2} . Определим для $m = 0, 1, 2$ параллелограммы T_m , имеющие те же внутренние части $T_m^{\text{int}} = T_{k, l}^{\text{int}}$, что и параллелограммы T_{k_1, k_2} , где m – дополнительный к $\{k_1, k_2\}$ индекс в $\{0, 1, 2\}$. Стороны и вершины параллелограммов T_{k_1, k_2} распределим между соответствующими параллелограммами T_m так, чтобы выполнялись следующие условия:

- 1) каждому T_m принадлежат две смежные стороны и соединяющая их вершина;
- 2) получающееся при этом объединение $T = T_0 \cup T_1 \cup T_2$ является разбиением – нестрогим разбиением (1.2) – множества T .

Для определенности положим

$$0 \in T_0, \quad v_0 \in T_1, \quad v_0 + v_1 \in T_2. \quad (2.5)$$

В результате получается *шестиугольник*

$$T = T(v) = T_0 \sqcup T_1 \sqcup T_2 \quad (2.6)$$

с попарно равными и параллельными сторонами. Такой шестиугольник будет перекладываемой разверткой тора $\mathbb{T}_L^2$ для решетки L с базисом (2.2) и векторами перекладывания v_0, v_1, v_2 в случае, если данная тройка векторов $v = \{v_0, v_1, v_2\}$ образует звезду.

2.3. Вмещающее пространство. Кроме тора $\mathbb{T}_L^2$ нам потребуется еще один стандартный тор $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ для *квадратной решетки* $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z}[e_1, e_2]$ с ортонормированным базисом $\{e_1, e_2\}$.

Зададим сдвиг $S = S_{\alpha}$ тора $\mathbb{T}^2$ на вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ из $\mathbb{R}^2$, полагая

$$\mathbb{T}^2 \xrightarrow{S} \mathbb{T}^2: x \mapsto S(x) \equiv x + \alpha \bmod \mathbb{Z}^2. \quad (2.7)$$

Далее торы $\mathbb{T}^2$ будут использоваться как вмещающие пространства для вложений различных торов $\mathbb{T}_L^2$ с изменяющимися решетками L .

2.4. Вкладывающиеся в тор развертки. Подмножество $T \subset \mathbb{R}^2$ называется $\mathbb{Z}^2$ -различимым, т.е. для любых элементов x, y из T , связанных сравнением $x \equiv y \pmod{\mathbb{Z}^2}$, следует их равенство $x = y$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Перекладывающаяся развертка T из (2.1) вкладывается

$$T \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}^2, \quad (2.8)$$

в тор $\mathbb{T}^2$ относительно сдвига $S = S_\alpha$, если выполняются следующие условия:

- 1) подмножество $T \subset \mathbb{R}^2$ является $\mathbb{Z}^2$ -различимым и, значит, отображение

$$T \rightarrow T \pmod{\mathbb{Z}^2} : x \mapsto x \pmod{\mathbb{Z}^2} \quad (2.9)$$

есть биекция; поэтому, используя отображение (2.9), можем считать развертку T вложенной как множество

$$T \subset \mathbb{T}^2 \quad (2.10)$$

в тор $\mathbb{T}^2$;

- 2) векторы перекладывания имеют вид

$$v_k \equiv m_k \alpha \pmod{\mathbb{Z}^2} \quad (2.11)$$

для всех $k = 0, 1, 2$ с некоторыми коэффициентами $m_k = 1, 2, 3, \dots$;

- 3) орбиты

$$\text{Orb}'(T_k) = \{S^j(T_k) : j = 1, \dots, m_k - 1\} \quad (2.12)$$

подмножеств $T_k \subset T$ удовлетворяют условию

$$\text{Orb}'(T_k) \cap T = \emptyset \quad (2.13)$$

для $k = 0, 1, 2$.

Чтобы сформулировать следующий результат, нам потребуется в дополнение к (2.12) определить еще полные орбиты

$$\text{Orb}(T_k) = \{S^j(T_k) : j = 0, 1, \dots, m_k - 1\}. \quad (2.14)$$

Кроме того, будем предполагать вектор сдвига α из (2.7) иррациональным, когда

$$1, \alpha_1, \alpha_2 \quad \text{линейно независимы над кольцом } \mathbb{Z}. \quad (2.15)$$

В [13] доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть развертка T вкладывается (2.8) в тор $\mathbb{T}^2$, развертка T имеет внутреннюю точку, и пусть вектор α сдвига $S = S_\alpha$ из (2.7) будет иррациональным (2.15). Тогда выполняются следующие утверждения:

- 1) множества из полных орбит $\text{Orb}(T_k)$ не пересекаются, т.е.

$$S^{j_1}(T_{k_1}) \cap S^{j_2}(T_{k_2}) \neq \emptyset$$

только при условии $j_1 = j_2$ и $k_1 = k_2$;

- 2) имеет место разбиение тора $\mathbb{T}^2$:

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 \sqcup \mathcal{T}_1 \sqcup \mathcal{T}_2, \quad \text{где } \mathcal{T}_k = T_k \sqcup S^1(T_k) \sqcup \dots \sqcup S^{m_k-1}(T_k)$$

– орбитное разбиение, составленное из множеств, входящих в орбиту $\text{Orb}(T_k)$ из (2.14).

2.5. Индуцированные отображения и ядро разбиения. Из теоремы 2.1 следует, что сдвиг тора $S': T \rightarrow T$ из (2.4) является *индуцированным отображением*, или, иначе, отображением первого возвращения в $T \subset \mathbb{T}^2$, отображением Пуанкаре – для сдвига тора $S: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ из (2.7), что символически будем обозначать в виде равенства $S' = S|_T$. Обозначим соответственно через

$$T = T(v) \quad \text{и} \quad \mathcal{T} = \mathcal{T}(v) = \mathcal{T}_0 \sqcup \mathcal{T}_1 \sqcup \mathcal{T}_2 \quad (2.16)$$

развертку T из (2.1) и *индуцированное разбиение* тора $\mathbb{T}^2$, порождаемое вкладывающейся в тор $T \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}^2$ разверткой T . Множество T по отношению ко всему разбиению тора $\mathcal{T}$ называется [14] *ядром* (кагун) разбиения $\mathcal{T}$. Чтобы указывать на такую связь между T и $\mathcal{T}$, будем использовать обозначение

$$T = \text{Kr} = \text{Kr}(\mathcal{T}).$$

Ядро Kr характеризуется следующим свойством: Kr – это такое подмножество $\text{Kr} \subset \mathbb{T}^2$, для которого отображение первого возвращения $S' = S|_{\text{Kr}}$, индуцированное сдвигом тора $S = S_\alpha$ из (2.7), эквивалентно перекладыванию трех подмножеств из разбиения

$$\text{Kr} = \text{Kr}_0 \sqcup \text{Kr}_1 \sqcup \text{Kr}_2.$$

Понятие ядра Kr является основным для всей рассматриваемой здесь конструкции. С помощью ядер $T = \text{Kr}$ будут построены наилучшие приближений для кубических иррациональностей; они же будут задавать ядерные T -нормы, используемые для получения количественных оценок скорости приближений.

2.6. Критерий вложимости шестиугольной развертки тора. Пусть $T = T(v)$ будет некоторой разверткой (2.1), которая изначально не предполагается вложенной в тор $\mathbb{T}^2$; и пусть (см. соглашение (1.2))

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}(v) = \mathcal{T}_0 \cup \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \quad (2.17)$$

– подмножество тора $\mathbb{T}^2$, определенное по правилу из (2.16). Таким образом, в данном случае множество (2.17) не обязательно является разбиением тора $\mathbb{T}^2$.

В [13] доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.2. *Развертка $T = T(v)$ вкладывается (2.8) в тор $T \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}^2$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих двух эквивалентных утверждений:*

- 1) определенное в (2.17) множество $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v)$ является разбиением тора $\mathbb{T}^2$;
- 2) внутренняя часть T^{int} развертки $T \subset \mathbb{T}^2$ не содержит ни одной из точек x_j орбиты

$$\text{Orb}'(0, \mathbf{m}) = \{x_j = S^j(0) : j = 1, 2, \dots, \mathbf{m} - 1\},$$

$$\text{где } \mathbf{m} = m_0 + m_1 + m_2.$$

2.7. Производные вкладывающихся троек векторов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Пусть $v = \{v_0, v_1, v_2\}$ – звезда и $T = T(v)$ – отвечающая ей развертка (2.16) тора $\mathbb{T}_L^2$ с векторами перекладывания v_0, v_1, v_2 . Если данная развертка T вкладывается в тор $\mathbb{T}^2$:

$$T \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}^2,$$

относительно некоторого сдвига $S = S_\alpha$, то в этом случае будем говорить, что такая звезда v *вкладывается*

$$v \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}^2, \quad (2.18)$$

в тор $\mathbb{T}^2$ относительно сдвига S .

В [15] доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть невырожденная звезда $v = \{v_0, v_1, v_2\}$ вкладывается (2.18) в тор $\mathbb{T}^2$ относительно сдвига $S = S_\alpha$ с иррациональным (2.15) вектором α . Тогда ее любая σ -производная $v^\sigma = \{v_0^\sigma, v_1^\sigma, v_2^\sigma\}$ для $\sigma \in \Sigma$ также вкладывается

$$v^\sigma \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}^2,$$

в тот же тор $\mathbb{T}^2$ относительно сдвига S .

3. Возвратные отображения

3.1. Базисный треугольник. Основной областью для нас будет замкнутый треугольник Δ с вершинами в точках $(0, 0)$, $(1, 0)$ и $(0, 1)$. Обозначим через S_Δ группу его аффинных симметрий (ангармоническая группа). Она сопряжена с группой метрических симметрий правильного треугольника и состоит из трех аффинных поворотов r_0, r_1, r_2 , соответствующих поворотам против часовой стрелки на $0^\circ, 120^\circ, 240^\circ$, и трех осевых симметрий h_0, h_1, h_2 относительно медиан μ_0, μ_1, μ_2 , проходящих через вершины $0 = (0, 0)$, $1 = (1, 0)$, $2 = (0, 1)$ соответственно. В координатах $(x_1, x_2) \in \Delta$ относительно декартова базиса $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ симметрии из S_Δ записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} r_0(x_1, x_2) &= (x_1, x_2), & h_0(x_1, x_2) &= (x_2, x_1), \\ r_1(x_1, x_2) &= (-x_1 - x_2 + 1, x_1), & h_1(x_1, x_2) &= (x_1, -x_1 - x_2 + 1), \\ r_2(x_1, x_2) &= (x_2, -x_1 - x_2 + 1), & h_2(x_1, x_2) &= (-x_1 - x_2 + 1, x_2). \end{aligned} \quad (3.1)$$

3.2. Разбиения треугольника. Выделим в треугольнике Δ шесть открытых областей $\Delta_k^{kl}, \Delta_l^{kl} \subset \Delta$ с целыми индексами $0 \leq k < l \leq 2$. Замыкания областей $\overline{\Delta}_k^{kl}, \overline{\Delta}_l^{kl}$ разбивают треугольник: $\Delta = \overline{\Delta}_k^{kl} \cup \overline{\Delta}_l^{kl}$, и пересекаются по медиане μ_m : $\overline{\Delta}_k^{kl} \cap \overline{\Delta}_l^{kl} = \mu_m$, с номером m , дополняющим индексы $\{k, l\}$ до всего множества $\{0, 1, 2\}$. Нижние индексы в Δ_k^{kl} и Δ_l^{kl} указывают на принадлежность вершин с номерами k и l соответственно $\overline{\Delta}_k^{kl}$ и $\overline{\Delta}_l^{kl}$. Таким образом, области $\Delta_k^{kl}, \Delta_l^{kl}$ представляют собой открытые треугольники, замыкание объединения которых

$$\Delta^{kl} = \Delta_k^{kl} \sqcup \Delta_l^{kl} \quad (3.2)$$

совпадает со всем треугольником Δ и при этом $\Delta_k^{kl} \cap \Delta_l^{kl} = \emptyset$.

3.3. Нормированные дифференцирования звезд. Согласно условию (1.1) из критерия 1.1 каждая точка $x \in \Delta^{kl}$ задает звезду $w = \{w_0, w_1, w_2\}$ с лучами

$$w_0 = -x, \quad w_1 = e_1 - x, \quad w_2 = e_2 - x, \quad (3.3)$$

выходящими из центра x в вершины с соответствующими номерами $0, 1, 2$. В этом случае существует производная звезда

$$w' = \{w'_0, w'_1, w'_2\}. \quad (3.4)$$

Если $x \in \Delta_k^{kl}$, то лучи в (3.4) имеют вид $w'_m = w_m$, $w'_k = w_k$, $w'_l = w_k + w_l$; если же $x \in \Delta_l^{kl}$, то вид $w'_m = w_m$, $w'_k = w_k + w_l$, $w'_l = w_l$. Здесь мы использовали более удобное для дальнейшего обозначение для производной w' звезды w вместо ранее введенного w^σ в (1.4); индекс m снова дополняет $\{k, l\}$ до всего множества индексов $\{0, 1, 2\}$.

Из условия $x \in \Delta^{kl}$ вытекает, что векторы $e'_1 = v'_1 - v'_0$, $e'_2 = v'_2 - v'_0$ образуют базис пространства $\mathbb{R}^2$. Пусть A^{kl} — матрица перехода $e' = eA^{kl}$ от базиса $\{e_1, e_2\}$ к базису $\{e'_1, e'_2\}$, где

$e' = (e'_1 e'_2)$ – строка, eA^{kl} – произведение строки $e = (e_1 e_2)$ на 2×2 -матрицу A^{kl} . Данная матрица имеет две *специализации* $A^{kl} = A_k^{kl}$ или $A^{kl} = A_l^{kl}$ в зависимости от принадлежности x области Δ_k^{kl} или Δ_l^{kl} :

$$\begin{aligned} A_1^{12} &= \begin{pmatrix} 1 & 1-x_1 \\ 0 & 1-x_2 \end{pmatrix}, & A_2^{12} &= \begin{pmatrix} 1-x_1 & 0 \\ 1-x_2 & 1 \end{pmatrix}, \\ A_0^{01} &= \begin{pmatrix} 1-x_1 & 0 \\ -x_2 & 1 \end{pmatrix}, & A_1^{01} &= \begin{pmatrix} x_1 & -1+x_1 \\ x_2 & 1+x_2 \end{pmatrix}, \\ A_0^{02} &= \begin{pmatrix} 1 & -x_1 \\ 0 & 1-x_2 \end{pmatrix}, & A_2^{02} &= \begin{pmatrix} 1+x_1 & x_1 \\ -1+x_2 & x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

В координатах формула перехода $e' = eA^{kl}$ примет вид

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \mathcal{A}^{kl} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Здесь, чтобы не усложнять обозначения, обратные матрицы $(A^{kl})^{-1}$ для A^{kl} обозначены через $\mathcal{A}^{kl}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1^{12} &= \frac{1}{1-x_2} \begin{pmatrix} 1-x_2 & -1+x_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \mathcal{A}_2^{12} &= \frac{1}{1-x_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1+x_2 & 1-x_1 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{A}_0^{01} &= \frac{1}{1-x_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x_2 & 1-x_1 \end{pmatrix}, & \mathcal{A}_1^{01} &= \frac{1}{x_1+x_2} \begin{pmatrix} 1+x_2 & 1-x_1 \\ -x_2 & x_1 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{A}_0^{02} &= \frac{1}{1-x_2} \begin{pmatrix} 1-x_2 & x_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \mathcal{A}_2^{02} &= \frac{1}{x_1+x_2} \begin{pmatrix} x_2 & -x_1 \\ 1-x_2 & 1+x_1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

С помощью обратных матриц $\mathcal{A}^{kl}$ можно для производной звезды w' из (3.4) определить *нормированную звезду*

$$\mathbf{w}' = \{\mathbf{w}'_0, \mathbf{w}'_1, \mathbf{w}'_2\} \quad (3.8)$$

с центром $x' = (x'_1, x'_2)$, вычисляемым по формуле

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \mathcal{A}^{kl} \begin{pmatrix} -w'_{01} \\ -w'_{02} \end{pmatrix},$$

где в правом столбце использованы координаты вектора $w'_0 = (w'_{01}, w'_{02})$ из производной звезды $w' = \{w'_0, w'_1, w'_2\}$, определенной в (3.4). Если вектор w'_0 сохраняется неизменным, $w'_0 = w_0$, то в формуле (3.6) выбирается центр $x = (x_1, x_2) = -w_0 = -w'_0$ первоначальной звезды w . Нормированная звезда $\mathbf{w}'$, как и w , имеет лучи

$$\mathbf{w}'_0 = -x', \quad \mathbf{w}'_1 = e_1 - x', \quad \mathbf{w}'_2 = e_2 - x', \quad (3.9)$$

выходящие теперь уже из нового центра x' в вершины треугольника Δ . Определение (3.8) звезды $\mathbf{w}'$ корректно, поскольку по определению (2.10) точка x' принадлежит внутренней области Δ^{int} треугольника Δ .

В явном виде координаты $(x'_1, x'_2) = \delta^{kl}(x_1, x_2)$ центра x' нормированной звезды $\mathbf{w}'$ из (3.8) вычисляются через *дробно-линейные преобразования*:

$$\begin{aligned} \delta_1^{12}(x_1, x_2) &= \left(\frac{x_1 - x_2}{1 - x_2}, \frac{x_2}{1 - x_2} \right), & \delta_2^{12}(x_1, x_2) &= \left(\frac{x_1}{1 - x_1}, \frac{-x_1 + x_2}{1 - x_1} \right), \\ \delta_0^{01}(x_1, x_2) &= \left(\frac{x_1}{1 - x_1}, \frac{x_2}{1 - x_1} \right), & \delta_1^{01}(x_1, x_2) &= \left(\frac{2x_1 + x_2 - 1}{x_1 + x_2}, \frac{x_2}{x_1 + x_2} \right), \\ \delta_0^{02}(x_1, x_2) &= \left(\frac{x_1}{1 - x_2}, \frac{x_2}{1 - x_2} \right), & \delta_2^{02}(x_1, x_2) &= \left(\frac{x_1}{x_1 + x_2}, \frac{x_1 + 2x_2 - 1}{x_1 + x_2} \right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Преобразования (3.10) представляют собой двумерный аналог одномерных возвратных отображений [3], [4].

3.4. Возвратные отображения. Дробно-линейные преобразования (3.10) задают три отображения δ^{kl} :

$$\Delta \xrightarrow{\delta^{kl}} \Delta: x \mapsto x' = \delta^{kl}(x), \quad (3.11)$$

с индексами $0 \leq k < l \leq 2$: $\delta^{kl}(x) = \delta_k^{kl}(x)$, если $x \in \Delta_k^{kl}$, и $\delta^{kl}(x) = \delta_l^{kl}(x)$, если $x \in \Delta_l^{kl}$. Таким образом, областью определения отображения δ^{kl} является открытая двусвязная область $\Delta^{kl} \subset \Delta$ из (3.2) и, значит, δ^{kl} определены почти всюду в треугольнике Δ , исключая его границы и медиану μ_m , проходящую через вершину с номером m из дополнения $\{0, 1, 2\} \setminus \{k, l\}$.

3.5. Матрицы возвратных отображений. На языке 3×3 -матриц

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

дробно-линейные преобразования (3.10) записываются в виде

$$M\langle x \rangle = \left(\frac{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}}{a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}}, \frac{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}}{a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}} \right) \quad (3.12)$$

для $x = (x_1, x_2)$. В матричной форме (3.12) удобно представляется ассоциативное свойство таких преобразований

$$M_1\langle M_2\langle x \rangle \rangle = (M_1 \cdot M_2)\langle x \rangle. \quad (3.13)$$

Поскольку $E_3\langle x \rangle = x$ для единичной матрицы E_3 порядка 3, то из свойства (3.13) следует, что для $x' = M\langle x \rangle$ обратным отображением будет $x = M^{-1}\langle x' \rangle$.

Согласно определению (3.12) дробно-линейные преобразования (3.10) имеют следующие матрицы:

$$\begin{aligned} \widehat{\delta}_1^{12} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, & \widehat{\delta}_2^{12} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \widehat{\delta}_0^{01} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \widehat{\delta}_1^{01} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \widehat{\delta}_0^{02} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, & \widehat{\delta}_2^{02} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Матрицы (3.14) принадлежат группе унимодулярных матриц $\text{GL}_3(\mathbb{Z})$.

3.6. Матрицы симметрий треугольника. Симметрии треугольника (3.1) также можно представить в матричной форме (3.12). Для них матрицами будут: для поворотов –

$$\widehat{r}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \widehat{r}_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \widehat{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (3.15)$$

для осевых симметрий –

$$\widehat{h}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \widehat{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \widehat{h}_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Матрицы симметрий треугольника (3.15), (3.16) отличаются от матриц возвратных отображений (3.14) нижней строкой $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Матрицы поворотов имеют определитель $|\widehat{r}_k| = 1$,

а осевых симметрий – определитель $|\hat{h}_k| = -1$, что отражает отличие собственных преобразований r_k от несобственных h_k . Кроме самих матриц (3.15), (3.16) нам потребуются еще их *однородные части* – верхние левые (2×2) -блоки:

$$\begin{aligned} \tilde{r}_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \tilde{r}_1 &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \tilde{r}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \\ \tilde{h}_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \tilde{h}_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, & \tilde{h}_2 &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Матрицы (3.17) порождают группу $S_{\tilde{\Delta}}$ аффинных (однородных) симметрий треугольника $\tilde{\Delta}$, получающегося сдвигом треугольника Δ на вектор $(-1/3, -1/3)$. Следовательно, треугольник $\tilde{\Delta}$ имеет центр в начале координат $(0, 0)$ – неподвижной точке всех симметрий (3.17).

3.7. Иррациональные точки. Аналогично определению (2.15) для векторов точку $x = (x_1, x_2)$ из $\mathbb{R}^2$ назовем *иррациональной*, если

$$1, x_1, x_2 \quad \text{линейно независимы над кольцом } \mathbb{Z}. \quad (3.18)$$

ЛЕММА 3.1 [1]. Если точка $x = (x_1, x_2)$ иррациональна (3.18) и матрица M принадлежит целочисленной унимодулярной группе $\text{GL}_3(\mathbb{Z})$, то:

- 1) для точки x определен ее образ $M\langle x \rangle$ относительно дробно-линейного отображения (3.12);
- 2) соответствующая точка $x' = M\langle x \rangle$ снова будет иррациональной.

4. Разложение в произведение элементарных возвратных матриц

4.1. Кубические единицы. Пусть

$$f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad (4.1)$$

будет многочленом с коэффициентами a_i из кольца целых рациональных чисел $\mathbb{Z}$ и со свободным членом $a_0 = \pm 1$. Будем говорить, что $f(x)$ является Δ -многочленом, если $f(x)$ имеет вещественный корень $f(\theta) = 0$, удовлетворяющий условию

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \Delta^{\text{int}}, \quad (4.2)$$

где $\alpha_1 = \theta^2$, $\alpha_2 = \theta$. Если при этом θ – кубическая иррациональность, то скажем, что $f(x)$ – Δ_{irr} -многочлен, а точка α удовлетворяют Δ_{irr} -условию. Значит, в данном случае $f(x)$ будет многочленом, неприводимым над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Из Δ_{irr} -условия и ограничения на свободный член $a_0 = \pm 1$ многочлена (4.1) вытекает, что его корень θ является *единицей* вещественного кубического поля $\mathbb{Q}(\theta)$.

4.2. Возвратные матрицы для кубических единиц. Каждому набору $a = (a_2, a_1, a_0)$ коэффициентов из (4.1) сопоставим матрицу

$$M(a) = \begin{pmatrix} -a_2 & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Так как $\det M(a) = -a_0 = \mp 1$, то $M(a)$ принадлежит группе унимодулярных матриц $\text{GL}_3(\mathbb{Z})$. Из определения (4.3) следует, что столбец $\hat{\alpha} = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad 1)^T$ является собственным вектором матрицы $M(a)$, т.е. выполняется матричное равенство

$$M(a)\hat{\alpha} = \lambda\hat{\alpha} \quad (4.4)$$

с собственным значением $\lambda = \theta$.

4.3. Полугруппа $\widehat{\mathcal{D}}$. Обозначим через $\widehat{\mathcal{D}}$ *полугруппу* унимодулярных матриц из $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$, отвечающих преобразованиям δ из полугруппы $\mathcal{D}$. Полугруппа $\widehat{\mathcal{D}}$ содержит группу $\widehat{S}_\Delta$ матриц, соответствующих аффинным симметриям S_Δ треугольника Δ . Если матрица M принадлежит полугруппе $\widehat{\mathcal{D}} \subset \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$, то по определению она допускает разложение в конечное произведение симметрий $\widehat{s} \in \widehat{S}_\Delta$ и *элементарных возвратных матриц* $\widehat{\delta}_*^{kl} \in \widehat{\mathcal{D}}$, определенных в (3.14). Произвольную матрицу M из полугруппы $\widehat{\mathcal{D}}$ также будем называть *возвратной*. Из определения $\mathcal{D}$ следует, что такая матрица M будет унимодулярной.

Чтобы избежать длинных записей и сделать их более удобочитаемыми, воспользуемся следующими сокращениями:

$$\widehat{s} \rightarrow s, \quad (\widehat{\delta}_k^{kl})^n \rightarrow kl^n, \quad (\widehat{\delta}_l^{kl})^n \rightarrow lk^n \quad (4.5)$$

для $n = 0, 1, 2, \dots$. Например, разложение

$$M = \widehat{s} \cdot \widehat{\delta}_{k_1}^{k_1 l_1} \cdot (\widehat{\delta}_{l_2}^{k_2 l_2})^3$$

примет сокращенный вид

$$M = s \cdot k_1 l_1 \cdot l_2 k_2^3.$$

Среди разложений матриц $M(a)$ в произведение симметрий $\widehat{s}$ и элементарных возвратных матриц $\widehat{\delta}_*^{kl}$ можно выделить две основные серии. В предложениях 4.1 и 4.2 представлены указанные разложения матриц $M(a)$ для Δ_{irr} -многочленов $f(x)$ вида (4.1).

4.4. Серия $a_0 = -1$. В предложении 4.1 представлена основная серия разложений матриц $M(a)$, соответствующая коэффициенту $a_0 = -1$. Другая серия с коэффициентом $a_0 = 1$ содержится в предложении 4.2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть $a_0 = -1$. Тогда в обозначениях (4.5) матрицы $M(a)$ из (4.3) имеют следующие разложения:

$$M(a) = r_1 \cdot \underline{01} \cdot \underline{20} \cdot 02^{a_1-1} \cdot 01^{a_2-2} \quad \text{для } a_2 \geq 2, \quad a_1 \geq 1, \quad (4.6)$$

$$M(a) = r_1 \cdot \underline{21} \cdot \underline{20} \cdot 02^{a_1-1} \quad \text{для } a_2 = 1, \quad a_1 \geq 1, \quad (4.7)$$

$$M(a) = r_1 \cdot \underline{20} \cdot 02^{|a_2|+1} \cdot \underline{21} \cdot 02^{a_1-|a_2|-2} \quad \text{для } a_2 \leq 0, \quad a_1 \geq |a_2| + 2. \quad (4.8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. В разложениях (4.6)–(4.8) подчеркиванием выделен *остов* или *фрейм* разложения, сохраняющийся при всех изменениях параметров a_1, a_2 в заданных пределах.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получается прямыми вычислениями с использованием формул

$$01^a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 02^a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -a & 1 \end{pmatrix}.$$

4.5. Серия $a_0 = 1$. Для данного случая основная серия разложений матриц $M(a)$ аналогична основной серии разложений для $a_0 = -1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Пусть $a_0 = 1$. Тогда для матриц $M(a)$ выполняются следующие разложения:

$$M(a) = h_0 \cdot \underline{20} \cdot 02^{a_2} \cdot \underline{21} \cdot 02^{|a_1|-a_2-2} \quad \text{для } a_2 \geq 1, \quad a_1 \leq -a_2 - 3, \quad (4.9)$$

$$M(a) = h_0 \cdot \underline{01} \cdot \underline{20} \cdot 02^{|a_1|-2} \cdot 01^{|a_2|-1} \quad \text{для } a_2 \leq -1, \quad a_1 \leq -2. \quad (4.10)$$

5. Неподвижные точки возвратных матриц

5.1. Соответствие и специализации. Выписанные ранее разложения матрицы $M(a)$ в виде произведения симметрии $\hat{s}$ и элементарных возвратных матриц $\hat{\delta}_*^{kl}$ задают соответствие

$$M(a) \rightarrow \delta_s, \quad (5.1)$$

где отображение $\delta_s = s\delta$ принадлежит расширенной полугруппе $\mathcal{D}$ и равно композиции симметрии s и некоторого отображения δ из полугруппы $\mathcal{D}_\delta \subset \mathcal{D}$. Более того, соответствие (5.1) определяет также и специализацию δ_* второго отображения: δ равно произведению элементарных возвратных отображений δ^{kl} , а его специализация δ_* равна произведению специализаций δ_*^{kl} , определяемых элементарными возвратными матрицами $\hat{\delta}_*^{kl}$, содержащимися в правой части разложений матрицы $M(a)$.

5.2. Неподвижные точки.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. Пусть $f(x)$ – Δ_{irr} -многочлен (4.1) с коэффициентами a_2, a_1, a_0 из предположений 4.1 и 4.2 (см. (4.6)–(4.10)) и α – точка из области Δ^{int} , определенная в (4.2). Кроме того, пусть $M(a)$ – возвратная матрица (4.3) с параметром $a = (a_2, a_1, a_0)$ и $\delta_s = s\delta$ – отвечающее ей отображение (5.1) из полугруппы $\mathcal{D}$. Тогда точка α удовлетворяет условиям

$$\alpha \in \Delta(\delta_{s*}), \quad (5.2)$$

где $\Delta(\delta_{s*})$ – область определения специализации $\delta_{s*} = s\delta_*$ отображения δ_s , задаваемой соответствием (5.1), и

$$\delta_{s*}\alpha = \alpha, \quad (5.3)$$

т.е. точка α допускается специализацией δ_{s*} и является неподвижной точкой отображения δ_s : $\delta_s\alpha = \alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию точка α удовлетворяет Δ_{irr} -условию и по построению (4.3) матрицы $M(a)$ отвечающий точке α вектор-столбец $\hat{\alpha}$ является (4.4) собственным $M(a)\hat{\alpha} = \lambda\hat{\alpha}$ для матрицы $M(a)$ с собственным значением $\lambda = \theta \neq 0$. Поэтому можно применить вторую часть теоремы 5.1 [16], из которой вытекают оба утверждения (5.2) и (5.3).

Пусть $x = (x_1, x_2)$ – произвольная точка с координатами из $\mathbb{R}$. Обозначим через $F_x = \mathbb{Q}(x_1, x_2)$ расширение, являющееся полем и состоящее из всех чисел вида $f(x_1, x_2)/g(x_1, x_2)$, где f и g – многочлены над $\mathbb{Q}$. Определим степень (над $\mathbb{Q}$) точки x равенством

$$\deg(x) = \deg F_x,$$

где $\deg F_x = [F_x : \mathbb{Q}]$ – степень поля F_x .

ТЕОРЕМА 5.1 [1]. Пусть точка x будет иррациональной (3.18). Если при этом она является неподвижной точкой некоторого отображения δ из полугруппы $\mathcal{D}$, то ее степень

$$\deg(x) = 3. \quad (5.4)$$

6. Дифференцирования и нормирования звезды

6.1. Коммутативная диаграмма. Далее будем предполагать, что специализация δ_* , задаваемая точкой α , имеет вид

$$\delta_* = \delta_p \cdots \delta_2 \delta_1, \quad (6.1)$$

где $\delta_i = \delta_*^{k_i l_i}$ – специализации, определяемые соответствием (5.1). Заметим, что отображение (6.1) не содержит симметрии s из группы S_Δ .

Рассмотрим следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbf{w} & \xrightarrow{\delta_1} & \mathbf{w}^{(1)} & \xrightarrow{\delta_2} & \dots & \xrightarrow{\delta_p} & \mathbf{w}^{(p)} \\
 \downarrow \text{id} & & \downarrow A^{(1)} & & & & \downarrow A^{(p)} \\
 v & \xrightarrow{\sigma_1} & v^{(1)} & \xrightarrow{\sigma_2} & \dots & \xrightarrow{\sigma_p} & v^{(p)}
 \end{array} \quad (6.2)$$

Здесь использовали такие обозначения:

- $\mathbf{w} = \mathbf{w}^{(0)}$ – начальная звезда с центром в точке $x = x^{(0)} = \alpha$;
- $\mathbf{w}^{(1)} = \delta_1 \mathbf{w}^{(0)}$ – звезда с центром в $x^{(1)} = \delta_1 x^{(0)}$, и т.д.;
- $\mathbf{w}^{(p)} = \delta_p \mathbf{w}^{(p-1)}$ – звезда с центром в $x^{(p)} = \delta_p x^{(p-1)}$.

Кратко цепочку преобразований из верхней строки диаграммы (6.2) можем записать в виде композиции

$$\mathbf{w}^{(p)} = \delta_p(\dots(\delta_2(\delta_1 \mathbf{w}))\dots) = \delta_* \mathbf{w}, \quad x^{(p)} = \delta_p(\dots(\delta_2(\delta_1 x))\dots) = \delta_* x \quad (6.3)$$

из p возвратных отображений δ_* . Так определенные $\mathbf{w}^{(i)}$ для $i = 1, \dots, p$ будут, согласно определению (3.8), нормированными звездами. Нижняя строка диаграммы (6.2) содержит обычные (см. определение 1.1) или *динамические* звезды $v^{(i)}$ для $i = 1, \dots, p$, где

- $v = v^{(0)} = \mathbf{w}$;
- $v^{(1)} = v^{(0)\sigma_1}$ – производная звезда относительно дифференцирования $\sigma_1 = \{k_1, l_1\}$, ассоциированного с отображением $\delta_1 = \delta_*^{k_1 l_1}$, и т.д.;
- $v^{(p)} = v^{(p-1)\sigma_p}$ – производная звезда относительно $\sigma_p = \{k_p, l_p\}$, ассоциированного с $\delta_p = \delta_*^{k_p l_p}$.

Следовательно, имеем представление

$$v^{(p)} = ((v^{\sigma_1})^{\sigma_2} \dots)^{\sigma_p} = v^\sigma \quad (6.4)$$

звезды $v^{(p)}$ через последовательность дифференцирований $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_p$, ассоциированную с отображением δ_* из (5.1).

Теперь опишем вертикальные стрелки из диаграммы (6.2). Первая стрелка обозначает тождественное отображение id , т.е. $v = \text{id } \mathbf{w} = \mathbf{w}$. Далее, выпишем матрицы $A^{(p)}$:

- $A^{(1)} = A_*^{k_1 l_1}(x^{(0)})$ – матрица (3.5), зависящая от начальной точки $x = x^{(0)}$;
- $A^{(2)} = A_*^{k_1 l_1}(x^{(0)}) A_*^{k_2 l_2}(x^{(1)})$ – матрица, уже зависящая от двух точек $x = x^{(0)}$ и $x^{(1)}$, и т.д.;
- последняя матрица

$$A^{(p)} = A_*^{k_1 l_1}(x^{(0)}) A_*^{k_2 l_2}(x^{(1)}) \dots A_*^{k_p l_p}(x^{(p-1)}) \quad (6.5)$$

определяется всеми предыдущими точками $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(p-1)}$.

Таким образом, по определению матрицы $A^{(i)}$ определяют аффинные изоморфизмы

$$A^{(i)}: \mathbf{w}^{(i)} \xrightarrow{\sim} v^{(i)} \quad (6.6)$$

звезд $\mathbf{w}^{(i)}$ и $v^{(i)}$ из верхней и нижней строк диаграммы (6.2) для всех $i = 1, \dots, p$.

ЛЕММА 6.1 [1]. *Диаграмма (6.2) является коммутативной.*

6.2. Периодические звезды. Из предложения 5.1 следует, что нормированная звезда $\mathbf{w}^{(p)}$ из диаграммы (6.2) будет симметричной

$$\mathbf{w} = \check{\mathbf{w}}^{(p)} \quad (6.7)$$

исходной звезде $\mathbf{w} = \mathbf{w}^{(0)}$ относительно преобразования $\check{s}$ из группы $S_{\check{\Delta}}$ аффинных однородных симметрий (3.17) треугольника $\check{\Delta}$. В этом случае будем говорить, что звезда $\mathbf{w}$ *периодична* относительно отображения δ_s из (5.1), а звезда $v = \mathbf{w}$ *периодична* относительно дифференцирования σ из (6.4), при этом $p > 0$ будет *периодом* звезды $v = \mathbf{w}$. Заметим, что однородные преобразования $\check{s}$ из (3.17) действуют на векторы звезды $\mathbf{w}$, а преобразования s из группы S_{Δ} аффинных неоднородных симметрий (3.15), (3.16) действуют на точки треугольника Δ . В (6.7) звезда $\mathbf{w}$ – это совокупность трех векторов $\mathbf{w}_0$, $\mathbf{w}_1$ и $\mathbf{w}_2$.

6.3. Калибровочная матрица. Поскольку $v^{(p)} = A^{(p)}\mathbf{w}^{(p)}$ по формуле (6.6), то с помощью равенства (6.7) получаем

$$v^{(p)} = A^{(p)}\mathbf{w}^{(p)} = A^{(p)}\check{s}^{-1}\mathbf{w}.$$

Поэтому, принимая во внимание равенство $\mathbf{w} = v$, можем записать

$$v^{(p)} = \mathbf{A}v, \quad (6.8)$$

где матрица $\mathbf{A} = A^{(p)}\check{s}^{-1}$ определяет аффинное однородное отображение звезд $\mathbf{A}: v \mapsto v^{(p)}$. Равенство (6.8) означает, что производная звезда $v^{(p)}$ из диаграммы (6.2) *аффинно изоморфна* начальной звезде v . По этой причине $\mathbf{A}$ называется *калибровочной матрицей* периодической звезды v . Далее мы хотим воспользоваться равенством (6.8) несколько раз. С этой целью рассмотрим бесконечную периодическую комбинированную последовательность $\xi = \{\xi_0, \xi_1, \dots\}$ с периодом p , где

$$\xi_1 = \sigma_1, \quad \xi_2 = \sigma_2, \quad \dots, \quad \xi_p = \sigma_p\check{s}^{-1}, \quad \xi_{p+1} = \sigma_1, \quad \dots$$

С помощью последовательности ξ определим для звезды v по индукции звезды $v^{(i)}$ для $i = 0, 1, 2, \dots$, полагая

$$v^{(i)} = (v^{(i-1)})^{\xi_i} \quad \text{для } n \geq 1, \quad (6.9)$$

где $v^{(0)} = v$ и $v'^{\xi_i} = \check{s}(v'^{\sigma_p})$ для $i = p, 2p, 3p, \dots$. Чтобы не вводить новый термин, будем так определенные звезды $v^{(i)}$ продолжать называть *производными* для звезды v .

ТЕОРЕМА 6.1 [1]. Пусть звезда v периодична относительно дифференцирования σ из (6.4) с периодом p , и пусть $\mathbf{A}$ – ее калибровочная матрица, определенная в (6.8). Тогда для всех $i = 0, 1, 2, \dots$ справедлива формула

$$v^{(i)} = \mathbf{A}^a v^{(b)}, \quad (6.10)$$

если $i = at + b$, где $a = 0, 1, 2, \dots$ и $b = 0, \dots, p - 1$.

7. Приближения на торе

7.1. Генерации вкладывающихся разверток. По определению (2.18) и теореме 2.3 производные звезды $v^{(i)}$ из (6.9) вкладываются $v^{(i)} \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}^2$ в тор $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. По соглашению (2.16) это означает, что порождаемые ими ядра или шестиугольники $T^{(i)} = T(v^{(i)})$ вкладываются в тор

$$T^{(i)} \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}^2. \quad (7.1)$$

Из построения (6.9) производной звезды $v^{(i)} = \{v_0^{(i)}, v_1^{(i)}, v_2^{(i)}\}$ следует, что ее векторы перекладывания $v_k^{(i)}$ имеют вид

$$v_k^{(i)} \equiv m_k^{(i)} \alpha^- \pmod{\mathbb{Z}^2}$$

для $k = 0, 1, 2$ с некоторыми коэффициентами $m_k^{(i)} = 1, 2, 3, \dots$, которые назовем *порядками* лучей $v_k^{(i)}$ звезды $v^{(i)}$. Здесь $\alpha^- = -\alpha \in \mathbb{R}^2$ – вектор сдвига $S = S_{\alpha^-}$ тора $\mathbb{T}^2$ из (2.7) и порядки $m_k^{(i)}$ вычисляются по правилу (1.4). Сумму данных коэффициентов

$$m^{(i)} = m_0^{(i)} + m_1^{(i)} + m_2^{(i)} \quad (7.2)$$

назовем *порядком* производной звезды $v^{(i)}$. С ним свяжем конечные орбиты

$$\text{Orb}'(0, m^{(i)}) = \{x_j = S^j(0) \equiv j\alpha^- \bmod \mathbb{Z}^2 : j = 1, 2, \dots, m^{(i)} - 1\}. \quad (7.3)$$

7.2. Спектральный радиус. Пусть λ_1, λ_2 – собственные значения невырожденной комплексной 2×2 -матрицы A и

$$\varrho(A) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\}$$

– ее *спектральный радиус*. Рассмотрим наиболее интересный случай $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Такую матрицу A можно представить в виде произведения $A = MJM^{-1}$ диагональной матрицы

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

и некоторой невырожденной комплексной матрицы M . Введем на $\mathbb{C}^2$ *s-метрику* $|x|_s = |x_1| + |x_2|$, обладающую свойством

$$|Mx|_s \leq 2\|M\|_{\max} \cdot |x|_s, \quad (7.4)$$

где

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

– произвольная комплексная матрица,

$$Mx = M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \|M\|_{\max} = \max_{i,j} |m_{ij}|$$

– *max-норма* матрицы M . Используя разложение $A = MJM^{-1}$ и неравенство (7.4) имеем

$$\begin{aligned} |Ax|_s &= |M(JM^{-1}x)|_s \leq 2\|M\|_{\max} |J(M^{-1}x)|_s \\ &\leq 4\|M\|_{\max} \|J\|_{\max} |M^{-1}x|_s \leq 8\|M\|_{\max} \|M^{-1}\|_{\max} \|J\|_{\max} |x|_s. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Так как $\|J\|_{\max} = \max_i |\lambda_i| = \varrho(A)$, то приходим к следующему неравенству:

$$|Ax|_s \leq c_s(M) \varrho(A) |x|_s \quad (7.6)$$

с константой $c_s(M) = 8\|M\|_{\max} \|M^{-1}\|_{\max}$. Снова используя разложение $A = MJM^{-1}$ можем записать $A^n = MJ^n M^{-1}$, откуда выводим $\varrho(J^n) = \varrho(A)^n$, поскольку $\varrho(J^n) = \varrho(J)^n = \varrho(A)^n$. Теперь, еще раз применяя схему (7.5), (7.6) и равенство $\varrho(J^n) = \varrho(A)^n$, получаем общее неравенство

$$|A^n x|_s \leq c_s(M) \varrho(A)^n |x|_s \quad (7.7)$$

для любой степени $n = 1, 2, 3, \dots$. Неравенство (7.7) также переносится и на евклидову метрику $|x| = (|x_1|^2 + |x_2|^2)^{1/2}$. Повторяя рассуждения (7.5)–(7.7) и применяя неравенства

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |x|_s \leq |x| \leq |x|_s,$$

можно получить аналог неравенства (7.7) для евклидовой метрики

$$|A^n x| \leq c(M) \varrho(A)^n |x| \quad (7.8)$$

для любой степени $n = 1, 2, 3, \dots$ с другой увеличенной константой $c(M) = \sqrt{2}c_s(M)$.

7.3. Радиусы и площади производных шестиугольников. Применим доказанные формулы (7.7), (7.8) к оценке метрических характеристик производных шестиугольников $T^{(i)} = T(v^{(i)})$ из (7.1). Как обычно, радиус множества $T \subset \mathbb{R}^2$ равен минимальному из радиусов окружностей, содержащих в себе указанное множество. В соответствии с метрикой $|x|_s$ и $|x|$ будем использовать два радиуса $r_s(T^{(i)})$ и $r(T^{(i)})$.

ЛЕММА 7.1. *Если шестиугольник $T(v)$ порождается звездой $v = \{v_0, v_1, v_2\}$, то его радиусы $r_*(T(v))$ вычисляется по формуле*

$$r_*(T(v)) = \frac{1}{2} \max\{|v_0 + v_1 - v_2|_*, |v_0 - v_1 + v_2|_*, |-v_0 + v_1 + v_2|_*\}, \quad (7.9)$$

где $r_*(T(v))$ может быть любым из радиусов $r_s(T(v))$ или $r(T(v))$ в зависимости от выбранной метрики $|x|_*$, равной $|x|_s$ или $|x|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения (2.6) следует, что шестиугольник $T(v)$ имеет вершины $v_k, v_{k'} + v_{k''}$, где $k = 0, 1, 2, 0 \leq k' < k'' \leq 2$. Поэтому его центром будет

$$c(T(v)) = \frac{1}{2}(v_0 + v_1 + v_2).$$

Радиус же шестиугольника $r_*(T(v))$ равен максимальной длине векторов $w - c(T(v))$, где w – вершины $T(v)$. Отсюда получаем (7.9).

Шестиугольник $T^{(i)}$ является разверткой тора $\mathbb{T}_{L^{(i)}}^2 = \mathbb{R}^2/L^{(i)}$ для решетки $L^{(i)} = \mathbb{Z}[l_1^{(i)}, l_2^{(i)}]$ с базисом $l_k^{(i)} = v_k^{(i)} - v_0^{(i)}$ для $k = 1, 2$, где $v_k^{(i)}$ – лучи звезды $v^{(i)}$ из п. 7.1. Поэтому площадь $s(T^{(i)})$ шестиугольника $T^{(i)}$ равна

$$s(T^{(i)}) = \left| \det \begin{pmatrix} l_{11}^{(i)} & l_{12}^{(i)} \\ l_{21}^{(i)} & l_{22}^{(i)} \end{pmatrix} \right| \quad (7.10)$$

– площади фундаментальной области решетки $L^{(i)}$, где $l_{kl}^{(i)}$ – координаты базисных векторов $l_k^{(i)}$ для $k = 1, 2$.

ЛЕММА 7.2. 1. *Если собственные значения $\lambda_1 \neq \lambda_2$ калибровочной матрицы $\mathbf{A}$ звезды v из (6.8), то для радиусов $r_*(T^{(i)}) = r_s(T^{(i)})$ или $r(T^{(i)})$ шестиугольника $T^{(i)}$ выполняется оценка*

$$r_*(T^{(i)}) \leq c_*(M) \varrho(\mathbf{A})^a r_*(T^{(b)}) \quad (7.11)$$

для $i = ap + b$, где $a = 0, 1, 2, \dots$ и $b = 0, \dots, p - 1$. Здесь константы $c_*(M)$ равны $c_s(M)$ из (7.6) или $c(M) = \sqrt{2}c(M)_s$ и $\varrho(A)$ – спектральный радиус матрицы $\mathbf{A}$.

2. *Площадь $s(T^{(i)})$ шестиугольника $T^{(i)}$ находится по формуле*

$$s(T^{(i)}) = |\det \mathbf{A}|^a s(T^{(b)}), \quad (7.12)$$

где $\det \mathbf{A}$ обозначает определитель матрицы $\mathbf{A}$, удовлетворяющий неравенствам $0 < |\det \mathbf{A}| < 1$, а площади $s(T^{(b)})$ находятся по формуле (7.10).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 6.1 звезды $v^{(i)}$ и $v^{(b)}$ связаны равенством $v^{(i)} = \mathbf{A}^a v^{(b)}$ и, значит, порождаемые ими шестиугольники $T^{(i)} = T(v^{(i)})$ и $T^{(b)} = T(v^{(b)})$ аффинно подобны $T(v^{(i)}) = \mathbf{A}^a T(v^{(b)})$. Отсюда, и из (7.7) и (7.8) следует неравенство (7.11). Формула (7.12) вытекает из подобия и равенства (7.10). Для доказательства же неравенств $0 < |\det \mathbf{A}| < 1$ достаточно заметить, что по построению (6.5), (6.8) калибровочная матрица $\mathbf{A}$ состоит из сомножителей A_*^{kl} , имеющих определители $0 < |\det A_*^{kl}| < 1$ согласно (3.5).

7.4. Порядковые матрицы. Составим из порядков лучей звезды v (см. п. 7.1) матрицу-столбец

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}(v) = \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$$

и определим матрицы, соответствующие симметриям (3.15), (3.16) базисного реугольника:

$$\begin{aligned} R_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & R_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & R_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ H_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & H_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & H_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \end{aligned} \quad (7.13)$$

и – дробно-линейным преобразованиям или дифференцированиям (3.14):

$$\begin{aligned} D_1^{12} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, & D_2^{12} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ D_0^{01} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & D_1^{01} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ D_0^{02} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & D_2^{02} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Матрицы (7.13) и (7.14) принадлежат группе унимодулярных матриц $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$.

Данные матрицы позволяют вычислять порядки лучей $m_0^\sigma, m_1^\sigma, m_2^\sigma$ преобразованной звезды $v^\sigma = (v_0^\sigma, v_1^\sigma, v_2^\sigma)$:

$$\mathbf{m}^\sigma = \mathbf{m}(v^\sigma) = M^\sigma(v)\mathbf{m}. \quad (7.15)$$

Здесь согласно определению производной (1.4) имеем

$$M^\sigma(v) = D_*^{k_1 k_2},$$

если $\sigma = \{k_1, k_2\}$ – дифференцирование. Здесь в качестве специализации $*$ выбирается k_1 или k_2 в зависимости от того, какое из условий (1.4) выполняется;

$$M^\sigma(v) = M^\sigma = S_k$$

в случае преобразования симметрии $\sigma = s$ звезды v , где $S_k = R_k$ или H_k – соответствующая матрица из (7.13).

ЛЕММА 7.3 [1]. Пусть v – периодическая звезда $v^{(p)} = \mathbf{A}v$ периода $p > 0$ с калибровочной матрицей $\mathbf{A} = A^{(p)}\tilde{s}^{-1}$ из (6.8), и пусть ее производные звезды $v^{(i)}$ для $i = 0, 1, 2, \dots$ определены по формуле (6.9). Тогда если $i = ap + b$, где $a = 0, 1, 2, \dots$ и $b = 0, \dots, p-1$, то

$$\mathbf{m}^{(i)} = \mathbf{m}(v^{(i)}) = \mathbf{M}^a \mathbf{m}^{(b)}. \quad (7.16)$$

Здесь $\mathbf{M} = SM^{(p)}$ с матрицей S из (7.13), соответствующей обратной симметрии для $\tilde{s}$, и

$$M^{(p)} = D_*^{k_p l_p}(v^{(p-1)}) \dots D_*^{k_2 l_2}(v^{(1)}) D_*^{k_1 l_1}(v^{(0)}),$$

где у порядковых матриц $D_*^{k_j l_j}(v^{(j-1)}) = D_*^{k_j l_j}$ из (7.15) специализации $*$ определяются производной звездой $v^{(j-1)}$.

Назовем $\mathbf{M}$ *порядковой матрицей* периодической звезды v , отвечающей калибровочной матрице $\mathbf{A}$.

7.5. Рекуррентные последовательности. Рассмотрим векторную рекуррентную последовательность

$$\mathbf{f}^{i+1} = M\mathbf{f}^i \quad (7.17)$$

для $i = 0, 1, 2, \dots$. Здесь $M - 3 \times 3$ -матрица, $\mathbf{f}^i = (f_0^i \ f_1^i \ f_2^i)^T$ и $\mathbf{f}^0$ – некоторый фиксированный столбец. Из определения (7.17) следует формула

$$\mathbf{f}^i = M^i \mathbf{f}^0. \quad (7.18)$$

Наша цель – найти рекуррентную зависимость для скалярной последовательности

$$f^i = \mathbf{1} \cdot \mathbf{f}^i, \quad (7.19)$$

где $\mathbf{1} = (1 \ 1 \ 1)$ – строка, т.е. $f^i = f_0^i + f_1^i + f_2^i$ определяются как суммы элементов столбцов $\mathbf{f}^i$.

Для матрицы M запишем ее характеристический многочлен в виде

$$ch_M(x) = \det(xE - M) = x^3 - b_2x^2 - b_1x - b_0. \quad (7.20)$$

По теореме Гамильтона–Кэли M удовлетворяет матричному уравнению $M^3 - b_2M^2 - b_1M - b_0E = 0$. Перепишем его в виде равенства $M^3 = b_2M^2 + b_1M + b_0E$. Умножая его на столбец $\mathbf{f}^i$, получаем

$$M^3\mathbf{f}^i = b_2M^2\mathbf{f}^i + b_1M\mathbf{f}^i + b_0\mathbf{f}^i. \quad (7.21)$$

Теперь, применяя к равенству (7.21) формулу (7.18), приходим к новой рекуррентной формуле

$$\mathbf{f}^{i+3} = b_2\mathbf{f}^{i+2} + b_1\mathbf{f}^{i+1} + b_0\mathbf{f}^i \quad (7.22)$$

для столбцов $\mathbf{f}^i$. После этого умножим обе части равенства (7.22) на строку $\mathbf{1} = (1 \ 1 \ 1)$ и воспользуемся равенством (7.19). Таким образом, приходим к следующему результату.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. Если числа f^i для $i = 0, 1, 2, \dots$ определены равенством (7.19), то они удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$f^{i+3} = b_2f^{i+2} + b_1f^{i+1} + b_0f^i, \quad (7.23)$$

где b_2, b_1, b_0 – коэффициенты характеристического многочлена (7.20) и начальные условия

$$f^2 = \mathbf{1} \cdot M^2\mathbf{f}^0, \quad f^1 = \mathbf{1} \cdot M\mathbf{f}^0, \quad f^0 = \mathbf{1} \cdot \mathbf{f}^0 \quad (7.24)$$

задаются фиксированным столбцом $\mathbf{f}^0$ из (7.17).

7.6. Основная теорема (общий случай). Важность последовательности определенных ранее в (7.1) производных шестиугольников $T^{(i)} = T(v^{(i)})$ – ядер индуцированных разбиений из п. 2.5 – для $i = 0, 1, 2, \dots$ объясняется тем, что через их геометрию характеризуются аппроксимационные свойства точек из бесконечной орбиты

$$\text{Orb}_{\alpha^-}(0) = \{x_j = S^j(0) \equiv j\alpha^- \bmod \mathbb{Z}^2 : j = 0, 1, 2, \dots\}, \quad (7.25)$$

порождаемой сдвигом $S = S_{\alpha^-}$ тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ из (2.7). Ограниченные шестиугольниками $T^{(i)}$ области на торе $\mathbb{T}^2$ выделяют из орбиты (7.25) некоторую подпоследовательность точек $\{x_{j'}\}_{j'=1}^\infty$, наилучшим образом приближающихся к $0 \in \mathbb{T}^2$.

ТЕОРЕМА 7.1. В условиях предложений 4.1 и 4.2 пусть v – периодическая звезда периода $p > 0$ с калибровочной матрицей $\mathbf{A}$ из (6.8), и пусть ее производные звезды $v^{(i)}$ для $i = 0, 1, 2, \dots$ определены по формуле (6.9). Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Ни одна из точек $x_j \equiv j\alpha^- \pmod{\mathbb{Z}^2}$ орбиты (7.25) не попадает

$$x_j \notin T^{(i)} \quad \text{для } j = 1, 2, \dots, m^{(i)} - 1 \quad (7.26)$$

в шестиугольник $T^{(i)}$ из (7.1), где $m^{(i)}$ – порядок (7.2) звезды $v^{(i)}$, равный сумме коэффициентов матрицы-столбца $\mathbf{m}^{(i)}$ из (7.16). Первой попавшей в область $T^{(i)}$ является точка

$$x_j \in T^{(i)} \quad \text{для } j = m^{(i)}. \quad (7.27)$$

2) Для радиуса $r_*(T^{(i)}) = r_s(T^{(i)})$ или $r(T^{(i)})$ шестиугольника $T^{(i)}$ с номером $i = ap + b$, где $a = 0, 1, 2, \dots$ и $b = 0, \dots, p - 1$, выполняется следующее неравенство

$$r_*(T^{(i)}) \leq c_*(M) \varrho(\mathbf{A})^a r_*(T^{(b)}), \quad (7.28)$$

если собственные значения $\lambda_1 \neq \lambda_2$ у калибровочной матрицы $\mathbf{A}$ звезды v . Для начальных номеров b радиусы $r_*(T^{(b)})$ в (7.28) вычисляются по формуле (7.9). Здесь $\varrho(\mathbf{A})$ обозначает спектральный радиус калибровочной матрицы $\mathbf{A}$, и константы $c_*(M)$ определены в (7.7), (7.8).

3) Площадь $s(T^{(i)})$ шестиугольника $T^{(i)}$ находится по формуле

$$s(T^{(i)}) = |\det \mathbf{A}|^a s(T^{(b)}), \quad (7.29)$$

где определитель $\det \mathbf{A}$ удовлетворяет неравенствам $0 < |\det \mathbf{A}| < 1$ и площади $s(T^{(b)})$ для начальных номеров $b = 0, \dots, p - 1$ вычисляются по формуле (7.10).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) следует из теоремы 4.1 [15], а утверждения 2) и 3) доказаны в лемме 7.2.

8. Двумерная ядерная аппроксимация

8.1. Возвратные матрицы для кубических единиц и рекуррентные последовательности. Перепишем звезды $v^{(i)} = (v_0^{(i)}, v_1^{(i)}, v_2^{(i)})$ из (6.9) в виде столбцов $v^{(i)} = \begin{pmatrix} v_0^{(i)} & v_1^{(i)} & v_2^{(i)} \end{pmatrix}^T$. По определению имеем

$$v^{(0)} = \begin{pmatrix} v_0^{(0)} \\ v_1^{(0)} \\ v_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ -\alpha + e_1 \\ -\alpha + e_2 \end{pmatrix} \quad (8.1)$$

или, по-другому,

$$v^{(0)} = v = -\alpha E_0 + e_1 E_1 + e_2 E_2, \quad (8.2)$$

где

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

При этом α, e_1, e_2 в (8.2) рассматриваются как коэффициенты.

Пусть $i = ap + b$ с фиксированным $0 \leq b < p$. Определим сдвиги $\vec{j} \equiv j + b \pmod{p}$ и число $\vec{j}$ выбираем из интервала $[1, \dots, p]$; для порядковой матрицы $\mathbf{M} = D_p \cdots D_1$ из (7.16) с множителями $D_j = D_*^{k_j l_j}(v^{(j-1)})$ и $D_p = SD_*^{k_p l_p}(v^{(p-1)})$ соответственно для $j < p$ и $j = p$ полагаем $\vec{\mathbf{M}} = \vec{D}_p \cdots \vec{D}_1$, где $\vec{D}_j = D_{\vec{j}}$. Тогда в этих обозначениях из диаграммы (6.2) будет следовать формула

$$v^{(i)} = \vec{\mathbf{M}}^a v^{(b)}, \quad (8.3)$$

где

$$v^{(b)} = -\alpha E_0^{(b)} + e_1 E_1^{(b)} + e_2 E_2^{(b)}, \quad (8.4)$$

а столбцы $E_i^{(b)}$ вычисляются по формуле $E_i^{(b)} = D_*^{k_b l_b} \dots D_*^{k_1 l_1} E_i^{(0)}$ для $0 \leq b < p$. Здесь полагаем $E_i^{(0)} = E_i$ и $D_*^{k_j l_j}$ – порядковые матрицы из леммы 7.3. Тогда из (8.3) и (8.4) получаем

$$v^{(i)} = -\alpha \vec{M}^a E_0^{(b)} + e_1 \vec{M}^a E_1^{(b)} + e_2 \vec{M}^a E_2^{(b)}. \quad (8.5)$$

Вводя следующие обозначения:

$$\mathbf{Q}^a = \vec{M}^a E_0^{(b)}, \quad \mathbf{R}_1^a = \vec{M}^a E_1^{(b)}, \quad \mathbf{R}_2^a = \vec{M}^a E_2^{(b)}, \quad (8.6)$$

перепишем равенство (8.5) в виде

$$v^{(i)} = -\alpha \mathbf{Q}^a + e_1 \mathbf{R}_1^a + e_2 \mathbf{R}_2^a. \quad (8.7)$$

Пусть $\mathbf{1} = (1 \ 1 \ 1)$ – строка из (7.19). Тогда по теореме 7.1

$$v_{\min}^{(i)} = \mathbf{1} \cdot v^{(i)} = v_0^{(i)} + v_1^{(i)} + v_2^{(i)} \quad (8.8)$$

будет минимальным вектором (7.27), который в силу (8.7) можно записать в виде линейной комбинации

$$v_{\min}^{(i)} = -\alpha Q^a + e_1 R_1^a + e_2 R_2^a \quad (8.9)$$

с коэффициентами $Q^a = \mathbf{1} \cdot \mathbf{Q}^a$, $R_1^a = \mathbf{1} \cdot \mathbf{R}_1^a$, $R_2^a = \mathbf{1} \cdot \mathbf{R}_2^a$.

Из (8.6), (8.9) и предложения 7.1 следует, что Q^a , R_1^a , R_2^a являются рекуррентными последовательностями от параметра a (напомним, что параметр b фиксирован):

$$Q^{a+3} = b_2 Q^{a+2} + b_1 Q^{a+1} + b_0 Q^a, \quad R_k^{a+3} = b_2 R_k^{a+2} + b_1 R_k^{a+1} + b_0 R_k^a \quad (8.10)$$

для $k = 1, 2$. Здесь b_2 , b_1 , b_0 – коэффициенты характеристического многочлена $ch_{\vec{M}}(x) = ch_{\mathbf{M}}(x)$ порядковой матрицы $\mathbf{M}$, определенного в (7.20). Для последовательностей Q^a и R_k^a имеем следующие начальные условия:

$$\begin{aligned} Q^0 &= \mathbf{1} \cdot \mathbf{Q}^0 = \mathbf{1} \cdot E_0^{(b)}, & Q^1 &= \mathbf{1} \cdot \mathbf{Q}^1 = \mathbf{1} \cdot \vec{M} E_0^{(b)}, & Q^2 &= \mathbf{1} \cdot \mathbf{Q}^2 = \mathbf{1} \cdot \vec{M}^2 E_0^{(b)}, \\ R_k^0 &= \mathbf{1} \cdot \mathbf{R}_k^0 = \mathbf{1} \cdot E_k^{(b)}, & R_k^1 &= \mathbf{1} \cdot \mathbf{R}_k^1 = \mathbf{1} \cdot \vec{M} E_k^{(b)}, & R_k^2 &= \mathbf{1} \cdot \mathbf{R}_k^2 = \mathbf{1} \cdot \vec{M}^2 E_k^{(b)} \end{aligned} \quad (8.11)$$

для $k = 1, 2$.

8.2. Основная теорема для кубических единиц. Общая теорема о ядерной аппроксимации 7.1 в применении к кубическим единицам допускает следующую конкретизацию.

ТЕОРЕМА 8.1. 1. Для $i = ap + b$ и любого $0 \leq b < p$ вектор

$$v_{\min}^{(i)} = (-Q^a \alpha_1 + R_1^a, -Q^a \alpha_2 + R_2^a) \quad (8.12)$$

обладает минимальным свойством

$$v_{\min}^{(i)} \in T^{(i)} \quad \text{с минимальным целым } Q^a \geq 1. \quad (8.13)$$

Это означает, что ни одна из точек орбиты $x_j \equiv -j\alpha \bmod \mathbb{Z}^2$ не попадает

$$x_j \notin T^{(i)} \quad \text{для всех } 1 \leq j < Q^a \quad (8.14)$$

в ядро $T^{(i)}$ – шестиугольник из (7.1).

2. Площадь $s(T^{(i)})$ ядра $T^{(i)}$ находится по формуле

$$s(T^{(i)}) = |\det \mathbf{A}|^a s(T^{(b)}), \quad (8.15)$$

где $\det \mathbf{A}$ обозначает определитель матрицы $\mathbf{A}$, удовлетворяющий неравенствам $0 < |\det \mathbf{A}| < 1$, и площади $s(T^{(b)})$ для начальных номером $b = 0, \dots, p-1$ вычисляются по формуле (7.10).

3. Если у калибровочной матрицы $\mathbf{A}$ собственные значения $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то

$$|Q^a \alpha_1 - R_1^a| + |Q^a \alpha_2 - R_2^a| \leq c_s^{(b)} \varrho(\mathbf{A})^a, \quad (8.16)$$

где $c_s^{(b)} = c_s(\vec{M}) r_s(v_{\min}^{(b)})$.

4. Коэффициенты Q^a , R_1^a , R_2^a из (8.12) образуют рекуррентные последовательности от параметра $a = 0, 1, 2, \dots$ с уравнением (8.10) и начальными условиями (8.11).

5. Если $b = 0$, то начальные условия рекуррентных последовательностей Q^a , R_1^a , R_2^a принимают вид

$$\begin{aligned} Q^0 &= 3, & Q^1 &= \sum_{k,l} m_{kl}, & Q^2 &= \sum_{k,l} m_{kl}^2, \\ R_1^0 &= 1, & R_1^1 &= \sum_k m_{k2}, & R_1^2 &= \sum_k m_{k2}^2, \\ R_2^0 &= 1, & R_2^1 &= \sum_k m_{k3}, & R_2^2 &= \sum_k m_{k3}^2, \end{aligned} \quad (8.17)$$

где $\mathbf{M} = (m_{kl})_{3 \times 3}$ – порядковая матрица из (7.16) и $\mathbf{M}^2 = (m_{kl}^2)_{3 \times 3}$ – ее квадрат; длина же $r_s(v_{\min}^{(0)})$ минимального вектора (8.8), входящего в константу $c_s^{(0)} = c_s(\vec{M}) r_s(v_{\min}^{(0)})$ из неравенств (8.16), равна

$$r_s(v_{\min}^{(0)}) = |3\alpha_1 - 1| + |3\alpha_2 - 1|. \quad (8.18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Формула (8.12) для минимального вектора $v_{\min}^{(i)}$ вытекает из равенства (8.9), его свойство минимальности (8.13), (8.14) – из теоремы 7.1.

2. Формула (8.15) для площади шестиугольника $s(T^{(i)})$ была ранее доказана в лемме 7.2.

3. В левых частях неравенств (8.16) записана длина для минимального вектора $v_{\min}^{(i)}$ из (8.12) в s -метрике $|x|_s = |x_1| + |x_2|$. Поэтому указанные неравенства получаются как следствие из неравенств (7.28), в которых радиусы $r_*(T^{(i)})$ и $r_*(T^{(b)})$ заменены длинами минимальных векторов $r_s(v_{\min}^{(i)})$ и $r_s(v_{\min}^{(b)})$.

4. Рекуррентность коэффициентов Q^a , R_1^a , R_2^a из (8.12) была ранее доказана в (8.10) и (8.11).

5. Явные начальные условия (8.17) для рекуррентных последовательностей Q^a , R_1^a , R_2^a в случае $b = 0$ также вычисляются по формулам (8.11). По определению (8.8) начальный минимальный вектор $v_{\min}^{(0)} = v_0^{(0)} + v_1^{(0)} + v_2^{(0)} = v_0 + v_1 + v_2$ равен сумме лучей исходной звезды $v^{(0)} = v = \{v_0, v_1, v_2\}$. Поскольку по определению $v_0 = -\alpha$, $v_1 = e_1 - \alpha$, $v_2 = e_2 - \alpha$, то $v_{\min}^{(0)} = (1 - 3\alpha_1, 1 - 3\alpha_2)$, откуда вытекает равенство (8.18).

9. Числовые примеры

9.1. Кубическая единица Рози. В качестве (4.1) выберем многочлен

$$f(x) = x^3 + x^2 + x - 1, \quad (9.1)$$

неприводимый над $\mathbb{Q}$. Он имеет вещественный корень $\theta = 0.54\dots$. Поскольку $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \Delta^{\text{int}}$, где $\alpha_1 = \theta^2$, $\alpha_2 = \theta$, то $f(x)$ является Δ_{irr} -многочленом. Данное число θ , являющееся кубической единицей, ранее появлялось при построении двумерных квазипериодических разбиений Рози [17], [14].

Согласно (4.3) набору коэффициентов $a = (a_2, a_1, a_0) = (1, 1, -1)$ многочлена (9.1) отвечает унимодулярная матрица

$$M(a) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.2)$$

с определителем $\det M(a) = 1$. Так как коэффициенты $a = (a_2, a_1, a_0)$ удовлетворяют условиям $a_0 = -1$, $a_2 = 1$ и $a_1 \geq 1$ из предложения 4.1, то в силу (4.7) матрица $M(a)$ имеет разложение $M(a) = r_1 \cdot \underline{21} \cdot \underline{20}$, которое, вспоминая соглашение (4.5), можем записать в развернутом виде через симметрию треугольника и элементарные возвратные отображения

$$M(a) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \hat{r}_1 \cdot \hat{\delta}_2^{12} \cdot \hat{\delta}_2^{02}. \quad (9.3)$$

Поэтому по лемме 7.3 порядковая матрица $\mathbf{M}$, определенная в (7.16), будет равна

$$\mathbf{M} = R_1 \cdot D_2^{12} \cdot D_2^{02} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9.4)$$

Для матрицы $\mathbf{M}$ найдем ее характеристический многочлен $ch_{\mathbf{M}}(x) = x^3 - b_2x^2 - b_1x - b_0$ из (7.20). В силу (9.4) будем иметь

$$ch_{\mathbf{M}}(x) = \det \begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ -1 & x & -1 \\ 0 & -1 & x-1 \end{pmatrix} = x^3 - x^2 - x - 1 \quad (9.5)$$

и, значит, коэффициенты у многочлена $ch_{\mathbf{M}}(x)$ соответственно равны $b_2 = 1$, $b_1 = 1$, $b_0 = 1$.

Фиксируем параметр $b = 0$. Тогда из теоремы 8.1 следует, что Q^a , R_1^a , R_2^a являются рекуррентными последовательностями с одним и тем же уравнением

$$Q^{a+3} = Q^{a+2} + Q^{a+1} + Q^a, \quad R_k^{a+3} = R_k^{a+2} + R_k^{a+1} + R_k^a \quad (9.6)$$

для $k = 1, 2$. Последовательности (9.6) называются *рекуррентными последовательностями Трибоначчи*.

Принимая во внимание формулу (9.4) для порядковой матрицы $\mathbf{M}$ и затем вычисляя ее квадрат

$$\mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

по формулам (8.17) находим для рекуррентных последовательностей (9.6) начальные условия

$$\begin{aligned} Q^0 &= 3, & Q^1 &= \sum_{k,l} m_{kl} = 5, & Q^2 &= \sum_{k,l} m_{kl}^2 = 9, \\ R_1^0 &= 1, & R_1^1 &= \sum_k m_{k2} = 1, & R_1^2 &= \sum_k m_{k2}^2 = 3, \\ R_2^0 &= 1, & R_2^1 &= \sum_k m_{k3} = 3, & R_2^2 &= \sum_k m_{k3}^2 = 5. \end{aligned} \quad (9.7)$$

Последовательности (9.6) вместе с начальными условиями (9.7) составляют единую рекуррентную последовательность

$$R_1^a, R_2^a, Q^a: \quad 1, 1, 3, 5, 9, 17, 31, 57, 105, \dots \quad (9.8)$$

Здесь последовательность R_1^a начинается с первого элемента из (9.8), R_2^a – со второго, а Q^a – с третьего.

Калибровочная матрица $\mathbf{A} = A^{(p)}\check{r}_2$ из (6.8) с симметрией поворота $\check{r}_2 = \check{r}_1^{-1}$ имеет два комплексно сопряженных собственных значения $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \bar{\lambda}_1$. Поэтому можно применить неравенство (8.16) из теоремы 7.1. После вычислений приходим к следующей совместной аппроксимации с экспоненциальной оценкой для вещественного корня $\theta: \theta^3 + \theta^2 + \theta - 1 = 0$, и его квадрата θ^2 .

Если θ – вещественный корень многочлена (9.1), то выполняется следующее неравенство

$$|Q^a\theta^2 - R_1^a| + |Q^a\theta - R_2^a| \leq c_s^{(0)}\varrho(\mathbf{A})^a \quad (9.9)$$

для всех $a = 0, 1, 2, \dots$. В неравенстве (9.9) коэффициенты R_1^a, R_2^a, Q^a образуют рекуррентную последовательность (9.8), константа $c_s^{(0)} < 4$ определена в (8.16) и спектральный радиус $\varrho(\mathbf{A}) < 3/4$.

9.2. Кубические корни. На примере кубических корней $\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}$ покажем, как, используя предыдущий метод, можно неравенства (8.16) перенести на другие числа кубического поля $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, отличные от единиц.

Сначала заменим корни $\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}$ точкой $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ с координатами $\alpha_1 = \sqrt[3]{4} - 1, \alpha_2 = \sqrt[3]{2} - 1$. Выбранная точка α уже будет принадлежать треугольной области Δ^{int} . В рассматриваемом случае нам непосредственно не дан многочлен $f(x)$ из (9.1). Поэтому перейдем сразу к аналогичной (9.2) матрице

$$M(a) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.10)$$

Она является унимодулярной матрицей с определителем $\det M(a) = 1$ и обладает свойством (4.4), т.е. $M(a)\hat{\alpha} = \lambda\hat{\alpha}$, где $\hat{\alpha} = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad 1)^T$ и собственное значение $\lambda = \alpha_2 = \sqrt[3]{2} - 1$. Теперь нужно проверить, что $M(a)$ будет возвратной матрицей, т.е. что она допускает разложение в произведение симметрии треугольника (3.15), (3.16) и элементарных возвратных матриц (3.14). Действительно, такое разложение существует:

$$M(a) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \hat{r}_1 \cdot \hat{\delta}_2^{12} \cdot \hat{\delta}_2^{02} \cdot (\hat{\delta}_1^{12})^2. \quad (9.11)$$

Оно аналогично разложению (9.3) и отличается от него последним множителем $(\hat{\delta}_1^{12})^2$. Используя разложение (9.11) и применяя лемму 7.3, находим порядковую матрицу (7.16):

$$\mathbf{M} = R_1 \cdot D_2^{12} \cdot D_2^{02} \cdot (D_1^{12})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad (9.12)$$

с характеристическим многочленом $ch_{\mathbf{M}}(x) = x^3 - b_2x^2 - b_1x - b_0$ из (7.20), равным

$$ch_{\mathbf{M}}(x) = \det \begin{pmatrix} x & -2 & -1 \\ -1 & x-2 & -1 \\ 0 & -3 & x-1 \end{pmatrix} = x^3 - 3x^2 - 3x - 1. \quad (9.13)$$

Поэтому коэффициенты у многочлена $ch_{\mathbf{M}}(x)$ соответственно равны $b_2 = 3, b_1 = 3, b_0 = 1$.

Снова ради простоты фиксируем параметр $b = 0$ и применим теорему 8.1 для нахождения рекуррентных последовательностей Q^a , R_1^a , R_2^a , которые в силу (9.13) имеют вид

$$Q^{a+3} = 3Q^{a+2} + 3Q^{a+1} + Q^a, \quad R_k^{a+3} = 3R_k^{a+2} + 3R_k^{a+1} + R_k^a \quad (9.14)$$

для $k = 1, 2$. Чтобы определить начальные условия для последовательностей Q^a , R_1^a , R_2^a , нам потребуется знать квадрат порядковой матрицы

$$\mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \\ 3 & 9 & 4 \end{pmatrix}. \quad (9.15)$$

Используя (9.12) и (9.15), по формулам (8.17) находим для последовательностей Q^a , R_1^a , R_2^a начальные условия:

$$\begin{aligned} Q^0 &= 3, & Q^1 &= \sum_{k,l} m_{kl} = 11, & Q^2 &= \sum_{k,l} m_{kl}^2 = 43, \\ R_1^0 &= 1, & R_1^1 &= \sum_k m_{k2} = 7, & R_1^2 &= \sum_k m_{k2}^2 = 25, \\ R_2^0 &= 1, & R_2^1 &= \sum_k m_{k3} = 3, & R_2^2 &= \sum_k m_{k3}^2 = 11. \end{aligned} \quad (9.16)$$

Теперь вернемся к интересующим нас корням $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{4}$. Покажем, что имеют место следующие неравенства:

$$|Q^a \sqrt[3]{4} - R_1'^a| + |Q^a \sqrt[3]{2} - R_2'^a| \leq c_s^{(0)} \varrho(\mathbf{A})^a \quad (9.17)$$

для всех $a = 0, 1, 2, \dots$ с константой $c_s^{(0)} < 6$ и $\varrho(\mathbf{A}) < 0.51$. Здесь коэффициенты Q^a , $R_1'^a$, $R_2'^a$ для $a = 0, 1, 2, \dots$ являются рекуррентными последовательностями с уравнением (9.14) и начальными условиями

$$\begin{aligned} Q^0 &= 3, & Q^1 &= 11, & Q^2 &= 43, \\ R_1'^0 &= 4, & R_1'^1 &= 18, & R_1'^2 &= 68, \\ R_2'^0 &= 4, & R_2'^1 &= 14, & R_2'^2 &= 54. \end{aligned} \quad (9.18)$$

Действительно, по (6.8) убеждаемся, что калибровочная матрица $\mathbf{A} = A^{(p)}\tilde{r}_2$ снова имеет два комплексно сопряженных собственных значения $\lambda_1 \neq \lambda_2$, и поэтому в теореме 7.1 нужно применить неравенство (8.16) с константой $c_s^{(0)} < 6$ и $\varrho(\mathbf{A}) < 0.51$, из которого будет следовать неравенство (9.17). Вспоминая, что по условию $\alpha_1 = \sqrt[3]{4} - 1$ и $\alpha_2 = \sqrt[3]{2} - 1$, можем неравенство (8.16) переписать в виде (9.17) с новыми коэффициентами Q^a , $R_1'^a = Q^a + R_1^a$ и $R_2'^a = Q^a + R_2^a$. Ясно, что эти коэффициенты снова образуют рекуррентные последовательности с уравнением (9.14), но уже с начальными условиями (9.18), получающимися из условий (9.16).

Лагариас [18] обнаружил связь наилучших приближений с рекуррентными последовательностями. В нашем случае также появляются рекуррентные последовательности (8.10), (9.6), (9.14) как следствие теоремы 7.1, когда переходим от ядерных $T^{(i)}$ -норм (гексагональных норм), например, к ромбической норме $|x|_s = |x_1| + |x_2|$, естественно, с потерей свойства быть наилучшим приближением. При указанном переходе исчезает “геометрия” наилучших приближений.

После того как рекуррентные последовательности найдены, по ним можно оценить скорость приближения (8.16). Так как рассматриваемое здесь кубическое поле $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ является комплексным, то его основная единица будет числом Пизо, поэтому из (9.14) и (9.18) вытекает оценка (9.17), но с большей константой $c_s^{(0)}$. Именно такие иррациональности были исследованы в [10]–[12]. Среди описанных в предложениях 4.1 и 4.2 полей $\mathbb{Q}(\theta)$ также содержатся вещественные кубические поля. Для них непосредственный переход от рекуррентных

последовательностей к неравенствам (8.16) уже не будет столь очевидным. Переход же от теоремы 7.1 к неравенствам (8.16) продолжает работать и для вещественных полей.

Те же аргументы, что и выше, позволяют заменить оценку (9.17) неравенством

$$\left| \sqrt[3]{4} - \frac{R_1^a}{Q^a} \right| + \left| \sqrt[3]{2} - \frac{R_2^a}{Q^a} \right| \leq \frac{c}{(Q^a)^{3/2}} \quad (9.19)$$

для всех $a = 0, 1, 2, \dots$ с константой $c > 0$, не зависящей от a . Если использовать, скажем, для числа $\sqrt[3]{2}$, разложение в обычную цепную дробь, то числители и знаменатели подходящих дробей будут вычисляться по рекуррентному соотношению второго порядка с переменными коэффициентами. Поскольку для кубических иррациональностей полные разложения в цепные дроби не известны, то на этом пути удается находить лишь конечный набор неравенств. Обрезая же двумерную аппроксимацию (9.19), можно получить одномерную аппроксимацию, например, для кубического корня $\sqrt[3]{2}$:

$$\left| \sqrt[3]{2} - \frac{R_2^a}{Q^a} \right| \leq \frac{c}{(Q^a)^{3/2}}. \quad (9.20)$$

В нашем приближении (9.19) используется рекуррентное соотношение (9.14) более высокого, третьего, порядка, но уже с постоянными коэффициентами, что позволяет получать бесконечные сходящиеся последовательности приближений (9.20). Другим методом разложение в цепную дробь для $\sqrt[3]{2}$ было получено в [19] без оценки скорости приближения. Кроме того, интересно сравнить нашу оценку (9.20) с неравенством Бейкера [20]

$$\left| \sqrt[3]{2} - \frac{P}{Q} \right| > \frac{10^{-6}}{Q^3},$$

имеющим место для всех целых чисел P и Q .

Список литературы

- [1] В. Г. Журавлев, “Дифференцирование индуцированных разбиений тора и многомерные приближения алгебраических чисел”, *Аналитическая теория чисел и теория функций*. 31, Зап. научн. сем. ПОМИ, **445**, ПОМИ, СПб., 2016, 33–92.
- [2] А. Я. Хинчин, *Цепные дроби*, Наука, М., 1978.
- [3] Z. Coelho, A. Lopes, L. F. Da Rocha, “Absolutely continuous invariant measures for a class of affine interval exchange maps”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **123**:11 (1995), 3533–3542.
- [4] V. G. Zhuravlev, A. V. Shutov, *Derivatives of Circle Rotations and Similarity of Orbits*, Max Planck Institut für Mathematik, Preprint Ser. 62, 2004, 11 pp.
- [5] M. Furukado, Sh. Ito, A. Saito, J. Tamura, Sh. Yasutomi, “A new multidimensional slow continued fraction algorithm and stepped surface”, *Exp. Math.*, **23**:4 (2014), 390–410.
- [6] M. Abrate, S. Barbero, U. Cerruti, N. Murru, “Periodic representations for cubic irrationalities”, *Fibonacci Quart.*, **50**:3 (2012), 252–264.
- [7] N. Murru, “On the periodic writing of cubic irrationals and a generalization of Rédei functions”, *Int. J. Number Theory*, **11**:3 (2015), 779–799.
- [8] Sh. Ito, J. Fujii, H. Higashino, Sh. Yasutomi, “On simultaneous approximation to (α, α^2) with $\alpha^3 + k\alpha - 1 = 0$ ”, *J. Number Theory*, **99**:2 (2003), 255–283.
- [9] Q. Wang, K. Wang, Z. Dai, “On optimal simultaneous rational approximation to $(\omega, \omega^2)^\tau$ with ω being some kind of cubic algebraic function”, *J. Approx. Theory*, **148**:2 (2007), 194–210.
- [10] P. Hubert, A. Messaoudi, “Best simultaneous Diophantine approximations of Pisot numbers and Rauzy fractals”, *Acta Arith.*, **124**:1 (2006), 1–15.

- [11] N. Chevallier, “Best simultaneous Diophantine approximations of some cubic numbers”, *J. Théor. Nombres Bordeaux*, **14**:2 (2002), 403–414.
- [12] N. Chevallier, “Best simultaneous Diophantine approximations and multidimensional continued fraction expansions”, *Mosc. J. Comb. Number Theory*, **3**:1 (2013), 3–56.
- [13] В. Г. Журавлев, “Делящиеся разбиения тора и множества ограниченного остатка”, *Аналитическая теория чисел и теория функций*. 30, Зап. научн. сем. ПОМИ, **440**, ПОМИ, СПб., 2015, 99–122.
- [14] В. Г. Журавлев, “Разбиения Розы и множества ограниченного остатка на торе”, *Труды по теории чисел*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **322**, ПОМИ, СПб., 2005, 83–106.
- [15] В. Г. Журавлев, “Двумерные приближения методом делящихся торических разбиений”, *Аналитическая теория чисел и теория функций*. 30, Зап. научн. сем. ПОМИ, **440**, ПОМИ, СПб., 2015, 81–98.
- [16] В. Г. Журавлев, “Двумерные приближения кубических иррациональностей”, 2016 (в печати).
- [17] G. Rauzy, “Nombres algébriques et substitutions”, *Bull. Soc. Math. France*, **110**:2 (1982), 147–178.
- [18] J. Lagarias, “Best simultaneous Diophantine approximations. I. Groth rates of best approximation denominators”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **272**:2 (1982), 545–554.
- [19] P. Liardet, P. Stambul, “Algebraic computations with continued fractions”, *J. Number Theory*, **73**:1 (1998), 92–121.
- [20] A. Baker, “Rational approximations to $\sqrt[3]{2}$ and other algebraic numbers”, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, **15** (1964), 375–383.

О способе равномерного упорядочения вещественных алгебраических чисел

Д. Коледа

Институт математики НАН Беларуси

koledad@rambler.ru

1. Введение

Статья посвящена распределению алгебраических чисел на вещественной прямой и основана на докладе автора на конференции памяти Анатолия Алексеевича Карацубы в январе 2016 г.

Чтобы избежать разночтений начнем с основных определений и соглашений, которые используются при изложении.

Под *целочисленным многочленом* будем понимать многочлен с целыми коэффициентами. *Алгебраическим числом* называется число α , для которого существует ненулевой целочисленный многочлен p такой, что $p(\alpha) = 0$. *Минимальным многочленом алгебраического числа α* будем называть целочисленный многочлен p наименьшей степени со взаимно простыми коэффициентами и положительным старшим коэффициентом такой, что $p(\alpha) = 0$. Различные алгебраические числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ называются (алгебраически) *сопряженными*, если они имеют один и тот же минимальный многочлен.

Пусть

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0.$$

Высотой многочлена $H(p)$ будем называть величину

$$H(p) := \max_{0 \leq i \leq n} |a_i|.$$

Степень алгебраического числа $\deg \alpha$ определяется как степень его минимального многочлена, а *высота $H(\alpha)$* – как высота его минимального многочлена.

В статье будем полагать, что степень алгебраических чисел и многочленов фиксирована и равна n ; высоты алгебраических чисел и многочленов ограничены сверху параметром Q ; асимптотические формулы рассматриваются при $Q \rightarrow +\infty$; неявные постоянные не зависят от Q , но могут зависеть от n .

Необходимо отметить, что кроме цитируемых ниже в обзоре работ есть большое количество публикаций, посвященных подсчету числа элементов в специальных классах алгебраических чисел, например, алгебраических чисел на комплексной плоскости, целых алгебраических чисел и т.д. Зачастую в подобных результатах используются другие высоты, в частности, так называемая высота Вейля. В нашем обзоре мы ограничимся исключительно распределением вещественных алгебраических чисел относительно равномерной высоты.

1.1. Рациональные числа. Наипростейшими алгебраическими числами являются числа рациональные. С ними связано множество классических задач, большинство которых формулируется в терминах последовательностей (или так называемых рядов) Фарей. *Последовательностью Фарей порядка Q* называется упорядоченная по возрастанию последовательность

несократимых рациональных дробей со знаменателем не более Q , лежащих на $[0, 1]$:

$$\mathcal{F}_Q := \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, 0 \leq a \leq b \leq Q, \gcd(a, b) = 1 \right\}.$$

В 1963 г. Вальфиш [1] доказал, что

$$\#\mathcal{F}_Q = \frac{3}{\pi^2} Q^2 + O(Q(\log Q)^{2/3}(\log \log Q)^{4/3}). \quad (1)$$

Известно, что классическая последовательность Фарея распределена равномерно на $[0, 1]$, т.е. для любого промежутка $I \subseteq [0, 1]$ верно равенство

$$\lim_{Q \rightarrow \infty} \frac{\#(\mathcal{F}_Q \cap I)}{\#\mathcal{F}_Q} = |I|.$$

Доказательство этого факта можно найти, например, в [2]–[4]. Кроме того, распределение последовательностей Фарея тесно связано с гипотезой Римана [5].

«Неидеальность» распределения Фареевских последовательностей (по сравнению с непрерывным равномерным на $[0, 1]$ распределением) характеризуется отклонением (discrepancy), определяемым как

$$D_Q := \sup_{\alpha \in [0, 1]} \left| \frac{\#(\mathcal{F}_Q \cap [0, \alpha])}{\#\mathcal{F}_Q} - \alpha \right|.$$

В 1973 г. Нидэррайтер [6] установил, что $D_Q \asymp Q^{-1}$. В 1999 г. Дресс [7] доказал точное равенство $D_Q = Q^{-1}$.

Много интересных фактов о последовательностях Фарея можно найти в обзоре [8].

1.2. Алгебраические числа на вещественной прямой. В 1970 г. Бэйкер и Шмидт [9] ввели понятие регулярной системы и установили, что алгебраические числа образуют регулярную систему (параметры этой системы были не оптимальны).

За результатами [9] последовал ряд их усилений в работах Берника [10], [11], Берника и Додсона [12], а в 1999 г. Бересневич [13] доказал регулярность алгебраических чисел с неулучшаемыми параметрами.

Относительно простыми словами без потери строгости результат Бересневича можно сформулировать следующим образом.

ТЕОРЕМА 1 [13]. *Существует постоянная c_n , зависящая только от n такая, что на любом промежутке $I \subseteq [-1, 1]$ для всех достаточно больших $Q \in \mathbb{N}$ существует не менее*

$$c_n |I| Q^{n+1}$$

алгебраических чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ степени не более n и высоты не более Q , таких что

$$|\alpha_i - \alpha_j| \geq Q^{-n-1}, \quad 1 \leq i < j \leq k.$$

Общий обзор результатов о регулярных системах алгебраических чисел и их приложениях к проблемам вычисления размерности Хаусдорфа можно найти в [12] и [14].

В 1971 г. Браун и Малер [15] предложили обобщение классических последовательностей Фарея на алгебраические числа произвольной степени: *последовательностью Фарея степени n порядка Q* называется последовательность всех вещественных корней всех целочисленных многочленов степени n и высоты не более Q .

В 1985 г. К. Малер в письме В.Г. Спринджуку писал, что даже для второй степени не известно, как распределены алгебраические числа.

Пусть $\mathbb{A}_n$ – множество алгебраических чисел степени n . Зафиксируем $n \geq 2$ и рассмотрим множество $I \subset \mathbb{R}$. Обозначим через $\Phi(Q, I)$ количество алгебраических чисел $\alpha \in I$ с $\deg(\alpha) = n$ и $H(\alpha) \leq Q$:

$$\Phi(Q, I) = \#\{\alpha \in \mathbb{A}_n \cap I : H(\alpha) \leq Q\}. \quad (2)$$

При $n = 2$ далее в формулах появляется дополнительный множитель $\log Q$, поэтому для краткости используется символ $l(n)$, определенный как

$$l(n) := \begin{cases} 1, & n \leq 2, \\ 0, & n \geq 3. \end{cases}$$

В серии работ [16]–[18] была доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $n \in \mathbb{N}$ фиксировано. Пусть $I \subseteq \mathbb{R}$ – промежуток. Тогда при $Q \rightarrow \infty$ верна формула

$$\Phi(Q, I) = \frac{Q^{n+1}}{2\zeta(n+1)} \int_I \phi_n(x) dx + O(Q^n \log^{l(n)} Q), \quad (3)$$

где $\zeta(\cdot)$ – дзета-функция Римана, а функция ϕ_n задается формулой

$$\phi_n(x) = \int_{B_n(x)} \left| \sum_{k=1}^n kt_k x^{k-1} \right| dt_1 \dots dt_n \quad (4)$$

с интегрированием по области

$$B_n(x) = \left\{ (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n : \max_{1 \leq k \leq n} |t_k| \leq 1, \left| \sum_{k=1}^n t_k x^k \right| \leq 1 \right\}.$$

В (3) неявная постоянная в символе $O(\cdot)$ зависит только от n .

При этом для бесконечного числа промежутков $I = I(Q)$ порядок остаточного члена в (3) не менее чем Q^n .

Кроме того, функция $\phi_n(x)$ удовлетворяет следующим функциональным уравнениям:

$$\phi_n(-x) = \phi_n(x), \quad \phi_n\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 \phi_n(x). \quad (5)$$

При $|x| \leq 1 - 1/\sqrt{2}$ интеграл (4) равен (см. [18])

$$\phi_n(x) = \frac{2^{n-1}}{3} \left(3 + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)^2 x^{2k} \right).$$

Функция ϕ_n с точностью до постоянного множителя совпадает с плотностью распределения вещественных нулей случайного многочлена с независимыми равномерно распределенными на $[-1, 1]$ коэффициентами [19].

Для $n = 1$, т.е. для рациональных чисел, как уже отмечалось выше, асимптотическая формула (3) была по существу известна, с тем лишь отличием, что в классических результатах рассматривались $I \subseteq [0, 1]$. Функция $\phi_1(x)$ имеет вид

$$\phi_1(x) = \frac{1}{\max(1, x^2)}.$$

Как следствие из результатов Нидэррайтера [6] и Дресса [7] можно доказать следующее утверждение [18].

ТЕОРЕМА 3 (см. раздел 4 в [18]). Пусть $n = 1$. Тогда

$$\sup_{I \subseteq \mathbb{R}} \left| \frac{\Phi(Q, I)}{\Phi(Q, \mathbb{R})} - \frac{1}{4} \int_I \phi_1(x) dx \right| \asymp \frac{1}{Q}, \quad (6)$$

где точная верхняя грань берется по всем промежуткам вещественной оси, а неявная постоянная в символе $\asymp$ абсолютна.

Отсюда, учитывая оценку (1) количества дробей Фарея и равенство $\Phi(Q, \mathbb{R}) = 4\#\mathcal{F}_Q - 5$ (при $n = 1$), можно получить более точную оценку остаточного члена в (3).

ТЕОРЕМА 4 [18]. При $n = 1$ остаточный член в (3) имеет вид

$$O\left(Q(\log Q)^{2/3}(\log \log Q)^{4/3} \int_I \frac{dx}{\max(1, x^2)} + Q\right), \quad (7)$$

где неявная постоянная абсолютна.

Отметим, что интеграл в (7) стремится к нулю при $|I| \rightarrow 0$, соответственно для коротких промежутков логарифм фактически исчезает.

Похожее уточнение доказано [20] и для алгебраических чисел второй степени.

ТЕОРЕМА 5 [20]. При $n = 2$ остаточный член в (3) имеет вид

$$O\left(Q^2 \log Q \int_I \frac{dx}{\max(1, x^2)} + Q^2\right),$$

где неявная постоянная абсолютна.

1.3. Сопряженные алгебраические числа. Уже для второй степени возникает задача о совместном распределении вещественных алгебраически сопряженных чисел.

В 2010 г. Бересневич, Берник и Гётце [21] установили оценку снизу для числа пар близких сопряженных вещественных алгебраических чисел n -й степени на заданном промежутке.

ТЕОРЕМА 6 [21]. Для $n \geq 2$ и $0 < \gamma \leq (n+1)/3$ при достаточно больших Q в любом промежутке $I \subset [-1/2, 1/2]$ существует не менее

$$\frac{1}{2} Q^{n+1-2\gamma} |I|$$

вещественных алгебраических чисел α степени $\deg(\alpha) = n$ с высотой $H(\alpha) \asymp_n Q$, у каждого из которых есть хотя бы одно вещественное сопряженное алгебраическое число α^* такое, что

$$|\alpha - \alpha^*| \asymp_n Q^{-\gamma}.$$

Для формулировки следующей теоремы потребуются некоторые дополнительные обозначения.

Пусть $\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$. Элементарные симметричные многочлены от $\mathbf{x}$ степени m будем обозначать так:

$$\sigma_m(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1, & \text{если } m = 0, \\ \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq k} x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_m}, & \text{если } 1 \leq m \leq k, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Пусть $\mathbb{A}_n^{(k)}$ есть множество k -векторов $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$, где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ – вещественные сопряженные алгебраические числа степени n , т.е. различные корни одного и того же неприводимого над $\mathbb{Q}$ целочисленного многочлена степени n .

Пусть $B \subset \mathbb{R}^k$. Обозначим через $\Phi_k(Q, B)$ количество векторов из $\mathbb{A}_n^{(k)} \cap B$ с высотой координат $\leq Q$:

$$\Phi_k(Q, B) = \#\{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{A}_n^{(k)} \cap B : H(\alpha_i) \leq Q\}.$$

В 2015 г. Гётце, Запорожец и Коледа доказали следующую теорему.

ТЕОРЕМА 7 [22]. Пусть B – ограниченная область в $\mathbb{R}^k$ с границей, состоящей из конечно-го числа t алгебраических поверхностей, максимальная степень которых не превосходит d . Тогда

$$\Phi_k(Q, B) = \frac{(2Q)^{n+1}}{2\zeta(n+1)} \int_B \rho_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + O\left(Q^n \log^{l(n)} Q\right), \quad Q \rightarrow \infty, \quad (8)$$

где функция ρ_k определяется формулой

$$\rho_k(\mathbf{x}) = 2^{-n-1} \prod_{1 \leq i < j \leq k} |x_i - x_j| \int_{D_{\mathbf{x}}} \prod_{i=1}^k \left| \sum_{j=0}^{n-k} t_j x_i^j \right| dt_0 \dots dt_{n-k} \quad (9)$$

с интегрированием по области $D_{\mathbf{x}}$, заданной как

$$D_{\mathbf{x}} = \left\{ (t_0, \dots, t_{n-k}) \in \mathbb{R}^{n-k+1} : \max_{0 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^{i-j} \sigma_{i-j}(\mathbf{x}) t_j \right| \leq 1 \right\}.$$

Неявная постоянная в остаточном члене в (8) зависит только от n , t и d .

Функция (9) совпадает с корреляционной функцией корней случайного многочлена с независимыми равномерно распределенными на $[-1, 1]$ коэффициентами (см. [19] и [23]).

В двух частных случаях формула (9) существенно упрощается:

а) при $k = 1$ формула (9) фактически превращается в (4) и описывает распределение алгебраических чисел на вещественной прямой, т.е.

$$\rho_1(x) = 2^{-n-1} \phi_n(x);$$

б) при $k = n$ теорема 7 описывает распределение вполне вещественных алгебраических чисел; при этом функция ρ_n принимает вид

$$\rho_n(\mathbf{x}) = \frac{2^{-n}}{(n+1)} \left(\frac{1}{\max_{0 \leq i \leq n} |\sigma_i(\mathbf{x})|} \right)^{n+1} \prod_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j|.$$

Функция ρ_k удовлетворяет следующим функциональным уравнениям:

а) для любой перестановки s длины k

$$\rho_k(x_{s(1)}, x_{s(2)}, \dots, x_{s(k)}) = \rho_k(\mathbf{x});$$

б) для любых $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$

$$\rho_k(-\mathbf{x}) = \rho_k(\mathbf{x});$$

в) для любых $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ с ненулевыми координатами

$$\rho_k(x_1^{-1}, x_2^{-1}, \dots, x_k^{-1}) = \rho_k(\mathbf{x}) \prod_{i=1}^k x_i^2.$$

2. О равномерном упорядочении

На конференции после доклада автора Николай Германович Мошевитин задал вопрос: известно ли автору какое-то конкретное упорядочение алгебраических чисел, чтобы полученная последовательность была распределена равномерно? Из общих соображений можно доказать, что любую всюду плотную последовательность можно переупорядочить так, чтобы получилось равномерное распределение [4; § 2.4]. Однако в данном случае естественно потребовать от такого упорядочения, чтобы оно учитывало внутренние свойства алгебраических чисел, в частности единообразно действовало на сопряженные алгебраические числа. Предложенное ниже упорядочение не согласовано с алгебраическим сопряжением, хотя существенно опирается на статистические свойства вещественных алгебраических чисел относительно равномерной высоты.

Пусть ψ – положительная функция, удовлетворяющая условию Липшица

$$|\psi(x) - \psi(y)| \leq C|x - y| \quad \text{для всех } x, y \in I_0 = [-R, R],$$

где $R \geq 1$ – фиксированное число. Введем обозначение

$$\Phi^*(Q, I) = \#\{\alpha \in \mathbb{A}_n \cap I : \psi(\alpha)H(\alpha) \leq Q\}.$$

Ниже мы покажем, как с помощью выбора функции ψ можно добиться равномерности распределения чисел, учтенных в $\Phi^*(Q, I)$. А именно, докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $\psi(x) = \phi_n(x)^{1/(n+1)}$, где ϕ_n определена в (4). Тогда

$$\Phi^*(Q, I) = \frac{Q^{n+1}}{2\zeta(n+1)}|I| + O(R^{n/(n+1)}Q^{n+1/2} \log^{l(n)/2} Q \cdot |I| + R^{2n/(n+1)}Q^n \log^{l(n)} Q), \quad (10)$$

где неявная постоянная в символе $O(\cdot)$ зависит только от n .

ЗАМЕЧАНИЕ. Функцию $\psi(\alpha)H(\alpha)$ можно было бы толковать как некоторую «высоту» алгебраического числа α , однако при таком определении функции ψ , как в теореме 8, сопряженные алгебраические числа, если у них разные абсолютные величины, будут иметь, вообще говоря, разные «высоты».

Для доказательства теоремы 8 нам потребуется пара вспомогательных утверждений. Необходимые факты о ϕ_n для удобства соберем в одну лемму.

ЛЕММА 1. Функция ϕ_n , определенная в (4), обладает следующими свойствами:

I) для всех $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$\frac{C_1}{\max(1, x^2)} \leq \phi_n(x) \leq \frac{C_2}{\max(1, x^2)},$$

где C_1 и C_2 – положительные постоянные, зависящие только от n :

$$C_1 = \min_{x \in [0,1]} \phi_n(x), \quad C_2 = \max_{x \in [0,1]} \phi_n(x);$$

II) для любых $x, y \in \mathbb{R}$ таких, что $0 \leq y - x \leq 1$, и любого $\theta \in [x, y]$ верно

$$|\phi_n(x) - \phi_n(y)| \leq \frac{C_3|x - y|}{\max(1, |\theta|^3)},$$

где C_3 – положительная постоянная, которая зависит только от n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Несложно заметить, что функция ϕ_n непрерывна и ограничена на $[0, 1]$, и, следовательно, достигает там своих максимального и минимального значений. Из уравнений (5) сразу же получаем свойство I).

Докажем II). Обозначим для краткости $F(\mathbf{t}; x) = |\sum_{k=1}^n kt_k x^{k-1}|$. Тогда

$$\phi_n(x) - \phi_n(y) = \int_{B_n(x)} (F(\mathbf{t}; x) - F(\mathbf{t}; y)) dt + \int_{B_n(x)} F(\mathbf{t}; y) dt - \int_{B_n(y)} F(\mathbf{t}; y) dt.$$

Пусть $x, y \in [-2, 2]$. Нетрудно показать, что для любых $\mathbf{t} \in [-1, 1]^n$ функция $F(\mathbf{t}; x)$ ограничена постоянной величиной, зависящей только от n , и

$$|F(\mathbf{t}; x) - F(\mathbf{t}; y)| \leq C|x - y|,$$

где C – постоянная, зависящая только от n .

Также можно показать, что при $x, y \in [-2, 2]$ мера симметрической разности множеств $B_n(x)$ и $B_n(y)$ удовлетворяет неравенству

$$\text{mes}_n(B_n(x) \ominus B_n(y)) \leq C'|x - y|,$$

где C' – постоянная, зависящая только от n .

Собирая все вместе, получаем при $x, y \in [-2, 2]$

$$|\phi_n(x) - \phi_n(y)| \leq \tilde{C}|x - y|$$

для некоторой зависящей только от n постоянной $\tilde{C}$.

Пусть теперь $x, y \in [1, +\infty)$. Тогда, пользуясь вторым уравнением в (5), получаем

$$\begin{aligned} |\phi_n(x) - \phi_n(y)| &= \left| \frac{1}{x^2} \phi_n\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{y^2} \phi_n\left(\frac{1}{y}\right) \right| \\ &\leq \frac{1}{x^2} \left| \phi_n\left(\frac{1}{x}\right) - \phi_n\left(\frac{1}{y}\right) \right| + \phi_n\left(\frac{1}{y}\right) \left| \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \right| \leq |x - y| \left(\frac{\tilde{C}}{x^3 y} + C_2 \frac{(x + y)}{(xy)^2} \right). \end{aligned}$$

Объединяя оба случая в одном неравенстве и подбирая постоянную C_3 , получаем свойство II). Отметим, что такая свобода в выборе промежуточной точки θ возможна благодаря ограничению $|x - y| \leq 1$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть $I \subset \mathbb{R}$ – конечный промежуток. Существует такое $\xi \in I$, что справедливо равенство

$$\Phi^*(Q, I) = \Phi\left(\frac{Q}{\psi(\xi)}, I\right) + O\left(\frac{Q^n}{\psi(\xi)^n} \log^{l(n)} Q\right),$$

где функция $\Phi(Q, I)$ определена в (2); неявная постоянная в символе $O(\cdot)$ зависит только от n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Скобками $\lfloor \cdot \rfloor$ будем обозначать округление до целого с недостатком. По определению $H(\alpha) \in \mathbb{N}$.

Пусть $m = \inf_{x \in I} \psi(x)$, $M = \sup_{x \in I} \psi(x)$. Тогда

$$\Phi\left(\frac{Q}{M}, I\right) \leq \Phi^*(Q, I) \leq \Phi\left(\frac{Q}{m}, I\right).$$

а) Если $Q/M \geq \lfloor Q/m \rfloor$, то в качестве ξ можно взять любую точку из I , поскольку для любого $X \in [m, M]$ будет справедливо равенство

$$\Phi^*(Q, I) = \Phi\left(\frac{Q}{X}, I\right) = \Phi\left(\left\lfloor \frac{Q}{X} \right\rfloor, I\right).$$

б) Пусть $\lfloor Q/M \rfloor < \lfloor Q/m \rfloor$. Определим

$$h = \max \left\{ r \in \mathbb{Z} : \Phi(r, I) \leq \Phi^*(Q, I), \left\lfloor \frac{Q}{M} \right\rfloor \leq r < \left\lfloor \frac{Q}{m} \right\rfloor \right\}.$$

В силу монотонности $\Phi(Q, I)$ по параметру Q имеем

$$\Phi(h, I) \leq \Phi^*(Q, I) \leq \Phi(h+1, I).$$

При этом для любого $\tilde{h} \in [h, h+1)$ будет верно $\Phi(\tilde{h}, I) = \Phi(h, I)$.

По теореме 2

$$\Phi(h+1, I) - \Phi(h, I) = O(h^n \log^{l(n)} h).$$

Таким образом, в качестве ξ можно взять любую точку из I такую, что $Q/\psi(\xi) \in [h, h+1]$.

Отметим, что в случае других определений высоты алгебраического числа высота, вообще говоря, не целое число. Однако для доказательства леммы 2 существенным обстоятельством является только дискретность множества значений высоты, что автоматически выполняется для любой функции высоты $\mathcal{H}(\cdot)$ со свойством

$$\#\{\alpha \in \mathbb{A}_n : \mathcal{H}(\alpha) \leq X\} < \infty \quad \text{для всех } X > 0.$$

Перейдем к доказательству основной теоремы пункта. Разобьем промежуток I на конечное число непересекающихся подпромежутков I_i . Тогда

$$\Phi^*(Q, I) = \sum_i \Phi^*(Q, I_i).$$

По теореме 2 и лемме 2 существует такое $\xi_i \in I_i$, что

$$\Phi^*(Q, I_i) = \frac{1}{2\zeta(n+1)} \left(\frac{Q}{\psi(\xi_i)} \right)^{n+1} \int_{I_i} \phi_n(x) dx + O\left(\left(\frac{Q}{\psi(\xi_i)} \right)^n \log^{l(n)} Q \right),$$

где неявная постоянная в символе $O(\cdot)$ зависит только от n .

По теореме Лагранжа существует $\eta_i \in I_i$ такое, что

$$\int_{I_i} \phi_n(x) dx = \phi_n(\eta_i) |I_i|.$$

Таким образом,

$$\Phi^*(Q, I) = \frac{Q^{n+1}}{2\zeta(n+1)} \sum_i \frac{\phi_n(\eta_i)}{\psi(\xi_i)^{n+1}} |I_i| + O\left(Q^n \log^{l(n)} Q \cdot \sum_i \frac{1}{\psi(\xi_i)^n} \right). \quad (11)$$

Выбирая $\psi(x) = \phi_n(x)^{1/(n+1)}$, равенство (11) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \Phi^*(Q, I) &= \frac{Q^{n+1}}{2\zeta(n+1)} |I| + \frac{Q^{n+1}}{2\zeta(n+1)} \sum_i \frac{\phi_n(\eta_i) - \phi_n(\xi_i)}{\phi_n(\xi_i)} |I_i| \\ &\quad + O\left(Q^n \log^{l(n)} Q \cdot \sum_i \phi_n(\xi_i)^{-n/(n+1)} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Обозначая $M_i = \sup_{x \in I_i} \phi_n(x)$ и $m_i = \inf_{x \in I_i} \phi_n(x)$, по лемме 1 получаем

$$\left| \sum_i \frac{\phi_n(\eta_i) - \phi_n(\xi_i)}{\phi_n(\xi_i)} |I_i| \right| \leq |I| \max_i \frac{M_i - m_i}{m_i} \leq C |I| \max_i |I_i|,$$

где C – постоянная, зависящая только от n .

Из леммы 1 для суммы в символе O получаем

$$\sum_i \phi_n(\xi_i)^{-n/(n+1)} \leq R^{2n/(n+1)} \#\{I_i\},$$

где $\#\{I_i\}$ – количество подпромежутков I_i , на которые мы разбиваем I . При этом верна оценка

$$\#\{I_i\} \leq \frac{|I|}{\min_i |I_i|}.$$

Чтобы оба второстепенных члена в (12) оценивались одинаковыми порядками величины, достаточно выполнения условия

$$\max_i |I_i| \cdot \min_i |I_i| = \frac{cR^{2n/(n+1)} \log^{l(n)} Q}{Q},$$

где c – постоянная, зависящая только от n . Причем наилучшая оценка достигается, когда все подпромежутки I_i имеют одинаковые длины:

$$\max_i |I_i| = \min_i |I_i| = R^{n/(n+1)} \sqrt{\frac{c \log^{l(n)} Q}{Q}}.$$

Отсюда для числа подпромежутков имеем

$$\#\{I_i\} \leq \max \left\{ 1, \frac{|I|}{R^{n/(n+1)}} \sqrt{\frac{Q}{c \log^{l(n)} Q}} \right\}.$$

Таким образом, получаем (10).

Автор выражает благодарность организаторам конференции памяти Анатолия Алексеевича Карацубы (Москва, январь 2016 г.) за прекрасную организацию и теплую атмосферу. Автор благодарит рецензента за ценные замечания.

Список литературы

- [1] A. Walfisz, *Weylsche Exponentialsummen in der neueren Zahlentheorie*, Mathematische Forschungsberichte, **15**, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1963.
- [2] P. Erdős, M. Kac, E. R. van Kampen, A. Wintner, “Ramanujan sums and almost periodic functions”, *Studia Math.*, **9**:1 (1940), 43–53.
- [3] M. Mikolás, “Farey series and their connection with the prime number problem. I”, *Acta Univ. Szeged. Sect. Sci. Math.*, **13** (1949), 93–117.
- [4] Л. Кейперс, Г. Нидеррейтер, *Равномерное распределение последовательностей*, Мир, М., 1985.
- [5] J. Franel, “Les suites de Farey et le problème des nombres premiers”, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl.*, **1924** (1924), 198–201.
- [6] H. Niederreiter, “The distribution of Farey points”, *Math. Ann.*, **201**:4 (1973), 341–345.
- [7] F. Dress, “Discrépance des suites de Farey”, *J. Théor. Nombres Bordeaux*, **11**:2 (1999), 345–367.
- [8] C. Cobeli, A. Zaharescu, “The Haros–Farey sequence at two hundred years”, *Acta Univ. Apulensis Math. Inform.*, **5** (2003), 1–38.
- [9] A. Baker, W. M. Schmidt, “Diophantine approximation and Hausdorff dimension”, *Proc. Lond. Math. Soc.* (3), **21**:1 (1970), 1–11.
- [10] В. И. Берник, “Применение размерности Хаусдорфа в теории диофантовых приближений”, *Acta Arith.*, **42**:3 (1983), 219–253.

- [11] В. И. Берник, “О точном порядке приближения нуля значениями целочисленных многочленов”, *Acta Arith.*, **53**:1 (1989), 17–28.
- [12] V. Bernik I., M. M. Dodson, *Metric Diophantine Approximation on Manifolds*, Cambridge Tracts in Math., **137**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.
- [13] V. Beresnevich, “On approximation of real numbers by real algebraic numbers”, *Acta Arith.*, **90**:2 (1999), 97–112.
- [14] Y. Bugeaud, *Approximation by Algebraic Numbers*, Cambridge Tracts in Math., **160**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.
- [15] H. Brown, K. Mahler, “A generalization of Farey sequences: some exploration via the computer”, *J. Number Theory*, **3**:3 (1971), 364–370.
- [16] Д. У. Каляда, “Аб размеркаванні рэчаісных алгебраічных лікаў дадзенай ступені”, *Докл. НАН Беларусі*, **56**:3 (2012), 28–33.
- [17] Д. В. Коледа, “О распределении действительных алгебраических чисел второй степени”, *Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук*, 2013, №3, 54–63.
- [18] D. Kaliada, “On the density function of the distribution of real algebraic numbers”, *J. Theor. Nombres Bordeaux*, 2017 (to appear), arXiv: [1405.1627](#).
- [19] Д. Н. Запорожец, “Случайные полиномы и геометрическая вероятность”, *Докл. РАН*, **400**:3 (2005), 299–303.
- [20] Д. В. Коледа, “Об асимптотике распределения алгебраических чисел при возрастании их высот”, *Чебышевский сб.*, **16**:1 (2015), 191–204.
- [21] V. Beresnevich, V. Bernik, F. Götze, “The distribution of close conjugate algebraic numbers”, *Compos. Math.*, **146**:5 (2010), 1165–1179.
- [22] F. Götze, D. Kaliada, D. N. Zaporozhets, “Correlations between real conjugate algebraic numbers”, *Чебышевский сб.*, **16**:4 (2015), 90–99.
- [23] F. Götze, D. Kaliada, D. Zaporozhets, *Correlation Functions of Real Zeros of Random Polynomials*, 2015, arXiv: [1510.00025](#).

Распределение значений сверток L -функций эллиптических кривых

А. Лауринчикас^а, Р. Мацайтене^б

^а Vilnius University, Lithuania

^б Siauliai University, Lithuania

Памяти Анатолия Алексеевича Карацубы посвящается

1. Введение

Пусть χ – характер Дирихле по модулю q , $q \in \mathbb{N}$, а $L(s, \chi)$, $s = \sigma + it$, – соответствующая L -функция Дирихле, в полуплоскости $\sigma > 1$ определяемая рядом

$$L(s, \chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m^s}.$$

Хорошо известно, что функции $L(s, \chi)$ имеют аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость, за исключением функции $L(s, \chi_0)$ с главным характером χ_0 , которая имеет простой полюс в точке $s = 1$.

В 1975 г. ученик А.А. Карацубы Воронин открыл [1] свойство универсальности для L -функций Дирихле о приближении широкого класса аналитических функций сдвигами $L(s + i\tau, \chi)$, $\tau \in \mathbb{R}$. Напомним современную версию теоремы Воронина. Пусть $D = \{s \in \mathbb{C} : 1/2 < \sigma < 1\}$. Через $\mathcal{K}$ обозначим класс компактных подмножеств полосы D , обладающих связным дополнением, через $H_0(K)$, $K \in \mathcal{K}$, – класс непрерывных, не имеющих нулей в K и аналитических внутри K функций, а через $\text{meas } A$ – меру Лебега измеримого множества $A \subset \mathbb{R}$. Тогда имеет место

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что $K \in \mathcal{K}$ и $f(s) \in H_0(K)$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \text{meas} \left\{ \tau \in [0, T] : \sup_{s \in K} |L(s + i\tau, \chi) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Теорему Воронина в настоящей форме можно найти в [2]–[7].

Существует и другая форма универсальности для L -функций Дирихле – так называемая χ -универсальность. Эта форма универсальности была предложена Гонеком [3], Багчи [4] и Эминяном [8], и была развита в работах Мишу [9], [10], Мишу и Коямы [11], Мишу и Нагоши [12]–[15]. Много лет назад Воронин рассказывал первому автору, что идея χ -универсальности принадлежит Линнику. Справедлива такая теорема.

ТЕОРЕМА 2 [3], [4], [8]. *Предположим, что q – простое число. Пусть $K \in \mathcal{K}$ и $f(s) \in H_0(K)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{q} \# \left\{ \chi(\bmod q) : \sup_{s \in K} |L(s, \chi) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Позже оказалось, что и многие другие дзета- и L -функции являются универсальными в смысле Воронина. Настоящая статья посвящена универсальности L -функций, связанных

с эллиптическими кривыми. Пусть E – эллиптическая кривая над полем рациональных чисел, заданная уравнением Вейерштрасса

$$y^2 = x^3 + ax + b, \quad a, b \in \mathbb{Z},$$

дискриминант которого $\Delta = -16(4a^3 + 27b^2)$ отличен от нуля. Для любого простого числа p через E_p обозначим редукцию по модулю p кривой E , являющуюся кривой над конечным полем $\mathbb{F}_p$, и определим целые числа $\lambda(p)$ равенством

$$|E(\mathbb{F}_p)| = p + 1 - \lambda(p),$$

где $|E(\mathbb{F}_p)|$ – число точек кривой E_p . Тогда L -функция $L_E(s)$ кривой E при $\sigma > 3/2$ определяется эйлеровым произведением:

$$L_E(s) = \prod_{p|\Delta} \left(1 - \frac{\lambda(p)}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p \nmid \Delta} \left(1 - \frac{\lambda(p)}{p^s} + \frac{1}{p^{2s-1}}\right)^{-1},$$

и аналитически продолжается до целой функции.

Для функции $L_E(s)$ имеет место аналог теоремы 1 с полосой $D_E = \{s \in \mathbb{C} : 1 < \sigma < 3/2\}$ вместо D [16].

Свертка $L_E(s, \chi)$ функции $L_E(s)$ с характером Дирихле χ при $\sigma > 3/2$ определяется произведением:

$$L_E(s, \chi) = \prod_{p|\Delta} \left(1 - \frac{\lambda(p)\chi(p)}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p \nmid \Delta} \left(1 - \frac{\lambda(p)\chi(p)}{p^s} + \frac{\chi^2(p)}{p^{2s-1}}\right)^{-1}.$$

В [17] было замечено, что функция $L_E(s, \chi)$ аналитически продолжается до целой функции. При $\sigma > 3/2$ функцию $L_E(s, \chi)$ также можно записать в виде

$$L_E(s, \chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda(m)\chi(m)}{m^s}$$

с некоторыми коэффициентами $\lambda(m)$. Везде считаем, что модуль характера χ – простое число. Наша цель – доказать аналог теоремы 2 для сверток $L_E(s, \chi)$.

При $Q \geq 2$ пусть

$$M_Q = \sum_{q \leq Q} \sum_{\substack{\chi = \chi(\bmod q) \\ \chi \neq \chi_0}} 1.$$

Из закона распределения простых чисел следует оценка

$$M_Q = \frac{Q^2}{2 \log Q} + O\left(\frac{Q^2}{\log^2 Q}\right).$$

Через $\mathcal{K}_E$ обозначим класс компактных подмножеств полосы D_E , обладающих связным дополнением, а через $H_{0,E}(K)$, $K \in \mathcal{K}_E$, – класс непрерывных, не имеющих нулей в K и аналитических внутри K функций. Кроме того, пусть $A_Q = \{\chi(\bmod q) : q \leq Q, \chi \neq \chi_0\}$. Тогда имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. *Предположим, что $K \in \mathcal{K}_E$ и $f(s) \in H_{0,E}(K)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{Q \rightarrow \infty} \frac{1}{M_Q} \#\left\{\chi \in A_Q : \sup_{s \in K} |L_E(s, \chi) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

Полагая $A = \{\chi \pmod{q} : q \text{ простое}, \chi \neq \chi_0\}$, имеем следующее следствие теоремы 3.

СЛЕДСТВИЕ. Для любого фиксированного $s_0 = \sigma_0 + it_0 \in D_E$, где $t_0 \neq 0$, множество $\{L_E(s_0, \chi) : \chi \in A\}$ всюду плотно в $\mathbb{C}$.

Теорема 3 допускает обобщение для некоторых сложных функций. Через $H(D_E)$ обозначим пространство аналитических в полосе D_E функций, наделенное топологией равномерной сходимости на компактах, а через $H_E(K)$, $K \in \mathcal{K}_E$ – класс непрерывных в K и аналитических внутри K функций. Имеем $H_{0,E}(K) \subset H_E(K)$. Пусть $S_E = \{g \in H(D_E) : g(s) \neq 0 \text{ или } g(s) \equiv 0\}$. Тогда, например, имеет место такая теорема.

ТЕОРЕМА 4. Предположим, что $F: H(D_E) \rightarrow H(D_E)$ – непрерывный оператор такой, что для всякого многочлена $p = p(s)$ множество $(F^{-1}\{p\}) \cap S_E$ непусто. Пусть $K \in \mathcal{K}_E$ и $f(s) \in H_{0,E}(K)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{Q \rightarrow \infty} \frac{1}{M_Q} \# \left\{ \chi \in A_Q : \sup_{s \in K} |F(L_E(s, \chi)) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Теорему 4 можно доказать и для других классов операторов $F: H(D_E) \rightarrow H(D_E)$; см. [18]–[20].

Теорема 4 дает некоторую информацию о нулях функции $F(L_E(s, \chi))$.

ТЕОРЕМА 5. Предположим, что оператор F удовлетворяет условиям теоремы 4. Тогда для любых σ_1, σ_2 , $1 < \sigma_1 < \sigma_2 < 3/2$, существует положительная константа $c = c(\sigma_1, \sigma_2, F)$ такая, что при достаточно большом Q функция $F(L_E(s, \chi))$ имеет нуль в круге

$$|s - \hat{\sigma}| \leq \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}, \quad \hat{\sigma} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2},$$

для более чем cM_Q характеров χ , $\chi \in A_Q$.

2. Предельные теоремы

Пусть $\mathcal{B}(X)$ – борелевское σ -поле пространства X , $\gamma = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$ – единичная окружность на комплексной плоскости,

$$\Omega = \prod_{p \in \mathcal{P}} \gamma_p,$$

где $\mathcal{P}$ – множество всех простых чисел, а $\gamma_p = \gamma$ для всех $p \in \mathcal{P}$. В силу классической теоремы Тихонова бесконечномерный тор Ω с топологией произведения и операцией поточечного перемножения является компактной топологической абелевой группой. Поэтому на $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ существует вероятностная мера Хаара m_H , что приводит к вероятностному пространству $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Через $\omega(p)$ обозначим проекцию элемента $\omega \in \Omega$ на координатное пространство γ_p , $p \in \mathcal{P}$, и на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$ определим $H(D_E)$ -значный случайный элемент $L_E(s, \omega)$ формулой

$$L_E(s, \omega) = \prod_{p|\Delta} \left(1 - \frac{\lambda(p)\omega(p)}{p^s} \right)^{-1} \prod_{p \nmid \Delta} \left(1 - \frac{\lambda(p)\omega(p)}{p^s} + \frac{\omega^2(p)}{p^{2s-1}} \right)^{-1}.$$

Заметим, что последнее бесконечное произведение для почти всех $\omega \in \Omega$ равномерно сходится на компактных подмножествах полосы D_E и поэтому определяет $H(D_E)$ -значный случайный элемент. Через P_{L_E} обозначим распределение случайного элемента $L_E(s, \omega)$, т.е.

$$P_{L_E}(A) = m_H(\omega \in \Omega : L_E(s, \omega) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(H(D_E)).$$

Кроме того, для $A \in \mathcal{B}(H(D_E))$ пусть

$$P_{Q,E}(A) = \frac{1}{M_Q} \# \{ \chi \in A_Q : L_E(s, \chi) \in A \}.$$

В [17] была получена следующая предельная теорема.

ТЕОРЕМА 6. *Мера $P_{Q,E}$ при $Q \rightarrow \infty$ слабо сходится к P_{L_E} .*

Замечаем, что в доказательстве теоремы 1 в [17] была использована лемма 3, в которой пропущены множители, зависящие от N . Кроме того, более просто вместо леммы 3 применить готовое приближенное функциональное уравнение, полученное в [21; теорема 1].

При доказательстве теоремы универсальности требуется знать явный вид носителя предельной меры P_{L_E} в теореме 6. Напоминаем, что минимальное замкнутое множество $S \subset \mathcal{B}(H(D_E))$ такое, что $P_{L_E}(S) = 1$, называется носителем меры P_{L_E} .

ЛЕММА 1. *Носителем меры P_{L_E} является множество S_E .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма следует из аналогичного утверждения – полученной в [22] леммы 9 для L -функций, связанных с новыми формами – и из гипотезы Шимур–Таниямы–Вейля, доказанной в [23]; см. также [24; теорема 14.6].

Из теоремы 6 легко получаем предельную теорему для сложной функции $F(L_E(s, \chi))$. Для $A \in \mathcal{B}(H(D_E))$ положим

$$P_{Q,E,F}(A) = \frac{1}{M_Q} \# \{ \chi \in A_Q : F(L_E(s, \chi)) \in A \}.$$

Пусть X_1 и X_2 – два метрических пространства, а $u: X_1 \rightarrow X_2$ – $(\mathcal{B}(X_1), \mathcal{B}(X_2))$ -измеримое отображение, т.е. $u^{-1}A \in \mathcal{B}(X_1)$ для любого множества $A \in \mathcal{B}(X_2)$. Тогда всякая вероятностная мера P на $(X_1, \mathcal{B}(X_1))$ индуцирует единственную вероятностную меру Pu^{-1} на $(X_2, \mathcal{B}(X_2))$, определяемую формулой

$$Pu^{-1}(A) = P(u^{-1}A), \quad A \in \mathcal{B}(X_2).$$

Известно, что всякое непрерывное отображение $u: X_1 \rightarrow X_2$ является $(\mathcal{B}(X_1), \mathcal{B}(X_2))$ -измеримым. Кроме того, имеет место следующее утверждение.

ЛЕММА 2. *Предположим, что P_n , $n \in \mathbb{N}$, и P – вероятностные меры на $(X_1, \mathcal{B}(X_1))$, отображение $u: X_1 \rightarrow X_2$ непрерывно и P_n при $n \rightarrow \infty$ слабо сходится к P . Тогда и $P_n u^{-1}$ при $n \rightarrow \infty$ слабо сходится к Pu^{-1} .*

Лемму и приведенные выше замечания можно найти в [25; § 1.5].

ТЕОРЕМА 7. *Предположим, что оператор $F: H(D_E) \rightarrow H(D_E)$ непрерывен. Тогда $P_{Q,E,F}$ при $Q \rightarrow \infty$ слабо сходится к $P_{L_E} F^{-1}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что $P_{Q,E,F} = P_{Q,E} F^{-1}$. Поэтому теорема является следствием непрерывности оператора F , теоремы 6 и леммы 2.

ЛЕММА 3. *Предположим, что оператор $F: H(D_E) \rightarrow H(D_E)$ непрерывен. Тогда носителем меры $P_{L_E} F^{-1}$ является замыкание множества $F(S_E)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Берем произвольный элемент g множества $F(S_E)$ и его некоторую открытую окрестность G . Из непрерывности оператора F имеем, что $F^{-1}G$ – открытая окрестность некоторого элемента множества S_E . Следовательно, в силу леммы 1 имеем, что $P_{L_E}(F^{-1}G) > 0$ или же $P_{L_E} F^{-1}(G) > 0$. Кроме того, опять из леммы 1 получаем, что

$$P_{L_E} F^{-1}(F(S_E)) = P_{L_E}(S_E) = 1.$$

Поскольку носитель – замкнутое множество, то отсюда следует, что носителем меры $P_{L_E} F^{-1}$ является замыкание множества $F(S_E)$.

3. Доказательство теорем универсальности

Нам будет полезной теорема Мергеляна о приближении аналитических функций на компактных множествах многочленами, которую формулируем в виде следующей леммы.

ЛЕММА 4. *Предположим, что $K \subset \mathbb{C}$ – компактное множество, обладающее связным дополнением. Тогда всякая функция, непрерывная в K и аналитическая внутри K , равномерно в K приближается многочленами.*

Доказательство см. в [26], а также в [27].

Мы также будем пользоваться следующим эквивалентом слабой сходимости вероятностных мер в терминах открытых множеств.

ЛЕММА 5. *Пусть P_n , $n \in \mathbb{N}$, и P – вероятностные меры на $(X, \mathcal{B}(X))$. Тогда P_n слабо сходится к P при $n \rightarrow \infty$, если и только если для любого открытого множества $G \subset X$ выполняется неравенство*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} P_n(G) \geq P(G).$$

Доказательство леммы можно найти в [25; теорема 2.1].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. В силу леммы 4 можем найти многочлен $p(s)$ такой, что

$$\sup_{s \in K} |f(s) - e^{p(s)}| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1)$$

Пусть

$$G = \left\{ g \in H(D_E) : \sup_{s \in K} |g(s) - e^{p(s)}| < \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

В силу леммы 1 функция $e^{p(s)}$ принадлежит носителю меры P_{L_E} . Следовательно, G – открытая окрестность элемента носителя меры P_{L_E} . Поэтому $P_{L_E}(G) > 0$. Отсюда в силу теоремы 6 и леммы 5 находим, что

$$\liminf_{Q \rightarrow \infty} \frac{1}{M_Q} \# \{ \chi \in A_Q : L_E(s, \chi) \in G \} \geq P_{L_E}(G) > 0.$$

Следовательно, ввиду определения множества G

$$\liminf_{Q \rightarrow \infty} \frac{1}{M_Q} \# \left\{ \chi \in A_Q : \sup_{s \in K} |L_E(s, \chi) - e^{p(s)}| < \frac{\varepsilon}{2} \right\} > 0.$$

Отсюда и из неравенства (1) вытекает утверждение теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ. Поскольку множество $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ всюду плотно в $\mathbb{C}$, то достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{Q \rightarrow \infty} \frac{1}{M_Q} \# \{ \chi \in A_Q : |L_E(s_0, \chi) - a| < \varepsilon \} > 0 \quad (2)$$

для любого $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Фиксируем $a = re^{i\varphi}$, где $r > 0$ и $\varphi \in \mathbb{R}$. Определим функцию

$$f(s) = re^{(\varphi/t_0)(s-\sigma_0)},$$

где $s \in D_E$ и $s_0 = \sigma_0 + it_0 \in D_E$. Очевидно, что $f(s)$ – аналитическая функция в полосе D_E , кроме того, $f(s_0) = re^{i\varphi} = a$. Пусть $K = \{s_0\}$. Тогда $K \in \mathcal{K}$. Поэтому в силу теоремы 3 получаем неравенство (2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Сначала докажем, что в условиях теоремы 4 носителем меры $P_{L_E} F^{-1}$ является все пространство $H(D_E)$. Известно [20], что в пространстве $H(D_E)$ достаточно ограничиться изучением приближения функций на компактных множествах, обладающих связными дополнениями. Если $G \in H(D_E)$ – любое непустое открытое множество, то отсюда в силу леммы 4 следует, что найдется многочлен $p = p(s)$, принадлежащий множеству G . Отсюда и из условия теоремы, что $(F^{-1}\{p\}) \cap S_E \neq \emptyset$, получаем $(F^{-1}G) \cap S_E \neq \emptyset$. Пусть $g \in H(D_E)$ – любой элемент и G – его любая открытая окрестность. Тогда из $(F^{-1}G) \cap S_E \neq \emptyset$ следует, что найдется элемент множества $F(S_E)$, принадлежащий множеству G . Отсюда вытекает, что множество $F(S_E)$ всюду плотно в $H(D_E)$. Так как в силу леммы 3 носителем меры $P_{L_E} F^{-1}$ является замыкание множества $F(S_E)$, получаем, что носитель меры $P_{L_E} F^{-1}$ – пространство $H(D_E)$.

Дальнейшее доказательство аналогично доказательству теоремы 3. В силу леммы 4 найдется многочлен $p(s)$ такой, что

$$\sup_{s \in K} |f(s) - p(s)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3)$$

Пусть

$$G = \left\{ g \in H(D_E) : \sup_{s \in K} |g(s) - p(s)| < \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

Тогда G – открытая окрестность многочлена $p(s)$, который является элементом носителя меры $P_{L_E} F^{-1}$. Поэтому $P_{L_E} F^{-1}(G) > 0$. Отсюда по теореме 7 и лемме 5 получаем, что

$$\liminf_{Q \rightarrow \infty} \frac{1}{M_Q} \# \{ \chi \in A_Q : F(L_E(s, \chi)) \in G \} > 0.$$

Следовательно, из определения множества G находим, что

$$\liminf_{Q \rightarrow \infty} \frac{1}{M_Q} \# \left\{ \chi \in A_Q : \sup_{s \in K} |F(L_E(s, \chi)) - p(s)| < \frac{\varepsilon}{2} \right\} > 0,$$

откуда и из неравенства (3) следует утверждение теоремы.

4. Доказательство теоремы 5

Ради удобства напомним классическую теорему Руше; см., например, [28].

ЛЕММА 6. Пусть G – область на комплексной плоскости, $K \subset G$ – компактное подмножество, а $f(s)$ и $g(s)$ – аналитические в G функции такие, что

$$|f(s) - g(s)| < |f(s)|$$

для любой точки s на границе множества K . Тогда функции $f(s)$ и $g(s)$ имеют одинаковые числа нулей внутри K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Пусть

$$\sigma_0 = \max \left(\left| \sigma_1 - \frac{5}{4} \right|, \left| \sigma_2 - \frac{5}{4} \right| \right),$$

$f(s) = s - \hat{\sigma}$ и $0 < \varepsilon < (\sigma_2 - \sigma_1)/20$. Кроме того, пусть $K = \{s \in \mathbb{C} : |s - 5/4| \leq \sigma_0\}$. Очевидно, что $K \in \mathcal{K}_E$ и $f(s) \in H_E(K)$. Следовательно, в силу теоремы 4

$$\liminf_{Q \rightarrow \infty} \frac{1}{M_Q} \# \left\{ \chi \in A_Q : \sup_{|s - 5/4| \leq \sigma_0} |F(L_E(s, \chi)) - p(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Отсюда имеем, что найдется константа $c = c(\sigma_1, \sigma_2, F) > 0$ такая, что при достаточно большом Q

$$\frac{1}{M_Q} \# \left\{ \chi \in A_Q : \sup_{|s-5/4| \leq \sigma_0} |F(L_E(s, \chi)) - p(s)| < \varepsilon \right\} > c. \quad (4)$$

Окружность

$$|s - \hat{\sigma}| = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \quad (5)$$

лежит в круге

$$\left| s - \frac{5}{4} \right| \leq \sigma_0. \quad (6)$$

Действительно, пусть s лежит на окружности (5). Тогда

$$\left| s - \frac{5}{4} \right| \leq \left| s - \hat{\sigma} \right| + \left| \hat{\sigma} - \frac{5}{4} \right| = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} + \left| \hat{\sigma} - \frac{5}{4} \right|. \quad (7)$$

Если $\hat{\sigma} \geq 5/4$, то в силу (7)

$$\left| s - \frac{5}{4} \right| \leq \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} + \frac{\sigma_2 + \sigma_1}{2} - \frac{5}{4} = \sigma_2 - \frac{5}{4} \leq \sigma_0.$$

Если же $\hat{\sigma} < 5/4$, то тогда $\sigma_1 < 5/4$ и

$$\left| s - \frac{5}{4} \right| \leq \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} + \frac{5}{4} - \frac{\sigma_2 + \sigma_1}{2} = \frac{5}{4} - \sigma_1 \leq \sigma_0.$$

Отсюда получаем, что в обоих случаях s лежит в круге (6). Поэтому для χ , удовлетворяющего (4), получаем

$$\max_{|s-\hat{\sigma}|=(\sigma_2-\sigma_1)/2} \left| F(L_E(s, \chi)) - (s - \hat{\sigma}) \right| < \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{20}. \quad (8)$$

Это неравенство показывает, что круг $|s - \hat{\sigma}| \leq (\sigma_2 - \sigma_1)/2$, и функции $s - \hat{\sigma}$ и $g(s) = F(L_E(s, \chi))$ удовлетворяют условиям леммы 6. Поскольку функция $s - \hat{\sigma}$ в этом круге имеет единственный нуль $s = \hat{\sigma}$, то и функция $F(L_E(s, \chi))$ также в этом круге имеет один нуль. Однако в силу (4) число таких $\chi \in A_Q$, для которых имеет место неравенство (8), больше, чем cM_Q . Теорема доказана.

Список литературы

- [1] С. М. Воронин, “Теорема об “универсальности” дзета-функции Римана”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **39**:3 (1975), 475–486.
- [2] С. М. Воронин, А. А. Карацуба, *Дзета-функция Римана*, Физматлит, М., 1994.
- [3] S. M. Gonek, *Analytic Properties of Zeta and L-Functions*, Thesis, University of Michigan, 1979.
- [4] B. Bagchi, *The Statistical Behavior and Universality Properties of the Riemann Zeta-Function and Other Allied Series*, Ph. D. Thesis, Indian State Institute, Calcutta, 1981.
- [5] J. Steuding, *Value-Distribution of L-Functions*, Lecture Notes in Math., **1877**, Springer-Verlag, Berlin, 2007.
- [6] A. Laurinćikas, “On joint universality of Dirichlet L -functions”, *Чебышевский сб.*, **12**:1 (2011), 124–139.
- [7] K. Matsumoto, “A survey on the theory of universality for zeta and L -functions”, *Number Theory: Plowing and Starring Through High Wave Forms*, Ser. Number Theory and its Appl., **11**, Word Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2015, 95–144.

- [8] К. М. Эминян, “О χ -универсальности L -функции Дирихле”, *Матем. заметки*, **47**:6 (1990), 132–137.
- [9] H. Mishou, “The value distribution of Hecke L -functions in the grössencharacter aspect”, *Arch. Math. (Basel)*, **82**:4 (2004), 301–310.
- [10] H. Mishou, “The universality theorem for Hecke L -functions in the (m, t) aspect”, *Tokyo J. Math.*, **28**:1 (2005), 139–153.
- [11] H. Mishou, S. Koyama, “Universality of Hecke L -functions in the Grossencharacter-aspect”, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, **78**:5 (2002), 63–67.
- [12] H. Mishou, H. Nagoshi, “Functional distribution of $L(s, \chi_j)$ with real character and denseness of quadratic class numbers”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **358**:10 (2006), 4343–4366.
- [13] H. Mishou, H. Nagoshi, “The universality of quadratic L -series for prime discriminants”, *Acta Arith.*, **123**:2 (2006), 143–161.
- [14] H. Mishou, H. Nagoshi, “Equivalents of the Riemann hypothesis”, *Arch. Math. (Basel)*, **86**:5 (2006), 419–424.
- [15] H. Mishou, H. Nagoshi, “On class numbers of quadratic fields with prime discriminant and character sums”, *Kyushu J. Math.*, **66**:1 (2012), 21–34.
- [16] V. Garbaliuskienė, A. Laurinčikas, “Universality theorems for L -functions of elliptic curves”, *Fiz. Mat. Moksl. Semin. Darb.*, **8** (2005), 14–25.
- [17] А. Лауринчикас, “Теорема типа Эллиотта для сверток L -функций эллиптических кривых”, *Матем. заметки*, **99**:1 (2016), 78–88.
- [18] A. Laurinčikas, “Universality of the Riemann zeta-function”, *J. Number Theory*, **130**:10 (2010), 2323–2331.
- [19] A. Laurinčikas, “On the universality of the Hurwitz zeta-function”, *Int. J. Number Theory*, **9**:1 (2013), 155–165.
- [20] A. Laurinčikas, “Universality of composite functions”, *Functions in Number Theory and Their Probabilistic Aspects*, RIMS Kōkyūroku Bessatsu, **B34**, Res. Inst. Math. Sci., Kyoto, 2012, 191–204.
- [21] S. Akiyama, Y. Tanigawa, “Calculation of values of L -functions associated to elliptic curves”, *Math. Comp.*, **68**:227 (1999), 1201–1231.
- [22] А. Лауринчикас, К. Матсумото, Й. Стеудинг, “Универсальность L -функций, связанных с новыми формами”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **67**:1 (2003), 83–98.
- [23] C. Breuil, B. Conrad, F. Diamond, R. Taylor, “On the modularity of elliptic curves over $\mathbb{Q}$: wild 3-adic exercises”, *J. Amer. Math. Soc.*, **14**:4 (2001), 843–939.
- [24] H. Iwaniec, E. Kowalski, *Analytic Number Theory*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **53**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.
- [25] П. Биллингсли, *Сходимость вероятностных мер*, Наука, М., 1977.
- [26] С. Н. Мергелян, “Равномерные приближения функций комплексного переменного”, *УМН*, **7**:2 (48) (1952), 31–122.
- [27] Дж. Л. Уолш, *Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области*, ИЛ, М., 1961.
- [28] D. Sarason, *Complex Function Theory*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.

Гипотеза Римана в терминах собственных чисел специальных ганкелевых матриц

Ю. В. Матиясевич

Санкт-Петербургское отделение

Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук

yumat@pdmi.ras.ru

1. Введение

Гипотеза Римана, подобно большинству великих проблем, имеет огромное количество эквивалентных переформулировок. В настоящей работе рассматривается одна из них, формулируемая в терминах собственных чисел ганкелевых матриц специального вида; элементы этих матриц задаются через коэффициенты разложения дзета-функции в ряд Тейлора в точке $s = 0$. Гипотеза Римана предсказывает поведение абсолютных величин этих собственных чисел *в среднем*, но прямо не говорит ничего ни об отдельных собственных числах, ни об их распределении. Вычисления, выполненные для соответствующих матриц достаточно большого размера, прозвоят сформулировать предположения об их собственных числах, которые не следуют непосредственно из гипотезы Римана, но влекут ее.

Начало исследований упомянутых ганкелевых матриц было положено автором в [1]; двойственные к ним тёплицевы матрицы были введены в рассмотрение в [2]. Первые наблюдения над собственными числами этих матриц были представлены на Общественном семинаре МИАН [3] и других семинарах и конференциях (см. [4]), они частично отражены в трудах конференций [5], [6], а также в преприте [7]. За продолжающимся исследованием этих матриц можно следить на [4].

2. Подгипотезы гипотезы Римана

Традиционно гипотеза Римана формулируется как утверждение о нулях дзета-функции Римана $\zeta(z)$, которая может быть определена при $\operatorname{Re}(z) > 1$ рядом Дирихле:

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}. \quad (2.1)$$

Эта функция может быть аналитически продолжена на всю комплексную z -плоскость за исключением точки $z = 1$, которая является единственным полюсом $\zeta(z)$.

Еще Л. Эйлер указал, что $0 = \zeta(-2) = \zeta(-4) = \dots$, и отрицательные четные числа ныне называют *тривиальными нулями* дзета-функции. Риман [8] установил, что других вещественных нулей нет, и высказал знаменитую гипотезу о расположении остальных, *нетривиальных нулей* дзета-функции.

ГИПОТЕЗА РИМАНА (версия 1). *Все нетривиальные нули функции $\zeta(z)$ лежат на критической прямой $\operatorname{Re}(z) = 1/2$.*

Мы начнем с нескольких элементарных переформулировок гипотезы Римана.

Существует традиция (начало которой положено самим Риманом в его основополагающей работе [8]) избавляться от тривиальных нулей дзета-функции, рассматривая вместо нее целую функцию

$$\xi(z) = \pi^{-z/2}(z-1)\Gamma\left(1 + \frac{z}{2}\right)\zeta(z) \quad (2.2)$$

(мы используем современное обозначение для этой функции, сам Риман обозначал посредством $\xi(t)$ функцию, которая ныне традиционно обозначается как $\Xi(t)$). В (2.2) полюса сомножителя $\Gamma(1 + z/2)$ гасят тривиальные нули $\zeta(z)$, а сомножитель $z - 1$ гасит полюс этой функции. Множитель $\pi^{-z/2}$ не влияет ни на полюса, ни на нули, но позволяет записать *функциональное уравнение* в виде

$$\xi(z) = \xi(1 - z). \quad (2.3)$$

В этой работе мы не будем лишать дзета-функцию ее тривиальных нулей, а попытаемся использовать знание их местонахождения. Вместо $\xi(z)$ мы будем работать с целой функцией

$$\zeta^*(z) = 2(z-1)\zeta(z). \quad (2.4)$$

Мы могли бы не использовать множитель $z - 1$ и/или использовать множитель $\pi^{-z/2}$, что привело бы к несколько иным формулам, которым, возможно, будет посвящена отдельная статья. Множитель 2 в (2.4) приводит к равенству $\zeta^*(0) = 1$, которое слегка упрощает некоторые последующие формулы.

Благодаря функциональному уравнению (2.3) мы можем ограничиться рассмотрением нулей, лежащих в одной полуплоскости.

ГИПОТЕЗА РИМАНА (версия 2). *Тривиальные нули $z_1 = -2, z_2 = -4, \dots, z_n = -2n, \dots$ являются единственными нулями функции $\zeta^*(z)$, лежащими в полуплоскости $\operatorname{Re}(z) < 1/2$.*

Полуплоскость является естественным объектом рассмотрения при работе с рядами Дирихле. Мы, однако, будем иметь дело с рядами Тейлора, для которых более естественными являются круги. Для перехода к ним мы сделаем замену переменных

$$z = \frac{w}{w+1}, \quad w = \frac{z}{1-z}. \quad (2.5)$$

При этом критическая прямая $\operatorname{Re}(z) = 1/2$ становится *критической окружностью* $|w| = 1$, полуплоскость $\operatorname{Re}(z) < 1/2$ – открытым кругом $|w| < 1$, а точки

$$w_1 = \frac{z_1}{1-z_1} = -\frac{2}{3}, \quad \dots, \quad w_n = \frac{z_n}{1-z_n} = -\frac{2n}{2n+1}, \quad \dots \quad (2.6)$$

будут *тривиальными нулями* функции

$$\tilde{\zeta}(w) = \zeta^*\left(\frac{w}{w+1}\right). \quad (2.7)$$

ГИПОТЕЗА РИМАНА (версия 3). *Тривиальные нули (2.6) являются единственными нулями функции $\tilde{\zeta}(w)$, лежащими в открытом круге $\{w : |w| < 1\}$.*

С критической окружностью, полной нулей функции $\tilde{\zeta}(w)$, работать непросто, и мы разобьем гипотезу Римана на бесконечную серию более слабых подгипотез.

ПОДГИПОТЕЗА RH_n . *Тривиальные нули $w_1, \dots, w_n$ являются единственными нулями функции $\tilde{\zeta}(w)$, лежащими в замкнутом круге $\{w : |w| \leq (2n+1)/(2n+2)\}$.*

Хотя каждая из этих подгипотез слабее гипотезы Римана, взятые вместе они, очевидно, ей эквивалентны.

ГИПОТЕЗА РИМАНА (версия 4). *Для каждого n подгипотеза RH_n верна.*

3. Приближения Паде и теорема Монтеессу де Болора

Для того чтобы “увидеть”, где расположены наименьшие (по абсолютной величине) нули функции $\tilde{\zeta}(w)$, мы можем приблизить ее рациональной функцией: пусть $P_{n,m}(w)$ и $Q_{n,m}(w)$ – многочлены такие, что

$$\tilde{\zeta}(w) \approx \frac{P_{n,m}(w)}{Q_{n,m}(w)} = \frac{1 + p_{n,m,1}w + \dots + p_{n,m,n}w^n}{1 + q_{n,m,1}w + \dots + q_{n,m,m}w^m} \quad (3.1)$$

$$= \tilde{\zeta}(w) + O(w^k), \quad (3.2)$$

где k имеет максимально возможное значение; поскольку в (3.1) в нашем распоряжении имеются $n + m$ коэффициентов

$$p_{n,m,1}, \dots, p_{n,m,n}, \quad q_{n,m,1}, \dots, q_{n,m,m}, \quad (3.3)$$

то k должно быть равно $n + m + 1$ (отношение $P_{n,m}(w)/Q_{n,m}(w)$ называется *аппроксимацией Паде* типа (n, m)).

Будем говорить, что число n является *хорошим*, если имеется замкнутый круг

$$\{w : |w| \leq R\}, \quad (3.4)$$

содержащий (с учетом кратностей) ровно n нулей функции $\tilde{\zeta}(w)$. Теорема Монтеессу де Болора [9] (см. также [10], [11]) говорит, что для любого хорошего n нули многочлена $P_{n,m}(w)$ с ростом m стремятся к нулям функции $\tilde{\zeta}(w)$, лежащим в круге (3.4). Из подгипотезы RH_n следует, что n является хорошим и, соответственно, при $m \rightarrow \infty$

$$P_{n,m}(w) \rightarrow \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{w}{w_n}\right). \quad (3.5)$$

Мы будем иметь дело только с абсолютной величиной старшего коэффициента многочлена $P_{n,m}(w)$, в терминах которой можно сформулировать еще более слабые подгипотезы.

Подгипотеза RH_n^w . Для $m \rightarrow \infty$

$$|p_{n,m,n}| \rightarrow W_n, \quad (3.6)$$

где

$$W_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{|w_n|} = \prod_{k=1}^n \frac{2k+1}{2k}. \quad (3.7)$$

Даже эти, еще более слабые, подгипотезы, взятые вместе, влекут гипотезу Римана. Чтобы увидеть это, предположим, что она не верна, и пусть $\tilde{w}$ – это наименьший по абсолютной величине нетривиальный нуль функции $\zeta(w)$, нарушающий гипотезу Римана в версии 3. Круг (3.4) при $R = |\tilde{w}|$ содержит лишь конечное количество нулей функции $\tilde{\zeta}(w)$, соответствующих нулям функции $\zeta^*(z)$ в прообразе этого круга на z -плоскости. Пусть это будут нули $\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_n$, занумерованные так, что $|\tilde{w}_1| \leq \dots \leq |\tilde{w}_n|$. Согласно нашему выбору число n является хорошим, и поэтому при $m \rightarrow \infty$

$$P_{n,m}(w) \rightarrow \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{w}{\tilde{w}_n}\right) \quad (3.8)$$

и, соответственно,

$$|p_{n,m,n}| \rightarrow \prod_{k=1}^n \frac{1}{|\widetilde{w}_n|}. \quad (3.9)$$

Легко видеть, что $|\widetilde{w}_1| \leq |w_1|, \dots, |\widetilde{w}_{n-1}| \leq |w_{n-1}|$ и $|\widetilde{w}_n| < |w_n|$. Следовательно,

$$\prod_{k=1}^n \frac{1}{|\widetilde{w}_n|} > \prod_{k=1}^n \frac{1}{|w_n|} = W_n, \quad (3.10)$$

что дает требуемое противоречие с (3.6).

ГИПОТЕЗА РИМАНА (версия 5). Для каждого n подгипотеза RH_n^w верна.

Предыдущее рассуждение показывает, что в этой версии мы можем ограничиться хорошими значениями n .

4. Определители и собственные числа

Нетрудно понять, что коэффициенты (3.3) выражаются через коэффициенты разложения

$$\widetilde{\zeta}(w) = 1 + \theta_1 w + \dots + \theta_k w^k + \dots. \quad (4.1)$$

Для упрощения последующих формул положим $\theta_0 = 1$ и $\theta_k = 0$ при $k < 0$. Якоби ([12], см. также [10]) дал явные выражения для $p_{n,m,n}$ через определители ганкелевых матриц

$$M_{n,m} = (-1)^{n+m} \begin{pmatrix} \theta_{n+m-1} & \theta_{n+m-2} & \dots & \theta_n \\ \theta_{n+m-2} & \theta_{n+m-3} & \dots & \theta_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_n & \theta_{n-1} & \dots & \theta_{n-m+1} \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

а именно

$$p_{n,m,n} = (-1)^{n+m+1} \frac{\det(M_{n,m+1})}{\det(M_{n,m})}. \quad (4.3)$$

Если для некоторой константы C при $m \rightarrow \infty$

$$|p_{n,m,n}| \rightarrow C, \quad (4.4)$$

то из (4.3) следует, что

$$|\det(M_{n,m})|^{1/m} \rightarrow C. \quad (4.5)$$

ПОДГИПОТЕЗА RH_n^{ww} . При $m \rightarrow \infty$

$$|\det(M_{n,m})|^{1/m} \rightarrow W_n. \quad (4.6)$$

Аналогично предыдущему, подгипотезы RH_n^{ww} , взятые вместе, влекут гипотезу Римана. Действительно, если бы она была не верна, то из (3.9), (3.10), (4.4) и (4.5) следовало бы, что для некоторого хорошего n значение $|p_{n,m,n}|$ и, соответственно, значение $|\det(M_{n,m})|^{1/m}$ стремились бы к некоторой величине, превосходящей W_n .

ГИПОТЕЗА РИМАНА (версия 6). Для каждого n подгипотеза RH_n^{ww} верна.

Подгипотезу (4.6) можно пытаться доказывать индукцией по n . Мы знаем, что $-2/3$ является единственным нулем функции $\widetilde{\zeta}(z)$, лежащим в круге $|z| < 3/4$, и, следовательно,

подгипотеза RH_1^{ww} верна. Для обоснования индукционного перехода было бы достаточно установить справедливость следующих подгипотез.

Подгипотеза RH_n^{r} . При $m \rightarrow \infty$

$$\frac{|\det(M_{n+1,m})|^{1/m}}{|\det(M_{n,m+1})|^{1/(m+1)}} \rightarrow \frac{W_{n+1}}{W_n} = \frac{1}{|w_{n+1}|} = \frac{2n+3}{2n+2}. \quad (4.7)$$

Это дает еще одну переформулировку гипотезы Римана.

ГИПОТЕЗА РИМАНА (версия 7). Для каждого n подгипотеза RH_n^{r} верна.

Обозначим через $\mu_{n,m,1}, \mu_{n,m,2}, \dots, \mu_{n,m,m}$ собственные числа матрицы $M_{n,m}$ (они вещественны, поскольку матрица ганкелева). Две последние подгипотезы и две последние версии гипотезы Римана очевидным образом переформулируются в терминах этих собственных чисел.

Подгипотеза $\text{RH}_n^{\text{ww}*}$. При $m \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \ln |\mu_{n,m,k}| \rightarrow \ln(W_n). \quad (4.8)$$

ГИПОТЕЗА РИМАНА (версия 8). Для каждого n подгипотеза $\text{RH}_n^{\text{ww}*}$ верна.

Подгипотеза $\text{RH}_n^{\text{r}*}$. При $m \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \ln |\mu_{n+1,m,k}| - \frac{1}{m+1} \sum_{k=1}^{m+1} \ln |\mu_{n,m+1,k}| \rightarrow -\ln(|w_{n+1}|). \quad (4.9)$$

ГИПОТЕЗА РИМАНА (версия 9). Для каждого n подгипотеза $\text{RH}_n^{\text{r}*}$ верна.

Для получения в дальнейшем еще одной переформулировки гипотезы Римана мы слегка преобразуем левую часть (4.9), а именно изменим сомножитель перед первой суммой – это возможно, поскольку левая часть в (4.8) имеет конечный предел.

Подгипотеза $\text{RH}_n^{\text{r}**}$. При $m \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{m+1} \left(\sum_{k=1}^m \ln |\mu_{n+1,m,k}| - \sum_{k=1}^{m+1} \ln |\mu_{n,m+1,k}| \right) \rightarrow -\ln |w_{n+1}|. \quad (4.10)$$

ГИПОТЕЗА РИМАНА (версия 10). Для каждого n подгипотеза $\text{RH}_n^{\text{r}**}$ верна.

5. Визуальное представление собственных чисел

Гипотеза Римана в версии 8 – это утверждение о поведении собственных чисел матриц (4.2) в среднем, однако она ничего не говорит, по крайней мере явно, о величине отдельных собственных чисел. Автор счел интересным провести вычисления, чтобы посмотреть, не будут ли наблюдаться какие-либо интересные закономерности в распределении значений этих собственных чисел. И действительно, оказалось, что при надлежащем графическом представлении рассматриваемые собственные числа демонстрируют интересные зрительные образы, которые позволяют сформулировать ряд гипотез.

Каждое (мульти)множество $\{\mu_{n,m,1}, \mu_{n,m,2}, \dots, \mu_{n,m,m}\}$ собственных чисел матрицы (4.2) мы будем называть μ -спектром функции $\tilde{\zeta}$ и обозначать через $\text{Spec}_{n,m}^{\mu}(\tilde{\zeta})$ или просто $\text{Spec}_{n,m}^{\mu}$, если нам не будет требоваться одновременное рассмотрение аналогичных μ -спектров других функций. Будем считать, что собственные числа перенумерованы так, что $|\mu_{n,m,k}| \leq |\mu_{n,m,k+1}|$.

Спектры $\text{Spec}_{n,m}^{\mu}$ содержат и очень большие, и очень маленькие (по абсолютной величине) числа, так что удобнее использовать логарифмическое масштабирование. Определим *логарифмический μ -спектр* как (мульти)множество

$$\text{Spec}_{n,m}^{\ln \mu} = \{\ln(|\alpha|) : \alpha \in \text{Spec}_{n,m}^{\mu}\}, \quad (5.1)$$

элементы которого будем называть *логарифмическими собственными числами*.

Знаки собственных чисел несут полезную информацию, пропадающую в (5.1); чтобы сохранить ее, мы разобьем $\text{Spec}_{n,m}^{\ln \mu}$ на *положительный логарифмический μ -спектр* и *отрицательный логарифмический μ -спектр*, определяемые следующим образом:

$$\text{Spec}_{n,m}^{\ln+ \mu} = \{\ln(\alpha) : \alpha \in \text{Spec}_{n,m}^{\mu} \text{ \& } \alpha > 0\}, \quad (5.2)$$

$$\text{Spec}_{n,m}^{\ln- \mu} = \{\ln(-\alpha) : \alpha \in \text{Spec}_{n,m}^{\mu} \text{ \& } \alpha < 0\}. \quad (5.3)$$

Изображая несколько логарифмических μ -спектров на одном рисунке, мы будем сдвигать их друг относительно друга по вертикали, а именно собственное число α из $\text{Spec}_{n,m}^{\mu}$ даст точку с координатами $(x, y) = (\ln |\alpha|, m)$.

Рисунки 1–4 показывают спектры $\text{Spec}_{n,m}^{\ln \mu}$ для $n = 1, 2, 3, 4$ (рис. для $n = 5, 6$ приведены в [13]). Прежде всего можно заметить, что спектры $\text{Spec}_{n,m}^{\ln+ \mu}$ и $\text{Spec}_{n,m+1}^{\ln+ \mu}$ близки друг другу, и аналогичная близость имеет место для спектров $\text{Spec}_{n,m}^{\ln- \mu}$ и $\text{Spec}_{n,m+1}^{\ln- \mu}$. Вследствие этого мы наблюдаем некоторые “траектории” и, считая m (дискретным) временем, можем вообразить “частицы”, движущиеся по ним.

Чтобы ввести это понятие формально, мы перенумеруем логарифмические собственные числа двумя способами, а именно слева направо и наоборот. Обозначим через $N_{n,m}^{+}$ и $N_{n,m}^{-}$ количества (с учетом возможной кратности) элементов в (5.2) и (5.3) соответственно, и пусть

$$\text{Spec}_{n,m}^{\ln+ \mu} = \{\mu_{n,m,1}^{+<}, \dots, \mu_{n,m,N_{n,m}^{+}}^{+<}\} = \{\mu_{n,m,1}^{+>}, \dots, \mu_{n,m,N_{n,m}^{+}}^{+>}\}, \quad (5.4)$$

причем $\mu_{n,m,k}^{+<} \leq \mu_{n,m,k+1}^{+<}$, $\mu_{n,m,k}^{+>} \geq \mu_{n,m,k+1}^{+>}$, и, аналогично,

$$\text{Spec}_{n,m}^{\ln- \mu} = \{\mu_{n,m,1}^{-<}, \dots, \mu_{n,m,N_{n,m}^{-}}^{-<}\} = \{\mu_{n,m,1}^{->}, \dots, \mu_{n,m,N_{n,m}^{-}}^{->}\}, \quad (5.5)$$

причем $\mu_{n,m,k}^{-<} \leq \mu_{n,m,k+1}^{-<}$, $\mu_{n,m,k}^{->} \geq \mu_{n,m,k+1}^{->}$.

По верхнему индексу мы можем различать четыре типа частиц: $\pi_{n,k}^{+<}$, $\pi_{n,k}^{-<}$, $\pi_{n,k}^{+>}$ и $\pi_{n,k}^{->}$. В момент времени t эти четыре частицы имеют координаты $\mu_{n,m,k}^{+<}$, $\mu_{n,m,k}^{+>}$, $\mu_{n,m,k}^{-<}$ и $\mu_{n,m,k}^{->}$ соответственно. Частицы $\pi_{n,k_1}^{+<}$ и $\pi_{n,k_2}^{+>}$ имеют равные координаты при условии, что $k_1 + k_2 = N_{n,m}^{+} + 1$; аналогично равные координаты имеют частицы $\pi_{n,k_1}^{-<}$ и $\pi_{n,k_2}^{->}$ при условии, что $k_1 + k_2 = N_{n,m}^{-} + 1$. Из каждой пары частиц с равными координатами одна в итоге стремится к $-\infty$, а другая – к $+\infty$.

Частицы $\pi_{n,k}^{+<}$ и $\pi_{n,k}^{-<}$, которые с ростом t стремятся к $-\infty$, были названы в [1] *электронами*. Это название обязано следующему наблюдению, которое можно сделать по рис. 1–4, а еще нагляднее – по анимации [4]. А именно, траектории электронов, соответствующие положительным и отрицательным собственным числам, перемежаются друг с другом, осциллируют, но не пересекаются (отталкиваются друг от друга), т.е. ведут себя подобно одноименно заряженным частицам.

Рис. 1. Положительные (красные круги) и отрицательные (синие круги) логарифмические μ -спектры $\text{Spec}_{1,m}^{\ln^\pm \mu}$, $m = 1, \dots, 256$

Рис. 2. Положительные (красные круги) и отрицательные (синие круги) логарифмические μ -спектры $\text{Spec}_{2,m}^{\ln^\pm \mu}$, $m = 1, \dots, 256$

Рис. 3. Положительные (красные круги) и отрицательные (синие круги) логарифмические μ -спектры $\text{Spec}_{3,m}^{\ln^{\pm} \mu}$, $m = 1, \dots, 256$

Рис. 4. Положительные (красные круги) и отрицательные (синие круги) логарифмические μ -спектры $\text{Spec}_{4,m}^{\ln^{\pm} \mu}$, $m = 1, \dots, 256$

В отличие от электронов, траектории частиц $\pi_{n,k}^{+>}$ и $\pi_{n,k}^{->}$, которые с ростом m стремятся к $+\infty$, непрерывно пересекаются, образуя на рис. 1–4 характерные *косички*. В [1] эти частицы были названы *поездами*

6. Дальнейшие переформулировки и новые предположения

Рисунки 1–4 показывают, что, изменив направление движения несколько раз, каждый электрон начинает двигаться со стабилизирующей скоростью (графически это означает, что траектории приближаются к прямым линиям). Численные данные [13] позволяют предположить, что эта скорость замечательным образом связана с тривиальными нулями и поведением дзета-функции в них.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ А. Для всех n и k существует рациональное число $A_{n,k}$ такое, что при $m \rightarrow \infty$

$$\mu_{n,m,k} = (-1)^{n+k} (Y_{n,k} + o(1)) (-w_{n+k})^m, \quad (6.1)$$

где

$$Y_{n,k} = A_{n,k} \frac{d}{dw} \tilde{\zeta}(w) \Big|_{w=w_{n+k}}. \quad (6.2)$$

Более конкретно, для $n = 0$ следует ожидать, что

$$A_{0,k} = \frac{(4k-1)!!(4k+1)!!}{2^{2k-2}(2k+1)^2((k-1)!)^2((2k+1)!!)^2}. \quad (6.3)$$

При $n > 0$ величину $A_{n,k}$ удалось предсказать лишь для отдельных значений n и k :

$$\begin{aligned} A_{1,1} &= \frac{63}{23} = \frac{3^2 \times 7}{23}, \\ A_{1,2} &= \frac{325611}{10336} = \frac{3^2 \times 11^2 \times 13 \times 23}{2^5 \times 17 \times 19}, \\ A_{2,1} &= \frac{405405}{29776} = \frac{3^4 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13}{2^4 \times 1861}, \\ A_{3,1} &= \frac{23562}{325} = \frac{2 \times 3^2 \times 7 \times 11 \times 17}{5^2 \times 13}, \\ A_{4,1} &= \frac{220061716875}{539180032} = \frac{3^2 \times 5^4 \times 7 \times 11^3 \times 13 \times 17 \times 19}{2^{10} \times 526543}. \end{aligned}$$

Указанные выше ожидаемые значения $A_{n,k}$ были получены следующим образом. Вычислялось с большой точностью значение $\mu_{n,m,k}$ для достаточно большого значения m , а затем отношение

$$\frac{(-1)^{n+k} \mu_{n,m,k}}{(-w)^m \frac{d}{dw} \tilde{\zeta}(w) \Big|_{w=w_{n+k}}} \quad (6.4)$$

разлагалось в цепную дробь. Например, при $n = 1$, $m = 511$, $k = 1$ значение (6.4) равно

$$2.739130434782610541268416612253 \dots = [2, 1, 2, 1, 5, 1024242810887, 2, 1, 1, \dots]. \quad (6.5)$$

Из метрической теории цепных дробей известно, что большая величина неполного частного у “случайного” вещественного числа маловероятна, а это позволяет предположить, что $A_{n,k}$ равно конечной цепной дроби $[2, 1, 2, 1, 5]$. Косвенным подтверждением правильности подобного предположения является получение той же конечной цепной дроби при других больших

значениях m , а также наличие у числителей и знаменателей получаемой конечной дроби большого количества небольших простых делителей. Другие численные данные, подсказавшие сделанный выбор значений $A_{n,k}$, приведены в [13].

Предположение А представляется независимым от гипотезы Римана – не видно, ни как вывести его из этой гипотезы, ни как получить ее в виде следствия этого предположения. Однако, считая предположение А выполненным, мы можем дать еще одну переформулировку гипотезы Римана и высказать предположение, которое (формально) ее сильнее.

А именно, согласно (6.2) при $k > 1$ скорости электронов, соответствующих собственным числам $\mu_{n,m,k}$ и $\mu_{n+1,m,k-1}$, асимптотически различаются на константу. Это подсказывает следующее перегруппирование слагаемых в левой части (4.10):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m+1} \left(\sum_{k=1}^m \ln |\mu_{n+1,m,k}| - \sum_{k=1}^{m+1} \ln |\mu_{n,m+1,k}| \right) \\ &= -\frac{\ln |\mu_{n,m+1,1}|}{m+1} + \frac{1}{m+1} \sum_{k=1}^m (\ln |\mu_{n+1,m,k}| - \ln |\mu_{n,m+1,k+1}|). \end{aligned} \quad (6.6)$$

Согласно предположению А первое слагаемое в правой части (6.6) стремится при $m \rightarrow \infty$, к тому же значению, а именно к $-\ln |w_{n+1}|$, к которому согласно (4.10) стремится и левая часть (6.6). Иными словами, предположение А вместе с гипотезой Римана влекут необходимость обнуления в пределе второго слагаемого в правой части (6.6).

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ В (слабая форма). Для каждого n при $m \rightarrow \infty$

$$\sum_{k=1}^m (\ln |\mu_{n+1,m,k}| - \ln |\mu_{n,m+1,k+1}|) = o(m). \quad (6.7)$$

Аналогично, предположения А и В, вместе взятые, влекут гипотезу Римана.

Проведенные вычисления указывают на следующий характер поведения левой части в (6.7).

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ В (сильная форма). Для каждого n существует рациональное число B_n такое, что при $m \rightarrow \infty$

$$\sum_{k=1}^m (\ln |\mu_{n+1,m,k}| - \ln |\mu_{n,m+1,k+1}|) \rightarrow \ln(B_n). \quad (6.8)$$

Для небольших n удается указать ожидаемые значения B_n :

$$\begin{aligned} B_0 &= \frac{5}{9} = \frac{5}{3^2}, \\ B_1 &= \frac{7}{115} = \frac{7}{5 \times 23}, \\ B_2 &= \frac{143}{65135} = \frac{11 \times 13}{5 \times 7 \times 1861}, \\ B_3 &= \frac{187}{4606875} = \frac{11 \times 17}{3^4 \times 5^4 \times 7 \times 13}, \\ B_4 &= \frac{4199}{9122357475} = \frac{17 \times 19}{3^2 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 526543}, \\ B_5 &= \frac{185725}{52544656365201} = \frac{5^2 \times 17 \times 19 \times 23}{3^2 \times 7 \times 11 \times 13 \times 19793 \times 294673}. \end{aligned}$$

Рис. 5. Положительные (красные круги) и отрицательные (синие круги) логарифмические μ -спектры $\text{Spec}_{0,m}^{\ln^{\pm} \mu}(\zeta_{\text{Triv}})$, $m = 1, \dots, 256$

После обнаружения связи электронов с тривиальными нулями, выраженной в предположении А, может возникнуть желание связать поезда с парами комплексно сопряженных нетривиальных нулей. Такой связи, однако, скорее всего нет. Это показывает рассмотрение аналогов матриц (4.2), построенных для функции $\zeta_{\text{Triv}}(z) = 1/\Gamma(1 + z/2)$ вместо $\zeta(z)$. Единственными нулями этой функции являются тривиальные нули дзета-функции, тем не менее на рис. 5 отчетливо видны такие же косички. Про электроны функции $\zeta_{\text{Triv}}(z)$ можно выдвинуть аналог предположения А, причем с теми же константами $A_{n,k}$.

На рис. 1–4 видно, что поезда имеют точку сгущения. Для ее формального описания предположим, что каждый элемент спектра $\text{Spec}_{n,m}^{\ln \mu}$ имеет вес $1/m$, и рассмотрим соответствующую функцию распределения

$$F_{n,m}(x) = \sum_{\ln |\mu_{n,m,k}| \leq x} \frac{1}{m}. \quad (6.9)$$

В этих обозначениях подгипотезу $\text{RH}_n^{\text{ww}^*}$ можно переписать следующим образом.

ПОДГИПОТЕЗА $\text{RH}_n^{\text{ww}^{**}}$. При $m \rightarrow \infty$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x dF_{n,m}(x) \rightarrow \ln(W_n). \quad (6.10)$$

Вычисления (см., например, [13]) позволяют ожидать существование предельного распределения, удивительным образом независимого от n .

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ С. Существует непрерывная функция $F(x)$ такая, что для каждого n и каждого x при $m \rightarrow \infty$

$$F_{n,m}(x) \rightarrow F(x), \quad (6.11)$$

причем $F(x) = 0$ при $x < C$ и $F(x) > 0$ при $x > C$, где

$$C = \ln(\tilde{\zeta}(1)) = \ln\left(-\zeta\left(\frac{1}{2}\right)\right) = 0.378679220\dots$$

Предполагаемый вид $F(x)$ показан на рис. 6.

Рис. 6. Ожидаемый график $F(x)$

Список литературы

- [1] Yu. Matiyasevich, *Hidden Life of Riemann's Zeta Function 2. Electrons and Trains*, 2007, arXiv: [0709.0028](https://arxiv.org/abs/0709.0028).
- [2] Yu. Matiyasevich, *Hidden Life of Riemann's Zeta Function 1. Arrow, Bow, and Targets*, 2007, arXiv: [0707.1983](https://arxiv.org/abs/0707.1983).
- [3] Ю. В. Матиясевич, *Тайная жизнь дзета-функции Римана*, Выступление на Общественном семинаре «Математика и ее приложения» Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук, 2008, <http://www.mathnet.ru/present/260>.
- [4] Yu. V. Matiyasevich, *Hidden Life of Riemann's Zeta Function*, <http://logic.pdmi.ras.ru/~yumat/personaljournal/zetahiddenlife>.
- [5] Yu. Matiyasevich, "Riemann's zeta function: Some computations and conjectures", *Proceedings of Conference on Algorithmic Number Theory* (Turku, 2007), TUCS General Publ. Ser., **46**, Turku, 2007, 87–112, <http://logic.pdmi.ras.ru/~yumat/personaljournal/zetahiddenlife/talks/turku2007/Matiyasevich.2007.pdf>.
- [6] Yu. Matiyasevich, "Riemann's zeta function: More computations and conjectures", *Voronoi's Impact on Modern Science*, Proceedings of the 4th International Conference on Analytical Number Theory and Spacial Tessellations, Book 4, Vol. 1 (Kyiv, 2008), Kyiv, 2008, 2–11, <http://logic.pdmi.ras.ru/~yumat/personaljournal/zetahiddenlife/talks/kiev.2008/Matiyasevich.2008.pdf>.
- [7] Yu. V. Matiyasevich, *The Riemann Hypothesis and Eigenvalues of Related Hankel Matrices. I*, Preprint POMI 14-03, 2014, <http://www.pdmi.ras.ru/preprint/2014/14-03.html>.
- [8] B. Riemann, "Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse", *Monatsber. Berliner Akad.*, 1859; *Gesammelte Werke*, Teubner, Leipzig, 1892; Dover Books, New York, 1953; <http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Riemann/Zeta/EZeta.pdf>.
- [9] R. de Montessus de Ballore, "Sur le fraction continues algébriques", *Bull. Soc. Math. France*, **30** (1902), 28–36.
- [10] G. A. Baker, Jr., *Essentials of Padé Approximations*, Academic Press, New York, 1975.
- [11] E. B. Saff, "An extension of Montessus de Ballore's theorem on the convergence of interpolating rational functions", *J. Approx. Theory*, **6**:1 (1972), 63–67.
- [12] C. G. J. Jacobi, "Über die Darstellung einer Reihe Gegebener Werthe durch eine Gebrochne Rationale Function", *J. Reine Angew. Math.*, **30** (1846), 127–156.
- [13] Yu. V. Matiyasevich, *Structure of Eigenvalues and Eigenvectors of Certain Almost Triangular Hankel Matrices*, Выступление на 7-й Петербургской конференции по спектральной теории, 2015, http://logic.pdmi.ras.ru/~yumat/talks/birman_2015.

Лестницы Иакова, факторизация и метаморфозы в качестве приложения к функциональному уравнению Римана для $\zeta(s)$ на критической прямой

Я. Мозер

Comenius University, Slovakia

jan.mozer@fmph.uniba.sk

Посвящается памяти Анатолия Алексеевича Карацубы

1. Введение и первый результат

1.1. Напомним функциональное уравнение Римана (1859 г.):

$$\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s} \cos \frac{\pi s}{2} \Gamma(s) \zeta(s), \quad s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}. \quad (1)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Известно, что Л. Эйлер открыл формулу, эквивалентную (1) для вещественных значений переменной s в 1749 г. (см. [1; с. 23–26]), однако доказательство в работе Эйлера отсутствует.

Теперь если мы положим

$$\chi(s) = \pi^{s-1/2} \frac{\Gamma(1/2 - s/2)}{\Gamma(s/2)} \implies \chi(s) \chi(1-s) = 1 \quad (2)$$

(см. [2; с. 13, 16]), то получим, что

$$\frac{\zeta(1-s)}{\zeta(s)} = \chi(s). \quad (3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В связи с (3) используем следующее (Э. Ландау, [3; с. 30]): отношение

$$\frac{\zeta(1-s)}{\zeta(s)}$$

выражается через известную функцию ... (ясно, что эта известная функция отличается от $\zeta(s)$).

1.2. Однако в случае

$$s = \frac{1}{2} + it, \quad 1-s = \frac{1}{2} - it = \left(\frac{1}{2} + it\right)^* \quad (4)$$

имеем (из (2), (4)), что

$$\left| \chi\left(\frac{1}{2} + it\right) \right| = 1,$$

т.е. (см. (3))

$$\left| \frac{\overline{\zeta(1/2 + it)}}{\zeta(1/2 + it)} \right| = 1 \quad \text{для всех } t \neq \gamma: \quad \zeta\left(\frac{1}{2} + i\gamma\right) = 0 \quad (5)$$

(вслед за продолжением на $t = \gamma$ это справедливо для всех $t \in \mathbb{R}$).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. На критической прямой

$$s = \frac{1}{2} + it$$

Риманово функциональное уравнение (3) дает только тривиальный результат (5) (ясно, что главная цель функционального уравнения Римана – это аналитическое продолжение $\zeta(s)$ на $\mathbb{C} \setminus \{1\}$).

1.3. Наше замечание 2, очевидно, приводит к следующему вопросу.

ВОПРОС. Как иначе выбрать точки

$$t_2 > t_1 > 0 \quad (6)$$

(скажем) из соответствующего множества, чтобы отношение (из (3), (5))

$$\left| \frac{\zeta(1/2 + it_2)}{\zeta(1/2 + it_1)} \right|, \quad t_1, t_2 \neq \gamma, \quad (7)$$

выражалось известной функцией?

Существует способ дать ответ на вопрос, причем один ответ из набора многих возможных – это наш метод преобразования с помощью интегралов, взятых в противоположных направлениях (см. [4; (4.1)–(4.19)]).

1.4. В настоящей работе мы получаем, например, следующее.

ФОРМУЛА 1. Для любого достаточно большого $L \in \mathbb{N}$ и любого $U \in (0, \pi)$ существуют функции

$$\begin{aligned} \alpha_0^4 = \alpha_0^4(L, U; a, b), \quad \alpha_1^4 = \alpha_1^4(L, U; a, b), \quad \beta_1^4 = \beta_1^4(L, U), \\ \alpha_0^4, \alpha_1^4, \beta_1^4 \neq \gamma: \quad \zeta\left(\frac{1}{2} + i\gamma\right) = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

такие, что

$$\left| \frac{\zeta(1/2 + i\alpha_1^4)}{\zeta(1/2 + i\beta_1^4)} \right| \sim \frac{\arctg(\sqrt{(a-b)/(a+b)} \operatorname{tg}(U/2))}{\sqrt{(a-b)/(a+b)} (U/2)} \frac{a + b \cos(\alpha_0^4)}{a + b}, \quad L \rightarrow \infty, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_0^4 \in (2\pi L, 2\pi L + U), \quad \alpha_1^4, \beta_1^4 \in (2\pi^1 L, 2\pi^1 L + U), \\ (2\pi L, 2\pi L + U) \prec (2\pi^1 L, 2\pi^1 L + U), \end{aligned} \quad (10)$$

и функции (8) обладают следующим свойством:

$$\alpha_1^4 - \alpha_0^4 \sim (1 - c)\pi(2\pi L), \quad L \rightarrow \infty,$$

где c – постоянная Эйлера и $\pi(t)$ – функция распределения простых чисел.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Формула (9) дает ответ на вопрос (из (7), (10)) в направлении, указанном в замечании 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Отметим, что в явном виде в случае (7), т.е. на критической прямой, мы можем предположить, что известная функция – это любая функция, например,

$$f[|\zeta|], \quad \arg \zeta, \quad \dots$$

В этом направлении мы получили следующее (см. также соответствующие формулы в статьях [4]–[6], $k = 1$)

ФОРМУЛА 2. Имеем

$$\left| \frac{\zeta(1/2 + i\alpha_1^2)}{\zeta(1/2 + i\beta_1^2)} \right| \sim \frac{\sqrt{\zeta(2\sigma)}}{|\zeta[\sigma + i\alpha_0^2(\sigma)]|}, \quad \sigma \geq 1. \quad (11)$$

ФОРМУЛА 3. Имеем

$$\left| \frac{\zeta(1/2 + i\alpha_1^3)}{\zeta(1/2 + i\beta_1^3)} \right| \sim \pi^l \sqrt{c_l} \left| \int_0^{\alpha_0^3(T)} \arg \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) dt \right|^{-l}. \quad (12)$$

ФОРМУЛА 4. Имеем

$$\left| \frac{\zeta(1/2 + i\alpha_1^1)}{\zeta(1/2 + i\beta_1^1)} \right| \sim \sqrt[4]{\frac{2\pi}{H}} \frac{1}{\sqrt{|\zeta(1/2 + i\alpha_0^1)|}}. \quad (13)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Результаты (9), (11)–(13) основаны на таких свойствах лестницы Иакова $\varphi_1(t)$:

$$\begin{aligned} \alpha_0^4 = \varphi_1^1(d) = \varphi_1(d) &\in (2\pi L, 2\pi L + U), & \alpha_1^4 = \varphi_1^0(d) = d &\in (2\pi L, 2\pi L + U), \\ \beta_1^4 = \varphi_1^0(e) = e &\in (2\pi L, 2\pi L + U). \end{aligned} \quad (14)$$

1.5. Напомним для полноты картины, что лестница Иакова

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{2} \varphi(t)$$

была введена в нашей работе [7] (см. также [8]), где функция $\varphi(t)$ – произвольное решение нелинейного интегрального уравнения

$$\int_0^{\mu[x(T)]} Z^2(t) e^{-t(2/x(T))} dt = \int_0^T Z^2(t) dt,$$

в котором каждая допустимая функция $\mu(y)$ порождает решение

$$y = \varphi(T; \mu) = \varphi(T), \quad \mu(y) \geq 7y \ln y.$$

Функция $\varphi_1(t)$ называется лестницей Иакова в соответствии со “сном Иакова в Хумаше, Берейшит, 28:12”.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Применением лестниц Иакова показано (см. [7]), что классический интеграл Харди–Литтлвуда (1918)

$$\int_0^T \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^2 dt$$

выражается – в дополнение к формуле Харди–Литтлвуда (и другим аналогичным), обладающей неограниченной ошибкой при $T \rightarrow \infty$, – следующим бесконечным множеством почти точных формул:

$$\int_0^T \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^2 dt = \varphi_1(T) \ln \varphi_1(T) + (c - \ln 2\pi) \varphi_1(T) + c_0 + \mathcal{O}\left(\frac{\ln T}{T}\right), \quad T \rightarrow \infty,$$

где c – константа Эйлера и c_0 – константа из формулы Тичмарша–Кобера–Аткинсона.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Лестница Иакова $\varphi_1(t)$ может быть истолкована из нашей формулы (см. [7])

$$T - \varphi_1(T) \sim (1 - c)\pi(T), \quad \pi(T) \sim \frac{T}{\ln T},$$

где $\pi(T)$ является функцией распределения простых чисел, как функция, асимптотически дополнительная к $(1 - c)\pi(T)$ в следующем смысле

$$\varphi_1(T) + (1 - c)\pi(T) \sim T, \quad T \rightarrow \infty.$$

2. Факторизация, осциллирующая Q -система и ее метаморфозы в качестве общего функционального дополнения к уравнению Римана на критической прямой

2.1. Осциллирующая Q -система определена в работе [4; (2.1)] следующим образом:

$$\begin{aligned} G(x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_k) &\stackrel{\text{def}}{=} \prod_{r=1}^k \left| \frac{\zeta(1/2 + ix_r)}{\zeta(1/2 + iy_r)} \right| \\ &= \prod_{r=1}^k \left| \frac{\sum_{n \leq \tau(x_r)} (2/\sqrt{n}) \cos\{\vartheta(x_r) - x_r \ln n\} + R(x_r)}{\sum_{n \leq \tau(y_r)} (2/\sqrt{n}) \cos\{\vartheta(y_r) - y_r \ln n\} + R(y_r)} \right|, \quad (15) \\ \tau(t) &= \sqrt{\frac{t}{2\pi}}, \quad R(t) = \mathcal{O}(t^{-1/4}), \quad k \leq k_0 \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

для соответствующих множеств (см. [4; (2.2)]) точек

$$(x_1, \dots, x_k), \quad (y_1, \dots, y_k).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Очевидно, что определение (15) основано на простом обобщении

$$\left| \frac{\zeta(1/2 + ix)}{\zeta(1/2 + iy)} \right| \rightarrow \prod_{r=1}^k \left| \frac{\zeta(1/2 + ix_r)}{\zeta(1/2 + iy_r)} \right|$$

(см. (7), (11)–(13)).

Напомним некоторые из известных результатов, играющих роль функционального уравнения Римана на критической прямой.

(А) Существуют функции (см. [4; (2.5)])

$$\begin{aligned} \alpha_r^2 &= \alpha_r^2(\sigma, T, \Theta, k, \epsilon), \quad r = 0, 1, \dots, k, \quad \beta_r^2 = \beta_r^2(T, \Theta, k), \quad r = 1, \dots, k, \\ \alpha_r^2, \beta_r^2 &\neq \gamma: \quad \zeta\left(\frac{1}{2} + i\gamma\right) = 0, \end{aligned}$$

для допустимых

$$\sigma, T, \Theta, k, \epsilon$$

такие, что справедлива следующая формула факторизации:

$$\prod_{r=1}^k \left| \frac{\zeta(1/2 + i\alpha_r^2)}{\zeta(1/2 + i\beta_r^2)} \right| \sim \frac{\sqrt{\zeta(2\sigma)}}{|\zeta[\sigma + i\alpha_0^2(\sigma)]|}, \quad T \rightarrow \infty, \quad (16)$$

(см. [4; (2.6)]), т.е. существует множество метаморфоз осциллирующей Q -системы (15)

$$\prod_{r=1}^k \left| \frac{\sum_{n \leq \tau(\alpha_r^2)} (2/\sqrt{n}) \cos\{\vartheta(\alpha_r^2) - \alpha_r^2 \ln n\} + R(\alpha_r^2)}{\sum_{n \leq \tau(\beta_r^2)} (2/\sqrt{n}) \cos\{\vartheta(\beta_r^2) - \beta_r^2 \ln n\} + R(\beta_r^2)} \right| \\ \sim \sqrt{\zeta(2\sigma)} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{\sigma + i\alpha_0^2(\sigma)} \right|, \quad \sigma > 1 + \epsilon, \quad T \rightarrow \infty \quad (17)$$

(см. [4; (2.6)]), где $\mu(n)$ – функция Мёбиуса.

(B) Существуют функции

$$\alpha_r^3 = \alpha_r^3(T, l, \epsilon, k), \quad r = 0, 1, \dots, k, \quad l \in \mathbb{N}, \quad \beta_r^3 = \beta_r^3(T, \epsilon, k), \quad r = 1, \dots, k, \\ \alpha_r^3, \beta_r^3 \neq \gamma: \quad \zeta\left(\frac{1}{2} + i\gamma\right) = 0,$$

для допустимых

$$T, l, \epsilon, k$$

такие, что справедлива следующая формула факторизации:

$$\left| \int_0^{\alpha_0^3} \arg \zeta(1/2 + it) dt \right| \sim \pi c^{1/(2l)} \prod_{r=1}^k \left| \frac{\zeta(1/2 + i\alpha_r^3)}{\zeta(1/2 + i\beta_r^3)} \right|^{-1/l}, \quad T \rightarrow \infty \quad (18)$$

(см. [6; (2.4)]), т.е. существует множество метаморфоз осциллирующей Q -системы (15)

$$\prod_{r=1}^k \left| \frac{\sum_{n \leq \tau(\alpha_r^3)} (2/\sqrt{n}) \cos\{\vartheta(\alpha_r^3) - \alpha_r^3 \ln n\} + R(\alpha_r^3)}{\sum_{n \leq \tau(\beta_r^3)} (2/\sqrt{n}) \cos\{\vartheta(\beta_r^3) - \beta_r^3 \ln n\} + R(\beta_r^3)} \right| \\ \sim \pi^l \sqrt{c_l} \left| \int_0^{\alpha_0^3} \arg \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) dt \right|, \quad T \rightarrow \infty \quad (19)$$

(см. [6; (4.6)]).

(B1) Если переписать формулу (18) следующим образом:

$$\left| \int_{\mu_m}^{\alpha_0^3} \arg \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) dt \right| \sim \pi c_l^{1/(2l)} \prod_{r=1}^k \left| \frac{\sum_{n \leq \tau(\alpha_r^3)} (2/\sqrt{n}) \cos\{\vartheta(\alpha_r^3) - \alpha_r^3 \ln n\} + R(\alpha_r^3)}{\sum_{n \leq \tau(\beta_r^3)} (2/\sqrt{n}) \cos\{\vartheta(\beta_r^3) - \beta_r^3 \ln n\} + R(\beta_r^3)} \right|^{-1/l},$$

где

$$m = m(\alpha_0^3), \quad \mu_m < \alpha_0^3 < \mu_{m+1}, \quad S_1(\mu_m) = 0$$

(см. [6; (4.11)]), то мы получим множество метаморфоз (19) в обратном направлении. А именно, мы начинаем с

$$\left| \int_0^w \arg \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) dt \right|$$

т.е. с группы Аарона, скажем,

$$\rightarrow \left| \int_{\mu_m}^{\alpha_0^3} \arg \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) dt \right|,$$

т.е. зародыш группы Аарона (соответствующий $w = \alpha_0^3$)

$$\sim \left| \frac{\sum_{n \leq \tau(\alpha_r^3)} (2/\sqrt{n}) \cos\{\vartheta(\alpha_r^3) - \alpha_r^3 \ln n\} + R(\alpha_r^3)}{\sum_{n \leq \tau(\beta_r^3)} (2/\sqrt{n}) \cos\{\vartheta(\beta_r^3) - \beta_r^3 \ln n\} + R(\beta_r^3)} \right|$$

уже преобразился “в миндалях созревших” (см. “Тора, 4-й книге Моисея, Хумаше, Бемидбар, 17:23”).

(C) Мы получили первый набор метаморфоз первозданной мультиформы

$$G(x_1, \dots, x_k) = \prod_{r=1}^k \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + ix_r\right) \right|$$

в статье [5]. Соответствующие результаты, выраженные в терминах осциллирующей Q -системы (15), это (см. [5; (1.7), (2.5)]) формула факторизации

$$\prod_{r=1}^k \left| \frac{\zeta(1/2 + ix)}{\zeta(1/2 + iy)} \right| \sim \sqrt[4]{\frac{2\pi}{H}} \frac{1}{|\zeta(1/2 + i\alpha_0^1)|} \quad (20)$$

и соответствующее множество метаморфоз осциллирующей Q -системы

$$\prod_{r=1}^k \left| \frac{\sum_{n \leq \tau(\alpha_r^1)} (2/\sqrt{n}) \cos\{\vartheta(\alpha_r^1) - \alpha_r^1 \ln n\} + R(\alpha_r^1)}{\sum_{n \leq \tau(\beta_r^1)} (2/\sqrt{n}) \cos\{\vartheta(\beta_r^1) - \beta_r^1 \ln n\} + R(\beta_r^1)} \right| \sim \frac{\sqrt[4]{2\pi/H}}{\sqrt{|\sum_{n \leq \tau(\alpha_0^1)} (2/\sqrt{n}) \cos\{\vartheta(\alpha_0^1) - \alpha_0^1 \ln n\} + R(\alpha_0^1)|}}, \quad T \rightarrow \infty. \quad (21)$$

(D) Кроме того, последовательности

$$\{\alpha_r^n\}_{r=0}^k, \quad \{\beta_r^n\}_{r=1}^k, \quad n = 1, 2, 3,$$

обладают следующим свойством:

$$\begin{aligned} \alpha_{r+1}^n - \alpha_r^n &\sim (1-c)\pi(T), & r = 0, 1, \dots, k-1, \\ \beta_{r+1}^n - \beta_r^n &\sim (1-c)\pi(T), & r = 1, \dots, k-1, \quad k \geq 2 \end{aligned}$$

(см. (6), (7), замечания 8 и 9).

3. Теорема; факторизация как аналог функционального уравнения Римана на критической прямой

3.1. Воспользуемся следующим Эйлеровым интегралом (см. [9; с. 134–135]):

$$\begin{aligned} \int \frac{d\varphi}{a + b \cos \varphi} &= \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arctg} \frac{(a-b) \operatorname{tg}(\varphi/2)}{\sqrt{a^2 - b^2}}, & \varphi \in (0, \pi), \\ a + b > 0, \quad a^2 - b^2 > 0 &\implies a > |b|. \end{aligned} \quad (22)$$

Из (22) сразу получаем следующую формулу:

$$\int_{2\pi L}^{2\pi L+U} \frac{d\varphi}{a + b \cos \varphi} = \frac{1}{a+b} U \frac{\operatorname{arctg}(\sqrt{(a-b)/(a+b)} \operatorname{tg}(U/2))}{\sqrt{(a-b)/(a+b)} (U/2)}, \quad L \in \mathbb{Z}, \quad U \in (0, \pi). \quad (23)$$

Теперь если мы используем метод преобразования (см. [4; (4.1)–(4.19)]) в соответствии с формулой (23), то получим следующее утверждение.

ТЕОРЕМА. Пусть

$$[2\pi L, 2\pi L + U] \rightarrow [\pi L, \pi L + U], \dots, [\pi L, \pi L + U] \quad (24)$$

где

$$[\pi L, \pi L + U], \quad r = 1, \dots, k, \quad k \leq k_0 \in \mathbb{N},$$

есть сегменты, повторяющиеся в обратном направлении по отношению к первому сегменту в (24), и k_0 есть произвольное фиксированное число. Тогда существует достаточно большое

$$T_0 = T_0(a, b) > 0$$

такое, что для каждого

$$L > \frac{1}{2\pi} T_0$$

и любых допустимых L, U, k существуют функции

$$\begin{aligned} \alpha_r^4(L, U, k; a, b), \quad r = 0, 1, \dots, k, \quad \beta_r^4(L, U, k), \quad r = 1, \dots, k, \\ \alpha_r^4, \beta_r^4 \neq \gamma: \quad \zeta\left(\frac{1}{2} + i\gamma\right) = 0, \end{aligned} \quad (25)$$

такие, что

$$\prod_{r=1}^k \left| \frac{\zeta(1/2 + i\alpha_r^4)}{\zeta(1/2 + i\beta_r^4)} \right|^2 \sim \frac{\arctg(\sqrt{(a-b)/(a+b)} \operatorname{tg}(U/2))}{\sqrt{(a-b)/(a+b)} (U/2)} \frac{a + b \cos \alpha_0^4}{a + b}, \quad L \rightarrow \infty, \quad (26)$$

причем

$$G(\alpha^4, \beta^4) \sim \sqrt{(\dots)} \iff \{G(\alpha^4, \beta^4)\}^2 \sim (\dots).$$

Кроме того, последовательности

$$\{\alpha_r^4\}_{r=0}^k, \quad \{\beta_r^4\}_{r=1}^k, \quad n = 1, 2, 3,$$

обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned} 2\pi L < \alpha_0^4 < \alpha_1^4 < \dots < \alpha_k^4, \quad 2\pi L < \beta_1^4 < \beta_2^4 < \dots < \beta_k^4, \\ \alpha_0^4 \in (2\pi L, 2\pi L + U), \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \alpha_r^4, \beta_r^4 \in (2\pi L, 2\pi L + U), \quad r = 1, 2, \dots, k, \\ \alpha_{r+1}^4 - \alpha_r^4 \sim (1-c)\pi(2\pi L), \quad r = 0, 1, \dots, k-1, \\ \beta_{r+1}^4 - \beta_r^4 \sim (1-c)\pi(2\pi L), \quad r = 1, \dots, k-1, \quad k \geq 2, \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$\pi(T) \sim \frac{T}{\ln T}, \quad T \rightarrow \infty,$$

– функция распределения простых чисел и c – константа Эйлера.

3.2. Теперь отметим следующее.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Асимптотическое поведение множеств

$$\{\alpha_r^4\}_{r=0}^k \quad (29)$$

следующее: если $L \rightarrow \infty$, то точки каждого множества (29) неограниченно разбегаются друг от друга и все вместе уходят на бесконечность; следовательно, при $L \rightarrow \infty$ каждое из множеств (29) ведет себя как одномерная вселенная Фридмана–Хаббла.

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Теперь представим результат (26), учитывая (1), (3), замечания 2 и 9, в виде

$$\prod_{r=0}^k \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + i\alpha_r^4 \right) \right| \sim \sqrt{\chi_4(U, \alpha_0^4)} \prod_{r=1}^k \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + i\beta_r^4 \right) \right|, \quad (30)$$

где χ_4 обозначает правую часть (26). Совершенно очевидно, что эта формула является аналогом функционального уравнения Римана на критической прямой.

ЗАМЕЧАНИЕ 12. Ясно, что первый результат (9) – это особый случай (26).

4. О множестве метаморфоз, которые соответствуют формуле (26)

Напомним формулу Римана–Зигеля в спектральной форме:

$$\begin{aligned} Z(t) &= \sum_{n \leq \tau(x_r)} \frac{2}{\sqrt{n}} \cos\{t\omega_n(x_r) + \psi(x_r)\} + \mathcal{O}(x_r^{-1/4}), \\ \tau(x_r) &= \sqrt{\frac{x_r}{2\pi}}, \quad t \in [x_r, x_r + V], \quad V \in (0, x_r^{1/4}), \end{aligned} \quad (31)$$

и аналогично для $x_r \rightarrow y_r$, где

$$T_0 < 2\pi L < x_r, y_r$$

(см. [5; (6.1)], см. [6; (4.4) и замечание 6]).

ЗАМЕЧАНИЕ 13. Назовем выражения

$$\frac{2}{\sqrt{n}} \cos\{t\omega_n(x_r) + \psi(x_r)\}, \quad \dots \quad (32)$$

осцилляторами Римана, у которых:

(а) амплитуда

$$\frac{2}{\sqrt{n}};$$

(b) некогерентная локальная фазовая константа

$$\psi(x_r) = -\frac{x_r}{2} - \frac{\pi}{8};$$

(с) несинхронизированное локальное время

$$t = t(x_r) \in [x_r, x_r + V];$$

(d) локальный спектр циклических частот

$$\{\omega_n(x_r)\}_{n \leq \tau(x_r)}, \quad \omega_n(x_r) = \ln \frac{\tau(x_r)}{n}, \quad \dots$$

ЗАМЕЧАНИЕ 14. Теперь мы видим, что Q -система, у которой

$$\left| \zeta \left(\frac{1}{2} + it \right) \right| = |Z(t)|, \quad (33)$$

действительно сложная колебательная система (см. (15), (31), (33)).

Таким образом, получаем следующее (см. (15), (26), (31), замечание 14 и (33)).

СЛЕДСТВИЕ 1. *Набор метаморфоз*

$$\prod_{r=1}^k \left| \frac{\sum_{n \leq \tau(\alpha_r^4)} (2/\sqrt{n}) \cos\{\alpha_r^4 \omega_n(\alpha_r^4) + \psi(\alpha_r^4)\} + R(\alpha_r^4)}{\sum_{n \leq \tau(\beta_r^4)} (2/\sqrt{n}) \cos\{\beta_r^4 \omega_n(\beta_r^4) + \psi(\beta_r^4)\} + R(\beta_r^4)} \right| \sim \frac{\arctg(\sqrt{(a-b)/(a+b)} \operatorname{tg}(U/2))}{\sqrt{(a-b)/(a+b)} (U/2)} \frac{a+b \cos(\alpha_0^4)}{a+b}, \quad L \rightarrow \infty, \quad (34)$$

соответствует формуле факторизации (26).

ЗАМЕЧАНИЕ 15. По теореме из п. 3.1 существуют функции контроля (25) (схема Голема) множества метаморфоз (34) осциллирующей Q -системы (15) (см. также (31), (33)).

ЗАМЕЧАНИЕ 16. Механизм метаморфоз имеет следующий вид. Пусть (см. (25) и [4; (2.2)])

$$M_k^3 = \{\alpha_1^4, \dots, \alpha_k^4\}, \quad M_k^4 = \{\beta_1^4, \dots, \beta_k^4\}, \quad (35)$$

где (см. [4; (2.12)])

$$M_k^3 \subset M_k^1 \subset (T_0, +\infty)^k, \quad M_k^4 \subset M_k^2 \subset (T_0, +\infty)^k. \quad (36)$$

Теперь если после случайной выборки таких точек (ср. условия [4; (2.2)]) мы получим, что

$$(x_1, \dots, x_k) = (\alpha_1^4, \dots, \alpha_k^4) \subset M_k^3, \quad (y_1, \dots, y_k) = (\beta_1^4, \dots, \beta_k^4) \subset M_k^4 \quad (37)$$

(см. (35), (36)), то в точках (37) Q -система (15) меняет свою старую форму (“куколку”) на новую форму (“бабочку”), а последняя находится под контролем функции α_0^4 .

ЗАМЕЧАНИЕ 17. Теперь должно быть ясно, что множество метаморфоз осциллирующей Q -системы также принадлежит семейству аналогов функционального уравнения Римана на критической прямой.

5. О декомпозиции результата метаморфоз (34) на три части: сигнал, шум и погрешность

В этом разделе используется терминология из теории обработки сигналов.

5.1. Напомним (см. [4; (4.11)]), что

$$\tilde{Z}^2(t) = \frac{|\zeta(1/2 + it)|^2}{\omega(t)}, \quad \omega(t) = \left\{ 1 + \mathcal{O}\left(\frac{\ln \ln t}{\ln t}\right) \right\} \ln t.$$

Поскольку в нашем случае

$$t \rightarrow 2\pi L,$$

то (см. [4; (4.11), (4.12)])

$$\tilde{Z}^2(\alpha_r^4) = \frac{|\zeta(1/2 + i\alpha_r^4)|^2}{\{1 + \mathcal{O}(\ln \ln L / \ln L)\} \ln t}, \quad \dots$$

ЗАМЕЧАНИЕ 18. Основной вид асимптотической формулы для метаморфоз (34) – это

$$\prod_{r=1}^k \left| \frac{\sum_{n \leq \tau(\alpha_r^4)} (2/\sqrt{n}) \cos\{\alpha_r^4 \omega_n(\alpha_r^4) + \psi(\alpha_r^4)\} + R(\alpha_r^4)}{\sum_{n \leq \tau(\beta_r^4)} (2/\sqrt{n}) \cos\{\beta_r^4 \omega_n(\beta_r^4) + \psi(\beta_r^4)\} + R(\beta_r^4)} \right| \sim \left\{ 1 + \mathcal{O}\left(\frac{\ln \ln L}{\ln L}\right) \right\} \frac{\arctg(\sqrt{(a-b)/(a+b)} \operatorname{tg}(U/2))}{\sqrt{(a-b)/(a+b)} (U/2)} \frac{a+b \cos(\alpha_0^4)}{a+b}. \quad (38)$$

Так как последние два сомножителя в правой части формулы (38) – ограниченные функции для всех

$$U \in (0, \pi), \quad L > \frac{1}{2\pi} T_0$$

(для всех фиксированных допустимых k, a, b , см. (22), (25)), то из (38) мы получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Имеем*

$$\begin{aligned} & \prod_{r=1}^k \left| \frac{\sum_{n \leq \tau(\alpha_r^4)} (2/\sqrt{n}) \cos\{\alpha_r^4 \omega_n(\alpha_r^4) + \psi(\alpha_r^4)\} + R(\alpha_r^4)}{\sum_{n \leq \tau(\beta_r^4)} (2/\sqrt{n}) \cos\{\beta_r^4 \omega_n(\beta_r^4) + \psi(\beta_r^4)\} + R(\beta_r^4)} \right| \\ &= \frac{a}{a+b} \frac{\arctg(\sqrt{(a-b)/(a+b)} \operatorname{tg}(U/2))}{\sqrt{(a-b)/(a+b)} (U/2)} \\ &+ \frac{b}{a+b} \frac{\arctg(\sqrt{(a-b)/(a+b)} \operatorname{tg}(U/2))}{\sqrt{(a-b)/(a+b)} (U/2)} \cos(\alpha_0^4) + \mathcal{O}\left(\frac{\ln \ln L}{\ln L}\right), \quad L \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (39)$$

5.2. Напомним (см. (25)), что

$$\alpha_0^4 = \alpha_0^4(L, U, k; a, b) = \alpha_0^4(L, U) \quad (40)$$

для допустимых фиксированных k, a, b .

(а) Мы видим, что первая функция в правой части (39) есть L -й член

$$\begin{aligned} f(2\pi L + U) &= g_L(U) = \frac{a}{a+b} \frac{\arctg(\sqrt{(a-b)/(a+b)} \operatorname{tg}(U/2))}{\sqrt{(a-b)/(a+b)} (U/2)}, \quad U \in (0, \pi), \\ g_L(U) &= g_{L'}(U), \quad L, L' > \frac{1}{2\pi} T, \quad 2\pi L + U \in [2\pi L, 2\pi L + \pi), \end{aligned} \quad (41)$$

стационарной последовательности

$$\{g_L(U)\}_{L > T_0/(2\pi)}, \quad U \in (0, \pi). \quad (42)$$

Соответствующий сигнал определяется посредством (41), (42). Отсюда получаем, что определенный сигнал выражается через функции в правой части формулы (39) (см. (42)).

(б) Основным множителем второго члена является следующая функция:

$$\cos(\alpha_0^4), \quad \alpha_0^4 \in \alpha_0^4(L, U),$$

где (из (14), (40))

$$\alpha_0^4 = \varphi_1(d) \in (2\pi L, 2\pi L + U), \quad d = d(L, U),$$

и $\varphi_1(d)$ – значение лестницы Иакова. То есть распределение значений

$$\alpha_0^4 \in (2\pi L, 2\pi L + U), \quad U \in (0, \pi),$$

как можно предположить, очень сложное.

Следовательно, вторую функцию будем характеризовать как шум – бесполезную часть сигнала. Шум можно регулировать путем изменения параметра b ,

$$a > |b|$$

(см. (22)), т.е. путем уменьшения $|b|$.

(с) Третью функцию будем называть (мелкой) погрешностью, так как

$$\mathcal{O}\left(\frac{\ln \ln L}{\ln L}\right) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 19. Конечное состояние метаморфоз в (39) разбивается на три части: сигнал, шум и погрешность.

6. Множество различных метаморфоз в (34)

Разумеется, существует точка $U_0 \in (0, \pi)$ такая, что (см. (41))

$$g'_L(U)|_{U=U_0} \neq 0 \quad \text{для всех } L > \frac{T_0}{2\pi},$$

т.е.

$$\begin{aligned} g'_L(U) \neq 0, \quad U \in O_\delta(U_0) = (U_0 - \delta, U_0 + \delta), \\ U' \neq U'' \implies g_L(U') \neq g_L(U'') \quad \text{для всех } U', U'' \in O_\delta(U_0) \end{aligned} \quad (43)$$

для подходящего $\delta > 0$.

Далее, мы будем предполагать, что существуют такие

$$U_1, U_2 \in O_\delta(U_0), \quad U_1 \neq U_2,$$

что

$$\begin{aligned} \alpha_r^4(U_1, L) &= \alpha_r^4(U_2, L), \quad r = 0, 1, \dots, k, \\ \beta_r^4(U_1, L) &= \beta_r^4(U_2, L), \quad r = 1, \dots, k, \end{aligned} \quad (44)$$

для всех

$$L > \tilde{L} > \frac{T_0}{2\pi}.$$

В этом случае путем сравнения формул (38) для U_1, U_2 мы получаем, что

$$\frac{\arctg(\sqrt{(a-b)/(a+b)} \operatorname{tg}(U_1/2))}{\sqrt{(a-b)/(a+b)} (U_1/2)} = \left\{ 1 + \mathcal{O}\left(\frac{\ln \ln L}{\ln L}\right) \right\} \frac{\arctg(\sqrt{(a-b)/(a+b)} \operatorname{tg}(U_2/2))}{\sqrt{(a-b)/(a+b)} (U_2/2)},$$

т.е. в предельном случае имеем равенство

$$\frac{\arctg(\sqrt{(a-b)/(a+b)} \operatorname{tg}(U_1/2))}{\sqrt{(a-b)/(a+b)} (U_1/2)} = \frac{\arctg(\sqrt{(a-b)/(a+b)} \operatorname{tg}(U_2/2))}{\sqrt{(a-b)/(a+b)} (U_2/2)},$$

которое противоречит (43).

Следовательно, для любых

$$U', U'' \in O_\delta(U_0), \quad U' \neq U''$$

существует бесконечная подпоследовательность

$$\{\bar{L}\} \subset \{L\}, \quad \bar{L} > \tilde{L},$$

такая, что (см. (44))

$$\begin{aligned} (\alpha_0^4(U', \bar{L}), \alpha_1^4(U', \bar{L}), \dots, \alpha_k^4(U', \bar{L}), \beta_1^4(U', \bar{L}), \dots, \beta_k^4(U', \bar{L})) \\ \neq (\alpha_0^4(U'', \bar{L}), \alpha_1^4(U'', \bar{L}), \dots, \alpha_k^4(U'', \bar{L}), \beta_1^4(U'', \bar{L}), \dots, \beta_k^4(U'', \bar{L})) \quad \text{для всех } \bar{L} \in \{\bar{L}\}. \end{aligned} \quad (45)$$

Поэтому, из (45) получаем

СЛЕДСТВИЕ 3. Существует бесконечное множество различных метаморфоз (34).

Я благодарю Екатерину Карацубу и Михала Деметриана за моральную поддержку моего исследования лестниц Иакова.

Список литературы

- [1] G. H. Hardy, *Divergent Series*, Oxford, Oxford Univ. Press, 1949.
- [2] E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-Function*, Clarendon Press, Oxford, 1951.
- [3] E. Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, Teubner, Leipzig, 1909.
- [4] J. Moser, *Jacob's Ladders, Riemann's Oscillators, Quotient of the Oscillating Multiforms and Set of Metamorphoses of This System*, arXiv: [1506.00442](#).
- [5] J. Moser, *Jacob's Ladders, ζ -Factorization and Infinite Set of Metamorphosis of a Multiform*, arXiv: [1501.07705](#).
- [6] J. Moser, *Jacob's Ladders, New Properties of the Function $\arg \zeta(1/2 + it)$ and Corresponding Metamorphoses*, arXiv: [1506.07967](#).
- [7] Я. Мозер, “Лестницы Якова и почти точные асимптотические представления интеграла Харди–Литтлвуда”, *Матем. заметки*, **88**:3 (2010), 446–455.
- [8] J. Moser, “Jacob's ladders, the structure of the Hardy–Littlewood integral and some new class of nonlinear integral equations”, *Теория чисел, алгебра и анализ*, Сборник статей. К 75-летию со дня рождения профессора Анатолия Алексеевича Карацубы, Тр. МИАН, **276**, МАИК, М., 2012, 213–226.
- [9] L. Euleri, *Institutionum calculi integralis*, Volumen primum, Impensis Academiae Imperialis Scientiarum, Petropoli, 1768; Л. Эйлер, *Интегральное исчисление*, Гостехиздат, М., 1956.

Научное издание

Современные проблемы математики

Выпуск 23

Математика и информатика

Компьютерная верстка: *Ю. А. Пупырев*

Подписано в печать 19.10.2016. Тираж 100 экз.

Отпечатано в Математическом институте им. В.А. Стеклова Российской Академии наук
Москва, 119991, ул. Губкина, 8.

<http://www.mathnet.ru/spm/> e-mail: pupyrev@mi.ras.ru