МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. В. А. СТЕКЛОВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

Выпуск 24

Издание выходит с 2003 года

Теория чисел и приложения, 2

*К 80-летию со дня рождения
профессора Анатолия Алексеевича Карацубы*

Москва
2017

УДК 511+512+517+519.7

ББК 22

С56

Редакционная коллегия:

*А. Г. Сергеев (главный редактор),
А. М. Зубков, С. П. Коновалов, Д. О. Орлов,
Ю. А. Пупырев (ответственный секретарь), Д. В. Трещёв*

Редакционный совет:

*С. И. Адян, С. М. Асеев, О. В. Бесов,
С. В. Болотин, И. В. Волович, А. Д. Изаак, С. П. Новиков,
А. Н. Паршин, А. А. Славнов, А. С. Холево, Е. М. Чирка*

Редактор тома:

Е. А. Карацуба

С56 **Теория чисел и приложения.** К 80-летию со дня рождения профессора Анатолия Алексеевича Карацубы – М.: МИАН, 2017. – 104 с. – (Современные проблемы математики, ISSN 2226-5929; Вып. 24).

ISBN 978-5-98419-076-3

Серия “Современные проблемы математики” – рецензируемое продолжающееся издание Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук (МИАН). Публикация работ осуществляется по решению Редакционного совета, в который входят представители администрации и заведующие отделами МИАН.

DOI: 10.4213/book1679

ISBN 978-5-98419-076-3

© Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук, 2017

Анатолий Алексеевич Карацуба
(31.01.1937–28.09.2008)

Содержание

О конференции памяти А. А. Карацубы по теории чисел и приложениям	7
<i>А. Б. Калмынин</i>	
1. Введение	7
2. Обзор докладов 2016 года	7
Об одном уравнении, включающем дробные степени с одной простой и одной почти простой переменными	46
<i>Ж. Х. Петров, Д. И. Толев</i>	
1. Введение и формулировка результата	46
2. Обозначения	47
3. Доказательство теоремы	47
Значения бета-функции: от цепной дроби Рамануджана до аппроксимаций Эрмита–Паде	66
<i>Т. Ривоаль</i>	
1. Введение	66
2. Доказательство результатов	71
3. Замечания о цепной дроби (7)	75
4. Линейное рекуррентное соотношение, связанное со следствием 2	76
5. Заключительные замечания	77
Представление натуральных чисел слагаемыми определенного вида	81
<i>В. Г. Чирский</i>	
Несколько замечаний к теореме о разложимости Балога–Вули и величинах D^+, $D^\times$	85
<i>И. Д. Шкредов</i>	
1. Введение	85
2. Обозначения	87
3. Предварительные результаты	89
4. Нормы E_k	90
5. Доказательство теоремы 4	93
6. Другое доказательство теоремы 3 и дальнейшие замечания	98
7. Добавление	101

О конференции памяти А. А. Карацубы по теории чисел и приложениям

А. Б. Калмынин

Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, г. Москва
alkalb1995cd@mail.ru

1. Введение

Цель «Конференции памяти А. А. Карацубы по теории чисел и приложениям» – представление новых и важных результатов в разных направлениях теории чисел таких, как: аналитическая теория чисел, диофантовы приближения, геометрия чисел, а также по приложениям теории чисел в других разделах математики. Участниками стали математики из России, стран СНГ и Европы. Первые две конференции прошли в январе 2014 г. и 2015 г. и были однодневной и двухдневной соответственно. Одной из важных задач конференции является общение между участниками в целях обмена идеями и создания возможности для сотрудничества, в частности, в тех областях, которые связаны с исследованиями А. А. Карацубы.

Третья конференция памяти Анатолия Алексеевича Карацубы по теории чисел и приложениям проходила с 28 по 30 января 2016 г. в Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук (28 и 29 января) и на механико-математическом факультете Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова (30 января) в Москве.

В Организационный комитет вошли Е. А. Карацуба (ВЦ РАН), М. А. Королёв (МИАН), И. С. Резвякова (МИАН) и В. Н. Чубариков (МГУ). В течение трех дней на конференции было сделано 30 докладов.¹

2. Обзор докладов 2016 года

Й. Ф. Андерссон (Малардален – государственный университет, Вестерос), *Универсальность дзета-функций Эпштейна “по решеткам”*

В 1975 г. С. М. Воронин доказал свою знаменитую теорему об универсальности дзета-функции.

ТЕОРЕМА 1 (Универсальность дзета-функции Римана). Пусть $K = \{s \in \mathbb{C} : |s - 3/4| \leq r\}$ для некоторого $r < 1/4$. Пусть f – не обращающаяся в нуль голоморфная на внутренности K и продолжающаяся непрерывно на границу K функция. Тогда для всякого положительного ε имеет место неравенство

$$\liminf_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \mu \left\{ t \in [0; T] : \max_{s \in K} |\zeta(s + it) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Позднее оказалось, что в качестве K в этой теореме можно выбирать любой компакт со связным дополнением в правой половине критической полосы.

Работа выполнена при поддержке Лаборатории зеркальной симметрии НИУ ВШЭ, гранта Правительства РФ (договор № 14.641.31.0001), фонда поддержки молодых ученых «Конкурс Мёбиуса», а также фонда Simons Foundation.

¹С аннотациями и видеозаписями докладов можно ознакомиться на официальной странице конференции <http://www.mathnet.ru/conf773>.

Позднее были получены результаты об универсальности в различных семействах L -функций, например, следующий.

ТЕОРЕМА 2 (Б. Багчи, 1981, Универсальность по L -функциям Дирихле). *В условиях предыдущей теоремы, для произвольно малого $\varepsilon > 0$ выполнено*

$$\liminf_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{p-1} \# \left\{ \chi \bmod p : \max_{s \in K} |L(s, \chi) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0,$$

где p пробегает простые числа.

Доказана также универсальность по квадратичным характерам.

ТЕОРЕМА 3 (Х. Мишоу, Х. Нагоши, 2006). *Для простого числа p положим*

$$\chi_p(\cdot) = \left(\frac{\cdot}{p} \right).$$

Если Ω – односвязная симметричная относительно вещественной оси область в полосе $\{s : 1/2 < \operatorname{Re} s < 1\}$, то для всякого $\varepsilon > 0$, любого компакта $K \subset \Omega$ и любой не имеющей нулей голоморфной f на Ω с вещественными положительными значениями на $\Omega \cap \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$\liminf_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi(N)} \# \left\{ p \leq N : \max_{s \in K} |L(s, \chi_p) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Докладчиком в соавторстве с А. Сёдергреном были доказаны результаты об универсальности “по решеткам”. Дзета-функция Эпштейна $E(L, s)$, отвечающая решетке $L \subset \mathbb{R}^n$, задается рядом

$$\sum_{m \in L \setminus \{0\}} \|m\|^{-2s},$$

где $\|\cdot\|$ – норма на L . Хорошо известно, что $E(L, s)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$F_n(L, s) = F_n\left(L^*, \frac{n}{2} - s\right),$$

в котором

$$F_n(L, s) = \pi^{-s} \Gamma(s) E(L, s),$$

а L^* – двойственная решетка. Справедливы следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 4 (Андерссон, Сёдергрэн, 2015). *Пусть Ω – односвязная область в правой половине критической полосы, симметричная относительно $\mathbb{R}$. Для всякого положительного ε , компакта $K \subset \Omega$ и голоморфной функции f на Ω , вещественной на $\Omega \cap \mathbb{R}$, выполняется неравенство*

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \mu_n \left\{ L \in X_n : \max_{s \in K} \left| 2^{s-1} V_n^{-s} E\left(L, \frac{ns}{2}\right) - f(s) \right| < \varepsilon \right\} > 0,$$

где X_n – множество всех n -мерных решеток кообъема 1 и μ_n – мера Зигеля на X_n , нормированная так, чтобы стать вероятностной.

ТЕОРЕМА 5 (Андерссон, Сёдергрэн, 2015). *Пусть Ω – односвязная область в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1/2$, симметричная относительно $\mathbb{R}$. Если f – голоморфная на Ω функция, вещественнозначная на $\Omega \cap \mathbb{R}$, K – компакт в Ω и $\varepsilon > 0$, то имеет место неравенство*

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} (\mu_n \times \mu_n) \left\{ (L_1, L_2) \in X_n^2 : \max_{s \in K} \left| 2^{s-1} V_n^{-s} E\left(L_1, \frac{ns}{2}\right) - 2^{s-1} V_n^{-s} E\left(L_2, \frac{ns}{2}\right) - f(s) \right| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Последняя теорема интересна тем, что это первый пример универсальности в полуплоскости, а не в полосе. Доказательство основано на стандартных утверждениях об аппроксимациях многочленами Дирихле и результатах из диссертации Сёдергрена, содержащей вероятностные утверждения о нормах элементов решеток.

А. И. Аптекарев (Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, г. Москва),
О функциональном аналоге теоремы Туэ–Зигеля–Рота

Зададимся вопросом, насколько точно можно приблизить данное алгебраическое число α рациональным числом с ограниченным знаменателем. Хорошо известны как верхние, так и нижние оценки для точности такого приближения: например, по теореме Гурвица, для всякого иррационального α существует бесконечно много целых p и q таких, что

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}} q^{-2}.$$

С другой стороны, по теореме Лиувилля, если α – алгебраическое число k -й степени с $k \geq 2$, то существует такая константа $C(\alpha)$, что для всех целых p и q имеет место неравенство

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq C(\alpha) q^{-k}.$$

Последнее утверждение может быть усилено.

ТЕОРЕМА 1 (А. Туэ, 1909). *Если α – алгебраическое число степени k , то для всякого $\varepsilon > 0$ и всех p и q выполнено*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \gg_{\varepsilon} q^{-k/2-1-\varepsilon}.$$

ТЕОРЕМА 2 (К. Л. Зигель, 1921, Ф. Д. Дайсон, А. О. Гельфонд, 1947–1948). *В условиях предыдущей теоремы для всех целых p, q выполнена оценка*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \gg_{\alpha} q^{-\sqrt{2k}}.$$

Наконец, верно следующее.

ТЕОРЕМА 3 (К. Ф. Рот, 1955). *Для всякого алгебраического α и произвольного фиксированного $\varepsilon > 0$ существует константа C такая, что*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C}{q^{2+\varepsilon}}.$$

Несмотря на то, что последняя теорема почти неуплучшаема, некоторые вопросы о приближениях алгебраических чисел остаются открытыми. Например, не известно, ограничены ли неполные частные их цепных дробей. Так, вычисления, проведенные независимо А. Д. Брюно (1964), С. Ленгом (1972) и докладчиком (1975), показывают, что среди неполных частных a_n числа $2^{1/3}$ встречаются числа $14 = a_{10}$, $543 = a_{36}$, $7451 = a_{572}$ и т.д. (хотя их неограниченность не доказана).

При приближении же алгебраических функций рациональными наблюдается некоторый совершенно новый эффект, а именно, выполнен аналог сильной формы теоремы 3.

Пусть

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n z^{-(n+1)}.$$

Для такого ряда f введем величины

$$\nu_n(f) = \sup\{\text{ord}_\infty(f - r) : r \in R_n\},$$

где R_n – рациональные функции степени не выше n , а $\text{ord}_\infty(g)$ обозначает степень первого ненулевого слагаемого при разложении g по степеням z^{-1} .

Гипотеза Э. Р. Колчина (1959) утверждает, что для всякого f , удовлетворяющего алгебраическому дифференциальному уравнению, выполнено равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_n(f)}{n} = 2.$$

Гипотеза Колчина была доказана С. Учиямой и Г. Шталем. Позднее А. А. Гончаром (1978) и Д. В. и Г. В. Чудновскими (1984) была высказана более сильная гипотеза.

ГИПОТЕЗА 1. Для всякой алгебраической функции f существует такое $C(f)$, что

$$\nu_n(f) \leq 2n + C(f).$$

Это утверждение в некоторых естественных ограничениях на функцию f было доказано в совместной работе докладчика и М. Ятцелева. Более того, справедлива

ТЕОРЕМА 4. *Гипотеза 1 верна для всех функций, удовлетворяющих алгебраическому дифференциальному уравнению. Кроме того, требуется, чтобы точки ветвления были в общем положении.*

Р. Н. Бояринов (Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет), *Метод моментов и его приложения в теории чисел*

Пусть ξ – случайная величина на вероятностном пространстве $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$. Рассмотрим последовательность ее моментов

$$m_n(\xi) = \int_{\Omega} \xi^n d\mathbb{P}.$$

При некоторых условиях на случайную величину последовательность моментов полностью определяет ее распределение. Первые результаты в этом направлении были получены П. Л. Чебышёвым и А. А. Марковым.

В теории чисел часто необходимо выводить эффективные оценки на сходимость случайных величин из оценок на сходимость четных моментов. В связи с этим возникают следующие две задачи:

- 1) оценить расстояние между функциями распределения двух случайных величин, если известны расстояния между их четными моментами;
- 2) оценить расстояние между их дробными моментами при тех же условиях.

В 1983 г. эти задачи были решены А. Гошем в случае аргумента дзета-функции Римана для доказательства предельной теоремы Сельберга.

В 2006 г. аналогичные результаты были получены А. А. Карацубой и М. А. Королёвым для коротких интервалов критической прямой.

Помимо нормального распределения в задачах теории чисел также очень часто возникает и экспоненциальное распределение. В связи с этим может быть полезна следующая теорема, доказанная докладчиком.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ – последовательность случайных величин. Пусть для всех достаточно больших n существует $N(n)$ такое, что при $1 \leq k \leq N(n)$ выполнено равенство*

$$m_{2k}(\xi_n) = \sigma_{2k} \left(1 + \frac{\theta}{f(n)} \right),$$

где $f(n) \rightarrow +\infty$ и $|\theta| \leq 1$. Тогда справедливо равенство

$$F_{\xi_n}(a) = F(a) + R_n$$

и

$$|R_n| \leq 6 \left(\frac{134(\ln N(n) + 1)}{\sqrt{N(n)}} + 2^{-N(n)} + \frac{3^{N(n)}}{f(n)} \right).$$

Здесь $F(a) = 1 - e^{-a^2}$, если $\sigma_{2k} = k!$, и $F(a)$ – функция распределения нормального распределения, если $\sigma_{2k} = (2k)!/(2^k k!)$.

Аналогичное утверждение верно и в более общем случае.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия предыдущей теоремы с $0 < \sigma_{2k} \leq (Ck)^{k(2-\delta)}$ для некоторых $\delta, C > 0$. Пусть σ_{2k} – моменты некоторой случайной величины с функцией распределения $F(x)$, удовлетворяющей условию Липшица с константой L . Тогда для достаточно больших n имеет место неравенство

$$|F_{\xi_n}(a) - F(a)| \leq \max(2B^2, 6L) \left(\frac{224C(\ln N(n) + 1)}{N^{\delta/2}} + 3^{-N(n)} + \frac{N^{2BN}}{f(n)} \right),$$

где $B = [4C] + 1$.

Похожие результаты получаются и для дробных моментов.

ТЕОРЕМА 3. Пусть для всех достаточно больших n и всех целых $1 \leq k \leq [\rho \ln f(n)] + 1$, где $0.1 \geq \rho > 0$, выполнено

$$m_{2k}(\xi_n) = \sigma_{2k} \left(1 + \frac{\theta}{f(n)} \right)$$

с $|\theta| \leq 1$.

Тогда для всех достаточно больших n и всех $a \in (0, 0.5\rho \ln f(n)]$ выполнено равенство

$$m_a(\xi_n) = \mu(a) + \theta R_n,$$

где

$$\mu(a) = \begin{cases} 2^{0.5a} \Gamma(0.5a + 0.5) \pi^{-0.5}, & \text{если } \sigma_{2k} = \frac{(2k)!}{2^k k!}, \\ \Gamma(0.5a + 1), & \text{если } \sigma_{2k} = k!, \end{cases}$$

и остаточный член имеет вид

$$R_n = \begin{cases} \frac{2^{11-\delta}}{a} \left(\frac{2^{22} \ln \ln f(n)}{\rho \ln f(n)} \right)^{\frac{a+1+\delta}{2}} & \text{при } 0 < a < 30, \\ 2^7 \mu(a) \left(\frac{2^{12+2\delta} a^2 \ln(\sqrt{\ln f(n)}/a)}{\rho \ln f(n)} \right)^{\frac{a+1+\delta}{2}} & \text{при } 30 \leq a \leq \frac{\rho}{2^{16+2\delta}} \sqrt{\ln f(n)}, \\ 2^{2+\delta} \mu(a) e^{-\frac{\rho \sqrt{\ln f(n)}}{2^{20+2\delta}}} & \text{при } \frac{\rho}{2^{16+2\delta}} \sqrt{\ln f(n)} < a \leq 0.5\rho \ln f(n). \end{cases}$$

Из теорем 1–3 можно выводить разные утверждения о лакунарных тригонометрических суммах, например, следующее.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\omega \in [0, 1]$, n – натуральное число и u_k – последовательность натуральных чисел с $u_{k+1}/u_k \geq \beta > 1$. Положим $S(\omega; n) = \sum_{k \leq n} e^{2\pi i \omega u_k}$. Тогда для всех достаточно больших n и любого $\lambda > 0$ функция распределения случайной величины $|S(\omega; n)|/\sqrt{n}$ удовлетворяет соотношению

$$F_n(\lambda) = 1 - e^{-\lambda^2} + \frac{4600\theta \sqrt{\ln(2\beta/(\beta-1))} \ln \ln n}{\sqrt{\ln n}}$$

с $|\theta| \leq 1$. Кроме того, выполнено неравенство

$$1 - F_n(\lambda) < e^{1 - \frac{\beta-1}{e\beta} \lambda^2}.$$

А. Д. Брюно (Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, г. Москва), *От диофантовых приближений к фундаментальным единицам алгебраических полей*

Пусть в вещественном n -мерном пространстве $\mathbb{R}^n = \{X\}$ задано m однородных вещественных форм $f_i(X)$, $i = 1, \dots, m$, $2 \leq m \leq n$.

Выпуклая оболочка множества точек $G(X) = (|f_1(X)|, \dots, |f_m(X)|)$ для целочисленных $X \in \mathbb{Z}^n$ во многих случаях является выпуклым многогранным множеством, граница которого для $\|X\| = O(1)$ вычисляется с помощью стандартной программы.

Точки $X \in \mathbb{Z}^n$, для которых значения $G(X)$ лежат на этой границе, названы граничными точками.

Граничные точки X являются наилучшими диофантовыми приближениями для указанных форм. Это дает глобальное обобщение цепной дроби. Для $n = 3$ обобщить цепную дробь пытались Л. Эйлер, К. Г. Я. Якоби, П. Г. Л. Дирихле, Ш. Эрмит, Ж. А. Пуанкаре, А. Гурвиц, Ф. Х. Клейн, Г. Минковский, В. Брун, В. И. Арнольд и многие другие.

Пусть $p(\xi)$ – целый неприводимый над $\mathbb{Q}$ многочлен степени n , а λ – его корень. Оказывается, что набор фундаментальных единиц кольца $\mathbb{Z}[\lambda]$ можно вычислить по граничным точкам некоторой совокупности линейных и квадратичных форм, построенных по корням многочлена $p(\xi)$.

Аналогично вычисляется набор фундаментальных единиц поля $\mathbb{Q}(\lambda)$. До сих пор эти единицы вычислялись только для $n = 2$ (с помощью обычных цепных дробей) и $n = 3$ (с помощью алгоритма Вороного).

Подход докладчика обобщает цепную дробь, дает наилучшие совместные приближения и основные единицы алгебраических полей для любого n .

А. Н. Васильев (Казахстанский филиал Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, г. Астана), *Сбалансированные разложения* (Доклад основан на совместной работе с А. А. Клячко)

Пусть F – поле и $a \in F$. Будем говорить, что a допускает в F *сбалансированное разложение* с k сомножителями, если существуют такие $x_1, \dots, x_k \in F$, что $x_1 \cdots x_k = a$ и $x_1 + \dots + x_k = 0$. Можно задаться вопросом: для каких k любой элемент данного поля F допускает сбалансированное разложение с k сомножителями? Оказывается, если $\text{char } F \neq 2$, то каждый элемент допускает разложение с пятью и более элементами, а именно, если $a \neq 1, 0$, то

$$a = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot (-a) \cdot \left(\frac{2}{a}\right) \cdot \left(-\frac{2}{a}\right) = \frac{1-a}{2} \cdot \frac{1-a}{2} \cdot a \cdot \frac{2}{1-a} \cdot \frac{2}{a-1} \cdot (-1).$$

Другие разложения получаются добавлением нужного количества пар $(-1, 1)$.

Докладчиком был дан полный ответ на вопрос о сбалансированных разложениях для конечных полей.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $k \geq 2$ – целое число и F – конечное поле. Тогда в F каждый элемент допускает сбалансированное разложение с k элементами тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

- $|F| = 2$, k чётно;
- $|F| = 4$, $k \neq 3$;
- количество элементов поля есть степень двойки с показателем не менее 3, k произвольное;
- $|F| \in \{3, 5\}$, $k \notin \{2, 4\}$;
- $|F| = 7$, $k \notin \{2, 3\}$;
- $|F| \notin \{3, 5, 7\} \cup \{2^n | n \geq 1\}$, $k \neq 2$.

Следует отдельно отметить, что этот результат для $k = 3$ опирается на оценку Хассе для количества точек на эллиптической кривой.

Можно обратить внимание на то, что разложения на пять и более элементов, упомянутые выше, эквивалентны разложимости с пятью и более сомножителями для элемента $t \in F(t)$. Оказывается, для трех сомножителей такой “универсальной формулы” не существует, т.е. для любого поля F элемент $t \in F(t)$ не допускает сбалансированного разложения с тремя сомножителями.

Доказательство этого факта использует теорему Мэйсона–Сотерса: если три многочлена $x, y, z \in F[t]$ взаимно просты, и выполнено условие $x + y + z = 0$, то степень каждого из них не превосходит количества корней произведения xyz в алгебраическом замыкании F либо

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial t} = 0.$$

Имеют смысл также вопросы о сбалансированных разложениях в алгебрах. Будем называть сбалансированное разложение *нестепенным*, если в нем есть хотя бы два различных элемента. Нестепенную разложимость алгебры наследуют у полей.

ТЕОРЕМА 2. Пусть F – поле, $\text{char } F \neq 2$. Если во всех конечных расширениях F каждый элемент допускает нестепенное сбалансированное разложение с k сомножителями, то это же верно для всякой конечномерной ассоциативной алгебры с единицей над F .

СЛЕДСТВИЕ 1. Каждый элемент конечномерной ассоциативной алгебры с единицей над полем F допускает сбалансированное разложение с тремя элементами, если F алгебраически замкнуто, и с пятью элементами, если $\text{char } F \neq 2$.

Некоторые вопросы о сбалансированных разложениях остаются открытыми. Особенно стоило бы отметить следующие два из них:

- правда ли, что всякий элемент любого поля раскладывается в произведение не более чем четырех элементов с суммой 0?
- допускает ли $t \in \mathbb{C}(t)$ сбалансированное разложение с четырьмя элементами?

Э. Весалаинен (Университет Аалто), *Суммы с коэффициентами Фурье автоморфных форм*

Пусть $\mathcal{H}$ – верхняя полуплоскость с координатами $z = x + iy$ и мерой $d\mu = dx dy/y^2$. На $\mathcal{H}$ имеются лапласиан

$$-\Delta_{\mathcal{H}} = -y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

и действие

$$\text{SL}(2, \mathbb{R}) : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}.$$

Если ограничиться действием $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$, то L^2 – пространство на факторпространстве относительно инвариантной меры – будет раскладываться в сумму трех подпространств следующим

каноническим образом:

$$L^2(\mathcal{H}/\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}), d\mu) = \mathbb{C}1 \oplus \{\text{дискретная часть}\} \oplus \{\text{непрерывная часть}\}.$$

Мы будем интересоваться дискретной частью, которая состоит из форм Маасса. Всякая форма Маасса $f(x, y)$ имеет разложение в ряд с экспонентами и модифицированными функциями Бесселя следующего вида:

$$f(x, y) = \sum_{n \neq 0} t(n) \sqrt{y} K_{i\sqrt{\lambda-1/4}}(2\pi|n|y) e(nx),$$

где $e(x) := e^{2\pi i x}$. Числа $t(n)$ называются *коэффициентами формы Маасса*.

Гипотеза Рамануджана–Петерссона для форм Маасса не доказана, поэтому будем обозначать ϑ такое наименьшее число, что $t(n) \ll n^{\vartheta+\varepsilon}$. Наилучшие на данный момент оценки для ϑ гласят, что $\vartheta \leq 7/64$.

Нас будут интересовать оценки вида

$$\sum_{n \in [M, M+M^\gamma]} a(n) e(n\alpha) \ll M^{\beta+\varepsilon},$$

где $a(n)$ – коэффициенты формы Маасса или модулярной формы.

Для модулярных форм известны две “тривиальные оценки”: $\beta \leq 1/2$ и $\beta \leq \gamma$.

Кроме того, известно, что $\beta \geq \gamma/2$.

Имеются также нетривиальные результаты при $\gamma \in [0.4; 0.75]$.

Также для модулярных форм выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq M} a(n) &\ll M^{1/3+\varepsilon}, \\ \sum_{n \leq M} a(n) e\left(\frac{nh}{k}\right) &\ll k^{2/3} M^{1/3+\varepsilon}. \end{aligned}$$

Аналогичная оценка для форм Маасса выглядит так:

$$\sum_{n \leq M} t(n) e\left(\frac{nh}{k}\right) \ll k^{2/3} M^{1/3+\vartheta/3+\varepsilon}.$$

Кроме того, выполнен аналог оценки Уилтона–Ютилы квадратного корня:

$$\sum_{n \leq M} t(n) e(\alpha n) \ll \sqrt{M}.$$

Подобные вопросы можно решать в случае $\mathrm{GL}(n)$ -форм Маасса. У $\mathrm{GL}(n)$ -форм Маасса также бывают коэффициенты Фурье, и мы будем интересоваться оценками вида

$$\sum_{M \leq m \leq M+M^\gamma} \mathcal{A}(m, 1, \dots, 1) e(mx) \ll M^{\beta+\varepsilon}.$$

Оказывается, в общем случае не получается доказать ничего, кроме $\beta \leq 1$.

Эта оценка была улучшена Миллером в случае $\mathrm{GL}(3)$, а именно он доказал, что можно брать $\beta \leq 3/4$.

Если же в $\mathrm{GL}(3)$ -случае выполнена гипотеза Рамануджана–Петерссона, то можно доказать такой факт:

$$\sum_{m \leq M} \mathcal{A}(n, 1) e\left(\frac{mh}{k}\right) \ll k^{3/4} M^{1/2+\varepsilon}.$$

Для очень специального выбора фазы справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Если $w(x)$ – достаточно хорошая функция, d, M – натуральные числа, то для всех $\Delta \gg M^{1-1/n+o(1)}$ выполнено равенство

$$\begin{aligned} & \sum_{M \leq n \leq M+\Delta} \mathcal{A}(m, 1, \dots, 1) e\left(\frac{d^{1/n} m}{M^{1-1/n}}\right) w(m) \\ &= c_n d^{1/(2n)-1/2} \overline{\mathcal{A}(d, 1, \dots, 1)} \int_M^{M+\Delta} w(x) x^{1/(2n)-1/2} e\left(\frac{d^{1/n} x}{M^{1-1/n}} - n x^{1/n} d^{1/n}\right) dx \\ &+ O(\Delta M^{-1/2-1/(2n)}). \end{aligned}$$

Теорема 1 также имеет интересное следствие о возможности восстановить форму Маасса по коэффициентам.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть M_l – любая бесконечно возрастающая последовательность. Если у двух $GL(n)$ -форм совпадают все коэффициенты $\mathcal{A}(m, 1, \dots, 1)$ с $m \in [M_l, M_l + M_l^\alpha]$, где $\alpha > 1 - 1/n$, то эти формы совпадают.

С. Б. Гашков, И. С. Сергеев (Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет), *Об арифметической сложности вычисления некоторых линейных преобразований*

Пусть A – некоторая матрица $n \times m$ с вещественными коэффициентами. Она задает оператор $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Предположим, что мы выбрали некоторый набор B линейных функционалов $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ (k может быть разным для разных функционалов). Содержательной задачей является вопрос оценок наименьшего количества функционалов из нашего множества, которым надо воспользоваться, чтобы применить к вектору $x \in \mathbb{R}^n$ оператор A . Максимальное значение этого количества по всем векторам из $\mathbb{R}^n$ называется *сложностью A относительно B* и обозначается $L_B(A)$.

Наборы, которые появились в этом докладе, как правило, состоят из бинарных и унарных операций, а именно:

- набор $\{\pm\}$ – $(x, y) \rightarrow x + y$ и $(x, y) \rightarrow x - y$;
- B_C для положительного C : $\{\pm\} \cup \{x \rightarrow ax \mid |a| \leq C\}$;
- B_∞ – $\{(x, y) \rightarrow ax + by \mid a, b \in \mathbb{R}\}$;
- $B_{>0}$ – $\{(x, y) \rightarrow ax + by \mid a, b \in \mathbb{R}_{>0}\}$.

Сложность удовлетворяет некоторым естественным свойствам, например:

- $L_B(AC) \leq L_B(A) + L_B(C)$;
- если C – подматрица в A , то $L_B(A) \geq L_B(C)$;
- $L_B(A \oplus C) \leq L_B(A) + L_B(C)$;
- если A – матрица $n \times m$, то $|L_B(A) - L_B(A^T)| \ll n + m$.

Кроме того, в 1973 г. Ж. Моргенштерном для всякого положительного C была доказана следующая оценка:

$$L_{B_C}(A) \geq \log_{\max(2, C)} |\det A|.$$

Пусть H_n – матрица Адамара размера $n \times n$. Тогда $|\det H_n| = n^{n/2}$. Поэтому оценка Моргенштерна доказывает, что

$$L_{\{\pm\}}(H_n) \asymp L_{B_2}(H_n) = \Theta(n \ln n).$$

Для матрицы Паскаля $C_n = \left\{ \binom{i}{j} \right\}_{1 \leq i, j \leq n}$ из тождества $\binom{i+1}{j+1} = \binom{i+1}{j} + \binom{i}{j}$ получается оценка $L_{\{\pm\}}(C_n) \leq n^2/2$. Оказывается, однако, что у C_n есть подматрица с детерминантом порядка c^{n^2} , где $c > 1$. Таким образом,

$$L_{B_2}(C_n) = \Theta(n^2).$$

С другой стороны, $C_n = \Delta A \Delta^{-1}$, где $\Delta = \text{diag}(0!, 1!, \dots, (n-1)!)$ и $A = \{1/(i-j)!\}$ (будем считать, что $1/(-k)! = 0$ при $k > 0$), поэтому $L_{B_\infty}(C_n) \ll n \ln n$.

Пусть теперь D_n – матрица Серпинского, т.е. $D_n = C_n \pmod{2}$. Тогда по теореме С. Н. Селзнёвой и Дж. Бояр, М. Г. Файнда (2012) имеем

$$L_{\{\pm\}}(D_n) \sim L_{B_2}(D_n) \sim \frac{1}{2} n \log_2 n.$$

Кроме того,

$$L_{B_{>0}}(D_n) = \Omega(n \ln n).$$

Положим $s_n = \{s_i^j\}$ и $S_n = \{S_i^j\}$, где s и S – числа Стирлинга первого и второго рода соответственно. Хорошо известно, что $s_n S_n = 1$. Оказывается, что матрицы s_n и $|s_n|$ имеют подматрицы с детерминантами порядка $e^{\Theta(n^2 \ln n)}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} L_{B_2}(s_n) &\asymp L_{\{\pm\}}(s_n) = \Theta(n^2 \ln n), \\ L_{B_2}(|s_n|) &\asymp L_{\{\pm\}}(|s_n|) = \Theta(n^2 \ln n). \end{aligned}$$

Если $V_n = \{i^j\}$ – матрица Вандермонда, то $V_n = C_n \Delta S_n^T$, поэтому

$$L_{B_2}(V_n) \asymp L_{\{\pm\}}(V_n) = \Theta(n^2 \ln n).$$

Кроме того,

$$L_{B_\infty}(V_n), L_{B_\infty}(S_n), L_{B_\infty}(s_n) \ll n \ln^2 n.$$

Также докладчиками был получен ряд результатов о сложностях вычисления матриц более арифметического происхождения.

В 2015 г. докладчиками были доказаны следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 1 (С. Б. Гашков, И. С. Сергеев, 2015). Пусть $\text{GCD}(n) = \{\text{НОД}(i, j)\}_{1 \leq i, j \leq n}$ и $\varphi(D) = \text{diag}(\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(n))$. Тогда выполнены оценки

$$L_{B_2}(\text{GCD}(n)) \sim L_{\{\pm\}}(\text{GCD}(n)) \sim n \log_2 n$$

и

$$|L_{\{\pm\}}(\text{GCD}(n)) - L_{\{\pm\}}(\varphi(D))| = o(n\sqrt{\ln n}).$$

И аналогичное утверждение для матрицы из НОКов.

ТЕОРЕМА 2 (С. Б. Гашков, И. С. Сергеев, 2015). Если $\text{LCM}(n) = \{\text{НОК}(i, j)\}_{1 \leq i, j \leq n}$, то справедлива асимптотика

$$L_{B_2}(\text{LCM}(n)) \sim L_{\{\pm\}}(\text{LCM}(n)) \sim 2n \log_2 n.$$

О. Н. Герман (Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет), *Циклические палиндромы и периодические цепные дроби*

Хорошо известно, что если $r > 1$ – рациональное число, не являющееся квадратом, то $\sqrt{r}$ раскладывается в цепную дробь вида

$$\sqrt{r} = [a_0; \overline{a_1, a_2, \dots, a_2, a_1, 2a_0}].$$

Период этой дроби, прочитанный слева направо, также является периодом. Будем называть такие периоды *циклично палиндромическими*.

Докладчиком при помощи геометрии квадратичных иррациональностей был доказан следующий критерий циклической палиндромичности периода.

ТЕОРЕМА 1. *Квадратичная иррациональность α имеет циклично палиндромический период цепной дроби, если и только если существует такое $\omega \sim \alpha$, что выполнено одно из четырех условий:*

- 1) $\omega + \bar{\omega} = 0$;
- 2) $\omega + \bar{\omega} = 1$;
- 3) $\omega\bar{\omega} = 1$;
- 4) $\omega\bar{\omega} = -1$.

Здесь $x \sim y$ означает, что существует матрица $\gamma \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$ с $\gamma x = y$, а $\bar{\omega}$ – сопряженное к ω число. Кроме того, существование ω с условием 2) эквивалентно существованию ω с условием 3).

Доказательство построено на рассмотрении многоугольников Клейна.

Пусть α – иррациональное число. Будем обозначать $\mathcal{L}_\alpha$ прямую в $\mathbb{R}^2$, проходящую через точки $(0, 0)$ и $(1, \alpha)$. Для двух различных иррациональных вещественных чисел α и β прямые $\mathcal{L}_\alpha$ и $\mathcal{L}_\beta$ разбивают плоскость на четыре угла. Для каждого из углов рассмотрим выпуклую оболочку всех целочисленных точек, лежащих внутри этого угла. Эти четыре (обобщенных) многоугольника называются *многоугольниками Клейна*. Два многоугольника Клейна называются *смежными*, если они соответствуют смежным углам.

Будем говорить, что отрезок с целочисленными концами *пуст*, если в его внутренности нет целых точек. *Целочисленной длиной* отрезка называется количество пустых отрезков внутри него. *Целочисленным углом* между двумя пустыми отрезками, имеющими один общий конец, мы называем площадь параллелограмма, натянутого на эти отрезки.

Теорема 1 следует из того, что число α имеет циклично палиндромический период цепной дроби тогда и только тогда, когда многоугольник Клейна, построенный на $\mathcal{L}_\alpha$ и $\mathcal{L}_{\bar{\alpha}}$, имеет некоторую специальную симметрию.

Также существенную роль в доказательстве играет следующая лемма, доказанная Е. Коркиной.

ЛЕММА 1 (Е. И. Коркина, 1995). *Пусть $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ – любая последовательность натуральных чисел, а $[v_{-2}, v_0]$ – любой целочисленный отрезок целочисленной длины a_0 . Предположим, что все целые точки, которые ближе к прямой $v_{-2}v_0$, чем точка $(0, 0)$, лежат на этой прямой. Тогда существует единственный многоугольник Клейна K с вершинами v_{2m} , $m \in \mathbb{Z}$, такой, что для всякого целого m выполнено:*

- $[v_{2m-2}, v_{2m}]$ – ребро K ;
- целочисленная длина этого ребра равна a_{2m} ;
- целочисленный угол при вершине v_{2m} равен a_{2m+1} .

С. А. Гриценко (Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет), *О нулях функции Дэвенпорта–Хейльбронна, лежащих на критической прямой*

Хорошо известна теорема Атле Сельберга о том, что положительная доля всех нулей дзета-функции Римана лежит на критической прямой. В доказательстве этой теоремы существенно использовались так называемые “успокаивающие множители”, строящиеся по эйлеровому произведению для $\zeta(s)$. Однако для многих рядов Дирихле без эйлерового произведения, но с функциональным уравнением доказано, что *аномально много* нулей лежит на критической прямой. Простейший пример такого ряда Дирихле – функция Дэвенпорта–Хейльбронна

$$f(s) = \frac{1 - i\kappa}{2} L(s, \chi_1) + \frac{1 + i\kappa}{2} L(s, \bar{\chi}_1),$$

где

$$\kappa = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} - 2}{\sqrt{5} - 1},$$

χ_1 – характер Дирихле по модулю 5 с $\chi_1(2) = i$.

Пусть $N(\sigma, T, f)$ – число нулей f с $\operatorname{Re} s \geq \sigma$ и $0 < \operatorname{Im} s \leq T$. До 1980 г. было известно только то, что $N(1, T, f) \gg T$ и $N(a, T, f) - N(b, T, f) \asymp T$ при $1/2 < a < b \leq 1$.

В 1980 г. С. М. Воронин доказал, что

$$N_0(T, f) > T e^{(1/20)\sqrt{\ln \ln \ln T}},$$

где $N_0(T, f)$ – количество нулей на критической прямой с $|\operatorname{Im} s| < T$.

В 1989 г. А. А. Карацуба разработал метод, позволяющий использовать множитель, частично успокаивающий оба слагаемых в функции $f(s)$, и доказать, что

$$N_0(T, f) > T(\ln T)^{1/2-\varepsilon}.$$

Величина $1/2$ в показателе степени возникает из-за того, что плотность простых в совпадающих частях эйлеровых произведений для слагаемых равна $1/2$.

А. А. Карацуба использовал оригинальный метод, заключающийся в том, что некоторые вспомогательные функции в доказательстве возводятся в очень маленькую положительную степень. Докладчик внес в метод А. А. Карацубы ряд существенных изменений. А именно, он использовал множитель, который по-разному “успокаивает” слагаемые $L(s, \chi_1)$ и $L(s, \overline{\chi_1})$: одно – чуть сильнее, другое – чуть слабее. Грубо говоря, это дает возможность работать только с одним “доминирующим” слагаемым. Кроме того, автор использовал технику, позволяющую получать весьма точные нижние оценки для дробных моментов рядов Дирихле на критической прямой. Применение соображений такого рода позволило докладчику получить следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. *Для всякого $\varepsilon > 0$ имеет место нижняя оценка*

$$N_0(2T, f) - N_0(T, f) \gg_{\varepsilon} T(\ln T)^{9/16-\varepsilon}.$$

“Предел” этого метода описывается таким условным результатом.

ТЕОРЕМА 2. *Если выполнена гипотеза Римана для $L(s, \chi_1)$, то для всякого $\varepsilon > 0$ выполнена оценка*

$$N_0(T, f) \gg_{\varepsilon} T(\ln T)^{5/8-\varepsilon}.$$

И. Ш. Джаббаров (Гянджинский государственный университет), *Влияние особенностей в задаче о показателе сходимости многомерной проблемы Терри*

Пусть $P \geq 2$, $n \geq 2$ и $J_{k,n}(P)$ – число решений системы уравнений

$$x_1^i + \dots + x_k^i = x_{k+1}^i + \dots + x_{2k}^i \quad \text{при } 1 \leq i \leq n$$

в целых числах $1 \leq x_1, \dots, x_{2k} \leq P$. В решении многих задач теории чисел большую роль играют верхние оценки величины $J_{k,n}(P)$. Например, оценки такого рода, полученные И. М. Виноградовым, были использованы им для нахождения наилучшей на сегодняшний день границы области критической полосы $0 < \operatorname{Re} s < 1$, свободной от нулей $\zeta(s)$, и для новой оценки остаточного члена в асимптотическом законе распределения простых чисел.

Можно также ставить вопрос об асимптотике $J_{k,n}(P)$. В 1938 г. Хуа Ло-Кеном при помощи метода Виноградова была доказана следующая асимптотическая формула.

ТЕОРЕМА 1. Для некоторых положительных δ и c при $k > cn^2 \ln n$ имеет место равенство

$$J_{k,n}(P) = \sigma \theta_0 P^{2k-n(n+1)/2} + O(P^{2k-n(n+1)/2-\delta}),$$

где σ и θ_0 – так называемые особый ряд и особый интеграл этой задачи.

Также Хуа Ло-Кеном было доказано, что интеграл сходится при $2k > n^2 + n/2$. В связи с этим был поставлен вопрос о показателе сходимости этого особого интеграла, т.е. о таком значении γ , что при $2k > \gamma$ интеграл θ_0 сходится, а для $2k < \gamma$ – расходится.

В общем случае вопрос можно поставить следующим образом: пусть $r \geq 1$, $N \geq 2$ – целые числа, $\gamma_j(\bar{x}) = x_1^{k_{1j}} \cdots x_r^{k_{rj}}$ – набор N мономов от r переменных. Определим

$$F(\bar{x}) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \gamma_j(\bar{x}).$$

Найти показатель сходимости интеграла

$$\theta_k = \int_{\mathbb{R}^N} \left| \int_{[0,1]^k} e^{2\pi i F(\bar{x})} d\bar{x} \right|^{2k} d\alpha_1 \dots d\alpha_N.$$

Одномерный случай этой задачи для мономов $x, x^2, \dots, x^n$ впервые решен Г.И. Архиповым, А.А. Карацубой и В.Н. Чубариковым. Они доказали, что показатель сходимости равен $n(n+1)/2 + 1$. В “выщербленном” случае (т.е. для мономов $x^{n_1}, \dots, x^{n_k}$ с условиями $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ и $n_1 + \dots + n_k < (n_k + 1)n_k/2$) ответ теми же авторами получен немного другой, а именно,

$$\gamma = n_1 + \dots + n_k.$$

В многомерном же случае имеются верхние оценки, однако вопрос о точном значении остается открытым.

При исследовании этой задачи докладчиком была получена формула для θ_k в виде некоторого поверхностного интеграла.

ТЕОРЕМА 2 (И.Ш. Джаббаров). Пусть Π – подмножество в $[0, 1]^{kr} = ([0, 1]^k)^r$, заданное системой уравнений

$$\gamma_j(\bar{x}_1) + \dots + \gamma_j(\bar{x}_k) = \gamma_j(\bar{x}_{k+1}) + \dots + \gamma_j(\bar{x}_{2k}) \quad \text{при } 1 \leq j \leq N.$$

Тогда справедливо равенство

$$\theta_k = (2\pi)^N \int_{\Pi} \frac{ds}{\sqrt{G}},$$

где G – определитель Грама градиентов функций

$$f_j = \gamma_j(\bar{x}_1) + \dots + \gamma_j(\bar{x}_k) - \gamma_j(\bar{x}_{k+1}) - \dots - \gamma_j(\bar{x}_{2k}), \quad j = 1, \dots, N.$$

При этом сходимость левой части равенства эквивалентна сходимости правой.

При помощи этой теоремы удастся доказать следующую оценку.

ТЕОРЕМА 3. Пусть ρ – ранг матрицы $\{k_{ij}\}$ показателей мономов. Если $kr \geq N$ и

$$2kr > r + \sum_{i,j} k_{ij},$$

то интеграл θ_k сходится.

Доказательство также существенно использует тот факт, что алгебраическое множество Π , заданное в $\mathbb{R}^{kr}$ системой уравнений

$$\gamma_j(\bar{x}_1) + \dots + \gamma_j(\bar{x}_k) = \gamma_j(\bar{x}_{k+1}) + \dots + \gamma_j(\bar{x}_{2k}) \quad \text{при } 1 \leq j \leq N,$$

является алгебраическим многообразием специального вида.

Н. М. Добровольский (Тулский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого), *О новых результатах в теории гиперболической дзета-функции решеток*

Пусть Λ – некоторая решетка в $\mathbb{R}^s$. В связи с различными вопросами из теории решеток хотелось бы рассматривать для произвольной решетки ее дзета-функцию

$$\zeta(\Lambda|\alpha) = \sum_{\substack{x \in \Lambda \\ x_i \neq 0}} \frac{1}{|x_1 \dots x_s|^\alpha}.$$

Однако оказывается, что во многих содержательных примерах этот ряд не сходится ни для какого α . Заменой обыкновенной дзета-функции в этом случае может служить *гиперболическая дзета-функция* решетки Λ . Определяется она следующим образом:

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) = \sum_{\substack{x \in \Lambda \\ x \neq 0}} \frac{1}{(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_s)^\alpha},$$

где $\bar{x} = \max(1, |x|)$.

Если для целочисленной решетки Λ ряд для обыкновенной дзета-функции сходится, то она удовлетворяет функциональному уравнению.

ТЕОРЕМА 1. Пусть Λ – целочисленная s -мерная решетка со сходящимся дзета-рядом, $\det \Lambda = N$, а Λ^* – двойственная решетка. Тогда выполнено равенство

$$\zeta(\Lambda|\alpha) = \frac{M(\alpha)^s}{N} \zeta(\Lambda^*|1-\alpha), \quad \text{где } M(\alpha) = \frac{2\Gamma(1-\alpha)}{(2\pi)^{1-\alpha}} \sin \frac{\pi\alpha}{2}.$$

Возможно, гиперболическая дзета-функция также во многих случаях удовлетворяет функциональному уравнению, однако, оно должно быть сложнее, поскольку, например, в случае $\Lambda = d \cdot \mathbb{Z}$ выполнено равенство

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) = \zeta(\Lambda|\alpha) + f(\alpha, d).$$

Здесь $f(\alpha, d)$ – конечный ряд Дирихле следующего вида:

$$f(\alpha, d) = \begin{cases} 0, & \text{если } d \geq 1, \\ \sum_{1 \leq m \leq \frac{1}{d}} \left(1 - \frac{1}{(dm)^\alpha}\right) & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Один из самых существенных вопросов о гиперболической дзета-функции – ее асимптотическое поведение при растущем детерминанте в различных семействах. Эта задача решена в случае решетки кольца целых вещественного поля.

ТЕОРЕМА 2 (Н. М. Добровольский, В. С. Ванькова, С. Л. Козлова). Пусть F – чисто вещественное числовое поле, $\Lambda(t, F) = t\Lambda(F)$, где $\Lambda(F)$ – решетка геометрической реализации кольца целых поля F . Тогда имеет место следующее асимптотическое выражение:

$$\zeta_H(\Lambda(t, F)|\alpha) = \frac{2(\det \Lambda(F))^\alpha}{R(s-1)!} \left(\sum_w \frac{1}{N(w)^\alpha} \right) \frac{\ln^{s-1} \det \Lambda(t, F)}{(\det \Lambda(t, F))^\alpha} + O\left(\frac{\ln^{s-2} \det \Lambda(t, F)}{(\det \Lambda(t, F))^\alpha} \right),$$

где суммирование ведется по главным идеалам, а R – регулятор поля F .

Оказывается, в случае квадратичного F асимптотику удастся сильно уточнить.

ТЕОРЕМА 3. Пусть F – квадратичное поле, R – его регулятор, $\zeta_F(\alpha)$ – дзета-функция Дедекинда поля F . Тогда выполнено равенство

$$\begin{aligned} \zeta_H(\Lambda(t, F)|\alpha) &= \frac{2(\det \Lambda(F))^\alpha \zeta_F(\alpha)}{R} \frac{\ln \det \Lambda(t, F)}{(\det \Lambda(t, F))^\alpha} \\ &\quad - \frac{2(\det \Lambda(F))}{R(\det \Lambda(t, F))^\alpha} (\zeta_F(\alpha) \ln \det \Lambda(F) + \zeta'_F(\alpha)) \\ &\quad + \frac{2(\det \Lambda(F))^\alpha \zeta_F(\alpha)}{(\det \Lambda(t, F))^\alpha} \left(\theta_1(\alpha) + \frac{\theta_2(\alpha)}{\operatorname{sh} \alpha R/2} \right). \end{aligned}$$

В этом равенстве $|\theta_1(\alpha)| \leq 1$ и $\varepsilon^{-\alpha/2} \leq \theta_2(\alpha) \leq \varepsilon^{\alpha/2}$, где ε – фундаментальная единица F .

Н. П. Долбиллин (Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, г. Москва), *Локально антиподальные множества Делоне*

Пусть $G \subset \operatorname{Isom}(\mathbb{R}^d)$ – кристаллографическая группа, т.е. подгруппа с компактной фундаментальной областью. Орбита Gx какой-нибудь точки $x \in \mathbb{R}^d$ называется регулярной системой. Составляющей частью 18-й проблемы Гильберта является следующая гипотеза.

ГИПОТЕЗА 1. Любая кристаллографическая группа содержит подгруппу переносов конечного индекса.

Это утверждение было доказано А. М. Шёнфлисом для случая $d = 3$, а в остальных размерностях – Л. Бибербахом. Таким образом, всякая регулярная система есть объединение конгруэнтных параллельных друг другу решеток.

Можно также дать эквивалентное определение регулярной системы при помощи следующих трех аксиом.

ТЕОРЕМА 1. Подмножество $X \subset \mathbb{R}^d$ – регулярная система, если и только если:

- (r) существует $r > 0$ такое, что $B_x(r) \cap B_y(r) = \emptyset$ для всех $x, y \in X, x \neq y$;
- (R) существует $R > 0$ такое, что $\bigcup_{x \in X} B_x(R) = \mathbb{R}^d$;
- (G) множество X выглядит одинаково из любой точки $x \in X$, т.е. группа симметрий множества X действует на него транзитивно.

Если же для множества X выполнены только аксиомы (r) и (R), то X называется *множеством Делоне*.

Последняя аксиома влечет некоторую локальную регулярность. А именно, для всякого $\rho > 0$ будем называть ρ -кластером вокруг точки $x \in X$ множество

$$C_x(\rho) = \{x' \in X : |xx'| \leq \rho\}.$$

ρ -Кластеры вокруг точек x и y называются *эквивалентными*, если существует изометрия g такая, что $g(x) = y$ и $g(C_x(\rho)) = C_y(\rho)$. Для положительного ρ обозначим через $N(\rho)$ число классов эквивалентности ρ -кластеров.

Можно доказать, что X – регулярная система тогда и только тогда, когда $N(\rho) \equiv 1$.

Оказывается, иногда достаточно обращения $N(x)$ в 1 в одной точке.

ТЕОРЕМА 2 (Б. Н. Делоне, Н. П. Долбиллин, М. И. Штогрин, Р. В. Галиулин). *Множество X – регулярная система тогда и только тогда, когда существует $\rho > 0$ такое, что:*

- 1) $N(\rho + 2R) = 1$;
 - 2) $S_x(\rho) = S_x(\rho + 2R)$,
- где $S_x(\rho)$ – группа автоморфизмов $C_x(\rho)$.

Для асимметричных множеств Делоне также справедлива

ТЕОРЕМА 3. *Если множество Делоне асимметрично, т.е. группа $S_x(2R)$ тривиальна, и $N(4R) = 1$, то X – регулярная система.*

Оказывается, эта оценка в некотором смысле оптимальна.

ТЕОРЕМА 4. *Для всякого $\varepsilon > 0$ существует нерегулярное множество Делоне X с*

$$N(4R - \varepsilon) = 1.$$

ТЕОРЕМА 5 (Н. П. Долбилин). *Для всякого $d > 0$ и $r, R > 0$ существует $c = c(d, R/r)$ такая, что если в (r, R) -множестве Делоне выполнено $N(cR) = 1$, то это множество Делоне – регулярная система.*

В маленьких размерностях можно даже избавиться от всяких предположений о структуре нашего множества.

ТЕОРЕМА 6 (М. И. Штогрин, Н. П. Долбилин). *Пусть $X \subset \mathbb{R}^d$ – множество Делоне. Тогда:*

- 1) *если $d = 2$ и $N(4R) = 1$, то X регулярно;*
- 2) *если $d = 3$ и $N(10R) = 1$, то X регулярно.*

Будем называть множество Делоне *локально антиподальным*, если для всех $x \in X$ $2R$ -кластер вокруг x центрально-симметричен относительно x .

Оказывается, локально антиподальное множество Делоне всегда центрально-симметрично. Более того, локальная антиподальность – это очень сильное требование.

ТЕОРЕМА 7 (Н. П. Долбилин, А. Н. Магазинов). *Всякое d -мерное локально антиподальное множество Делоне есть объединение $n < 2^d$ конгруэнтных и параллельных друг другу решеток.*

Т. Йонсен (Университет Тромсё), *Кольца Стенли–Рейснера, связанные с матроидами и кодами*

Матроидом, ассоциированным с матрицей M над полем F с n столбцами называется пара $(E = \{1, \dots, n\}, \mathcal{N} \subset 2^E)$, где подмножество $A \subseteq E$ принадлежит $\mathcal{N}$ тогда и только тогда, когда столбцы с номерами, лежащими в этом подмножестве, линейно независимы. Базисами $\mathcal{B}$ нашего матроида называется набор максимальных подмножеств в $\mathcal{N}$. Набор подмножеств $\mathcal{N}$ удовлетворяет таким аксиомам:

- 1) $\emptyset \in \mathcal{N}$;
- 2) если $I \in \mathcal{N}$, $I' \subset I$, то $I' \in \mathcal{N}$;
- 3) если $I_1, I_2 \in \mathcal{N}$, $|I_1| < |I_2|$, то существует $e \in I_2 \setminus I_1$ такое, что $I_1 \cup \{e\} \in \mathcal{N}$.

Конечный матроид – это пара $M = (E, \mathcal{N})$, где E – конечное множество, а $\mathcal{N} \subset 2^E$ удовлетворяет указанным выше аксиомам. Базисами матроида, как и ранее, называются максимальные элементы в $\mathcal{N}$. Элементы $\mathcal{N}$ называются независимыми подмножествами E . Очевидно, любой базис имеет один и тот же размер. Он называется рангом матроида. Разумеется, существуют матроиды, которые не являются матроидами никакой матрицы.

Двойственный матроид M^* определяется как $\{E, \mathcal{N}^*\}$, где $\mathcal{N}^*$ состоит из дополнений до $\mathcal{B}$. Легко доказать также, что

$$\text{rk}(M) + \text{rk}(M^*) = n = |E|.$$

Матроид линейного кода C (т.е. подпространства $C \subseteq (\mathbb{F}_q)^n$) – это матроид $M(C)$ любой матрицы проверки нашего кода на четность (т.е. матрицы коэффициентов уравнений нашего подпространства).

Код C называется $[n, n - \text{rk}(M(C))]$ -кодом. В этом случае $M(C)^* = M(C^*)$, где C^* – ортогональное дополнение C .

Очень многие инварианты кода на самом деле выражаются в терминах матроидов.

Введем функцию ранга

$$\text{rk}: 2^E \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \text{rk}: X \mapsto \max\{|X'| : X' \subseteq X, X' \in \mathcal{N}\}.$$

Она удовлетворяет таким трем аксиомам:

R1) если $X \subseteq E$, то $0 \leq \text{rk}(X) \leq |X|$;

R2) если $X \subseteq Y \subseteq E$, то $\text{rk}(X) \leq \text{rk}(Y)$;

R3) для всех $X, Y \subseteq E$ выполнено $\text{rk}(X \cup Y) + \text{rk}(X \cap Y) \leq \text{rk}(X) + \text{rk}(Y)$.

Цикл в матроиде – это минимальное зависимое (не независимое) множество. Множество всех циклов обозначается $\mathcal{C}(M)$. Ясно, что $\mathcal{C}(M)$ полностью определяет M .

Пусть теперь $C \subseteq F^n$ для некоторого конечного алфавита F с $|F| = q$. Пусть для всякого $X \subseteq E = \{1, \dots, n\}$ проекция C_X имеет размер q^s для некоторого неотрицательного $s(X)$. Такое C называется *почти аффинным кодом*.

Если C – почти аффинный код, то $\text{rk}(X) = \log_q |C_X|$ определяет функцию ранга некоторого матроида. Тогда $M(C)$ – двойственный к этому матроиду матроид.

Пусть C – линейный код над полем $\mathbb{K}$. Обобщенные веса Хэммингса для C определяются так:

$$d_i = \min\{\# \text{supp } D : D \text{ – линейный подкод в } D \text{ размерности } i\}.$$

Для почти аффинных кодов обобщенные веса Хэммингса определяются аналогичным образом.

Оказывается, для весов Хэммингса можно дать эквивалентное определение в терминах матроидов. Для матроида N на множестве E обобщенные веса Хэммингса равны

$$d_i = \min\{\#\sigma \mid \#\sigma - \text{rk}(\sigma) = i\}.$$

Далее, если M – матроид на множестве E , а $\mathbb{K}$ – поле, определим $S = \mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[X_e, e \in E]$. Идеалом Стенли–Рейснера для M называется идеал $I_M \subset S$, порожденный $X^\sigma = \prod_{e \in \sigma} X_e$, где σ пробегает все множество $\mathcal{C}(M)$. *Кольцом Стенли–Рейснера* называется фактор $R_M = S/I_M$.

Из минимальной свободной резольвенты для R_M получаются три типа чисел Бетти матроида. Если i -й член этой резольвенты равен

$$F_i = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}^E} S(-\alpha)^{\beta_{i,\alpha}},$$

то $\mathbb{N}^E$ -градуированные числа Бетти – это $\beta_{i,\alpha}$; $\mathbb{N}$ -градуированные числа Бетти определяются как

$$\beta_{i,d} = \sum_{|\alpha|=d} \beta_{i,\alpha}$$

и, наконец, глобальные числа Бетти равны

$$\beta_i = \sum_{d \geq 0} \beta_{i,d}.$$

Оказывается, $\mathbb{N}^E$ -градуированные числа Бетти равны размерностям гомологий соответствующих ограничений матроида как симплициального комплекса.

Кроме того, в терминах чисел Бетти можно выразить и обобщенные веса Хэммингса.

ТЕОРЕМА 1. Пусть M – матроид ранга r на множестве E . Тогда при $1 \leq i \leq \#E - r$ его обобщенные веса Хэммингса равны

$$d_i = \min\{d \mid \beta_{i,d} \neq 0\}.$$

А. Б. Калмынин (Национальный исследовательский институт «Высшая школа экономики», математический факультет), *О числах Новака*

Числа Новака – это такие натуральные n , что $n \mid 2^n + 1$. Пусть $N_B(x)$ – “считающая функция” множества чисел Новака. Буква “B” в обозначении считающей функции написана в честь профессора Карлова университета Праги Бржетислава Новака, который доказал первые нетривиальные оценки для $N_B(x)$.

В 2012 г. Х. Х. Альба Гонзалез, Ф. Люка, К. Померанц и И. Е. Шпарлинский доказали следующую двойную оценку для этой величины:

$$e^{c(\ln \ln x)^2} \ll N_B(x) \ll xe^{-(1+o(1))\sqrt{\ln x \ln \ln x}}.$$

Докладчиком были получены более сильные нижние оценки функции $N_B(x)$, а именно

ТЕОРЕМА 1. *Для любого фиксированного натурального числа $n \geq 2$ существует такая константа $c_n > 0$, что выполнена оценка*

$$N_B(x) \gg e_n(c_n(\ln_{n+1} x)^2),$$

где e_n – n -кратная экспонента, а $\ln_{n+1}$ – $(n+1)$ -кратный логарифм.

Та же оценка выполнена и для последовательности таких натуральных n , что $n \mid a^n - b^n$, где a и b – целые числа с условием $|a - b| > 1$.

Ясно, что не всякое простое число может делить какое-нибудь число Новака. Будем называть такие простые p , что существует число Новака N , делящееся на p , *простыми числами Новака*. Из обобщенной гипотезы Римана можно вывести следующую оценку на их считающую функцию.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $\pi_N(x)$ – количество простых чисел Новака, не превосходящих x . Если верна обобщенная гипотеза Римана, то*

$$\pi_N(x) \ll \frac{x\sqrt{\ln \ln x}}{(\ln x)^{3/2}}.$$

Числами Новака–Кармайкла назовем такие n , что для всякого a , взаимно простого с n , число $a^n - 1$ делится на n . Оказывается, простые делители таких чисел Новака–Кармайкла вида $2N$, что N – число Новака, имеют следующее простое описание.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть P_1 – множество всех простых чисел, сравнимых с 3 по модулю 8. Для всех $n > 0$ определим P_{n+1} как множество всех простых чисел $p \in P_n$ таких, что все простые делители числа $(p-1)/2$ также лежат в P_n . Пусть*

$$P_\infty = \bigcap_{n=1}^{+\infty} P_n.$$

Тогда простое число p является делителем числа Новака N такого, что $2N$ – число Новака–Кармайкла, если и только если оно лежит в P_∞ .

В связи с этим была высказана такая гипотеза.

ГИПОТЕЗА 1. Множество P_∞ бесконечно.

На данный момент не известно даже, бесконечны ли множества P_n для всех натуральных n .

Д. В. Коледа (Институт математики НАН Беларуси), *Совместное распределение вещественных сопряженных алгебраических чисел*

Хорошо известно, что рациональные числа со знаменателем, не превосходящим Q , на любом отрезке при $Q \rightarrow +\infty$ распределяются равномерно.

Возникает естественный вопрос: как распределены алгебраические числа заданной степени $n \geq 2$ с высотой не больше Q , когда Q неограниченно возрастает?

Здесь *высотой* $H(\alpha)$ алгебраического числа α называется максимум модулей коэффициентов многочлена наименьшей степени с целыми взаимно простыми коэффициентами, для которого α является корнем, а *степенью* $\deg \alpha$ – соответственно степень этого многочлена.

В 2012 г. докладчик доказал такую теорему.

ТЕОРЕМА 1 (Коледа, 2012). Пусть $I \subset \mathbb{R}$ – некоторый интервал. Пусть $\Phi(Q; I)$ – количество алгебраических чисел $\alpha \in I$ степени $\deg \alpha \leq n$ и высоты $H(\alpha) \leq Q$. Тогда при $Q \rightarrow +\infty$ справедливо

$$\Phi(Q; I) = \frac{Q^{n+1}}{2\zeta(n+1)} \int_I \varphi_n(x) dx + O(Q^n D),$$

где положительная функция $\varphi_n(x)$ имеет вид

$$\varphi_n(x) = \int_{B_n(x)} \left| \sum_{k=1}^n k t_k x^{k-1} \right| dt_1 \dots dt_n,$$

где

$$B_n(x) = \left\{ (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n : \max_{1 \leq k \leq n} |t_k| \leq 1, \left| \sum_{k=1}^n t_k x^k \right| \leq 1 \right\}.$$

Неявная постоянная в символе $O(\cdot)$ зависит только от n ; и

$$D = \begin{cases} \ln Q, & \text{если } n = 2, \\ 1, & \text{если } n > 2. \end{cases}$$

При малых x функцию плотности $\varphi_n(x)$ можно выписать явно, а именно, при $|x| \leq x_n$, где $x_n > 1 - 1/\sqrt{2}$ – некоторая зависящая от n постоянная, выполнено равенство

$$\varphi_n(x) = \frac{2^{n-1}}{3} \left(3 + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)^2 x^{2k} \right).$$

Любопытно, что $\varphi_n(x)$ совпадает (с точностью до постоянного множителя) с плотностью вещественных корней случайного многочлена с независимыми равномерно распределенными на $[-1, 1]$ коэффициентами.

Посмотрим теперь на совместное распределение сопряженных вещественных алгебраических чисел.

ТЕОРЕМА 2 (Гётце, Коледа, Запорожец, 2015). Пусть $B \subset \mathbb{R}^k$ – тело, ограниченное m алгебраическими гиперповерхностями степени $\leq d$. Пусть $\Phi_k(Q; B)$ – количество векторов в B , компоненты которых являются сопряженными вещественными алгебраическими числами степени n и высоты $\leq Q$. Тогда имеет место равенство

$$\Phi_k(Q; B) = \frac{(2Q)^{n+1}}{2\zeta(n+1)} \int_B \rho_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + O(Q^n D),$$

где $d\mathbf{x} = dx_1 dx_2 \dots dx_k$, неявная постоянная в символе $O(\cdot)$ зависит только от n , m и d ; неотрицательная функция $\rho_k: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ задана формулой

$$\rho_k(\mathbf{x}) = 2^{-n-1} \prod_{1 \leq i < j \leq k} |x_i - x_j| \int_{D_{\mathbf{x}}} \prod_{i=1}^k \left| \sum_{j=0}^{n-k} t_j x_i^j \right| dt_0 \dots dt_{n-k},$$

где

$$D_{\mathbf{x}} = \left\{ (t_0, \dots, t_{n-k}) \in \mathbb{R}^{n-k+1} : \max_{0 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \sigma_{k-i+j}(\mathbf{x}) t_j \right| \leq 1 \right\},$$

здесь $\sigma_s(\mathbf{x})$ – элементарный симметричный многочлен степени s :

$$\sigma_s(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1 & \text{для } s = 0, \\ \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_s \leq k} x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_s} & \text{для } 1 \leq s \leq k, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Следует отметить, что предельное равенство

$$\lim_{Q \rightarrow \infty} \frac{\Phi_k(Q; B)}{Q^{n+1}} = \frac{2^n}{\zeta(n+1)} \int_B \rho_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

верно для любой фиксированной области B , у которой граница ∂B имеет нулевую меру Лебега. Однако чтобы дать равномерную оценку скорости сходимости, нужно рассматривать области B с более конкретными условиями на “извилистость” границы ∂B .

Наличие множителей вида $|x_i - x_j|$ означает, что мы имеем дело с детерминантным процессом, и корни как бы “расталкивают” друг друга.

Ясно, что при $k = 1$ получается предыдущая теорема. При $k = n$ получается плотность распределения *вполне вещественных* алгебраических чисел:

$$\rho_n(\mathbf{x}) = \frac{2^{-n}}{n+1} \left(\frac{1}{\max_{0 \leq i \leq n} |\sigma_i(\mathbf{x})|} \right)^{n+1} \prod_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j|.$$

Ясно, что $\rho_k(\mathbf{x})$ инвариантна относительно перестановок координат и умножения $\mathbf{x}$ на -1 . Чуть менее очевидно такое свойство:

$$\rho_k(x_1^{-1}, \dots, x_k^{-1}) = \rho_k(x_1, \dots, x_k) \prod_{i=1}^k x_i^2.$$

М. А. Королёв (Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, г. Москва), *Об оценках сумм Клоостермана методом А. А. Карацубы*

Пусть $q \geq 3$ – натуральное число и $A \subset (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ – подмножество приведенной системы вычетов по модулю q . Сумма

$$S_q(A; a, b) = \sum_{n \in A} e_q(an^* + bn),$$

где $e_q(x) = e^{2\pi i x/q}$ и $nn^* \equiv 1 \pmod{q}$, называется *суммой Клоостермана*. Если мощность множества A очень мала по сравнению с q , например $|A| < q^{1-c}$, то сумма Клоостермана называется *короткой*.

Будем далее рассматривать в качестве множества A отрезок $1 \leq n \leq N$. При $N \geq q^{1/2+\varepsilon}$ метод Вейля позволяет доказать, что

$$S_q(A; a, b) \ll \sqrt{q} \ln q.$$

В 1990-е гг. А. А. Карацуба создал метод, дающий нетривиальные оценки сумм $S_q(A, a, b)$ уже в случае $N \asymp q^\varepsilon$. В основе метода лежит оценка количества $I_k(q; N)$ решений сравнения

$$x_1^* + \dots + x_k^* \equiv x_{k+1}^* + \dots + x_{2k}^* \pmod{q}$$

в целых числах $1 \leq x_1, \dots, x_{2k} \leq N$.

А. А. Карацуба доказал близкую к оптимальной оценку

$$I_k(q; N) \leq (2k)^{k^3} N^k (\ln N)^{k^2},$$

которая нетривиальна при

$$k \leq k_0(q) \asymp \left(\frac{\ln q}{\ln \ln q} \right)^{1/3}.$$

Эвристически из этого следует, что нетривиальные оценки сумм Клоостермана должны полагаться уже при

$$N \geq e^{c_1 (\ln q)^{2/3+\varepsilon}}.$$

Первые результаты в этом направлении были несколько слабее: в середине 90-х гг. А. А. Карацуба доказал нетривиальную оценку с логарифмическим понижением в случае $N = q^\varepsilon$, позже подобная оценка была получена при $N \geq e^{c(\ln q)^{4/5+\varepsilon}}$.

В 2015 г. Ж. Бургейн и М. З. Гараев доказали, что при $N \geq e^{c(\ln q)^{2/3}(\ln \ln q)^5}$ имеет место оценка

$$S_q(A; a, 0) \ll N \frac{\ln q}{(\ln N)^{3/2}} (\ln \ln q)^3.$$

Их доказательство опирается на весьма сложные и глубокие результаты из аддитивной комбинаторики. Докладчику удалось показать, что ряд оценок, подобных оценке Бургейна и Гараева, и даже чуть более точных, можно получить, заменив в аргументации этих авторов аддитивно-комбинаторные методы на элементарные (методом Карацубы и оригинальным соображением П. В. Снурницына). В частности, справедливы следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 1. При простом q и $N \geq e^{c(\ln q)^{2/3}(\ln \ln q)^{4/3}}$ имеет место оценка

$$\sum_{0 < x \leq N} e_q(ax^*) \ll N \frac{\ln q}{(\ln N)^{3/2}} (\ln \ln q)^2.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть q простое, $N \geq e^{c(\ln q)^{2/3}(\ln \ln q)^{1/3}}$. Тогда выполнено неравенство

$$\sum_{0 < x \leq N} e_q(ax^*) \ll \frac{N \ln \mathcal{D}}{\mathcal{D}}, \quad \text{где } \mathcal{D} = \frac{\ln N}{(\ln q)^{2/3}(\ln \ln q)^{1/3}}.$$

ТЕОРЕМА 3. В условиях предыдущей теоремы справедлива оценка

$$\sum_{0 < x \leq N} e_q(ax^* + bx) \ll \frac{N}{\mathcal{D}^{3/4}}.$$

Также удалось доказать, что для простого q и целого N с условиями $\ln N \asymp \ln q$, $N \leq q^{1/2}$, лежащего в промежутках специального вида, имеет место оценка

$$S_q(A; a, b) \ll \frac{N}{(\ln N)^{1-\varepsilon}}.$$

Это усиливает оценку Бургейна и Гараева, понижение в которой для рассматриваемых N имеет порядок $(\ln N)^{-1/2}(\ln \ln N)^2$.

Н. Г. Моцевитин (Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет), *Новый взгляд на теорему Касселса о малых нулях квадратичных форм*

Пусть

$$Q(x) = \sum_{i,j \leq d} Q_{ij} x_i x_j,$$

где $Q_{ij} = Q_{ji} \in \mathbb{Z}$ – невырожденная квадратичная форма от d переменных. Будем говорить, что форма Q изотропна, если существует такое $g \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$, что $Q(g) = 0$.

ТЕОРЕМА 1 (А. Мейер). *Если невырожденная форма от пяти и более переменных представляет 0 в $\mathbb{R}$, то она изотропна.*

Пусть теперь в предыдущих обозначениях $Q = \max_{i,j} |Q_{ij}|$. Тогда имеет место следующая оценка Касселса для нулей изотропных форм.

ТЕОРЕМА 2 (Дж. В. С. Касселс). *Если Q – изотропная квадратичная форма от d переменных, то существует $g \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ с $Q(g) = 0$ и $\max |g_i| \leq (3Q)^{(d-1)/2}$.*

Позднее был получен ряд результатов, уточняющих теорему Касселса в различных направлениях.

ТЕОРЕМА 3 (Г. П. Шликевай). *Если Q обращается в нуль на τ -мерном рациональном подпространстве, то существует нетривиальный целочисленный нуль $g \in \mathbb{Z}^d$ с*

$$\max |g_i| \ll Q^{(d-\tau)/(2\tau)}.$$

ТЕОРЕМА 4 (Р. Шульце-Пиллот). *Если Q – изотропная квадратичная форма, то существует набор из d линейно независимых векторов $g^\nu = (g_1^\nu, \dots, g_d^\nu)$, $1 \leq \nu \leq d$, с $Q(g^\nu) = 0$ и*

$$\max_{k,\nu} |g_k^\nu| \ll Q^{(d-1)/2}.$$

Также эта тематика тесно связана с так называемыми внутренними рациональными приближениями.

ТЕОРЕМА 5 (Д. Я. Клейнбок, К. Меррил). *Пусть $S^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$ – единичная $(d-1)$ -мерная сфера. Тогда для любого $\alpha \in S^{d-1} \setminus \mathbb{Q}^d$ существует бесконечно много рациональных точек*

$$\frac{p}{q} = \left(\frac{p_1}{q}, \dots, \frac{p_d}{q} \right) \in S^{d-1} \cap \mathbb{Q}^d$$

таких, что выполнено неравенство

$$\max_j \left| \alpha_j - \frac{p_j}{q} \right| \leq \frac{C_d}{q}$$

(здесь C_d – некоторая неэффективная константа, зависящая от d).

Эта теорема была обобщена ее авторами, а также Фишманом и Симмонсом для случая произвольных положительно определенных форм. Все эти теоремы могут рассматриваться как количественные варианты некоторой теоремы Касселса о приближениях.

Оказывается, для некоторых специальных форм выполняется более сильная оценка.

ТЕОРЕМА 6. *Пусть $f(x)$ – квадратичная форма от n переменных, и пусть $F(z) = F(x, y) = f(x) - y^2$. Обозначим $\mathbf{v}_f = \text{vol}\{x \mid |f(x)| < 1\}$. Если F изотропна, то для всякого α с хотя бы одной иррациональной координатой и $f(\alpha) = 1$ существует бесконечно много таких*

$$r = \left(\frac{a_1}{q}, \dots, \frac{a_n}{q} \right)$$

с $q, a_i \in \mathbb{Z}$, что $f(r) = 1$ и

$$\sqrt{f(\alpha - r)} \leq \frac{3 \max\{1, (n+1)^{n+1} 6^n 2^{n^2} / \mathbf{v}_f^{n+1}\}}{q}.$$

У. М. Пачев (Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова, г. Нальчик), *О применении дискретного эргодического метода в аналитической теории дифантовых уравнений*

Будем рассматривать уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = m$ в целых числах при $m \rightarrow +\infty$. Количество решений $r(m)$ выражается через число классов квадратичных форм дискриминанта $(-m)$ следующим образом:

$$r(m) = \begin{cases} 12h(-m), & \text{если } m \equiv 1, 2 \pmod{4}, \\ 8h(-m), & \text{если } m \equiv 3 \pmod{8}. \end{cases}$$

Подсчет количества решений уравнения $f(x_1, \dots, x_n) = m$, где f – целочисленная квадратичная форма, – одно из классических направлений в теории чисел. При $n \geq 4$ к задачам такого рода применим круговой метод, который, однако, оказывается бессильным при $n = 3$. В связи с этим Ю. В. Линник разработал так называемый дискретный эргодический метод.

В основе метода лежит использование кватернионной арифметики. Пусть

$$a + bi + cj + dk = Q \in \mathbb{H}$$

– липшицев кватернион, $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$. Будем называть величину $bi + cj + dk$ кватернионным вектором. Далее, если $l \in \mathbb{R}$, а L – кватернионный вектор с условием $l + L = QR$, то, переставляя множители, получим $l + L' = RQ$.

Таким образом, арифметические свойства кватернионов позволяют по решению (b, c, d) уравнения $b^2 + c^2 + d^2 = m$ строить новое решение (b', c', d') . Продолжая этот процесс, можно получать цепочки кватернионных векторов.

При помощи своего метода Линнику удалось доказать ряд утверждений о равномерности целых точек на сфере. Докладчик продемонстрировал, что эти же методы работают и для неопределенных форм.

Иными словами, справедливы асимптотические формулы для количеств решений уравнения $f(x_1, x_2, x_3) = m$, где f – подходящая неопределенная квадратичная форма (например, $x_1x_3 - x_2^2$), а $(x_1, x_2, x_3) \in \Lambda$, где Λ – некоторая квадрируемая область на гиперboloиде $f(x_1, x_2, x_3) = m$.

Д. А. Попов (Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова; Научно-исследовательский институт физико-химической биологии имени А. Н. Белозерского), *Дискретный спектр оператора Лапласа на фундаментальной области модулярной группы и функция Чебышёва*

Пусть $\Gamma = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$, $\mathcal{H}$ – верхняя полуплоскость с метрикой $ds^2 = y^{-2}(dx^2 + dy^2)$, $\mathcal{F} = \Gamma \backslash \mathcal{H}$ – фактор по действию Γ . Можно рассмотреть дискретный спектр лапласиана на $\mathcal{F}$, т.е. множество всех таких λ , для которых существует функция $0 \neq \varphi \in L^2(\mathcal{F}, dx dy/y^2)$, удовлетворяющая уравнению

$$\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0,$$

где

$$\Delta = y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right).$$

Одна из причин, обуславливающих интерес к собственным функциям лапласиана на $\mathcal{F}$, состоит в том, что всякая такая функция продолжается до неголоморфной автоморфной формы, т.е. формы Маасса. Гипотеза Сельберга утверждает, что для всякой группы конечного кообъема дискретный спектр соответствующего лапласиана бесконечен и в некотором смысле достаточно полон. Гипотеза Сарнака–Филиппса говорит также, что для кофинитной группы, отвечающей точке общего положения в пространстве Тейхмюллера, дискретный спектр исчезает при деформациях комплексной структуры.

Для $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ и вообще для произвольной кофинитной группы можно рассматривать два спектра – спектр лапласиана, а также так называемый спектр резонансов. В случае $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ спектр резонансов с точностью до некоторых тривиальных добавок, есть множество нетривиальных нулей дзета-функции Римана. В 1978 г. А. Б. Венков доказал следующую теорему, связывающую эти два спектра для $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть при $m \in \mathbb{N}$ имеем $\lambda_m = 1/4 + r_m^2$, где $\{\lambda_m\}$ – дискретный спектр лапласиана на $\mathcal{F}$. Тогда при $t \rightarrow 0$ имеем

$$\sum_{m=0}^{+\infty} e^{-tr_m^2} \cos(ar_m) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \frac{\Lambda(n)}{n} + O(1), & \text{если } a = 2 \ln n, n \in \mathbb{N}, \\ \frac{1}{4\sqrt{\pi t}} \frac{\ln N(P)}{\sqrt{N(P) - 1/\sqrt{N(P)}}} + O(1), & \text{если } a = \ln N(P), \\ O(1) & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $N(P)$ – собственные значения гиперболических элементов в $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$.

Теорема Венкова неравномерна по n (что проявляется особенно ярко в случае, когда $2 \ln n \approx \ln N(P)$). Таким образом, эта теорема не позволяет полностью восстановить функцию Мангольдта по дискретному спектру лапласиана на $\mathcal{F}$.

Докладчику удалось, опираясь на формулу следа Сельберга, вывести тождество, решающее эту проблему.

ТЕОРЕМА 2 (Попов). Пусть $x \geq 3$ и $0 < t \leq p^{-1}x^{-4}(\ln x)^{-1}$, где $p \geq 20$ – фиксированная постоянная. Тогда справедлива следующая формула для ψ -функции Чебышёва:

$$\psi(x) = 2\sqrt{\pi t} \sum_{m=0}^{+\infty} e^{-tr_m^2} \sum_{2 \leq k \leq x} k \cos(2r_m \ln k) + R(x),$$

где

$$|R(x)| \leq \frac{cx^2\sqrt{t}}{(\ln x)^2} \ll \frac{1}{(\ln x)^{5/2}}.$$

Не исключено также, что по дискретному спектру можно полностью восстановить спектр резонансов, но этого сделать пока не удалось.

З. Х. Рахмонов (Институт математики АН Республики Таджикистан, г. Душанбе), *Суммы характеров по свободному от кубов модулю на сдвинутых простых*

Пусть q – простое число, $(l, q) = 1$, χ – неглавный характер по модулю q . В 1938 г. И. М. Виноградов доказал, что для всякого $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство

$$T(\chi; x) := \sum_{p \leq x} \chi(p - l) \ll x^{1+\varepsilon} \left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{x}} + x^{-1/6} \right).$$

Эта оценка нетривиальна при $x \gg q^{1+\varepsilon}$. В 1952–1953 гг. Виноградов получил оценки, нетривиальные при $x \geq q^{3/4+\varepsilon}$. Этот результат не следует даже из гипотезы Римана.

А. А. Карацубой получены результаты, усиливающие оценки Виноградова и дающие нетривиальную оценку суммы $T(\chi; x)$ уже при $x \geq q^{1/2+\varepsilon}$, а именно

ТЕОРЕМА 1 (А. А. Карацуба). Пусть q – простое число, χ – неглавный характер по модулю q , $x \geq q^{1/2+\varepsilon}$. Тогда имеет место оценка

$$T(\chi, x) \ll xq^{-(1/1024)\varepsilon^2}.$$

Также метод А. А. Карацубы позволяет улавливать и некоторую независимость различных сдвигов простых чисел по модулю q .

ТЕОРЕМА 2 (А. А. Карацуба). Пусть $\tau_1 = \pm 1$, $\tau_2 = \pm 1$, q – простое число, k_1 и k_2 – целые числа такие, что $q \nmid k_1 k_2 (k_1 - k_2)$, $\omega \in (0, 1/2)$, $x \geq q^{0.75+\varepsilon}$. Пусть T – количество простых $p \leq x$ с условиями

$$\left(\frac{p+k_1}{q}\right) = \tau_1, \quad \left(\frac{p+k_2}{q}\right) = \tau_2.$$

Тогда справедливо равенство

$$T = \frac{1}{4} \pi(x) + O_\omega(xq^{-0.01\omega^2}).$$

В 1985 г. докладчиком был доказан аналог оценки Виноградова для составных модулей, нетривиальный при $x \geq q \ln^{13} q$.

ТЕОРЕМА 3 (З. Х. Рахмонов). Пусть D – достаточно большое положительное число, χ – неглавный характер по модулю D , χ_q – примитивный характер по модулю q , индуцирующий χ . Тогда выполняется неравенство

$$T(\chi; x) \leq x \ln^5 x \left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{x} \tau(q_1)^2} + x^{-1/6} \tau(q_1) \right),$$

где $q_1 = \prod_{p|D} p$. Если $\chi = \chi_q$, то

$$T(\chi; x) \leq x \ln^5 x \left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{x}} + x^{-1/6} \right).$$

В 2010 г. Дж. Б. Фридлендер, К. Гонг и И. Е. Шпарлинский доказали нетривиальную оценку для $T(\chi; x)$ в случае, когда характер χ примитивный и $x \geq q^{8/9+\varepsilon}$. Через три года докладчик смог усилить этот результат.

ТЕОРЕМА 4 (З. Х. Рахмонов, 2013). Пусть q достаточно велико, χ_q – примитивный характер по модулю q , l взаимно просто с q , $\varepsilon > 0$, $\mathcal{L} = \ln q$, $x \geq q^{5/6+\varepsilon}$. Тогда справедлива оценка

$$T(\chi_q; x) = \sum_{p \leq x} \chi_q(p-l) \ll x e^{-\sqrt{\mathcal{L}}}.$$

Наконец, удастся получить оценку, нетривиальную при тех же условиях, что и оценка из теоремы 1.

ТЕОРЕМА 5 (З. Х. Рахмонов). Пусть D – достаточно большое натуральное число, χ – неглавный характер по модулю D , χ_q – примитивный характер по модулю q , порожденный характером χ , q – свободное от кубов, $(l, D) = 1$, $\varepsilon \leq 10^{-3}$ – фиксированное положительное число. Тогда при $x \geq D^{1/2+\varepsilon}$, имеем

$$T(\chi) = \sum_{p \leq x} \chi(p-l) \ll x e^{-0.6\sqrt{\ln D}},$$

где постоянная под знаком $\ll$ зависит только от ε .

Доказательство этой теоремы комбинирует методы А. А. Карацубы и И. М. Виноградова с методом доказательства теоремы 4, а также опирается на оценки А. И. Виноградова и Д. А. Бёрджесса для сумм характеров.

И. С. Резвякова (Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, г. Москва), *О методе Сельберга и аддитивной проблеме в задачах теории L -функций*

Будем говорить, что функция $L(s)$ лежит в классе Сельберга, если выполнены следующие пять аксиом:

- 1) $L(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} (a(n)/n^s)$, где ряд в правой части сходится абсолютно при $\operatorname{Re} s > 1$;
- 2) $(s-1)^m L(s)$ – целая функция конечного порядка для некоторого $m \geq 0$;
- 3) $a(1) = 1$ и для всякого $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство $a(n) \ll_{\varepsilon} n^{\varepsilon}$;
- 4) $L(s)$ разлагается в эйлерово произведение по простым числам;
- 5) $L(s)$ удовлетворяет функциональному уравнению вида

$$\Lambda(s) := H_L(s)L(s) = \overline{\Lambda(1-\bar{s})}.$$

Гипотетически все L -функции из класса Сельберга удовлетворяют гипотезе Римана. Можно попробовать получать различные приближения к гипотезе Римана для данной L -функции $L(s)$. Оказывается, для этого нужно научиться решать аддитивные проблемы для коэффициентов $L(s)$, а именно получать нетривиальные оценки (либо выделять главный член и получать нетривиальные оценки остатка) для сумм вида

$$S = \sum_{\substack{an-bm=\ell \\ n \leq N}} a(n)\overline{a(m)},$$

где a, b, ℓ – положительные целые числа, быть может, умеренно возрастающие вместе с ростом N .

Метод, разработанный А. Сельбергом, позволяет выводить из аддитивных задач с коэффициентами множество фактов, связанных с L -функциями и гипотезой Римана для них. В частности, получаются оценки для величин

$$\int_T^{2T} \left| L\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^2 dt, \quad \int_T^{2T} \left| L\left(\frac{1}{2} + it\right) \eta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^2 dt,$$

где $\eta(s)$ – многочлен Дирихле с достаточно малым количеством слагаемых.

Кроме того, удастся доказать аналог плотностной теоремы для $\zeta(s)$.

ТЕОРЕМА 1 (плотностная теорема). Пусть $N(\sigma, T)$ – количество нулей $L(s)$ в области $\operatorname{Re} s \geq \sigma$, $|\operatorname{Im} s| \leq T$. Тогда существует такая константа $a > 0$, что при $1 \geq \sigma \geq 1/2$ выполнена оценка

$$N(\sigma, T) \ll T^{1-a(\sigma-1/2)} \ln T.$$

Из этой теоремы следует также теорема о распределении значений $L(s)$.

ТЕОРЕМА 2 (распределение значений на критической прямой). Пусть $\chi_I(x)$ – характеристическая функция отрезка $I \subset \mathbb{R}$. Тогда имеет место равенство

$$\int_T^{2T} \chi_I\left(\frac{\ln |L(1/2 + it)|}{\sqrt{c_L \pi \ln \ln T}}\right) dt = T \int_I e^{-\pi u^2} du + o(T),$$

причем слагаемое $o(T)$ при помощи аргументов А. Гоша и К.-М. Цанга можно заменить на

$$O\left(\frac{T}{\sqrt{\ln \ln \ln T}}\right) \quad \text{и} \quad O\left(\frac{T(\ln \ln \ln T)^2}{\sqrt{\ln \ln T}}\right)$$

соответственно.

Метод, разработанный Сельбергом, опирается на правильный выбор так называемого “успокаивающего множителя”, т.е. многочлена Дирихле $\eta(s)$, который понижает порядок величины

$$\int_T^{2T} \left| L\left(\frac{1}{2} + it\right) \eta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^2 dt.$$

Можно также рассматривать линейные комбинации L -функций из класса Сельберга, которые не имеют эйлерового произведения, однако удовлетворяют функциональному уравнению. Хорошо известно, что для таких функций гипотеза Римана неверна. Тем не менее оказывается, что аномально много нулей лежат на критической прямой. Более того, методом Сельберга можно доказать, что *положительная доля* нулей такой линейной комбинации лежит на критической прямой.

Результаты такого рода для линейных комбинаций L -функций основаны на следующем аналоге теоремы 2.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $L_1(s), L_2(s)$ – независимые L -функции из класса Сельберга. Тогда для любого отрезка I выполнено равенство

$$\int_T^{2T} \chi_I \left(\frac{\ln |L_1(1/2 + it)| - \ln |L_2(1/2 + it)|}{\sqrt{(n_1 + n_2)\pi \ln \ln T}} \right) dt = T \int_I e^{-\pi u^2} du + O\left(\frac{T(\ln \ln \ln T)^2}{\sqrt{\ln \ln T}}\right).$$

Вывод из этой теоремы факта о положительной доле нулей использует такую идею: согласно теореме 3, за исключением множества небольшой меры, значения одной из наших L -функций (примерно на половине отрезка – первой и на половине – второй) существенно больше значений другой, и потому их линейная комбинация ведет себя почти как доминирующая L -функция. Такое рассуждение упрощает выбор успокаивающего множителя и в итоге приводит к доказательству.

М. Ризагер (Копенгагенский университет), *Гиперболическая проблема круга*

Классическую проблему круга Гаусса (или евклидову проблему круга) можно сформулировать следующим образом: для положительного R определим

$$N_E(R) = \#\{\gamma \in \mathbb{Z}^2 \mid d_E(\gamma(0), 0) \leq R\},$$

где $d_E(x, y)$ – евклидово расстояние между точками x и y , а γ рассматривается как элемент $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)$. Тогда $N_E(R) = \pi R^2 + E(R)$ и $E(R) = O(R)$. При помощи формулы суммирования Пуассона можно получить такую формулу для $E(R)$:

$$E(R) = R^{1/2} \sum_{m>0} \frac{r_2(m)}{m^{3/4}} \cos\left(2\pi R\sqrt{m} - \frac{3\pi}{4}\right) \psi\left(\frac{m}{T}\right) + O\left(R^{1/2} + \frac{R^{1+\varepsilon}}{T^{1/2}}\right),$$

где $\psi(x)$ – правильная сглаживающая куполообразная функция.

Если в последнем равенстве сумму по m оценить тривиально, то получится оценка В. Ф. Серпинского $E(R) \ll R^{2/3+\varepsilon}$. Наилучший на данный момент результат – оценка М. Хаксли вида $E(R) \ll R^{131/208+\varepsilon}$, в то время как гипотеза Г. Х. Харди предсказывает $E(R) \ll R^{1/2+\varepsilon}$.

Можно рассматривать аналог проблемы круга для гиперболической плоскости: пусть Γ – фуксова группа, действующая на верхней полуплоскости $\mathcal{H}$ и имеющая конечный кообъем. По аналогии с $N_E(R)$ определим

$$N_H(R, z) = \#\{\gamma \in \Gamma \mid d_H(\gamma z, z) \leq R\}.$$

Можно предположить, что главный член здесь будет равен

$$\frac{\text{vol}(B(z, R))}{\text{vol}(\Gamma \setminus \mathcal{H})} =: M(R).$$

Пусть $E(R, z) = N_H(R, z) - M(R)$ – остаточный член. Аналогом формулы суммирования Пуассона в этом случае является формула следа Сельберга. Она дает следующее выражение для остатка:

$$E(R, z) = \sqrt{\pi} e^{R/2} \sum_{t_j > 0} \operatorname{Re} \left(e^{i R t_j} \frac{\Gamma(it_j) |\varphi_j(z)|^2}{\Gamma(3/2 + it_j)} \right) \psi \left(\frac{t_j}{T} \right) + O \left(\frac{e^R}{T} + e^{R(1/2+\varepsilon)} \right),$$

где t_j и $\varphi_j(z)$ – собственные значения и соответствующие собственные функции автоморфного лапласиана $-\Delta$. Оценивая тривиально, можно доказать оценку $E(R, z) \ll e^{R(2/3+\varepsilon)}$. Это результат Сельберга и наилучшая из доказанных на данный момент оценок. Докладчику удалось доказать две теоремы, усиливающие эту оценку в среднем. Первая из них использует аналитическое усреднение.

ТЕОРЕМА 1 (Я. Н. Петридис, М. Ризагер, 2014). Пусть $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ и f – гладкая неотрицательная функция на $\Gamma \backslash \mathcal{H}$ с компактным носителем. Тогда выполнена оценка

$$\int_{\Gamma \backslash \mathcal{H}} f(z) (N(R, z) - M(R)) d\mu(z) = O(e^{R(7/12+\varepsilon)}).$$

Можно также усреднять величину $N(R, z) - M(R)$ арифметически. А именно, пусть $-D < 0$ – фундаментальный дискриминант и $\mathfrak{F}_D$ – множество квадратичных форм такого дискриминанта. Группа $SL_2(\mathbb{Z})$ действует на $\mathfrak{F}_D$. Пусть $p(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 \in \mathfrak{F}_D$, тогда

$$\tau_P = \frac{-b + i\sqrt{D}}{2a} \in \mathcal{H}$$

называется *точкой Хегнера дискриминанта* $-D$. Обозначим все такие точки, лежащие внутри фундаментальной области $SL_2(\mathbb{Z})$, через Λ_D . Тогда $|\Lambda_D| = h(-D)$. При арифметическом усреднении выполнен такой факт.

ТЕОРЕМА 2 (Я. Н. Петридис, М. Ризагер). Пусть $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ и f – гладкая неотрицательная функция на $\Gamma \backslash \mathcal{H}$ с компактным носителем. Тогда

$$\frac{1}{h(-D)} \sum_{z \in \Lambda_D} f(z) (N(R, z) - M(R)) = O(e^{R(7/12+\varepsilon)} + e^{R(4/5+\varepsilon)} D^{-4/165+\varepsilon}).$$

Эти оценки получаются с помощью теорем В. Луо, П. Сарнака об эффективной квантовой строгой эргодичности в среднем, Х. Иванца, В. Луо, П. Сарнака о сокращениях спектральных сумм, а также опираются на тождества типа Вальдшпурже и субвыпуклость типа Вейля в среднем. Кроме того, важна для доказательства следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3 (Я. Н. Петридис, М. Ризагер; $\sup$ -нормы в среднем). Для всякого $\varepsilon > 0$ и всякого компакта K выполнена оценка

$$\sum_{T \leq t_j \leq 2T} \sup_{z \in K} |\varphi_j(z)|^2 = O_K((1+T)^{11/4+\varepsilon}).$$

А. А. Седунова (Университет Париж-юг 11), *Обобщение метода Бомбьери–Пила на случай поля функций*

В 1989 г. Э. Бомбьери и Дж. Пила доказали, что если Γ – подмножество неприводимой алгебраической кривой степени d , лежащее внутри квадрата со стороной N , то количество точек решетки, лежащих на Γ , не превосходит $c(d, \varepsilon) N^{1/d+\varepsilon}$.

У этого результата имеется множество аналогов: например, можно было бы считать количество решений уравнения $f(x, y) = 0$ в $\mathbb{F}_p$, попадающих в очень короткие (чтобы граница

Вейля перестала работать) промежутки. Если продолжать эту аналогию, то наиболее естественно было бы попробовать доказать такое утверждение в функциональном случае, т.е. для кольца $\mathbb{F}_q[T]$. В этой ситуации аналогом короткого интервала будет выступать множество $X(T) + Y(T)$, где многочлен $X(T)$ фиксирован, а $Y(T)$ пробегает все многочлены степени $\leq n$.

Докладчиком было доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть C – неприводимая алгебраическая кривая степени d над $\mathbb{F}_q[T]$. Если $S = C \cap I^2$, где I – множество всех полиномов в $\mathbb{F}_q[T]$ степени не выше n , то

$$|S| \ll |I|^{1/d+o(1)}.$$

Выстраивать доказательство в полной аналогии с доказательством Э. Бомбьери и Дж. Пила не получается: в $\mathbb{F}_q[T]$ нет нужного аналога теоремы о среднем значении.

Пусть теперь $\mathcal{W}$ – конечный набор линейно независимых многочленов в $(\mathbb{F}_q[T])[X, Y]$, такой, что $1 \in \mathcal{W}$. Будем обозначать $d_{\mathcal{W}}$ сумму степеней всех элементов $\mathcal{W}$ и $\omega = |\mathcal{W}|$. Будем также считать, что $\mathcal{W}$ разделяет точки. $\mathcal{W}$ -Кривой называется аффинная алгебраическая кривая $G(X, Y) = 0$ такая, что все мономы G принадлежат $\mathcal{W}$.

Методами в духе работы Х. Хельфготта, А. Венкатеша о плохо распределенных множествах докладчику удалось доказать следующую лемму.

ЛЕММА 1. Пусть C – неприводимая алгебраическая кривая степени d над $\mathbb{F}_q[T]$, а $S = C \cap I^2$. Предположим, что для некоторого фиксированного $\alpha > 0$ и любого неприводимого полинома $f \in \mathbb{F}_q[T]$ количество вычетов $\{(X, Y) \bmod f \mid X, Y \in S\}$ не превосходит $\alpha q^{\deg f}$. Пусть множество $\mathcal{W}$ выбрано таким образом, что всякая $\mathcal{W}$ -кривая содержит не более C точек S . Тогда при больших $|I|$ имеет место соотношение

$$|S| \ll_{\mathcal{W}} |I|^{\frac{2\alpha d_{\mathcal{W}}}{\omega(\omega-1)} + \psi(\omega, C, \alpha)},$$

где

$$\psi(\omega, C, \alpha) = \frac{2\alpha d_{\mathcal{W}} C}{\omega^2(\omega - 1)^2}.$$

Применение леммы 1 для случая $\mathcal{W} = \mathcal{W}_{d-1, M} = \{X^i Y^j \mid i \leq d-1, j \leq M\}$ с достаточно большим M позволяет, используя некоторые дополнительные аргументы с границей Вейля и выбором правильного многочлена для нашей кривой, доказать теорему 1. Выбор множества такой же, как в доказательстве Бомбьери и Пила, параметры из леммы равны

$$\omega = d(M+1), \quad d_{\mathcal{W}} = d(M+1) \frac{d+M-1}{2}.$$

Д. А. Фроленков (Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, г. Москва), *Усиление результата Портера*

Пусть q – рациональное число. Обозначим через $s(q)$ длину цепной дроби этого числа. Имеет место следующая асимптотическая формула для средней длины цепной дроби дробей с фиксированным знаменателем.

ТЕОРЕМА 1 (Дж. В. Портер, 1975). Для произвольного положительного ε выполнено равенство

$$\frac{1}{\varphi(b)} \sum_{\substack{1 \leq a \leq b \\ (a, b) = 1}} s\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{2 \ln 2}{\zeta(2)} \ln b + C_P - 1 + O(b^{-1/6+\varepsilon}),$$

где

$$C_P = \frac{2 \ln 2}{\zeta(2)} \left(\frac{3 \ln 2}{2} + 2\gamma - 2 \frac{\zeta'}{\zeta}(2) - 1 \right) - \frac{1}{2}$$

– константа Портера.

Оказывается, что оценка этой суммы связана с количеством решений одного уравнения в целых числах, а именно

ЛЕММА 1 (Г. А. Хейльбронн, 1968; А. В. Устинов, 2005). *Для всех $\varepsilon > 0$ справедливо равенство*

$$\sum_{\substack{1 \leq a \leq b \\ (a,b)=1}} s\left(\frac{a}{b}\right) = 2 \sum_{d_1, d_2 | b} \mu(d_1) \mu(d_2) R\left(\frac{b}{d_1 d_2}\right) - \frac{1}{2} \varphi(b) + O(b^\varepsilon),$$

где $R(N)$ – количество решений уравнения $n_1 n_2 + n_3 n_4 = N$ с условиями $1 \leq n_1 \leq n_3$ и $1 \leq n_2 \leq n_4$.

Далее, при помощи сглаживающих функций и преобразования Меллина удастся свести задачу улучшения остаточного члена в теореме 1 к вопросу об оценках суммы

$$\sum_{n+m=N} \sigma_s(n) \sigma_s(m),$$

где $\sigma_s(n) = \sum_{d|n} d^s$, т.е. к аддитивной проблеме делителей. Для получения таких оценок используется некоторый вариант формулы Вороного, что и приводит в итоге к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 2 (В. А. Быковский, Д. А. Фроленков). *Для всякого $\varepsilon > 0$ верна оценка*

$$\frac{1}{\varphi(b)} \sum_{\substack{1 \leq a \leq b \\ (a,b)=1}} s\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{2 \ln 2}{\zeta(2)} \ln b + C_P - 1 + O(b^{-6/29+\varepsilon}).$$

Г. В. Федоров (Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет; Научно-исследовательский институт системных исследований РАН, г. Москва), *Теорема Римана–Роха и периодичность непрерывных дробей в гиперэллиптических полях*

Одна из фундаментальных проблем теории чисел и алгебраической геометрии – описание кручения на якобианах гиперэллиптических кривых над $\mathbb{Q}$. Корни этой проблемы лежат еще в исследованиях XIX века.

Как известно, якобиан эллиптической кривой изоморфен самой кривой. Случай рода 1 решен над $\mathbb{Q}$ Б. Мазуром в 1978 г. В 2010 г. В. П. Платонову удалось осуществить продвижение в этой проблеме, основываясь на естественной связи между фундаментальными единицами (или, более широко, S -единицами) и точками кручения на якобианах гиперэллиптических кривых.

Связь между существованием нетривиальных S -единиц и периодичностью разложения в непрерывную дробь некоторых специальных элементов поля функций гиперэллиптической кривой в случае конечных нормирований была впервые обнаружена в совместной работе В. П. Платонова и докладчика (декабрь 2015 г.).

Их результаты позволяют получить быстрый алгоритм для построения фундаментальных S -единиц, используя подходящие дроби непрерывных дробей специальных элементов поля функций.

Пусть K – некоторое поле (поле констант), $\text{char } K \neq 2$, $f \in K[x]$ – свободный от квадратов многочлен, $h(x) \in K[x]$, $\deg h = 1$. Конечное нормирование ν_h поля $K(x)$ определяется следующим образом: если $P, Q \in K[x]$ – не делящиеся на h многочлены, а $m \in \mathbb{Z}$, то

$$\nu_h\left(h^m \frac{P}{Q}\right) = m.$$

Бесконечное нормирование ν_∞ определяется равенством

$$\nu_\infty\left(\frac{P}{Q}\right) = \deg Q - \deg P.$$

Связь между решениями уравнения Пелля $\omega_1^2 - f\omega_2^2 = 1$ с $\omega_i \in \mathbb{C}[x]$ и периодически непрерывными дробями в поле $\mathbb{C}((1/x))$ была обнаружена еще в работах Н. Х. Абеля и П. Л. Чебышёва, посвященных гиперэллиптическим интегралам, т.е. интегралам вида

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{f(x)}} dx.$$

Пусть $f \in K[x]$ – многочлен нечетной степени $2g+1$, $L = K(x)(\sqrt{f})$ – кольцо функций кривой $C: y^2 = f(x)$. Тогда бесконечное нормирование имеет единственное продолжение с $K(x)$ на L . Пусть ν_h имеет два продолжения: ν_h^- и ν_h^+ . Тогда всякий элемент L раскладывается в непрерывную дробь в $K((h))$. Пусть теперь $S = \{\nu_h^-, \nu_\infty\}$, а $\mathcal{O}_S$ – кольцо S -целых элементов L . Мультипликативная группа $\mathcal{O}_S^*$ называется группой S -единиц.

Для конечного поля констант любая квадратичная иррациональность α в L раскладывается в периодическую непрерывную дробь, поэтому фундаментальные S -единицы можно вычислять при помощи непрерывных дробей (это результат В. П. Платонова и В. В. Беньш-Кривеца).

В случае произвольного поля K существование фундаментальной S -единицы оказывается эквивалентно периодичности разложения $\sqrt{f}h^{-g}$ или $\sqrt{f}h^{-g-1}$, и фундаментальные единицы можно вычислять при помощи подходящих дробей.

Напомним, как строятся непрерывные дроби. Пусть

$$\alpha \in K((h)), \quad \alpha = \sum_{j=-r}^{+\infty} b_j h^j,$$

где $b_j \in K$. Определим h -целую часть как

$$[\alpha] = [\alpha]_h = \sum_{j=-r}^0 b_j h^j$$

(если нижний предел больше верхнего, то сумму считаем нулевой). А имея функцию целой части, можно уже стандартным образом определить неполные частные и подходящие дроби непрерывной дроби.

Всякий элемент $\alpha \in L$ является корнем некоторого многочлена $H(X) = \lambda_2 X^2 + 2\lambda_1 X + \lambda_0$, где $\lambda_i \in K[x]$ с условием $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) = 1$. Для $j \in \mathbb{N}$ определим

$$\begin{aligned} A_j &= (-1)^{j+1}(\lambda_2 p_j^2 + 2\lambda_1 p_j q_j + \lambda_0 q_j^2), \\ B_j &= (-1)^j(\lambda_2 p_j p_{j-1} + 2\lambda_1 p_{j-1} q_j + \lambda_0 q_j q_{j-1}), \end{aligned}$$

где p_j и q_j – числитель и знаменатель j -й подходящей дроби соответственно.

При помощи дивизоров на C_L и формулы Римана–Роха докладчиком была доказана такая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть свободный член многочлена $f = f(h)$ ненулевой и является квадратом в K . Пусть $s = g$ или $g+1$, а $\alpha = \sqrt{f}h^{-s}$, $a_0 = [\alpha]$. Для некоторых $n, t \in \mathbb{N}$ следующие условия эквивалентны:

- 1) $n \geq 2$ – такое наименьшее n , что $\nu_h(A_{n-1}) = \deg A_{n-1}$;
- 2) непрерывная дробь для $\alpha + a_0 \in K((h))$ чисто периодична с периодом n или $2n$;

- 3) m – наименьшее натуральное число, для которого уравнение $\omega_1^2 - f\omega_2^2 = bh^m$ имеет решение с $\omega_i \in K[x]$, $\nu_h(\omega_1) = 0$, $b \in K^*$; в этом случае

$$h^{-s} \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$$

– подходящая дробь для α ;

- 4) поле $L = K(x)(\sqrt{f})$ имеет фундаментальную S -единицу степени m ;
- 5) класс дивизора $D = \nu_h^- - \nu_\infty$ имеет конечный порядок m в группе $\Delta^0(L)$ классов дивизоров степени 0 поля L .

М. Е. Чанга (Московский педагогический государственный университет), *О числах, количество простых делителей которых принадлежит заданному классу вычетов*

Пусть E – бесконечное подмножество в $\mathbb{N}$, M – множество всех таких натуральных чисел n , у которых все простые делители принадлежат множеству E .

Пусть также $\gamma(n)$ – некоторая аддитивная функция такая, что $\gamma(p) = 1$ для любого простого числа p . Наиболее классический выбор для $\gamma(n)$ – число простых делителей n с учетом кратности $\Omega(n)$ и число различных простых делителей $\nu(n)$. Пусть $n(x)$ – считающая функция множества M . Также для любых целых $k \geq 2$ и l

$$n_l(x; k) = \sum_{\substack{n \leq x, n \in M \\ \gamma(n) \equiv l \pmod{k}}} 1.$$

Будем считать, что для множества E выполнено хотя бы одно из двух условий: либо существуют такие положительные c_E и Δ , что

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ p \in E}} 1 = c_E \pi(x) + O(x^{1-\Delta}),$$

либо E представимо в виде объединения r различных (и не включающих одна другую) арифметических прогрессий по модулю m . В этом случае положим

$$c_E = \frac{r}{\varphi(m)}.$$

Один из примеров подходящего множества E , не являющегося объединением арифметических прогрессий, строится так: выберем натуральные D и j , а также вещественное $a > 0$, $a \notin \mathbb{N}$, и положим

$$E = \mathbb{N} \cap \bigcup_{n=0}^{+\infty} [(Dn + j - 1)^{1/a}, (Dn + j)^{1/a}].$$

В этом случае

$$c_E = \frac{1}{D}.$$

Для всех “хороших” (т.е. имеющих перечисленные выше свойства) множеств E имеет место асимптотика

$$n(x) \sim \frac{Cx}{(\ln x)^{1-c_E}}.$$

Намного интереснее то, что происходит с $n_l(x; k)$ при $k = 2$. Оказывается, имеет место следующий факт.

ТЕОРЕМА 1. Если E “хорошее”, $E \neq \mathbb{N}$, то для некоторого положительного A выполнено равенство

$$n_l(x; 2) = \frac{1}{2} n(x) \left(1 + \frac{(-1)^{l+1} A}{\ln^{2c_E} x} + O(\ln^{-2c_E-1} x) \right).$$

Таким образом, при больших x разность $n_1(x; 2) - n_0(x; 2)$ не только все время остается положительной, но и отличается по порядку от $n(x)$ всего лишь логарифмическим множителем. Это несколько неожиданно, поскольку при $E = \mathbb{N}$ можно показать, что

$$n_1(x; 2) - n_0(x; 2) \ll n(x) e^{-c\sqrt{\ln x}}.$$

Этот эффект был обнаружен А. А. Карацубой в случае $\gamma(n) = \Omega(n)$.

Посмотрим теперь на случай $k \geq 3$. Правда ли, что нам удастся найти такое $l \bmod k$, что $n_l(x; k)$ доминирует над всеми остальными $n_{l'}(x; k)$ с $l' \not\equiv l \pmod{k}$ при достаточно больших x ?

Оказывается, такого l не существует ни для каких $k > 2$ и ни для каких E , а именно, возникает некоторая осцилляция.

ТЕОРЕМА 2. Для всех $k \geq 3$ существуют такие константы A , φ_0 и $\delta_k > 2c_E \sin^2(\pi/k)$, что

$$n_l(x; k) = \frac{1}{k} n(x) \left(1 + \frac{A \cos(c_E \sin(2\pi/k) \ln \ln x + \varphi_0 - 2\pi l/k)}{\ln^{2c_E \sin^2(\pi/k)} x} + O(\ln^{-\delta_k} x) \right).$$

Такая осцилляция и отсутствие “доминирующего” остатка обусловлены тем, что при применении метода комплексного интегрирования к этой задаче при $k > 2$ приходится интегрировать $\zeta(s)$ в комплексной степени (с ненулевой мнимой частью).

В. Г. Чирский (Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова), *О представлениях натурального числа слагаемыми определенного вида*

Пусть P – некоторое конечное множество $\{p_1, p_2, \dots, p_t\}$ простых чисел. Будем обозначать через $A(P)$ множество всех натуральных чисел, все простые делители которых лежат в P , и через $A_{\pm}(P)$ – множество всех целых чисел с тем же свойством. Легко понять, что для всякого натурального k существуют натуральные числа, не представимые никаким количеством $l \leq k$ слагаемых из $A(P)$ или $A_{\pm}(P)$.

Можно также доказать, что для всякого натурального k существует бесконечно много таких n , что k – наименьшее количество слагаемых, которым n может быть представлено в виде суммы чисел из $A_{\pm}(P)$.

Пусть $F(k)$ и $F_{\pm}(k)$ – наименьшие числа, не представимые суммой k или меньше слагаемых из $A(P)$ и $A_{\pm}(P)$ соответственно.

Тогда имеют место следующие оценки.

ТЕОРЕМА 1 (Л. Хайду, Р. Тайдеман, 2012). Для всякого конечного P с $|P| = t$ и всякого $\varepsilon > 0$ существуют константы c (зависит только от двух наименьших элементов в P), C (зависит только от ε) и абсолютная константа $C_{\pm}$ такие, что:

- 1) $F(k) > k^{ck}$ при $k > 1$;
- 2) $F(k) \leq C(kt)^{(1+\varepsilon)kt}$ для всех $k > 1$;
- 3) $F_{\pm}(k) < e^{(kt)^{C_{\pm}}}$ при $k > 1$.

При $P = \{2, 3\}$ в первой оценке получается $c \approx 0.000001$. Докладчику удалось существенно улучшить эту оценку при помощи рассуждения с «жадным» алгоритмом и одной леммы, доказанной В. Х. Салиховым.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $A = \{2^a 3^b \mid a, b \geq 0\}$, $A_{\pm} = A \cup (-A)$. Пусть $F(k)$ и $F_{\pm}(k)$ – наименьшие натуральные числа, не представимые суммой k или меньше слагаемых из A и $A_{\pm}$

соответственно. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует k_0 такое, что при $k > k_0$ выполнены неравенства

$$\left(\frac{k}{6}\right)^{k/6} \leq F(k) \leq F_{\pm}(k) \leq (2k)^{(2+\varepsilon)k}.$$

Из этой теоремы следует, что всякое достаточно большое натуральное число n может быть представлено суммой чисел из A , содержащей не более $6 \ln n / \ln \ln n$ слагаемых.

Ключевую роль в доказательстве теоремы 2 играют одна лемма, доказанная В. Х. Салиховым и следующая знаменитая лемма Эвертса.

ЛЕММА (Я.-Х. Эвертс, 2007). Пусть $c > 0$, $0 \leq d < 1$, $S_0 = \{2, 3\}$, а l – натуральное число. Тогда существует лишь конечное число наборов $(x_0, \dots, x_l)$ целых чисел с условием $\text{НОД}(x_0, \dots, x_l) = 1$ таких, что $x_0 + \dots + x_l = 0$, причем для всякого собственного подмножества $\{i_1, \dots, i_s\} \subset \{0, \dots, l\}$ выполнено $x_{i_1} + \dots + x_{i_s} \neq 0$, и, кроме того,

$$\prod_{j=0}^l (|x_j| |x_j|_2 |x_j|_3) \leq c (\max |x_j|)^d,$$

где $|\cdot|_p$ – p -адическая норма.

В. Н. Чубариков (Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет), *Рациональные тригонометрические суммы и интегралы*

Функция $\rho(x) = 1/2 - \{x\}$ играет важную роль во многих классических вопросах теории чисел, как то проблема делителей Дирихле, проблема круга Гаусса, формулы для числа классов квадратичных форм, квадратурные формулы и даже гипотеза Римана.

Зададимся целью научиться оценивать интегралы и суммы с участием $\rho(x)$. Одно из самых существенных для применений свойств нашей функции – это так называемая формула умножения, аналогичная формуле умножения для гамма-функции

$$\rho(nx) = \sum_{k=0}^{n-1} \rho\left(x + \frac{k}{n}\right).$$

Аналогичным уравнениям удовлетворяют *многочлены Бернулли*, задающиеся с помощью равенства

$$\frac{te^{tx}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n(x)t^n}{n!}.$$

Для интегралов, содержащих функцию $\rho(x)$, имеется серия оценок, аналогичных оценкам тригонометрических интегралов.

ТЕОРЕМА 1. Пусть для некоторого $A > 0$ при всех $n > 1$ и $x \in [0, 1]$ выполнено неравенство $|f^{(n)}(x)| \geq A$. Тогда справедлива верхняя оценка

$$|I| = \left| \int_0^1 \rho(f(x)) dx \right| \leq \min\{1, 4nA^{-1/n}\}.$$

Эта оценка близка к оптимальной, так как в случае $f(x) = \alpha x^n$ можно показать, что

$$|I| \geq \frac{1}{6} \alpha^{-1/6}.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $n \geq 1$, $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, $f(x) = \alpha_n x^n + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$, $\beta_r(x) = sf^{(r)}(x)/r!$, a

$$H = H(\bar{\alpha}) = \min_{a \leq x \leq b} \max_{1 \leq r \leq n} |\beta_r(x)|^{1/r}.$$

Тогда справедлива оценка

$$|J| = \left| \int_a^b \rho(f(x)) dx \right| \leq \min(b-a; 4en^2 H^{-1}).$$

Из этой теоремы можно вывести точную оценку показателя сходимости особого интеграла в проблеме Терри, в том числе для так называемых “выщербленных” многочленов.

Кроме того, имеется следующая оценка для интеграла с многочленом от большого числа переменных

ТЕОРЕМА 3. Пусть

$$F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{0 \leq t_1, \dots, t_r \leq n} \alpha(t_1, \dots, t_r) x_1^{t_1} x_2^{t_2} \dots x_r^{t_r}, \quad \alpha = \max_{t_1 + \dots + t_r \geq 1} |\alpha(t_1, \dots, t_r)|.$$

Тогда имеет место следующая верхняя оценка:

$$|I_r| = \left| \int_{[0,1]^r} \rho(F(x_1, \dots, x_r)) dx_1 \dots dx_r \right| \leq \min(1, (8e)^r \alpha^{-1/n} \ln^{r-1}(\alpha + 2)).$$

Перейдем теперь к суммам, содержащим функцию $\rho(x)$.

Пусть $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$. Обозначим

$$S = S\left(\frac{f(x)}{q}\right) = \sum_{x=1}^q \rho\left(\frac{f(x)}{q}\right).$$

Пользуясь формулой умножения можно упростить вывод следующей оценки для такой суммы.

ТЕОРЕМА 4. При условии $(a_n, \dots, a_1, q) = 1$ верно неравенство

$$\left| S\left(\frac{f(x)}{q}\right) \right| \ll q^{1-1/n}.$$

Также решен аналог задачи о сходимости интеграла в проблеме Терри.

ТЕОРЕМА 5. Пусть в предыдущих обозначениях

$$A(p^s) = \sum_{\substack{0 \leq a_i \leq p^s - 1 \\ (a_1, \dots, a_n, p) = 1}} \left| p^{-s} S\left(\frac{f(x)}{p^s}\right) \right|^{2k},$$

и пусть $\sigma_p = 1 + \sum_{s \geq 1} A(p^s)$.

Тогда ряд, определяющий σ_p , сходится тогда и только тогда, когда

$$2k > \frac{n^2 + n}{2} + 1.$$

Кроме того, выполнен “дискретный” аналог теоремы 3.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $n, r \geq 2$, p – простое число,

$$F(x_1, \dots, x_r) = \sum_{0 \leq t_i \leq n} a(t_1, \dots, t_r) x_1^{t_1} \dots x_r^{t_r}.$$

Если $(a(0, \dots, 1), \dots, a(n, \dots, n), p) = 1$, то

$$\left| S\left(\frac{F(x_1, \dots, x_r)}{p^\alpha}\right) \right| \ll_{n,r} (\alpha + 1)^{r-1} p^{\alpha(r-1/n)}.$$

Доказан также вариант теоремы Виноградова о среднем.

ТЕОРЕМА 7. Пусть

$$J = \int_{[0,1]^{n+1}} \left| \sum_{x \leq P} \rho(\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n) \right|^{2k} d\alpha_0 d\alpha_1 \dots d\alpha_n.$$

Если $\tau \geq 0$ целое, $k \geq n\tau$, $P \geq 1$ и $M \geq 1$, то

$$J \leq DP^{2k-n(n+1)/2+\delta(\tau)},$$

где

$$\delta(\tau) = \frac{n(n+1)}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\tau, \quad D = D(\tau) = (n\tau)^{6n\tau} (2n)^{4n(n+1)\tau}.$$

И. Д. Шкредов (Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, г. Москва), *Суммы мультипликативных характеров от аддитивных сверток*

Пусть p – простое число и χ – неглавный мультипликативный характер по модулю p , $A, B \subset \mathbb{F}_p$ – подмножества. Зададимся вопросом: при каких условиях можно доказать нетривиальную оценку на величину

$$\sigma(A, B) = \sum_{a \in A, b \in B} \chi(a + b).$$

Иными словами, мы хотим доказывать, что при некоторых ограничениях на A и B выполнено $\sigma(A, B) = o(|A||B|)$. Первая оценка такого рода – это теорема Г. Дэвенпорта и П. Эрдеша, утверждающая, что справедлива оценка $\sigma(A, B) < \sqrt{|A||B|p}$, которая нетривиальна при $|A||B| \gg p$.

А. А. Карацуба доказал нетривиальную оценку в более слабых, но несимметричных ограничениях на A и B , а именно

ТЕОРЕМА 1 (А. А. Карацуба, 1992). Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, $|A| > p^{\varepsilon_1}$, $|B| > p^{1/2+\varepsilon_2}$. Тогда существует такая константа $\delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0$, что

$$\sigma(A, B) \ll |A||B|p^{-\delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}.$$

Карацуба также высказал гипотезу о том, что аналогичная оценка будет иметь место в случае $|A| = |B| \sim \sqrt{p}$. Имеется также более сильная гипотеза – гипотеза о графе Пэли, которая утверждает, что такая же оценка верна при $|A|, |B| \gg p^\varepsilon$. В случае $A = B$ и $\chi = \left(\frac{\cdot}{p}\right)$ она эквивалентна тому, что наибольшая клика в графе Пэли $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, где $\mathcal{V} = \mathbb{F}_p$, а $x \sim y$ если $(x - y) - \text{квадратичный вычет}$, не превосходит p^ε .

М.-Ч. Чанг доказала нетривиальные оценки на сумму $\sigma(A, B)$ для специальных множеств A и B , например, следующую.

ТЕОРЕМА 2 (М.-Ч. Чанг). Пусть A – интервал, $|A| = p^\alpha$ и наименьшее расстояние между элементами B оценивается снизу величиной p^α , причем $|B| = p^\beta$. Тогда при выполнении условия $2\alpha + \beta - \alpha\beta/(1 - \alpha) > 1/2 + \delta$ имеет место оценка

$$\left| \sum_{a \in A, b \in B} \chi(a + b) \right| < |A||B|p^{-\delta^2/12}.$$

Похожие оценки имеют место, если одно из множеств имеет малое удвоение.

ТЕОРЕМА 3 (М.-Ч. Чанг). Пусть $A, B \subset \mathbb{F}_p$, $\varepsilon > 0$, $K \geq 1$, $|A|, |B| > p^{4/9+\varepsilon}$ и $|A + A| \leq K|A|$. Тогда выполнено неравенство

$$\left| \sum_{a \in A, b \in B} \chi(a + b) \right| \ll_{K, \varepsilon} |A||B|p^{-\tau(K, \varepsilon)},$$

где $\tau(K, \varepsilon) > 0$.

Эта оценка нетривиальна при $K \ll \ln^c p$, $c > 0$.

Выполняется также следующая оценка Д. А. Бёрджесса для арифметических прогрессий длины более чем $p^{1/4+\varepsilon}$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $P \subseteq \mathbb{F}_p$ – арифметическая прогрессия, $|P| > p^{1/4+\varepsilon}$. Тогда для некоторого положительного $\delta(\varepsilon) > 0$ выполнено неравенство

$$\left| \sum_{x \in P} \chi(x) \right| \ll |P|p^{-\delta(\varepsilon)}.$$

В 2015 г. Б. Хансон доказал оценку для тройной суммы в предположении, что мощности всех трех множеств больше $\delta\sqrt{p}$, где $\delta > 0$.

ТЕОРЕМА 5. Если $|A|, |B|, |C| > \delta\sqrt{p}$, то справедливо равенство

$$\left| \sum_{a \in A, b \in B, c \in C} \chi(a + b + c) \right| = o_\delta(|A||B||C|).$$

Зависимость от δ в этой теореме устроена крайне сложно. Однако докладчику удалось доказать теорему, улучшающую теоремы 3 и 5, а именно

ТЕОРЕМА 6 (И. Д. Шкрёдов, 2016). Пусть $\varepsilon > 0$ и $K \geq 1$. Если подмножества $A, B \subseteq \mathbb{F}_p$ таковы, что $|A|, |B| > p^{1/3+\varepsilon}$ и $|A + A| \leq K|A|$, то

$$\left| \sum_{a \in A, b \in B} \chi(a + b) \right| \ll_{K, \varepsilon} |A||B|p^{-\tau(K, \varepsilon)},$$

где $\tau(K, \varepsilon) > 0$.

Доказательство в общих чертах следует логике доказательства Бёрджесса и опирается на следующий факт из аддитивной комбинаторики.

ТЕОРЕМА 7 (Э. Крут, О. Сисаск, 2010). Пусть $\varepsilon \in (0, 1)$, $K \geq 1$, $f: \mathbb{F}_p \rightarrow \mathbb{C}$ и $|A + A| \leq K|A|$.

Тогда существует подмножество $T \subseteq \mathbb{F}_p$ с условием $|T| \geq |A|e^{-O(\varepsilon^{-2}p \ln |K|)}$ и такое, что для всякого $t \in T$ выполнено следующее неравенство для L^p -норм:

$$\|(f * 1_A)(x + t) - (f * 1_A)(x)\|_p \leq \varepsilon \|f\|_p |A|^{1/p}.$$

Как и в доказательстве Бёрджесса, естественно возникает вопрос о количестве решений некоторого уравнения, но в нашем случае это уравнение

$$\{x(y_1 + y_2) = z(w_1 + w_2) : x, z \in T, y_i, w_i \in A\}.$$

Обозначим количество его решений через $N(T, A)$.

В 2015 г. рядом авторов была доказана верхняя оценка для $N(T, A)$.

ТЕОРЕМА 8 (Э. Аксой, Б. Мёрфи, М. Руднев, И. Д. Шкрёдов). *Для любых двух подмножеств A и T в $\mathbb{F}_p$ с $|A|^2|T| < p^2$ выполнено*

$$N(T, A) \ll |A|^3|T|^{3/2}.$$

В доказательстве существенно используется сложная теорема М. Руднева об оценках для количества инцидентностей.

А. В. Шубин (Московский физико-технический институт (государственный университет), г. Долгопрудный Московской обл.), *О дробных долях, связанных с функцией N/x*

Классическая проблема делителей Дирихле теснейшим образом связана с уточнением асимптотической формулы

$$\sum_{n \leq N} \left\{ \frac{x}{n} \right\} = cN + O(x^{\alpha+\varepsilon}).$$

Если $N < x^\beta$ с $\beta < 1$, то дробные доли равномерно распределены, и потому $c = 1$, в случае же $N = x$ равномерность исчезает, и получается $c = 1 - \gamma$.

Наилучшая на данный момент оценка остаточного члена доказана М. Хаксли: его результат гласит, что можно брать $\alpha = 131/416$.

Докладчиком при помощи метода тригонометрических сумм были получены асимптотические формулы общего вида для сумм по $n \leq x$ (и более коротких сумм) $f(\{x/n\})$, где f — любая достаточно хорошая функция, и таких же выражений с гладкой весовой функцией.

В случае короткой суммы имеет место равномерность, поэтому верно такое утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Для $x > 0$ и гладкой положительной монотонной функции f верна асимптотическая формула*

$$\sum_{n \leq \sqrt{x}} f\left(\left\{\frac{x}{n}\right\}\right) = \sqrt{x} \int_0^1 f(u) du + O(x^{1/3} \ln^{4/3} x).$$

Такая же формула верна и для сумм

$$\sum_{n \leq \sqrt{x}} f\left(\left\{\frac{x}{n+v}\right\}\right), \quad v \in [0, 1).$$

В том же случае, когда n пробегает отрезок $[1, x]$, интеграл по отрезку заменяется на несколько другой линейный функционал.

ТЕОРЕМА 2. *Для всякой положительной, монотонной и гладкой функции f на отрезке выполнено равенство*

$$\sum_{n \leq x} f\left(\left\{\frac{x}{n}\right\}\right) = xc(f) + O(x^{1/3} \ln^{4/3} x),$$

где

$$c(f) = \sum_{k \geq 1} \int_0^1 \frac{f(u) du}{(k+u)^2}.$$

В случае сумм с весами получается такой факт.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f \in C^1[0, 1]$ – монотонная положительная функция, ψ – гладкая, вещественная и положительная. Тогда

$$S(f, \psi; x) = \sum_{n \leq x} \psi(n) f\left(\left\{\frac{x}{n}\right\}\right) = x \sum_{k \geq 1} \int_0^1 \frac{f(u) \psi(x/(k+u)) du}{(k+u)^2} + R,$$

где

$$R \ll \inf_{2 \leq y \leq x} \max \left\{ \sum_{k \leq y} \psi(k), \sum_{k \leq x/y} \psi\left(\frac{x}{k}\right), x \sum_{k > x/y} \frac{1}{k^2} \psi\left(\frac{x}{k}\right) \right\}.$$

Применяя теоремы 1–3, можно вывести такие три асимптотические формулы.

ТЕОРЕМА 4. Пусть g_N – количество целых x, y, z, t с $xy = zt$ и $x, y, z, t \leq N$. Тогда

$$g_N = \frac{12}{\pi^2} N^2 \ln N + N^2 \left(\frac{12}{\pi^2} \left(2\gamma - \frac{1}{2} - \frac{6}{\pi^2} \zeta'(2) \right) - 2 \right) + O(N^{3/2}).$$

Если $\tau(k)$ – количество делителей числа k , то

$$\sum_{k \leq x} \tau(k) \left\{ \frac{x}{k} \right\} = (1 - \gamma)x \ln x + Bx + O(x^{2/3+\varepsilon}).$$

Наконец, если $r_2(k)$ – количество способов представить k в виде суммы двух квадратов целых чисел, то

$$\sum_{k \leq x} r_2(k) \left\{ \frac{x}{k} \right\} = (1 - \gamma)\pi x + O(x^{2/3}).$$

Также был получен ряд формул с суммами по специальным подмножествам в $\mathbb{N}$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $f \in C^1[0, 1]$ – положительная монотонная функция. Тогда для суммы по простым числам справедлива асимптотическая формула

$$\sum_{p \leq x} f\left(\left\{\frac{x}{p}\right\}\right) = \int_2^x \frac{f(\{x/y\}) dy}{\ln y} + O_f(xe^{-c\sqrt{\ln x}}).$$

Аналогичная формула имеет место в случае суммирования по числам, представимым суммами двух квадратов.

Об одном уравнении, включающем дробные степени с одной простой и одной почти простой переменными

Ж. Х. Петров, Д. И. Толев

Sofia University St. Kliment Ohridski, Bulgaria

zhpetrov@fmi.uni-sofia.bg, dtolev@fmi.uni-sofia.bg

Посвящается памяти профессора А. А. Карацубы

1. Введение и формулировка результата

В 1953 г. Пятецкий-Шапиро [1] доказал, что если константа $c \in \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенствам $1 < c < 12/11$, то существует бесконечно много простых вида

$$[n^c], \quad \text{где } n \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

и где, как обычно, $[t]$ означает целую часть t . После верхняя граница для c была много раз улучшена, и самый сильный результат принадлежит Рива и Ву [2]. Они доказали, что то же самое утверждение справедливо при условии, что $1 < c < 243/205$.

При любом натуральном r обозначим через $\mathcal{P}_r$ множество почти простых чисел порядка r , т.е. множество натуральных чисел, состоящих не более чем из r простых сомножителей с учетом кратности.

Есть много работ, посвященных изучению проблем, связанных с простыми числами Пятецкого-Шапиро и с почти простыми числами. В 2011 г. Кай и Ван [3], улучшая более ранний результат Пеневой [4], показали, что если $1 < c < 30/29$, то существует бесконечно много простых чисел p вида $[n^c]$ таких, что $p + 2 \in \mathcal{P}_5$. Позднее, в 2014 г., Бейкер, Банкс, Го и Йегер [5] показали, что если $1 < c < 77/76$, то последовательность

$$\{[n^c]\}_{n \in \mathcal{P}_8}$$

содержит бесконечно много простых чисел.

Рассмотрим уравнение

$$[m_1^c] + [m_2^c] = N. \quad (2)$$

В 1973 г. Дезуе [6] доказал, что если $1 < c < 4/3$, то для любого достаточно большого целого числа N уравнение (2) с целыми m_1 и m_2 имеет решение. Этот результат был улучшен Гриценко [7], а затем Конягиным [8]. В частности, последний автор показал, что (2) имеет решение в целых числах m_1, m_2 при $1 < c < 3/2$ и достаточно большом N .

Кумчев [9] доказал, что если $1 < c < 16/15$, то всякое достаточно большое целое число N может быть представлено в виде (2), где m_1 является простым, а m_2 целым числом. С другой стороны, знаменитая теорема Чена [10] утверждает, что любое достаточно большое четное целое может быть представлено в виде суммы простого и почти простого из $\mathcal{P}_2$. Имея в виду этот глубокий результат, можно предположить, что существует такая постоянная $c_0 > 1$, что при $1 < c < c_0$ уравнение (2) имеет решение с простым m_1 и $m_2 \in \mathcal{P}_2$ при условии, что N достаточно велико.

В настоящей работе мы устанавливаем результат такого типа и доказываем следующее утверждение.

Работа выполнена при поддержке Софийского университета (грант SU 113/2016).

ТЕОРЕМА. *Предположим, что $1 < c < 29/28$. Тогда каждое достаточно большое целое N может быть представлено как*

$$[p^c] + [m^c] = N, \quad (3)$$

где p есть простое и m есть почти простое число с не более чем $[52/(29 - 28c)] + 1$ простыми сомножителями.

Заметим, что целое число $[52/(29 - 28c)] + 1$ равняется 53, если c близко к 1, и становится большим, если c близко к $29/28$.

Наш первый шаг в доказательстве состоит в применении линейного решета. После этого, мы могли бы попытаться установить сравнительно сильную оценку для экспоненциальной суммы, определенной в (31), что является довольно сложной задачей, так как функция в показателе степени зависит от $[p^c]$. Вместо этого мы представим эту сумму в виде линейной комбинации подобных сумм (см. (60)) с гладкой функцией аргумента p в показателе. Затем мы используем стандартные методы для оценки этих сумм. Мы хотели бы отметить, что суммы вида (60) изучались также Кумчевым [9]. Однако мы не можем использовать его работу, потому что нам требуются более сильные оценки для них.

2. Обозначения

Введем следующие обозначения: $\{t\}$ есть дробная часть числа t , функция $\rho(t)$ определяется как $\rho(t) = 1/2 - \{t\}$ и $e(t) = e^{2\pi it}$. Символ p будет зарезервирован для простых чисел. Через ε мы обозначим сколь угодно малое положительное число, не обязательно одно и то же в разных формулах. Мы пользуемся обозначением Виноградова $A \ll B$, которое эквивалентно $A = O(B)$. Если у нас одновременно $A \ll B$ и $B \ll A$, то будем писать $A \asymp B$. Подразумевается, что константы являются абсолютными или зависят от c или ε .

Как обычно, $\sum_{n \leq x}$ значит $\sum_{1 \leq n \leq x}$ и $\mu(n)$, $\Lambda(n)$ и $\tau(n)$ являются функцией Мебиуса, функцией фон Мангольда и числом положительных делителей n соответственно.

3. Доказательство теоремы

3.1. Начало доказательства. Пусть N – достаточно большое целое, и пусть

$$1 < c < \frac{29}{28}, \quad \gamma = \frac{1}{c}, \quad P = 10^{-9} N^\gamma. \quad (4)$$

Предположим, что $\alpha > 0$ есть константа, которая будет определена позднее, и пусть

$$z = N^\alpha, \quad B_z = \prod_{p < z} p. \quad (5)$$

Рассмотрим сумму

$$\Gamma = \sum_{\substack{P < p \leq 2P, m \in \mathbb{N} \\ [p^c] + [m^c] = N \\ (m, B_z) = 1}} \log p. \quad (6)$$

Если $\Gamma > 0$, то найдутся простое число p и натуральное число m , удовлетворяющие введенным условиям в области суммирования Γ . Из условия $(m, B_z) = 1$ следует, что любой простой делитель m не меньше чем z . Предположим, что m состоит из l простых сомножителей, учитываемых с кратностью. Тогда имеем

$$N^\gamma \geq m \geq z^l = N^{\alpha l},$$

и отсюда $l \leq \gamma/\alpha$. Из этого следует, что если $\Gamma > 0$, то (3) имеет решение с простым p и почти простым m , состоящим не более чем из $[\gamma/\alpha]$ простых сомножителей.

Обозначим

$$D = N^\delta, \quad (7)$$

где $\delta > 0$ – это константа, которая будет определена позднее. Обозначим через $\lambda(d)$ нижний россеровский вес уровня D (см. [11; гл. 4]). Тогда имеем

$$\sum_{d|k} \mu(d) \geq \sum_{d|k} \lambda(d) \quad \text{для любого } k \in \mathbb{N}. \quad (8)$$

Кроме того, мы знаем, что

$$\begin{aligned} |\lambda(d)| &\leq 1 && \text{для всех } d, \\ \lambda(d) &= 0 && \text{если } d > D \text{ или } \mu(d) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Наконец, имеем

$$\sum_{d|B_z} \frac{\lambda(d)}{d} \geq \prod_{p < z} \left(1 - \frac{1}{p}\right) (f(s_0) + O((\log D)^{-1/3})), \quad (10)$$

где

$$s_0 = \frac{\log D}{\log z} = \frac{\delta}{\alpha} \quad (11)$$

и $f(s)$ является нижней функцией линейного решета, для которой известно, что

$$f(s) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < s < 2, \\ 2e^G s^{-1} \log(s-1) & \text{при } 2 < s < 3; \end{cases} \quad (12)$$

здесь G – константа Эйлера.

Из (6) и (8) находим

$$\Gamma = \sum_{\substack{P < p \leq 2P, m \in \mathbb{N} \\ [p^c] + [m^c] = N}} (\log p) \sum_{d|(m, B_z)} \mu(d) \geq \sum_{\substack{P < p \leq 2P, m \in \mathbb{N} \\ [p^c] + [m^c] = N}} (\log p) \sum_{d|(m, B_z)} \lambda(d).$$

Изменим порядок суммирования и получим

$$\Gamma \geq \sum_{d|B_z} \lambda(d) G_d, \quad \text{где } G_d = \sum_{\substack{P < p \leq 2P, m \in \mathbb{N} \\ [p^c] + [m^c] = N \\ m \equiv 0 \pmod{d}}} \log p. \quad (13)$$

Теперь запишем сумму G_d в виде

$$G_d = \sum_{P < p \leq 2P} (\log p) G'_{d,p}, \quad \text{где } G'_{d,p} = \sum_{\substack{m \in \mathbb{N} \\ m \equiv 0 \pmod{d} \\ [p^c] + [m^c] = N}} 1. \quad (14)$$

Мы пользуемся очевидным тождеством

$$\sum_{a \leq m < b} 1 = [-a] - [-b] = b - a - \rho(-b) + \rho(-a),$$

чтобы установить, что

$$\begin{aligned} G'_{d,p} &= \sum_{\substack{m \in \mathbb{N} \\ m \equiv 0 \pmod{d} \\ N - [p^c] \leq m^c < N + 1 - [p^c]}} 1 = \sum_{(1/d)(N - [p^c])^\gamma \leq m < (1/d)(N + 1 - [p^c])^\gamma} 1 \\ &= \frac{(N + 1 - [p^c])^\gamma - (N - [p^c])^\gamma}{d} + \rho\left(-\frac{1}{d}(N - [p^c])^\gamma\right) - \rho\left(-\frac{1}{d}(N + 1 - [p^c])^\gamma\right). \end{aligned}$$

Объединим вышеприведенное с (14), чтобы получить

$$G_d = \frac{1}{d} A(N) + \sum_{P < p \leq 2P} (\log p) \left(\rho \left(-\frac{1}{d} (N - [p^c])^\gamma \right) - \rho \left(-\frac{1}{d} (N + 1 - [p^c])^\gamma \right) \right), \quad (15)$$

где

$$A(N) = \sum_{P < p \leq 2P} (\log p) ((N - [p^c] + 1)^\gamma - (N - [p^c])^\gamma).$$

Из

$$(N - [p^c] + 1)^\gamma = (N - [p^c])^\gamma + \gamma(N - [p^c])^{\gamma-1} + O(N^{\gamma-2})$$

получаем, что

$$A(N) = \gamma \sum_{P < p \leq 2P} (\log p) ((N - [p^c])^{\gamma-1} + O(N^{\gamma-2})),$$

и по теореме о распределении простых чисел Чебышёва и определения P из (4) получаем

$$A(N) \asymp N^{\gamma-1} \sum_{P < p \leq 2P} \log p \asymp N^{2\gamma-1}. \quad (16)$$

Из (13) и (15) имеем

$$\Gamma \geq \Gamma_0 + \Sigma_0 - \Sigma_1, \quad (17)$$

где

$$\Gamma_0 = A(N) \sum_{d|B_z} \frac{\lambda(d)}{d}, \quad (18)$$

$$\Sigma_j = \sum_{d|B_z} \lambda(d) \sum_{P < p \leq 2P} (\log p) \rho \left(-\frac{1}{d} (N + j - [p^c])^\gamma \right), \quad j = 0, 1. \quad (19)$$

Рассмотрим Γ_0 . Пользуясь (5) и формулой Мертенса, находим

$$\prod_{p < z} \left(1 - \frac{1}{p} \right) \asymp \frac{1}{\log z} \asymp \frac{1}{\log N}. \quad (20)$$

Предположим, что

$$2 < \frac{\delta}{\alpha} < 3. \quad (21)$$

Тогда, имея в виду (11) и (12), находим, что $f(s_0) > \kappa$ при некоторой константе $\kappa > 0$, зависящей только от δ и α . (Однако δ и α зависят только от c , так что κ также зависит только от c .) Следовательно, пользуясь (10) и (20) получаем

$$\sum_{d|B_z} \frac{\lambda(d)}{d} \gg \frac{1}{\log N}.$$

Таким образом, из (16) и (18) получим

$$\Gamma_0 \gg \frac{N^{2\gamma-1}}{\log N}. \quad (22)$$

Мы стремимся установить следующую оценку для сумм Σ_j , определенных в (19):

$$\Sigma_j \ll \frac{N^{2\gamma-1}}{(\log N)^2}, \quad j = 0, 1. \quad (23)$$

Вместе с (17) и (22) это будет значить, что

$$\Gamma \gg \frac{N^{2\gamma-1}}{\log N},$$

откуда $\Gamma > 0$ для достаточно большого N . Тогда, как мы уже объяснили, уравнение (3) будет иметь решение с простым p и почти простым m не более чем с $[\gamma/\alpha]$ простыми сомножителями.

Оставшаяся часть статьи будет посвящена доказательству оценок (23) в предположениях

$$\frac{28}{29} < \gamma < 1, \quad \delta < \frac{29\gamma - 28}{26}. \quad (24)$$

Затем останется выбрать

$$\alpha = \frac{29\gamma - 28}{52} - \varepsilon_0$$

для некоторого малого $\varepsilon_0 > 0$ и взять

$$\delta \in \left(2\alpha, \frac{29\gamma - 28}{26} \right).$$

В этом случае, когда ε_0 достаточно мало, условие (21) выполняется. Выбирая c на основе (4), легко видеть, что

$$\left\lceil \frac{\gamma}{\alpha} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{52}{29 - 28c} \right\rceil + 1,$$

что доказывает теорему.

3.2. Оценка сумм Σ_1 и Σ_2 (начало). Рассмотрим сумму Σ_j , определенную в (19). Применим теорему Ваалера [12], в которой говорится, что для каждого $H \geq 2$ найдутся такие числа c_h , $0 < |h| \leq H$, и d_h , $|h| \leq H$, что

$$\rho(t) = \sum_{0 < |h| \leq H} c_h e(ht) + \Delta_H(t), \quad (25)$$

где

$$|\Delta_H(t)| \leq \sum_{|h| \leq H} d_h e(ht) \quad (26)$$

и

$$|c_h| \ll \frac{1}{|h|}, \quad |d_h| \ll \frac{1}{H}. \quad (27)$$

Из (19) и (25) следует, что

$$\Sigma_j = \Sigma'_j + \Sigma''_j, \quad (28)$$

где

$$\Sigma'_j = \sum_{d \leq D} \lambda(d) \sum_{P < p \leq 2P} (\log p) \sum_{0 < |h| \leq H} c_h e\left(-\frac{h}{d}(N + j - [p^c])^\gamma\right), \quad (29)$$

$$\Sigma''_j = \sum_{d \leq D} \lambda(d) \sum_{P < p \leq 2P} (\log p) \Delta_H\left(-\frac{(N + j - [p^c])^\gamma}{d}\right). \quad (30)$$

Пусть

$$W(v) = \sum_{P < p \leq 2P} (\log p) e(v(N + j - [p^c])^\gamma). \quad (31)$$

Начнем с суммы Σ'_j . Изменение порядка суммирования вместе с (9), (27) и (31) влечет

$$\Sigma'_j = \sum_{d \leq D} \lambda(d) \sum_{0 < |h| \leq H} c_h W\left(-\frac{h}{d}\right) \ll \sum_{d \leq D} \sum_{1 \leq h \leq H} \frac{1}{h} \left| W\left(\frac{h}{d}\right) \right|. \quad (32)$$

Для суммы Σ''_j воспользуемся (9), (26), (27) и (31), чтобы получить

$$\begin{aligned} \Sigma''_j &\ll \sum_{d \leq D} \sum_{P < p \leq 2P} (\log p) \sum_{|h| \leq H} d_h e\left(-\frac{h}{d}(N + j - [p^c])^\gamma\right) \\ &= \sum_{d \leq D} \sum_{|h| \leq H} d_h W\left(-\frac{h}{d}\right) \ll \sum_{d \leq D} \sum_{|h| \leq H} \frac{1}{H} \left| W\left(\frac{h}{d}\right) \right|. \end{aligned}$$

Из (4), (31) и теоремы Чебышёва о распределении простых чисел находим, что $W(0) \asymp N^\gamma$ и отсюда

$$\Sigma''_j \ll \sum_{d \leq D} \frac{N^\gamma}{H} + \sum_{d \leq D} \sum_{1 \leq h \leq H} \frac{1}{H} \left| W\left(\frac{h}{d}\right) \right|. \quad (33)$$

Положим

$$H = dN^{1-\gamma}(\log N)^3. \quad (34)$$

Теперь, пользуясь (7), (28) и (32)–(34), получим

$$\Sigma_j \ll \frac{N^{2\gamma-1}}{(\log N)^2} + \sum_{d \leq D} \sum_{h \leq H} \frac{1}{h} \left| W\left(\frac{h}{d}\right) \right|, \quad j = 0, 1. \quad (35)$$

3.3. Изучение суммы $W(v)$. Как мы уже упоминали ранее, трудно оценить экспоненциальную сумму $W(v)$, определяемую (31), непосредственно. Вместо этого мы можем записать ее в виде линейной комбинации аналогичных сумм, с которыми легче иметь дело.

Пусть $Z \geq 2$ – целое, которое мы определим позднее. Применим известную лемму “о стаканчиках” Виноградова (см. [13; гл. 1, лемма A]) с параметрами

$$\alpha = -\frac{1}{4Z}, \quad \beta = \frac{1}{4Z}, \quad \Delta = \frac{1}{2Z}, \quad r = [\log N]$$

и построим функцию $g(t)$, периодическую с периодом 1 и обладающую следующими свойствами:

$$\begin{aligned} g(0) &= 1, \\ 0 < g(t) < 1 &\quad \text{при} \quad 0 < |t| < \frac{1}{2Z}, \\ g(t) &= 0 \quad \text{при} \quad \frac{1}{2Z} \leq |t| \leq \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (36)$$

Кроме того, ряд Фурье $g(t)$ задается как

$$g(t) = \frac{1}{2Z} + \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \beta_n e(nt) \quad \text{при} \quad |\beta_n| \leq \min\left(\frac{1}{2Z}, \frac{1}{|n|} \left(\frac{2Z[\log N]}{\pi|n|}\right)^{[\log N]}\right).$$

Из вышеприведенной оценки $|\beta_n|$ легко получается

$$\sum_{|n| > Z(\log N)^4} |\beta_n| \ll N^{-\log \log N}$$

с некоторой абсолютной константой в знаке $\ll$. Отсюда имеем

$$g(t) = \sum_{|n| \leq Z(\log N)^4} \beta_n e(nt) + O(N^{-\log \log N}), \quad (37)$$

где подразумеваемая константа является абсолютной и

$$|\beta_n| \leq \frac{1}{2Z}. \quad (38)$$

Наконец, легко видеть, что функция $g(t)$, построенная в доказательстве леммы А из [13; гл. 1], четная и также удовлетворяет

$$g(t) + g\left(t - \frac{1}{2Z}\right) = 1 \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2Z}. \quad (39)$$

Пусть

$$g_z(t) = g\left(t - \frac{z}{2Z}\right) \quad \text{при} \quad z = 0, 1, 2, \dots, 2Z - 1. \quad (40)$$

Очевидно, что каждая функция $g_z(t)$ является периодической с периодом 1. Из (36) находим, что

$$0 < g_z(t) \leq 1, \quad \text{если} \quad \left|t - \frac{z}{2Z}\right| < \frac{1}{2Z}, \quad (41)$$

$$g_z(t) = 0, \quad \text{если} \quad \frac{1}{2Z} \leq \left|t - \frac{z}{2Z}\right| \leq \frac{1}{2}. \quad (42)$$

Из (40) следует, что если $\beta_n^{(z)}$ есть n -й коэффициент Фурье функции $g_z(t)$, то

$$\beta_n^{(z)} = \beta_n e\left(-\frac{zn}{2M}\right),$$

и отсюда $|\beta_n^{(z)}| = |\beta_n|$. Из этого наблюдения и из (37), а также вышеприведенной оценки для $|\beta_n|$ находим, что для $z = 0, 1, \dots, 2Z - 1$ справедливо соотношение

$$g_z(t) = \sum_{|n| \leq Z(\log N)^4} \beta_n^{(z)} e(nt) + O(N^{-\log \log N}), \quad (43)$$

где константа в символе O является абсолютной и

$$|\beta_n^{(z)}| \leq \frac{1}{2Z}. \quad (44)$$

Наконец, из (39), (40) и (42) находим

$$\sum_{z=0}^{2Z-1} g_z(t) = 1 \quad \text{для всех} \quad t \in \mathbb{R}. \quad (45)$$

(Оставляем эту легкую проверку читателю.)

Теперь рассмотрим сумму $W(v)$, определенную в (31). Из (45) следует, что

$$W(v) = \sum_{P < p \leq 2P} (\log p) e(v(N + j - [p^c])^\gamma) \sum_{z=0}^{2Z-1} g_z(p^c) = \sum_{z=0}^{2Z-1} W_z(v), \quad (46)$$

где

$$W_z(v) = \sum_{P < p \leq 2P} (\log p) g_z(p^c) e(v(N + j - [p^c])^\gamma). \quad (47)$$

Ясно, что

$$W_0(v) \ll \sum_{P < p \leq 2P} (\log p) g(p^c) \ll \log N \sum_{P < k \leq 2P} g(k^c).$$

Применим (4), (37) и (38), чтобы получить

$$\begin{aligned} W_0(v) &\ll (\log N) \frac{P}{Z} + (\log N) \left| \sum_{P < k \leq 2P} \sum_{0 < |n| \leq Z(\log N)^4} \beta_n e(nk^c) \right| + 1 \\ &\ll (\log N) \frac{N^\gamma}{Z} + \frac{\log N}{Z} \sum_{n \leq Z(\log N)^4} |\mathcal{H}_n| + 1, \end{aligned} \quad (48)$$

где

$$\mathcal{H}_n = \sum_{P < k \leq 2P} e(nk^c).$$

Если $\theta(x) = nx^c$, то $\theta''(x) = c(c-1)nx^{c-2} \asymp nP^{c-2}$ равномерно по $x \in [P, 2P]$. Следовательно, можно применить теорему Ван дер Корпута (см. [13; гл. 1, теорема 5]), чтобы получить

$$\mathcal{H}_n \ll P(nP^{c-2})^{1/2} + (nP^{c-2})^{-1/2} \ll P^{c/2} n^{1/2}. \quad (49)$$

В дальнейшем мы предполагаем, что

$$Z \ll N^{(2\gamma-1)/3} (\log N)^{-4}. \quad (50)$$

Тогда, пользуясь (4) и (48)–(50), получаем

$$W_0(v) \ll (\log N) \left(\frac{N^\gamma}{Z} + N^{1/2} Z^{1/2} \log^6 N \right) \ll (\log N) \frac{N^\gamma}{Z}. \quad (51)$$

Теперь мы ограничимся рассмотрением сумм $W_z(v)$ при $1 \leq z \leq 2Z - 1$. Из (42) видим, что $g_z(p^c)$ может быть отлично от нуля, только если $\{p^c\} \in [(z-1)/(2Z), (z+1)/(2Z)]$. Следовательно, единственные слагаемые в сумме (47) это те, для которых

$$\{p^c\} = \frac{z}{2Z} + O\left(\frac{1}{Z}\right).$$

В этом случае имеем

$$v(N + j - [p^c])^\gamma = v\left(N + j - p^c + \frac{z}{2Z}\right)^\gamma + O\left(\frac{vN^{\gamma-1}}{Z}\right)$$

и, соответственно,

$$e(v(N + j - [p^c])^\gamma) = e\left(v\left(N + j - p^c + \frac{z}{2Z}\right)^\gamma\right) + O\left(\frac{vN^{\gamma-1}}{Z}\right).$$

Тогда, пользуясь (47), находим

$$W_z(v) = V_z(v) + O\left(\frac{vN^{\gamma-1}}{Z} \sum_{P < p \leq 2P} (\log p) g_z(p^c)\right), \quad (52)$$

где

$$V_z(v) = \sum_{P < p \leq 2P} (\log p) g_z(p^c) e\left(v\left(N + j - p^c + \frac{z}{2Z}\right)^\gamma\right). \quad (53)$$

Следовательно, из (46), (51) и (52) получаем

$$W(v) = \sum_{z=1}^{2Z-1} W_z(v) + W_0(v) = \sum_{z=1}^{2Z-1} V_z(v) + O(\Xi) + O\left((\log N) \frac{N^\gamma}{Z}\right),$$

где

$$\Xi = \frac{vN^{\gamma-1}}{Z} \sum_{P < p \leq 2P} (\log p) \sum_{z=1}^{2Z-1} g_z(p^c).$$

Теперь пользуясь (4), (45) и теоремой Чебышёва о распределении простых чисел, находим, что

$$\Xi \ll \frac{vN^{2\gamma-1}}{Z}$$

и, следовательно,

$$W(v) = \sum_{z=1}^{2Z-1} V_z(v) + O\left(\frac{vN^{2\gamma-1}}{Z}\right) + O\left((\log N) \frac{N^\gamma}{Z}\right). \quad (54)$$

С этого момента и далее мы предполагаем, что

$$v = \frac{h}{d}, \quad \text{где } 1 \leq d \leq D, \quad 1 \leq h \leq H. \quad (55)$$

Тогда из (34) видим, что $vN^{2\gamma-1} \ll N^\gamma(\log N)^3$; отсюда формула (54) может быть записана как

$$W(v) = \sum_{z=1}^{2Z-1} V_z(v) + O\left((\log N)^3 \frac{N^\gamma}{Z}\right). \quad (56)$$

Из (34), (35) и (56) находим

$$\Sigma_j \ll \frac{N^{2\gamma-1}}{(\log N)^2} + \sum_{d \leq D} \sum_{h \leq H} \frac{1}{h} \sum_{z=1}^{2Z-1} |V_z(v)| + \sum_{d \leq D} \sum_{h \leq H} \frac{1}{h} \frac{N^\gamma}{Z} (\log N)^3. \quad (57)$$

Выберем такое Z , что

$$Z \asymp dN^{1-\gamma}(\log N)^7. \quad (58)$$

Из (7) и (24) следует, что условие (50) выполняется. Следовательно, из (57) и (58) находим

$$\Sigma_j \ll \frac{N^{2\gamma-1}}{(\log N)^2} + \sum_{d \leq D} \sum_{h \leq H} \frac{1}{h} \sum_{z=1}^{2Z-1} |V_z(v)|. \quad (59)$$

Рассмотрим теперь сумму $V_z(v)$, определенную в (53), где v удовлетворяет (55). Из (43) находим, что для достаточно большого N справедливо соотношение

$$\begin{aligned} V_z(v) &= \sum_{P < p \leq 2P} (\log p) \left(\sum_{|r| \leq Z(\log N)^4} \beta_r^{(z)} e(rp^c) \right) e\left(v\left(N + j - p^c + \frac{z}{2Z}\right)^\gamma\right) + O(N^{-10}) \\ &= \sum_{|r| \leq Z(\log N)^4} \beta_r^{(z)} U\left(N + j + \frac{z}{2Z}, r, v\right) + O(N^{-10}), \end{aligned}$$

где

$$U = U(T, r, v) = \sum_{P < p \leq 2P} (\log p) e(rp^c + v(T - p^c)^\gamma). \quad (60)$$

Мы хотели бы отметить, что если $0 \leq j \leq 1$ и $1 \leq z \leq 2Z - 1$, то

$$N + j + \frac{z}{2Z} \in [N, N + 2].$$

Кроме того, если мы также примем во внимание (44) и (58), мы получим

$$V_z(v) \ll N^{-10} + \frac{1}{Z} \sum_{|r| \leq R} \sup_{T \in [N, N+2]} |U(T, r, v)|,$$

где

$$R = dN^{1-\gamma}(\log N)^{12}. \quad (61)$$

Если подставить вышеприведенное выражение для $V_z(v)$ в формулу (59), то будем иметь

$$|\Sigma_1| + |\Sigma_2| \ll \frac{N^{2\gamma-1}}{(\log N)^2} + \sum_{d \leq D} \sum_{h \leq H} \frac{1}{h} \sum_{|r| \leq R} \sup_{T \in [N, N+2]} |U(T, r, v)|. \quad (62)$$

3.4. Применение тождества Вона. Введем обозначения

$$\phi(t) = rt^c + v(T - t^c)^\gamma, \quad (63)$$

$$f(m, l) = \phi(ml) = r(ml)^c + v(T - (ml)^c)^\gamma. \quad (64)$$

Для суммы U , определенной в (60), имеем

$$U = \sum_{P < n \leq 2P} \Lambda(n) e(\phi(n)) + O(P^{1/2}).$$

(Действительно, сумма в правой части приведенной выше формулы содержит все члены суммы U , а также члены, для которых $n = p^\nu$, $\nu \geq 2$, но можно легко убедиться, что их вклад $\ll P^{1/2}$.) Применяя теперь тождество Вона (см. [14]), находим, что

$$U = U_1 - U_2 - U_3 - U_4 + O(P^{1/2}), \quad (65)$$

где

$$U_1 = \sum_{m \leq P^{1/3}} \mu(m) \sum_{P/m < l \leq 2P/m} (\log l) e(f(m, l)), \quad (66)$$

$$U_2 = \sum_{m \leq P^{1/3}} c(m) \sum_{P/m < l \leq 2P/m} e(f(m, l)), \quad (67)$$

$$U_3 = \sum_{P^{1/3} < m \leq P^{2/3}} c(m) \sum_{P/m < l \leq 2P/m} e(f(m, l)), \quad (68)$$

$$U_4 = \sum_{\substack{P < ml \leq 2P \\ m > P^{1/3}, l > P^{1/3}}} a(m) \Lambda(l) e(f(m, l)) \quad (69)$$

и

$$|c(m)| \leq \log m, \quad |a(m)| \leq \tau(m). \quad (70)$$

Следовательно из (7), (24), (34), (61), (62) и (65) имеем

$$|\Sigma_1| + |\Sigma_2| \ll \frac{N^{2\gamma-1}}{(\log N)^2} + \sum_{i=1}^4 \Omega_i, \quad (71)$$

где

$$\Omega_i = \sum_{d \leq D} \sum_{h \leq H} \frac{1}{h} \sum_{|r| \leq R} \sup_{T \in [N, N+2]} |U_i|. \quad (72)$$

Из (71) и (72), чтобы доказать, что удовлетворяется (23), достаточно показать, что

$$\Omega_i \ll \frac{N^{2\gamma-1}}{(\log N)^2} \quad \text{при } i = 1, 2, 3, 4. \quad (73)$$

3.5. Оценка сумм Ω_1 и Ω_2 . Начнем с изучения Ω_2 . Из (64) получаем

$$f''_{ll}(m, l) = \pi_1 - \pi_2, \quad (74)$$

где

$$\pi_1 = m^2 r c(c-1)(ml)^{c-2}, \quad \pi_2 = m^2 v(c-1)T(ml)^{c-2}(T - (ml)^c)^{\gamma-2}. \quad (75)$$

Из (4), (55) и условий

$$P < ml \leq 2P, \quad N \leq T \leq N+2 \quad (76)$$

имеем

$$|\pi_1| \asymp |r|m^2 N^{1-2\gamma}, \quad \pi_2 \asymp vm^2 N^{-\gamma}. \quad (77)$$

Из (74) и (77) следует, что существует такая достаточно малая константа $\alpha_0 > 0$, что если $|r| \leq \alpha_0 v N^{\gamma-1}$, то $|f''_{ll}| \asymp vm^2 N^{-\gamma}$.

Аналогично, из (74) и (77) заключаем, что существует такая достаточно большая константа $A_0 > 0$, что если $|r| \geq A_0 v N^{\gamma-1}$, то $|f''_{ll}| \asymp |r|m^2 N^{1-2\gamma}$.

Разобьем сумму Ω_2 на четыре суммы в соответствии со значениями r следующим образом:

$$\Omega_2 = \Omega_{2,1} + \Omega_{2,2} + \Omega_{2,3} + \Omega_{2,4}, \quad (78)$$

где

$$\text{в } \Omega_{2,1}: \quad |r| \leq \alpha_0 v N^{\gamma-1}, \quad (79)$$

$$\text{в } \Omega_{2,2}: \quad -A_0 v N^{\gamma-1} < r < -\alpha_0 v N^{\gamma-1}, \quad (80)$$

$$\text{в } \Omega_{2,3}: \quad \alpha_0 v N^{\gamma-1} < r < A_0 v N^{\gamma-1}, \quad (81)$$

$$\text{в } \Omega_{2,4}: \quad A_0 v N^{\gamma-1} \leq |r| \leq R. \quad (82)$$

Заметим, что из (34), (55) и (61) следует, что

$$v N^{\gamma-1} \ll (\log N)^3 \ll \frac{R}{\log N}. \quad (83)$$

Сначала рассмотрим $\Omega_{2,4}$. Имеем

$$\Omega_{2,4} = \sum_{d \leq D} \sum_{h \leq H} \frac{1}{h} \sum_{A_0 v N^{\gamma-1} \leq |r| \leq R} \sup_{T \in [N, N+2]} |U_2|. \quad (84)$$

Оценим сумму U_2 , определенную в (67), при условии, что выполняется соотношение (82). Напомним, что константа A_0 выбирается таким образом, что при $|r| \geq A_0 v N^{\gamma-1}$ равномерно по $l \in (P/m, 2P/m]$ справедливо соотношение $|f''_{ll}(m, l)| \asymp |r|m^2 N^{1-2\gamma}$. Следовательно, мы можем снова воспользоваться теоремой Ван дер Корпута (см. [13; гл. 1, теорема 5]) и учитывая (4), получаем

$$\sum_{P/m < l \leq 2P/m} e(f(m, l)) \ll \frac{P}{m} (|r|m^2 N^{1-2\gamma})^{1/2} + (|r|m^2 N^{1-2\gamma})^{-1/2} \ll |r|^{1/2} N^{1/2}.$$

Тогда из (67) и (70) находим

$$U_2 \ll |r|^{1/2} N^{1/2+\gamma/3} (\log N). \quad (85)$$

Подставим это выражение для U_2 в (84) и воспользуемся (34), (55) и (61), чтобы получить оценку

$$\Omega_{2,4} \ll D^{5/2} N^{2-7\gamma/6+\varepsilon}.$$

Следовательно из (7) и (24) получаем

$$\Omega_{2,4} \ll \frac{N^{2\gamma-1}}{(\log N)^2}. \quad (86)$$

Продолжим с $\Omega_{2,3}$. Мы должны изучить сумму U_2 , определенную в (67), при выполнении условия (81). Чтобы это сделать, воспользуемся (64) и вычислим

$$\begin{aligned} f_{iii}'''(m, l) &= m^3 rc(c-1)(c-2)(ml)^{c-3} \\ &\quad + m^3 v(c-1)T(T - (ml)^c)^{\gamma-3}(ml)^{c-3}((2-c)T - (c+1)(ml)^c). \end{aligned} \quad (87)$$

Находим из (74), (75) и (87)

$$(c-2)f_{ii}''(m, l) - lf_{iii}'''(m, l) = v(c-1)(2c-1)Tm^{2c}l^{2c-2}(T - (ml)^c)^{\gamma-3}.$$

Последнее вместе с (4) и (76) влечет

$$|(c-2)f_{ii}''(m, l) - lf_{iii}'''(m, l)| \asymp vm^2 N^{-\gamma}.$$

Следовательно, существует такая $\kappa_0 > 0$, зависящая только от константы c , что для каждого $l \in (P/m, 2P/m]$ выполняется по крайней мере одно из следующих неравенств:

$$|f_{ii}''(m, l)| \geq \kappa_0 vm^2 N^{-\gamma}, \quad (88)$$

или

$$|f_{iii}'''(m, l)| \geq \kappa_0 vm^3 N^{-2\gamma}. \quad (89)$$

Мы намереваемся показать, что интервал $(P/m, 2P/m]$ может быть разбит не более чем на семь интервалов таких, что если J есть один из них, то выполняется по крайней мере одно из следующих утверждений:

$$\text{имеем (88) для всех } l \in J, \quad (90)$$

$$\text{имеем (89) для всех } l \in J. \quad (91)$$

Для установления этого достаточно показать, что уравнение $|f_{ii}''(m, l)| = \kappa_0 vm^2 N^{-\gamma}$ имеет не более шести решений в вещественных числах $l \in (P/m, 2P/m)$. Следовательно, достаточно показать, что если C не зависит от l , то уравнение $f_{ii}''(m, l) = C$ имеет не более трех решений в вещественных числах $l \in (P/m, 2P/m)$. Согласно теореме Ролля между любыми двумя решениями последнего уравнения есть решение (в вещественных числах l) уравнения $f_{iii}'''(m, l) = 0$. Таки образом, пользуясь (87), мы заключаем, что достаточно показать, что

$$vT(T - (ml)^c)^{\gamma-3}((2-c)T - (c+1)(ml)^c) = rc(2-c)$$

имеет не более двух решений для $l \in (P/m, 2P/m)$, что эквивалентно утверждению, что уравнение

$$(T - X)^{\gamma-3}((2-c)T - (c+1)X) = \frac{rc(2-c)}{vT}$$

имеет не более двух решений для $X \in (P^c, (2P)^c)$. В качестве альтернативы вместо последнего уравнения можно взглянуть на

$$(\gamma - 3) \log(T - X) + \log((2 - c)T - (c + 1)X) = \log \frac{rc(2 - c)}{vT}. \quad (92)$$

Обозначим через $H(X)$ функцию в левой части (92). Из теоремы Ролля мы знаем, что между любыми двумя решениями (92) найдется решение $H'(X) = 0$. Поскольку

$$H'(X) = \frac{3 - \gamma}{T - X} - \frac{c + 1}{(2 - c)T - (c + 1)X},$$

легко видеть, что $H'(X)$ обращается в нуль не более чем при одном значении X . Следовательно, (92) имеет не более двух решений в X , и наше утверждение доказано.

С другой стороны, из (74), (77) и (87) видим, что при условии на r из (81) имеем

$$f''_{ll}(m, l) \ll vm^2 N^{-\gamma}, \quad f'''_{lll}(m, l) \ll vm^3 N^{-2\gamma}.$$

Отсюда, интервал $(P/m, 2P/m]$ может быть разбит не более чем на семь таких интервалов, что если J один из них, то выполняется по меньшей мере одно из следующих утверждений:

$$|f''_{ll}(m, l)| \asymp vm^2 N^{-\gamma} \quad \text{равномерно по } l \in J, \quad (93)$$

$$|f'''_{lll}(m, l)| \asymp vm^3 N^{-2\gamma} \quad \text{равномерно по } l \in J. \quad (94)$$

Если выполняется (93), то, воспользовавшись теоремой Ван дер Корпута (см. [13; гл. 1, теорема 5]) для второй производной, находим

$$\sum_{l \in J} e(f(m, l)) \ll \frac{P}{m} (vm^2 N^{-\gamma})^{1/2} + (vm^2 N^{-\gamma})^{-1/2} \ll v^{1/2} N^{\gamma/2} + v^{-1/2} m^{-1} N^{\gamma/2}. \quad (95)$$

В случае (94) применим теорему Ван дер Корпута для третьей производной, чтобы получить

$$\begin{aligned} \sum_{l \in J} e(f(m, l)) &\ll \frac{P}{m} (vm^3 N^{-2\gamma})^{1/6} + \left(\frac{P}{m}\right)^{1/2} (vm^3 N^{-2\gamma})^{-1/6} \\ &\ll v^{1/6} m^{-1/2} N^{2\gamma/3} + v^{-1/6} m^{-1} N^{5\gamma/6}. \end{aligned}$$

Отсюда, в любом случае $\sum_{l \in J} e(f(m, l))$ можно оценить суммой выражений из правых частей вышеприведенных неравенств. Следовательно,

$$\sum_{P/m < l \leq 2P/m} e(f(m, l)) \ll v^{1/2} N^{\gamma/2} + v^{-1/2} m^{-1} N^{\gamma/2} + v^{1/6} m^{-1/2} N^{2\gamma/3} + v^{-1/6} m^{-1} N^{5\gamma/6}. \quad (96)$$

Тогда из (4), (67) и (70) находим, что

$$U_2 \ll (\log N)^2 (v^{1/2} N^{5\gamma/6} + v^{-1/2} N^{\gamma/2} + v^{1/6} N^{5\gamma/6} + v^{-1/6} N^{5\gamma/6}). \quad (97)$$

Воспользовавшись (34), (55), (81), (83) и (97), получаем

$$\begin{aligned} \Omega_{2,3} &= \sum_{d \leq D} \sum_{h \leq H} \frac{1}{h} \sum_{\alpha_0 v N^{\gamma-1} < r < A_0 v N^{\gamma-1}} \sup_{T \in [N, N+2]} |U_2| \\ &\ll N^\varepsilon \sum_{d \leq D} \sum_{h \leq H} \frac{1}{h} \left(\frac{h^{1/2} N^{5\gamma/6}}{d^{1/2}} + \frac{h^{-1/2} N^{\gamma/2}}{d^{-1/2}} + \frac{h^{1/6} N^{5\gamma/6}}{d^{1/6}} + \frac{h^{-1/6} N^{5\gamma/6}}{d^{-1/6}} \right) \\ &\ll N^\varepsilon (DN^{1/2+\gamma/3} + D^{3/2} N^{\gamma/2} + DN^{1/6+2\gamma/3} + D^{7/6} N^{5\gamma/6}), \end{aligned} \quad (98)$$

и из (7) и (24) мы заключаем, что

$$\Omega_{2,3} \ll \frac{N^{2\gamma-1}}{(\log N)^2}. \quad (99)$$

Рассмотрим $\Omega_{2,1}$. Мы выбрали постоянную α_0 таким образом, что из (76) и из условия на r из (79) следует, что

$$|f''_{ll}(m, l)| \asymp vm^2 N^{-\gamma} \quad \text{равномерно по } l \in \left(\frac{P}{m}, \frac{2P}{m}\right].$$

Следовательно, сумму $\sum_{P/m < l \leq 2P/m} e(f(m, l))$ можно оценить выражением из правой части (95), и, конечно, оценка (96) выполняется снова. Отсюда видим, что $\Omega_{2,1}$ можно оценить таким же образом, как $\Omega_{2,3}$, т.е.

$$\Omega_{2,1} \ll \frac{N^{2\gamma-1}}{(\log N)^2}. \quad (100)$$

Сумма $\Omega_{2,2}$ может быть исследована тем же путем. Из (74)–(76) и (80) следует, что $|f''_{ll}(m, l)| \asymp vm^2 N^{-\gamma}$, и оценка (96) снова верна. Поэтому

$$\Omega_{2,2} \ll \frac{N^{2\gamma-1}}{(\log N)^2}. \quad (101)$$

Из (78), (86) и (99)–(101) заключаем, что

$$\Omega_2 \ll \frac{N^{2\gamma-1}}{(\log N)^2}. \quad (102)$$

Теперь рассмотрим Ω_1 . Для U_1 из (66) мы применим преобразование Абеля, чтобы избавиться от множителя $\log l$ во внутренней сумме. Затем мы работаем, как при оценивании Ω_2 , чтобы получить

$$\Omega_1 \ll \frac{N^{2\gamma-1}}{(\log N)^2}. \quad (103)$$

3.6. Оценка сумм Ω_3 и Ω_4 и завершение доказательства. Рассмотрим сумму Ω_4 из (72). Разобьем сумму U_4 из (69) на $O(\log N)$ сумм вида

$$W_{M,L} = \sum_{L < l \leq 2L} b(l) \sum_{\substack{M < m \leq 2M \\ P/l < m \leq 2P/l}} a(m) e(f(m, l)), \quad (104)$$

где

$$a(m) \ll N^\varepsilon, \quad b(l) \ll N^\varepsilon, \quad P^{1/3} \ll M \ll P^{1/2} \ll L \ll P^{2/3}, \quad ML \asymp P. \quad (105)$$

(Если $M \gg P^{1/2}$, то меняем местами m и l и соответственно M и L и снова получаем сумму, параметры которой удовлетворяют условия (105).)

Из (104), (105) и неравенства Коши находим

$$|W_{M,L}|^2 \ll N^\varepsilon L \sum_{L < l \leq 2L} \left| \sum_{M_1 < m \leq M_2} a(m) e(f(m, l)) \right|^2, \quad (106)$$

где

$$M_1 = \max\left(M, \frac{P}{l}\right), \quad M_2 = \min\left(2M, \frac{2P}{l}\right). \quad (107)$$

Применим теперь известное неравенство

$$\left| \sum_{a < m \leq b} \xi(m) \right|^2 \leq \frac{b-a+Q}{Q} \sum_{|q| < Q} \left(1 - \frac{|q|}{Q}\right) \sum_{\substack{m \in (a, b] \\ m \in (a-q, b-q]}} \xi(m+q) \overline{\xi(m)}, \quad (108)$$

где $Q \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $1 \leq b-a$ и $\xi(m)$ произвольная комплексная функция. (Доказательство может быть найдено в [15; лемма 8.17].) У нас $\xi(m) = a(m) e(f(m, l))$, $a = M_1$, $b = M_2$. Точное значение Q будет выбрано позднее. Теперь же нам требуется только, чтобы

$$Q \leq M. \quad (109)$$

Тогда находим

$$|W_{M,L}|^2 \ll N^\varepsilon L \sum_{L < l \leq 2L} \frac{M}{Q} \sum_{|q| \leq Q} \left(1 - \frac{|q|}{Q}\right) \sum_{\substack{M_1 < m \leq M_2 \\ M_1 < m+q \leq M_2}} a(m+q) \overline{a(m)} e(f(m+q, l) - f(m, l)).$$

Оценим вклад от членов с $q = 0$, а затем изменим порядок суммирования, и пользуясь (105) и (107), найдем

$$|W_{M,L}|^2 \ll \frac{N^\varepsilon (LM)^2}{Q} + \frac{N^\varepsilon LM}{Q} \sum_{0 < |q| \leq Q} \sum_{\substack{M < m \leq 2M \\ M < m+q \leq 2M}} \left| \sum_{L_1 < l \leq L_2} e\left(Y_{m,q}(l)\right) \right|, \quad (110)$$

где

$$L_1 = \max\left(L, \frac{P}{m}, \frac{P}{m+q}\right), \quad L_2 = \min\left(2L, \frac{2P}{m}, \frac{2P}{m+q}\right) \quad (111)$$

и

$$Y(l) = Y_{m,q}(l) = f(m+q, l) - f(m, l). \quad (112)$$

Теперь легко видеть, что сумма по отрицательным q в формуле (110) равна сумме по положительным q , поэтому получаем

$$|W_{M,L}|^2 \ll \frac{N^\varepsilon (LM)^2}{Q} + \frac{N^\varepsilon LM}{Q} \sum_{1 \leq q \leq Q} \sum_{M < m \leq 2M-q} \left| \sum_{L_1 < l \leq L_2} e\left(Y_{m,q}(l)\right) \right|. \quad (113)$$

Рассмотрим функцию $Y(l)$. Пользуясь (63), (64) и (112), находим, что

$$Y(l) = \int_m^{m+q} f'_t(t, l) dt = \int_m^{m+q} l \phi'(tl) dt \quad (114)$$

и, следовательно,

$$Y''(l) = \int_m^{m+q} (2t \phi''(tl) + l t^2 \phi'''(tl)) dt, \quad Y'''(l) = \int_m^{m+q} (3t^2 \phi'''(tl) + l t^3 \phi^{(4)}(tl)) dt. \quad (115)$$

Из (63) и (115) получаем

$$Y''(l) = \int_m^{m+q} (\Phi_1(t) - \Phi_2(t)) dt, \quad (116)$$

где

$$\Phi_1(t) = r c^2 (c-1) t^{c-1} l^{c-2}, \quad (117)$$

$$\Phi_2(t) = v(c-1) T t^{c-1} l^{c-2} (T - (tl)^c)^{\gamma-3} (cT + (c-1)(tl)^c). \quad (118)$$

Напомним, что P задано в (4), r есть переменная суммирования в (72) и v определяется из (55). Если $t \in [m, m+q]$, то $tl \asymp P$. Таким образом, из условия

$$N \leq T \leq N+2 \quad (119)$$

и определения P находим, что равномерно по $t \in [m, m+q]$ справедливы соотношения

$$|\Phi_1(t)| \asymp |r| m N^{1-2\gamma}, \quad \Phi_2(t) \asymp v m N^{-\gamma}. \quad (120)$$

Из (116) и (120) видим, что существует такая достаточно малая константа $\alpha_1 > 0$, что если $|r| \leq \alpha_1 v N^{\gamma-1}$, то $|Y''(l)| \asymp q v m N^{-\gamma}$. Аналогично, мы заключаем, что существует такая достаточно большая константа $A_1 > 0$, что если $|r| \geq A_1 v N^{\gamma-1}$, то $|Y''(l)| \asymp |r| q m N^{1-2\gamma}$. Поэтому имеет смысл разбить сумму Ω_4 на четыре суммы согласно значению r следующим образом:

$$\Omega_4 = \Omega_{4,1} + \Omega_{4,2} + \Omega_{4,3} + \Omega_{4,4}, \quad (121)$$

где

$$\text{в } \Omega_{4,1}: \quad |r| \leq \alpha_1 v N^{\gamma-1}, \quad (122)$$

$$\text{в } \Omega_{4,2}: \quad -A_1 v N^{\gamma-1} < r < -\alpha_1 v N^{\gamma-1}, \quad (123)$$

$$\text{в } \Omega_{4,3}: \quad \alpha_1 v N^{\gamma-1} < r < A_1 v N^{\gamma-1}, \quad (124)$$

$$\text{в } \Omega_{4,4}: \quad A_1 v N^{\gamma-1} \leq |r| \leq R. \quad (125)$$

Сначала рассмотрим $\Omega_{4,4}$. Из (72) и (125) имеем

$$\Omega_{4,4} \ll (\log N) \sum_{d \leq D} \sum_{h \leq H} \frac{1}{h} \sum_{A_1 v N^{\gamma-1} \leq |r| \leq R} \sup_{\substack{T \in [N, N+2] \\ M, L: (105)}} |W_{M,L}|. \quad (126)$$

(Супремум берется по $T \in [N, N+2]$ и M, L , удовлетворяющим условиям из (105).)

Рассмотрим сумму $W_{M,L}$. Уже упоминалось, что если $|r| \geq A_1 v N^{\gamma-1}$, то равномерно по $l \in (L_1, L_2]$ имеем $Y''(l) \asymp |r| q m N^{1-2\gamma}$. Поэтому можно использовать теорему Ван дер Корпута (см. [13; гл. 1, теорема 5]) для второй производной и из (4), (105) и (111) получить

$$\sum_{L_1 < l \leq L_2} e(Y(l)) \ll L(|r| q m N^{1-2\gamma})^{1/2} + (|r| q m N^{1-2\gamma})^{-1/2} \ll |r|^{1/2} q^{1/2} M^{-1/2} N^{1/2}.$$

Тем самым, из (4), (105) и (113) находим

$$W_{M,L} \ll N^\varepsilon (N^\gamma Q^{-1/2} + |r|^{1/4} Q^{1/4} N^{1/4+5\gamma/8}). \quad (127)$$

Из (34), (61) и (126) имеем

$$\begin{aligned} \Omega_{4,4} &\ll N^\varepsilon \sum_{d \leq D} \sum_{h \leq H} \frac{1}{h} \sum_{|r| \leq d N^{1-\gamma} (\log N)^{12}} (N^\gamma Q^{-1/2} + |r|^{1/4} Q^{1/4} N^{1/4+5\gamma/8}) \\ &\ll N^\varepsilon (D^2 N Q^{-1/2} + Q^{1/4} D^{9/4} N^{3/2-5\gamma/8}). \end{aligned}$$

Мы выберем

$$Q = [D^{-1/3} N^{5\gamma/6-2/3}]. \quad (128)$$

Теперь легко проверить, что условие (109) выполняется. Следовательно, из (7) и (24) получаем

$$\Omega_{4,4} \ll \frac{N^{2\gamma-1}}{(\log N)^2}. \quad (129)$$

Теперь рассмотрим $\Omega_{4,3}$. Из (72) и (124) имеем

$$\Omega_{4,3} \ll (\log N) \sum_{d \leq D} \sum_{h \leq H} \frac{1}{h} \sum_{\alpha_1 v N^{\gamma-1} < r < A_1 v N^{\gamma-1}} \sup_{\substack{T \in [N, N+2] \\ M, L: (105)}} |W_{M,L}|. \quad (130)$$

Рассмотрим сумму $W_{M,L}$ из вышеприведенного выражения. Пользуясь (116)–(118), находим

$$Y'''(l) = \int_m^{m+q} (\Psi_1(t) + \Psi_2(t)) dt, \quad (131)$$

где

$$\Psi_1(t) = rc^2(c-1)(c-2)t^{c-1}l^{c-3}, \quad (132)$$

$$\Psi_2(t) = v(c-1)Tt^{c-1}l^{c-3}(T - (tl)^c)^{\gamma-4} (c(2-c)T^2 + (-4c^2 + 3c - 2)T(tl)^c + (1 - c^2)(tl)^{2c}). \quad (133)$$

Из (116)–(118) и (131)–(133) получаем

$$lY'''(l) + (2-c)Y''(l) = - \int_m^{m+q} \Theta(t) dt,$$

где

$$\Theta(t) = v(c-1)Tt^{2c-1}l^{2c-2}(T - (tl)^c)^{\gamma-4} (2c(2c-1)T + (2c^2 - 3c + 1)(tl)^c).$$

Пользуясь (4), (105) и (119), находим, что равномерно по $t \in [m, m+q]$ справедливо соотношение

$$\Theta(t) \asymp vmN^{-\gamma}.$$

Отсюда

$$|(2-c)Y''(l) + lY'''(l)| \asymp qmvN^{-\gamma}$$

равномерно по $l \in (L_1, L_2]$. Следовательно, существует $\kappa_1 > 0$, которая зависит только от c и такая, что по крайней мере одно из следующих неравенств выполняется для любого $l \in (L_1, L_2]$:

$$|Y''(l)| \geq \kappa_1 vqmN^{-\gamma}, \quad (134)$$

$$|Y'''(l)| \geq \kappa_1 vqm^2N^{-2\gamma}. \quad (135)$$

На следующем шаге будет показано, что интервал $(L_1, L_2]$ может быть разбит не более чем на 13 интервалов таких, что если J – один из них, то по крайней мере одно из следующих утверждений выполняется:

$$\text{имеет место (134) для всех } l \in J, \quad (136)$$

$$\text{имеет место (135) для всех } l \in J. \quad (137)$$

Чтобы это установить, достаточно показать, что уравнение $|Y''(l)| = \kappa_1 vqmN^{-\gamma}$ имеет не более 12 решений в вещественных числах $l \in (L_1, L_2)$. То есть, достаточно показать, что если C не зависит от l , то уравнение $Y''(l) = C$ имеет не более шести решений в вещественных числах $l \in (L_1, L_2)$. Согласно теореме Роля между любыми двумя решениями последнего уравнения найдется решение уравнения

$$Y'''(l) = 0. \quad (138)$$

Поэтому достаточно показать, что (138) имеет не более пяти решений в вещественных числах $l \in (L_1, L_2)$.

Легко видеть из (87) и (112), что (138) эквивалентно уравнению

$$\begin{aligned} & (m+q)^c(T - (m+q)^c l^c)^{\gamma-3}((2-c)T - (c+1)(m+q)^c l^c) \\ & \quad - m^c(T - m^c l^c)^{\gamma-3}((2-c)T - (c+1)m^c l^c) \\ & = \frac{rc(2-c)((m+q)^c - m^c)}{vT}. \end{aligned}$$

Пусть $X = l^c$. Определим

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(X) &= (m+q)^c(T - (m+q)^c X)^{\gamma-3}((2-c)T - (c+1)(m+q)^c X) \\ & \quad - m^c(T - m^c X)^{\gamma-3}((2-c)T - (c+1)m^c X). \end{aligned}$$

Будет достаточно показать, что если B не зависит от X , то уравнение $\mathcal{F}(X) = B$ имеет не более пяти решений с $X \in (L_1^c, L_2^c)$.

Еще раз обращаемся к теореме Ролля, чтобы подтвердить, что достаточно доказать, что уравнение $\mathcal{F}'(X) = 0$ имеет не более четырех решений при $X \in (L_1^c, L_2^c)$. Можно записать $\mathcal{F}'(X) = 0$ как

$$\begin{aligned} & (m+q)^{2c}(T - (m+q)^c X)^{\gamma-4}((4c+2\gamma-6)T + (2c-\gamma+1)(m+q)^c X) \\ & = m^{2c}(T - m^c X)^{\gamma-4}((4c+2\gamma-6)T + (2c-\gamma+1)m^c X), \end{aligned}$$

что, в свою очередь, эквивалентно

$$\mathcal{G}(X) = \log m^c - \log(m+q)^c,$$

где функция $\mathcal{G}(X)$ определяется из

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(X) &= (\gamma-4) \log(T - (m+q)^c X) + \log((4c+2\gamma-6)T + (2c+1-\gamma)(m+q)^c X) \\ & \quad - (\gamma-4) \log(T - m^c X) - \log((4c+2\gamma-6)T + (2c+1-\gamma)m^c X). \end{aligned}$$

По той же причине, что и до этого, достаточно установить, что уравнение

$$\mathcal{G}'(X) = 0 \tag{139}$$

имеет не более трех решений при $X \in (L_1^c, L_2^c)$. Это легко показать, поскольку

$$\begin{aligned} \mathcal{G}'(X) &= \frac{(4-\gamma)(m+q)^c}{T - (m+q)^c X} + \frac{(2c+1-\gamma)(m+q)^c}{(4c+2\gamma-6)T + (2c+1-\gamma)(m+q)^c X} \\ & \quad - \frac{(4-\gamma)m^c}{T - m^c X} - \frac{(2c+1-\gamma)m^c}{(4c+2\gamma-6)T + (2c+1-\gamma)m^c X}. \end{aligned}$$

Следовательно, число решений (139) не превосходит числа корней многочлена степени не выше 3. Этот многочлен отличен от нуля, и можно легко в этом убедиться, проверив, что $\mathcal{G}'(0) \neq 0$. Мы оставляем эти простые вычисления читателю.

С другой стороны из (116), (120), (124) и (131)–(133) имеем

$$Y''(l) \ll vqmN^{-\gamma}, \quad Y'''(l) \ll vqm^2N^{-2\gamma}. \tag{140}$$

Поэтому мы заключаем, что интервал $(L_1, L_2]$ может быть разбит на не более чем 13 таких интервалов, что если J – один из них, то имеет место по крайней мере одно из следующих утверждений:

$$|Y''(l)| \asymp vqmN^{-\gamma} \quad \text{равномерно по } l \in J, \tag{141}$$

$$|Y'''(l)| \asymp vqm^2N^{-2\gamma} \quad \text{равномерно по } l \in J. \tag{142}$$

Если (141) выполняется, то воспользуемся (4), (105) и теоремой Ван дер Корпута (см. [13; гл. 1, теорема 5]) для второй производной, чтобы получить

$$\begin{aligned} \sum_{l \in J} e(Y(l)) &\ll L(qvmN^{-\gamma})^{1/2} + (qvmN^{-\gamma})^{-1/2} \\ &\ll q^{1/2}v^{1/2}LM^{1/2}N^{-\gamma/2} + q^{-1/2}v^{-1/2}M^{-1/2}N^{\gamma/2}. \end{aligned} \quad (143)$$

В случае, когда (142) удовлетворяется, применим (4), (105) и теорему Ван дер Корпута для третьей производной и получим

$$\begin{aligned} \sum_{l \in J} e(Y(l)) &\ll L(qvm^2N^{-2\gamma})^{1/6} + L^{1/2}(qvm^2N^{-2\gamma})^{-1/6} \\ &\ll q^{1/6}v^{1/6}LM^{1/3}N^{-\gamma/3} + q^{-1/6}v^{-1/6}L^{1/2}M^{-1/3}N^{\gamma/3}. \end{aligned} \quad (144)$$

Следовательно, в каждом случае $\sum_{l \in J} e(Y(l))$ можно оценить с помощью суммы выражений из правых частей неравенств (143) и (144). Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \sum_{L_1 < l \leq L_2} e(Y(l)) &\ll q^{1/2}v^{1/2}LM^{1/2}N^{-\gamma/2} + q^{-1/2}v^{-1/2}M^{-1/2}N^{\gamma/2} \\ &\quad + q^{1/6}v^{1/6}LM^{1/3}N^{-\gamma/3} + q^{-1/6}v^{-1/6}L^{1/2}M^{-1/3}N^{\gamma/3}. \end{aligned}$$

Пользуясь (4), (105), (111) и (113), находим, что

$$\begin{aligned} W_{M,L} &\ll N^\varepsilon \left(N^\gamma Q^{-1/2} + v^{1/4} Q^{1/4} N^{7\gamma/8} + v^{-1/4} Q^{-1/4} N^{7\gamma/8} \right. \\ &\quad \left. + v^{1/12} Q^{1/12} N^{11\gamma/12} + v^{-1/12} Q^{-1/12} N^{23\gamma/24} \right). \end{aligned}$$

Применим вышеприведенную оценку для $W_{M,L}$ в (130). Тогда из (34) и (55) получаем

$$\begin{aligned} \Omega_{4,3} &\ll N^\varepsilon \sum_{d \leq D} \sum_{h \leq H} \frac{1}{h} \sum_{r < A_1 \log^3 N} \left(N^\gamma Q^{-1/2} + \left(\frac{h}{d} \right)^{1/4} Q^{1/4} N^{7\gamma/8} + \left(\frac{h}{d} \right)^{-1/4} Q^{-1/4} N^{7\gamma/8} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{h}{d} \right)^{1/12} Q^{1/12} N^{11\gamma/12} + \left(\frac{h}{d} \right)^{-1/12} Q^{-1/12} N^{23\gamma/24} \right) \\ &\ll N^\varepsilon \left(DN^\gamma Q^{-1/2} + DQ^{1/4} N^{1/4+5\gamma/8} + D^{5/4} Q^{-1/4} N^{7\gamma/8} \right. \\ &\quad \left. + DQ^{1/12} N^{1/12+5\gamma/6} + D^{13/12} Q^{-1/12} N^{23\gamma/24} \right). \end{aligned}$$

С тем выбором Q , который мы сделали в (128), теперь ясно, что

$$\Omega_{4,3} \ll \frac{N^{2\gamma-1}}{(\log N)^2}. \quad (145)$$

Теперь продолжим с изучением $\Omega_{4,1}$. Мы выбрали константу α_1 таким образом, что из (76) и (122) следует, что

$$Y''(l) \asymp vqmN^{-\gamma} \quad \text{равномерно по } l \in (L_1, L_2].$$

Тогда сумма $\sum_{P/m < l \leq 2P/m} e(Y(l))$ может оцениваться выражением из правой части (143). Это наблюдение показывает, что $\Omega_{4,1}$ оценивается той же величиной, что и $\Omega_{4,3}$, т.е.

$$\Omega_{4,1} \ll \frac{N^{2\gamma-1}}{(\log N)^2}. \quad (146)$$

Очень похожим образом можно показать, что

$$\Omega_{4,2} \ll \frac{N^{2\gamma-1}}{(\log N)^2}. \quad (147)$$

Тогда из (121), (129) и (145)–(147) получаем

$$\Omega_4 \ll \frac{N^{2\gamma-1}}{(\log N)^2}. \quad (148)$$

Остается найти оценку для Ω_3 . Тот же аргумент, что и для Ω_4 , может быть применен здесь еще раз, чтобы показать, что

$$\Omega_3 \ll \frac{N^{2\gamma-1}}{(\log N)^2}. \quad (149)$$

Из (102), (103), (148) и (149) заключаем, что (73) выполнено, и теорема доказана.

Список литературы

- [1] И. И. Пятецкий-Шапиро, “О распределении простых чисел в последовательностях вида $[f(n)]$ ”, *Матем. сб.*, **33 (75)**:3 (1953), 559–566.
- [2] J. Rivat, J. Wu, “Prime numbers of the form $[n^c]$ ”, *Glasgow Math. J.*, **43**:2 (2001), 237–254.
- [3] X. Wang, Y. Cai, “An additive problem involving Piatetski-Shapiro primes”, *Int. J. Number Theory*, **7**:5 (2011), 1359–1378.
- [4] T. P. Peneva, “An Additive problem with Piatetski-Shapiro primes and almost-primes”, *Monatsh. Math.*, **140**:2 (2003), 119–133.
- [5] R. C. Baker, W. D. Banks, Z. V. Guo, A. M. Yeager, “Piatetski-Shapiro primes from almost primes”, *Monatsh. Math.*, **174**:3 (2014), 357–370.
- [6] J.-M. Deshouillers, “Un problème binaire en théorie additive”, *Acta Arith.*, **25** (1974), 393–403.
- [7] С. А. Гриценко, “Три аддитивные задачи”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **56**:6 (1992), 1198–1216.
- [8] С. В. Конягин, “Аддитивная проблема с дробными степенями”, *Матем. заметки*, **73**:4 (2003), 633–636.
- [9] A. V. Kumchev, “A binary additive equation involving fractional powers”, *Int. J. Number Theory*, **5**:2 (2009), 281–292.
- [10] J. R. Chen, “On the representation of a larger even integer as the sum of a prime and the product of at most two primes”, *Sci. Sinica*, **16** (1973), 157–176.
- [11] G. Greaves, *Sieves in Number Theory*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.* (3), **43**, Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [12] J. D. Vaaler, “Some extremal problems in Fourier analysis”, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **12**:2 (1985), 183–216.
- [13] А. А. Карацуба, *Основы аналитической теории чисел*, Наука, М., 1983.
- [14] R. C. Vaughan, “An elementary method in prime number theory”, *Acta Arith.*, **37** (1980), 111–115.
- [15] H. Iwaniec, E. Kowalski, *Analytic Number Theory*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **53**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.

Значения бета-функции: от цепной дроби Рамануджана до аппроксимаций Эрмита–Паде

Т. Ривоаль

Institut Fourier, Centre National de la Recherche Scientifique, Université Grenoble Alpes, France

tanguy.rivoal@univ-grenoble-alpes.fr

1. Введение

В двух недавних статьях [1], [2] автор представил новые методы построения последовательностей рациональных чисел, приближающих значения гамма-функции в рациональных точках. Мотивацией была диофантовость, хотя ни один новый арифметический результат не был получен. Высказывалась гипотеза, что значение $\Gamma(1/m)$ трансцендентно для любого целого $m \geq 2$ и, более обобщенно, алгебраические соотношения со значениями гамма-функции в рациональных точках, что предсказано гипотезой Рорлиха–Ланга (см. в [3] точную формулировку). До сих пор известна лишь иррациональность $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(1/3)$, $\Gamma(1/4)$ и $\Gamma(1/6)$ (а в действительности они трансцендентны (см. [4])). В настоящей статье мы строим хорошие рациональные приближения не к значениям самой гамма-функции, но к некоторым значениям бета-функции, которая определяется как $B(x, y) := \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$. Новых результатов в отношении арифметической природы значений $B(x, y)$ при $x, y \in \mathbb{Q}$ не найдено даже при том, что наши приближения вписываются в ныне классическую схему, развитую для аппроксимаций значений дзета-функций и, более обобщенно, периодов. Однако известно, что в особых случаях бета-значений справедлива гипотеза Рорлиха–Ланга (см. классический результат Вольфарта–Вюстхольца [5]). При этом все еще важно найти новые методы в этой области.

Классическая стратегия доказательства иррациональности данного числа состоит в том, чтобы сначала построить хорошие явные функциональные рациональные приближения к некоторой функции, которые могут быть затем приспособлены к нашему числу.

Аппроксимации Эрмита–Паде – естественные кандидаты для построения функциональных рациональных приближений. Напомним, что для данного $\ell \geq 2$ и формального степенного ряда $F_1(z), \dots, F_\ell(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ существуют некоторые многочлены $P_{n,1}(z), \dots, P_{n,\ell}(z) \in \mathbb{C}[z]$ степени не большей чем n такие, что

$$P_{n,1}(z)F_1(z) + \dots + P_{n,\ell}(z)F_\ell(z)$$

имеет порядок по меньшей мере $\ell(n+1)$ в $z = 0$; и эти многочлены называются диагональными аппроксимациями Эрмита–Паде $[n, \dots, n]$ к $F_1(z), \dots, F_\ell(z)$ в $z = 0$.

Однако в случае гамма-функции не совсем ясно, в какой точке такие приближения должны быть построены. Обычно вычисляют аппроксимации Паде функции $\Gamma(1+x)$ в $x = 0$, где она голоморфна. Однако ее n -й коэффициент Тейлора при $x = 0$ является многочленом от $\gamma, \zeta(2), \dots, \zeta(n)$ и, таким образом, является предположительно трансцендентным числом; что будет в лучшем случае давать какие-то приближения к $\Gamma(1/m)$ через эти значения, которые, вероятно, бесполезны с диофантовой точки зрения. Другая возможность – это вычислить Паде-аппроксимации $\Gamma(x)$ при $x = \infty$. Однако есть некоторые вопросы. Действительно, эта функция не является голоморфной на бесконечности и даже не имеет асимптотического разложения по степеням $1/x$. Мы можем избавиться от дополнительного множите-

ля $x^{x+1/2}e^{-x}$ в формуле Стирлинга, но за счет рассмотрения частного функций, связанных с гамма-функцией, таких, как

$$R(x, a) := \frac{\Gamma(x)^2}{\Gamma(x+a)\Gamma(x-a)} = \frac{B(x, a)}{B(x-a, a)}.$$

Это и является поводом к переходу от гамма-функции к бета-функции в настоящей работе. Рамануджан нашел явную цепную дробь для $R(x, a)$ (см. [6], [7]), что эквивалентно явному построению аппроксимаций Паде расходящегося ряда Тейлора для $R(x, a)$ при $x = \infty$. Основным результатом настоящей работы является обобщение этого факта, и, понятно, предлагается новое доказательство разложения Рамануджана в цепную дробь $R(x, a)$.

Опишем теперь нашу конструкцию. Допустим, что для любого $\ell \geq 2$ комплексные числа $a, b_1, \dots, b_\ell$ являются такими, что $b_i - b_j \notin \mathbb{Z}$ для любого $i \neq j$. Напомним определение символа Похгаммера: для любого $x \in \mathbb{C}$ $(x)_0 = 1$ и $(x)_n = x(x+1) \cdots (x+n-1)$ при $n \geq 1$. Определим контурный интеграл

$$I_n(x, a, \mathbf{b}) := (-1)^{\ell(n+1)+1} \frac{(n!)^{\ell-1}}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}_n} \frac{\Gamma(z)\Gamma(a)}{\Gamma(z+a)} \cdot \frac{(1-z-a)_n}{\prod_{j=1}^{\ell} (z-x+b_j-n)_{n+1}} dz. \quad (1)$$

Множитель $(n!)^{\ell-1}$ является арифметической нормировкой и $\mathbf{b}$ означает набор $b_1, \dots, b_\ell$. Замкнутый прямой простой контур $\mathcal{C}_n$ окружает нули $x + b_j + k$, $k = 0, \dots, n$, многочлена $\prod_{j=1}^{\ell} (z-x-b_j-n)_{n+1}$, которые все различны; но не полюсы $\Gamma(z)/\Gamma(z+a)$. Это возможно, в частности, если $x - b_j \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$, $j = 1, \dots, \ell$, что мы и будем считать с этого момента, и $I_n(x, a, \mathbf{b})$ является аналитическим при любом таком x (в действительности $I_n(x, a, \mathbf{b})$, являясь аналитическим в большей области, определение которой зависит от n).

Воспользуемся интегралом $I_n(x, a, \mathbf{b})$, чтобы построить при $x = \infty$ диагональные приближения Эрмита–Паде к рядам Тейлора функций

$$B(x - b_j, a) := \frac{\Gamma(a)\Gamma(x - b_j)}{\Gamma(x + a - b_j)}, \quad j = 1, \dots, \ell.$$

Заметим, что $B(x - b_j, a)$ определены по меньшей мере для всех x таких, что $x - b_j \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$, $j = 1, \dots, \ell$, но не мероморфны при $x = \infty$. Они имеют там (расходящиеся) асимптотические разложения вида $\sum_{n \geq 0} c_{j,n}/x^{n+a+1}$ при $x \rightarrow \infty$ по крайней мере в полуплоскостях

$$\mathcal{P}_j := \{x : \operatorname{Re}(x) > \max(\operatorname{Re}(b_j), \operatorname{Re}(b_j - a))\}.$$

Обозначим через

$$\mathcal{P} := \{x : \operatorname{Re}(x) > \max(\operatorname{Re}(b_1), \operatorname{Re}(b_1 - a), \dots, \operatorname{Re}(b_\ell), \operatorname{Re}(b_\ell - a))\}$$

полуплоскость, которая определяется как пересечение $\mathcal{P}_j$, $j = 1, \dots, \ell$. Для простоты рассмотрим асимптотические разложения при $x \rightarrow \infty$ на $\mathcal{P}$.

По определению аппроксимации Паде определяются для (формальных) рядов вида

$$\sum_{n \geq 0} \frac{c_{j,n}}{x^{n+a+1}}.$$

Строго говоря, мы должны освободиться от множителя $1/x^a$ нормировкой функции

$$\frac{B(x - b_j, a)}{B(x - a, a)},$$

или, скажем, $x^a B(x - b_j, a)$. Мы не будем явно выбирать такую нормировку в теореме 1, потому что контекст ясен. Тем не менее мы выберем в следствии 1 в качестве нормировочного множителя $1/B(x - a, a) := \Gamma(x)/(\Gamma(a)\Gamma(x - a))$. Задавая формальный ряд Лорана или асимптотическое разложение $\sum_{n \geq -N} d_n/x^{a+n}$, положим, что это $O(1/x^{a+m+1})$, если $d_{-N} = d_{-N-1} = \dots = d_m = 0$.

Для любых $j = 1, \dots, \ell$ определим теперь многочлен степени n от x :

$$P_{n,j}(x, a, \mathbf{b}) := (-1)^{\ell(n+1)+1} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(n!)^{\ell-2} (x - b_j)_k (1 - x + b_j - a)_{n-k}}{\prod_{p=1, p \neq j}^{\ell} (k - b_j + b_p - n)_{n+1}}. \quad (2)$$

Если a целое, то $B(x - b_j, a)$ являются рациональными функциями, и этот случай не представляет для нас интереса. С этого момента мы предполагаем, что $a \notin \mathbb{Z}$, даже если некоторые из результатов ниже могут быть верны, когда $a \in \mathbb{Z}$.

ТЕОРЕМА 1. (i) Для любого $x - b_j \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$, $j = 1, \dots, \ell$, справедливо тождество

$$I_n(x, a, \mathbf{b}) = \sum_{j=1}^{\ell} P_{n,j}(x, a, \mathbf{b}) B(x - b_j, a) \quad (3)$$

и асимптотическое разложение этой функции есть $O(1/x^{a+(\ell-1)(n+1)})$ при $x \rightarrow \infty$ на $\mathcal{P}$.

В частности, полиномы $P_{n,1}(x, a, \mathbf{b}), \dots, P_{n,\ell}(x, a, \mathbf{b})$ являются диагональными аппроксимациями Эрмита–Паде $[n, \dots, n]$ формальных рядов Тейлора (нормированных) функций $B(a, x - b_1), \dots, B(a, x - b_\ell)$ при $x = \infty$.

(ii) Для любого x такого, что $\operatorname{Re}(x) > \max_j \operatorname{Re}(b_j)$, и при $(\ell - 1)(n + 1) > -\operatorname{Re}(a)$ имеем

$$I_n(x, a, \mathbf{b}) = \frac{(1 - a)_n}{n!} \int_{[0,1]^\ell} \frac{\prod_{j=1}^{\ell} u_j^{x-b_j-1} (1 - u_j)^n}{(1 - u_1 \dots u_\ell)^{n-a+1}} du_1 \dots du_\ell. \quad (4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Ограничения в (ii) на x , n , a и на b_j достаточны для того, чтобы обе стороны (4) были определены одновременно. Они могут быть смягчены.

Мы представим больше подробностей для случая $\ell = 2$, $b_1 = 0$, $b_2 = a$ теоремы 1. Определим два многочлена степени n от x в $\mathbb{Q}(a)[x]$:

$$P_n(x, a) = - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(x - a)_k (1 - x)_{n-k}}{(k - a - n)_{n+1}}, \quad Q_n(x, a) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(x)_k (1 - x - a)_{n-k}}{(k + a - n)_{n+1}},$$

которые равны $P_{n,2}(x, a, 0, a)$ и $-P_{n,1}(x, a, 0, a)$ соответственно.

СЛЕДСТВИЕ 1. (i) При $x \rightarrow \infty$ на полуплоскости $\{x : \operatorname{Re}(x) > |\operatorname{Re}(a)|\}$ имеем

$$Q_n(x, a) R(x, a) - P_n(x, a) = O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right). \quad (5)$$

В частности, $P_n(x, a)/Q_n(x, a)$ есть n -я диагональная Паде аппроксимация $[n/n]$ ряда Тейлора отношения Рамануджана $R(x, a)$ при $x = \infty$.

(ii) Последовательности $(P_n(x, a))_{n \geq 0}$ и $(Q_n(x, a))_{n \geq 0}$ удовлетворяют линейному рекуррентному соотношению порядка 2

$$U_{n+2} = \frac{(2n+3)(2x-1)}{(n-a+2)(n+a+2)} U_{n+1} + \frac{(n-a+1)(n+a+1)}{(n-a+2)(n+a+2)} U_n. \quad (6)$$

Рекуррентное соотношение (6) может быть истолковано следующим образом: мы имеем “тождество” с цепной дробью

$$R(x, a) \approx 1 - \frac{2a^2}{2x-1+a^2} + \frac{(a^2-1)^2}{6x-3} + \frac{(a^2-4)^2}{10x-5} + \dots + \frac{(a^2-m^2)^2}{(2m+1)(2x-1)} + \dots \quad (7)$$

Для любого $n \geq 0$ n -е приближение цепной дроби есть $P_n(x, a)/Q_n(x, a)$ и $\approx$ значит точно (5). Эта цепная дробь является в целом рамануджановской [6] (см. п. 3.1 для деталей), так что теорема 1 – это действительно обобщение работы Рамануджана, как и утверждалось выше.

В принципе, диагональные аппроксимации Паде могут обеспечить эффективные численные приближения к значениям основной функции, т.е. мы можем иметь поточечно предел $\lim_{n \rightarrow +\infty} [n/n]_f(x) = f(x)$. Естественно ожидать, что в подходящей области можно заменить $\approx$ в (7) равенством для любого заданного x . Это не всегда так в настоящей ситуации. Например, в п. 3.2 мы покажем, что для всех n и $a \notin \mathbb{Z}$ имеем

$$\frac{P_n(1/2, a)}{Q_n(1/2, a)} = (-1)^{n+1},$$

что, понятно, не сходится к

$$\frac{\Gamma(1/2)^2}{\Gamma(1/2+a)\Gamma(1/2-a)} = \cos(\pi a).$$

Однако этот пример является экстремальным, так как известно, что мы имеем поточечную сходимость в (7), где $\operatorname{Re}(x) > 1/2$; см. п. 3.1.

Подобный феномен несходимости случается при более общей постановке теоремы 1. Мы не пытались выяснить, когда мы имеем поточечную сходимость, поскольку получаемые численные приближения априори слишком медленны для какого-либо использования. Вместо этого мы покажем, как ускорить сходимость. Для этого заменим x на $x + rn$ (для некоторого нового фиксированного целого параметра $r \geq 1$) и получим, что

$$B(x + rn - b_j, a) = \frac{(x - b_j)_{rn}}{(x + a - b_j)_{rn}} B(x - b_j, a).$$

Теперь положим

$$\tilde{P}_{n,j}(x, a, \mathbf{b}) = \frac{(x - b_j)_{rn}}{(x + a - b_j)_{rn}} P_{n,j}(x + rn, a, \mathbf{b}); \quad (8)$$

это уже не многочлен от x , но он принадлежит $\mathbb{Q}(x, a)$.

ТЕОРЕМА 2. Для любых x, n таких, что $rn > \max_j \operatorname{Re}(b_j - x)$, и $x - b_j$ не из $\mathbb{Z}_{\leq 0}$ (для всех $j = 1, \dots, \ell$), имеем

$$\sum_{j=1}^{\ell} \tilde{P}_{n,j}(x, a, \mathbf{b}) B(x - b_j, a) = \frac{(1-a)_n}{n!} \int_{[0,1]^\ell} \frac{\prod_{j=1}^{\ell} u_j^{x+rn-b_j-1} (1-u_j)^n}{(1-u_1 \dots u_\ell)^{n-a+1}} du_1 \dots du_\ell. \quad (9)$$

Для любых $\ell \geq 2, r \geq 1$ пусть ρ – единственное число из $(0, 1)$ такое, что

$$r\rho^\ell - r + \rho \frac{\rho^{\ell-1} - 1}{\rho - 1} = 0.$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \sum_{j=1}^{\ell} \tilde{P}_{n,j}(x, a, \mathbf{b}) B(x - b_j, a) \right|^{1/n} = \frac{\rho^{r\ell} (1-\rho)^\ell}{1-\rho^\ell} < 1. \quad (10)$$

Для любых $\ell \geq 2$, $r \geq 1$ пусть η – единственное число из $(0, 1)$ такое, что

$$\frac{(r + \eta)(1 - \eta)^\ell}{\eta^\ell(r + \eta - 1)} = 1.$$

Тогда для любого $j \in \{1, \dots, \ell\}$

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} |\tilde{P}_{n,j}(x, a, \mathbf{b})|^{1/n} \leq \frac{(r + \eta)^r}{(1 - \eta)^\ell(r + \eta - 1)^{r-1}}. \quad (11)$$

Если ℓ четное, то пределом является $\limsup$, и в (11) имеем равенство.

ЗАМЕЧАНИЕ. Условий на x и n достаточно, чтобы обеспечить сходимость интеграла. Можно отделить x от n в условии $rn > \max_j \operatorname{Re}(b_j - x)$, предполагая более сильные условия: $\operatorname{Re}(x) > 0$ и $rn \geq \max_j \operatorname{Re}(b_j)$.

Если ℓ нечетное, метод, дающий равенство в (11) для ℓ четного, не работает, и это открытая проблема, определить точную скорость роста каждого $\tilde{P}_{n,j}(x, a, \mathbf{b})$ при $n \rightarrow \infty$. Мы обсудим это после доказательства теоремы 2.

Снова выделим случай $\ell = 2$, $b_1 = 0$, $b_2 = a$. В обозначениях следствия 1 и в соответствии с (8) положим

$$\tilde{P}_n(x, a) = \frac{(x - a)_{rn}}{(x)_{rn}} P_n(x + rn, a), \quad \tilde{Q}_n(x, a) = \frac{(x)_{rn}}{(x + a)_{rn}} Q_n(x + rn, a).$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Для любого $r \geq 1$ пусть

$$\rho = \frac{\sqrt{4r^2 + 1} - 1}{2r} \in (0, 1).$$

(i) Для любого $x \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$ при $n \rightarrow +\infty$

$$|\tilde{Q}_n(x, a)R(x, a) - \tilde{P}_n(x, a)| \sim \left(\frac{\rho^{2r}(1 - \rho)}{1 + \rho} \right)^{n+o(n)} \rightarrow 0. \quad (12)$$

(ii) Для любого $x \in \mathbb{C}$ при $n \rightarrow +\infty$

$$|\tilde{Q}_n(x, a)| \sim \left(\frac{1 + \rho}{\rho^{2r}(1 - \rho)} \right)^{n+o(n)} \rightarrow +\infty. \quad (13)$$

(iii) При $r = 1$ функция $R(x, a)$ может быть представлена быстро сходящейся цепной дробью с элементами из $\mathbb{Q}[x, a]$, у которой n -е приближение – это $\tilde{P}_n(x, a)/\tilde{Q}_n(x, a)$.

Многочлены $\tilde{P}_n(x, a)$ и $\tilde{Q}_n(x, a)$ являются решениями линейного рекуррентного соотношения конечного порядка с коэффициентами от n , x , a , которые также зависят от r (см. начало раздела 4). Мы не знаем, как записать в явном виде этот рекуррентный процесс, если мы не указываем значение r . Мы показываем в разделе 4 это рекуррентное соотношение порядка 2 для случая $r = 1$. Вместе с (i) это немедленно приводит к сходящейся цепной дроби, упомянутой в (ii), n -е приближение которой – это $\tilde{P}_n(x, a)/\tilde{Q}_n(x, a)$. В качестве иллюстрации запишем цепную дробь для $x = 1/3$, $a = 2/3$. В этом случае $(\tilde{P}_n(x, a))_{n \geq 0}$ и $(\tilde{Q}_n(x, a))_{n \geq 0}$ удовлетворяют соотношениям

$$U_{n+2} = \frac{s(n)}{r(n)} U_{n+1} + \frac{t(n)}{r(n)} U_n,$$

где

$$\begin{aligned} r(n) &= 3(3n+8)(15n+13)(3n+4)(n+2), \\ s(n) &= 4455n^4 + 23166n^3 + 43668n^2 + 35199n + 10204, \\ t(n) &= (3n+5)(3n-1)(3n+1)(15n+28). \end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем сходящуюся цепную дробь

$$-\frac{\Gamma(1/3)^3}{2\pi\sqrt{3}} = \frac{\Gamma(1/3)^2}{\Gamma(-1/3)} = 1 + \frac{104}{s(-1)} + \frac{r(-1)t(0)}{s(0)} + \dots + \frac{r(m-1)t(m)}{s(m)} + \dots,$$

скорость сходимости которой представлена в следствии 2, (ii), при $r = 1$.

В [8] авторы строят совместные аппроксимации Паде типа Π к функциям вида $B(a_j, x)$. Они не требуют большого порядка приближений в $x = \infty$, но взамен упраздняются аппроксимирующие формы во многих различных фиксированных точках. Этот подход не пересекается с нашим. Сошлемся также на [2], где построены численные приближения значений $\Gamma(\alpha)$ для любого $\alpha \in \mathbb{C}$, основанные на аппроксимациях Паде рядов вида $\sum_{n \geq 0} \Gamma(n + \alpha)x^n$; приближения к значениям гамма-функции получаются очень косвенным путем, а не как в настоящей статье. Сошлемся также на [1], где построены численные рациональные приближения к значениям $\Gamma(a/b)^b$, a, b целые; построение включает в себя интеграл, аналогичный $I_n(x, a, \mathbf{b})$, но никакой интерпретации с точки зрения приближения Паде не дается. Также представлена цепная дробь для периода $\Gamma(1/3)^3$.

2. Доказательство результатов

2.1. Доказательство теоремы 1. Поскольку a не целое, полюсы подынтегральной функции $I_n(x, a, \mathbf{b})$ простые. По теореме вычетов отсюда легко получить

$$I_n(x, a, \mathbf{b}) = \sum_{j=1}^{\ell} P_{n,j}(x, a, \mathbf{b}) B(x - b_j, a)$$

для любого x такого, что $x - b_j \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$, $j = 1, \dots, \ell$, где $P_{n,j}(x, a, \mathbf{b})$ – многочлены степени n от x , определенные во введении в (2).

Для доказательства других утверждений, найдем сначала другое выражение для $I_n(x, a, \mathbf{b})$. Определим интеграл

$$K(N) := (-1)^{\ell(n+1)+1} \frac{(n!)^{\ell-1}}{2i\pi} \int_{\tilde{\mathcal{C}}_N} \frac{\Gamma(z)\Gamma(a)}{\Gamma(z+a)} \cdot \frac{(1-z-a)_n}{\prod_{j=1}^{\ell} (z-x+b_j-n)_{n+1}} dz$$

по окружности $\tilde{\mathcal{C}}_N$ с центром в 0 и радиусом в половину целого числа $N + \eta$ (где $\eta \in (0, 1)$ зависит от a и b_j , но не от N) и такой, что окружность не проходит через полюсы подынтегральной функции. С помощью стандартных оценок, основанных на формуле Стирлинга (и формулы дополнений, когда z закрывается к отрицательной оси), получаем оценку

$$\left| \frac{\Gamma(z)\Gamma(a)}{\Gamma(z+a)} \cdot \frac{(1-z-a)_n}{\prod_{j=1}^{\ell} (z-x+b_j-n)_{n+1}} \right| \ll \frac{1}{|N|^{(n+1)(\ell-1)+\operatorname{Re}(a)+1}}$$

для $z \in \tilde{\mathcal{C}}_N$ при $N \rightarrow +\infty$. Следовательно, $\lim_{N \rightarrow +\infty} K(N) = 0$ при условии, что $(\ell-1)(n+1) > -\operatorname{Re}(a)$. Следовательно, при выполнении этого условия на n сумма остатков по всем полюсам подынтегральной функции равна 0. Другими словами,

$$I_n(x, a, \mathbf{b}) = (-1)^{\ell(n+1)} (n!)^{\ell-1} \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Residue} \left(\frac{\Gamma(z)\Gamma(a)}{\Gamma(z+a)} \cdot \frac{(1-z-a)_n}{\prod_{j=1}^{\ell} (z-x+b_j-n)_{n+1}}, z = -k \right).$$

Полюсы, включенные в эту формулу, это те полюсы $\Gamma(z)$, которые соответствуют $-k$ (отрицательным целым), являются простыми и с остатком $(-1)^k/k!$.

После некоторых упрощений получаем, что если $(\ell - 1)(n + 1) > -\operatorname{Re}(a)$, то

$$\begin{aligned} I_n(x, a, \mathbf{b}) &= (-1)^{\ell(n+1)} (n!)^{\ell-1} (1-a)_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n-a+1)_k}{k! \prod_{j=1}^{\ell} (k+x-b_j)_{n+1}} \\ &= \frac{(n!)^{\ell-1} (1-a)_n}{\prod_{j=1}^{\ell} (x-b_j)_{n+1}} \cdot {}_{\ell+1}F_{\ell} \left[\begin{matrix} n-a+1, x-b_1, \dots, x-b_{\ell} \\ n+x-b_1+1, \dots, n+x-b_{\ell}+1 \end{matrix}; 1 \right]. \end{aligned}$$

(Последнее равенство является просто определением гипергеометрического ряда.)

Используем теперь классическое интегральное представление таких рядов, чтобы получить

$$I_n(x, a, \mathbf{b}) = \frac{(1-a)_n}{n!} \int_{[0,1]^{\ell}} \frac{\prod_{j=1}^{\ell} u_j^{x-b_j-1} (1-u_j)^n}{(1-u_1 \dots u_{\ell})^{n-a+1}} du_1 \dots du_{\ell}$$

для любого $x \in \mathcal{P}$ при условии $(\ell - 1)(n + 1) > -\operatorname{Re}(a)$. При этом же условии на n мы можем ослабить условие $x \in \mathcal{P}$ до $\operatorname{Re}(x) > \max_j \operatorname{Re}(b_j)$ аналитическим продолжением обеих сторон тождества.

Поскольку каждая функция $B(x - b_j, a)$ имеет асимптотическое разложение

$$\sum_{m \geq 0} \frac{c_{j,m}}{x^{m+a}} \quad \text{при } x \rightarrow \infty$$

в $\mathcal{P}$, то $I_n(x, a, \mathbf{b})$ также имеет асимптотическое разложение вида $\sum_{m \geq -n} C_m/x^{m+a}$. Теперь докажем, что

$$C_{-n} = C_{-n+1} = \dots = C_{(\ell-1)(n+1)-1} = 0.$$

Допустим, что x является действительным числом, и положим $A = \operatorname{Re}(a)$, $B_j = \operatorname{Re}(b_j)$. Для любых $u_1, \dots, u_{\ell} \in [0, 1]$ имеем

$$(1 - u_1 \dots u_{\ell})^{\ell} \geq (1 - u_1) \dots (1 - u_{\ell})$$

так, что

$$\begin{aligned} &\left| \int_{[0,1]^{\ell}} \frac{\prod_{j=1}^{\ell} u_j^{x-b_j-1} (1-u_j)^n}{(1-u_1 \dots u_{\ell})^{n-a+1}} du_1 \dots du_{\ell} \right| \\ &\leq \int_{[0,1]^{\ell}} \prod_{j=1}^{\ell} u_j^{x-B_j-1} (1-u_j)^{n-(n-A+1)/\ell} du_j = \prod_{j=1}^{\ell} \frac{\Gamma(x-B_j) \Gamma(n-(n-A+1)/\ell+1)}{\Gamma(x-B_j+n-(n-A+1)/\ell+1)}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$|I_n(x, a, \mathbf{b})| \leq \left| \frac{(1-a)_n}{n!} \prod_{j=1}^{\ell} \frac{\Gamma(x-B_j) \Gamma(n-(n-A+1)/\ell+1)}{\Gamma(x-B_j+n-(n-A+1)/\ell+1)} \right|. \quad (14)$$

При $x \rightarrow +\infty$, $x > 0$ формула Стирлинга показывает, что для любых комплексных чисел α , β имеем

$$\left| \frac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(x+\beta)} \right| \ll \frac{1}{x^{\operatorname{Re}(\beta-\alpha)}}.$$

Применяя эту оценку к правой стороне соотношения (14), видим, что это $O(1/x^{(\ell-1)(n+1)+A})$ при $x \rightarrow +\infty$. Теперь, если через M обозначить наименьшее целое число такое, что $C_M \neq 0$ в асимптотическом разложении $I_n(x, a, \mathbf{b})$ в $\mathcal{P}$, имеем

$$\left| \frac{1}{x^{M+a}} \right| \ll \frac{1}{x^{(\ell-1)(n+1)+A}}$$

при $x \rightarrow +\infty$, $x > 0$, где неявная константа не зависит от x . Так как $|x^a| = x^A$ при $x > 0$, это обеспечивает $M \geq (\ell - 1)(n + 1)$, как и ожидалось.

Таким образом, мы доказали, что асимптотическое разложение

$$\sum_{j=1}^{\ell} P_{n,j}(x, a, \mathbf{b}) B(x - b_j, a)$$

есть $O(1/x^{(\ell-1)(n+1)+a})$ при $x \rightarrow \infty$ в $\mathcal{P}$. Сошлемся на [9; § 2] для объяснения того, почему это означает, что полиномы $P_{n,1}(x, a, \mathbf{b}), \dots, P_{n,\ell}(x, a, \mathbf{b})$ являются диагональными аппроксимациями Эрмита–Паде $[n, \dots, n]$ формальных рядов Тейлора при $x = \infty$ (нормированных) функций $B(a, x - b_1), \dots, B(a, x - b_\ell)$.

2.2. Доказательство следствия 1. Утверждение (i) является непосредственным следствием теоремы 1. Чтобы доказать (ii), применим алгоритм Цайльбергера на $P_n(x, a)$ и $Q_n(x, a)$: мы видим, что они удовлетворяют тому же рекуррентному соотношению (6).

2.3. Доказательство теоремы 2. Уравнение (9) является непосредственным следствием уравнений (3) и (4) с $x + rn$ вместо x .

Стандартным образом получаем

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \int_{[0,1]^\ell} \frac{\prod_{j=1}^{\ell} u_j^{x+rn-b_j-1} (1-u_j)^n}{(1-u_1 \dots u_\ell)^{n-a+1}} du_1 \dots du_\ell \right|^{1/n} = \sup_{(u_1, \dots, u_\ell) \in [0,1]^\ell} \frac{\prod_{j=1}^{\ell} u_j^r (1-u_j)}{1-u_1 \dots u_\ell}.$$

Этот супремум достигается на диагонали $u_1 = \dots = u_\ell = \rho$, где ρ – единственное число в $(0, 1)$ такое, что

$$r\rho^\ell - r + \rho \frac{\rho^{\ell-1} - 1}{\rho - 1} = 0.$$

(Заметим, что для фиксированного ℓ имеем $\rho = 1 - (\ell - 1)/(\ell r) + O(1/r^2)$ при $r \rightarrow +\infty$.) См. [10] для более подробной информации об этом соотношении. Таким образом, имеем

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \int_{[0,1]^\ell} \frac{\prod_{j=1}^{\ell} u_j^{x-b_j-1} (1-u_j)^n}{(1-u_1 \dots u_\ell)^{n-a+1}} du_1 \dots du_\ell \right|^{1/n} = \frac{\rho^{r\ell} (1-\rho)^\ell}{1-\rho^\ell} = \frac{\rho^{r\ell} (1-\rho)^{\ell-1}}{1+\rho+\dots+\rho^{\ell-1}} < 1. \quad (15)$$

Для фиксированного ℓ имеем

$$\frac{\rho^{r\ell} (1-\rho)^\ell}{1-\rho^\ell} \sim \frac{\ell^\ell}{(\ell+1)^{\ell+1}} \cdot \frac{1}{e^\ell r^\ell} \quad \text{при } r \rightarrow +\infty.$$

Укажем теперь, как оценить $\tilde{P}_{n,j}(x, a, \mathbf{b})$ при $n \rightarrow +\infty$. Напомним, что

$$\tilde{P}_{n,j}(x, a, \mathbf{b}) = \frac{(x)_{rn}}{(x+a)_{rn}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(n!)^{\ell-2} (x+rn-b_j)_k (1-x-rn+b_j-a)_{n-k}}{\prod_{p=1, p \neq j}^{\ell} (k-b_j+b_p-n)_{n+1}} \quad (16)$$

определено для любого $x \in \mathbb{C}$.

Сначала предположим, что ℓ четное. По формуле Стирлинга получим, что

$$\tilde{P}_{n,j}(x, a, \mathbf{b}) = c_n(x, a, \mathbf{b}) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^\ell \frac{(rn)_k ((r-1)n+k)_{n-k}}{n!}, \quad (17)$$

где $|c_n(x, a, \mathbf{b})|^{1/n} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow +\infty$. Чтобы доказать (17), важно, чтобы сумма имела положительные слагаемые (тот факт, что ℓ четное, неявно здесь используется), и к тому же

этот факт даже позволяет оценить эту сумму точно с помощью дискретного метода Лапласа. Сошлемся на [10] или [11], где приведены детали в подобных ситуациях. Сначала заменим k на tn при $t \in [0, 1]$ и определяем асимптотическое поведение

$$\binom{n}{k}^\ell \frac{(rn)_k((r-1)n+k)_{n-k}}{n!}$$

при n , стремящемся к $+\infty$. По формуле Стирлинга

$$\binom{n}{k}^\ell \frac{(rn)_k((r-1)n+k)_{n-k}}{n!} = d_n(t) \left(\frac{(r+t)^{r+t}}{t^{\ell t}(1-t)^{\ell(1-t)}(r+t-1)^{r+t-1}} \right)^n,$$

где $d_n(t)^{1/n} \rightarrow 1$. Взяв логарифмические производные для упрощения вычислений, докажем, что

$$\varphi(t) := \frac{(r+t)^{r+t}}{t^{\ell t}(1-t)^{\ell(1-t)}(r+t-1)^{r+t-1}}$$

имеет единственный максимум на $(0, 1)$ в точке $t = \eta$, где η – единственное число на $(0, 1)$ такое, что

$$\frac{(\eta+r)(1-\eta)^\ell}{\eta^\ell(\eta+r-1)} = 1.$$

(Для фиксированного ℓ $\eta = 1/2 + 1/(4\ell r) + O(1/r^2)$ при $r \rightarrow +\infty$.) Заключаем, что для четного ℓ

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |\tilde{P}_{n,j}(x, a, \mathbf{b})|^{1/n} = \varphi(\eta) = \frac{(r+\eta)^r}{(1-\eta)^\ell(r+\eta-1)^{r-1}} > 1. \quad (18)$$

Для фиксированного ℓ имеем $\varphi(\eta) \sim 2^\ell r$ при $r \rightarrow +\infty$.

Если ℓ нечетное, получить точное поведение $|\tilde{P}_{n,j}(x, a, \mathbf{b})|$ намного сложнее. Мы выскажем свои замечания по этому вопросу после доказательства. Тем не менее верхняя граница легко получается. Действительно, из (16) имеем

$$|\tilde{P}_{n,j}(x, a, \mathbf{b})| \leq \left| \frac{(x)_{rn}}{(x+a)_{rn}} \right| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(n!)^{\ell-2} |(x+rn-b_j)_k(1-x-rn+b_j-a)_{n-k}|}{|\prod_{p=1, p \neq j}^\ell (k-b_j+b_p-n)_{n+1}|},$$

откуда получаем

$$|\tilde{P}_{n,j}(x, a, \mathbf{b})| \leq \tilde{c}_n(x, a, \mathbf{b}) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^\ell \frac{(rn)_k((r-1)n+k)_{n-k}}{n!},$$

где $|\tilde{c}_n(x, a, \mathbf{b})|^{1/n} \rightarrow 1$. Таким образом, заключаем как и выше, что

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} |\tilde{P}_{n,j}(x, a, \mathbf{b})|^{1/n} \leq \varphi(\eta),$$

что завершает доказательство теоремы 2.

Объясним теперь трудности, возникающие из-за нечетности ℓ . Вычисление, аналогичное тому, что проводится для (17), формально ведет к

$$\tilde{P}_{n,j}(x, a, \mathbf{b}) \stackrel{?}{=} \hat{c}_n(x, a, \mathbf{b}) \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k}^\ell \frac{(rn)_k((r-1)n+k)_{n-k}}{n!}, \quad (19)$$

где $|\hat{c}_n(x, a, \mathbf{b})|^{1/n} \rightarrow 1$. Однако не ясно, справедливо ли соотношение (19), потому что сумма в его правой части является знакопеременной. Даже если (19) имеет место, получить точное

асимптотическое поведение этой суммы будет нелегко. Может быть, можно точно оценить $\tilde{P}_{n,j}(x, a, \mathbf{b})$, применяя метод перевала после преобразования (16) в контурный интеграл:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{n,j}(x, a, \mathbf{b}) &= (n!)^{\ell-1} \frac{\Gamma(rn + x - b_j + a)}{\Gamma(rn + x - b_j)} \frac{(x)_{rn}}{(x+a)_{rn}} \\ &\times \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{\Gamma(x + rn - b_j + t)\Gamma(t)}{\Gamma((r-1)n + t + a - b_j + x)\Gamma(t-n) \prod_{p=1, p \neq j}^{\ell} (t - b_j + b_p - n)_{n+1}} dt. \end{aligned}$$

Здесь C представляет собой замкнутый контур, который окружает точки $0, 1, \dots, n$, но не другие полюсы подынтегральной функции. Обычной процедурой явилась бы дальнейшая замена t на tn , применение формулы Стирлинга (как мы делали выше), затем следовало бы оценить критические точки и деформировать контур через эти точки, чтобы можно было применить метод перевала. Однако такой процесс включает в себя много технических тонкостей, и мы не пытались превратить эту процедуру в формальное доказательство, потому что это несущественно для потенциального применения. Действительно, несмотря на то, что здесь, по-видимому, нет интересных диофантовых приложений (см. п. 5.3), укажем, что верхней оценки для $|\tilde{P}_{n,j}(x, a, \mathbf{b})|$ достаточно, когда применяется критерий линейной независимости Нестеренко (см. в [10] формулировку критерия), потому что в нашей ситуации мы знаем точную скорость убывания линейной формы от значений бета-функции.

2.4. Доказательство следствия 2. (i) Поскольку у нас $n \rightarrow +\infty$, предположение $rn > \max(\operatorname{Re}(-x), \operatorname{Re}(a-x))$ и $x \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$ просто становится $x \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$. Из доказательства теоремы 2 видим, что при $\ell = 2$ $\rho = (\sqrt{4r^2 + 1} - 1)/(2r)$, и (15) дает (12).

(ii) Теперь докажем утверждение для $\tilde{Q}_n(x, a)$, определенное для любого $x \in \mathbb{C}$. Поскольку ℓ четное, по теореме 2 имеем

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |\tilde{Q}_n(x)|^{1/n} = \frac{(r+\eta)^r}{(1-\eta)^2(r+\eta-1)^{r-1}},$$

где η – единственное число на $(0, 1)$ такое, что

$$\frac{(\eta+r)(1-\eta)^2}{\eta^2(r+\eta-1)} = 1.$$

Решая это уравнение, получим $\eta = (1/2)\sqrt{4r^2 + 1} + (1/2) - r$ и, пользуясь соотношением $\eta = r\rho + (1/2) - r$, видим, что

$$\frac{(r+\eta)^r}{(1-\eta)^2(r+\eta-1)^{r-1}} = \frac{1+\rho}{\rho^{2r}(1-\rho)},$$

что завершает доказательство (13).

3. Замечания о цепной дроби (7)

3.1. Цепная дробь Рамануджана. Пусть x, α, β – комплексные числа и положим

$$Q := \frac{\Gamma((x+\alpha-\beta+1)/2)\Gamma((x-\alpha+\beta+1)/2)}{\Gamma((x+\alpha+\beta+1)/2)\Gamma((x-\alpha-\beta+1)/2)}.$$

В [6] Рамануджан утверждает, что если α или β является целым числом или если $\operatorname{Re}(x) > 0$, то

$$\frac{1-Q}{1+Q} = \left\lfloor \frac{\alpha\beta}{x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{(\alpha^2-1)(\beta^2-1)}{3x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{(\alpha^2-4)(\beta^2-4)}{5x} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{(\alpha^2-m^2)(\beta^2-m^2)}{(2m+1)x} \right\rfloor + \dots \quad (20)$$

См. [7] для доказательства. Если мы положим $\alpha = \beta = 2a$ и заменим x на $2x - 1$, то увидим, что

$$Q = \frac{\Gamma(x)^2}{\Gamma(x-a)\Gamma(x+a)}$$

и что (20) не что иное, как цепная дробь (7) в замаскированной форме. В частности, цепная дробь в (7) сходится к $\Gamma(x)^2/(\Gamma(x-a)\Gamma(x+a))$, как только $\operatorname{Re}(x) > 1/2$. Случай $x = 1/2$ изучаемый в следующей главе, показывает, что мы не можем ожидать сходимости в более широкой области.

Цепная дробь Рамануджана может быть доказана из общего случая $\ell = 2$ в теореме 1. Получим аппроксимацию Паде функции

$$\frac{\Gamma(x-b_1)\Gamma(x+a-b_2)}{\Gamma(x+a-b_1)\Gamma(x-b_2)},$$

которая легко преобразуется в Рамануджаново Q частное.

3.2. Суммирование $P_n(1/2, a)$ и $Q_n(1/2, a)$. В этом пункте докажем, что $P_n(1/2, a) = (-1)^{n+1}Q_n(1/2, a)$. Напомним, что

$$P_n(x, a) = -\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(x-a)_k(1-x)_{n-k}}{(k-a-n)_{n+1}}, \quad Q_n(x, a) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(x)_k(1-x-a)_{n-k}}{(k+a-n)_{n+1}}$$

определены во введении в контексте следствия 1. В гипергеометрических обозначениях имеем

$$P_n(x, a) = -\frac{(1-x)_n}{(-a-n)_{n+1}} {}_3F_2 \left[\begin{matrix} -a-n, x-a, -n \\ x-n, -1-a \end{matrix}; 1 \right],$$

$$Q_n(x, a) = \frac{(1-x-a)_n}{(a-n)_{n+1}} {}_3F_2 \left[\begin{matrix} a-n, -n, x \\ a+1, a-n+x \end{matrix}; 1 \right].$$

Вообще, эти гипергеометрические ряды не суммируются. Однако если $x = 1/2$, то оба они сбалансированы и могут суммироваться по формуле Диксона (см. [12; с. 52, (2.3.3.5)]). Отсюда получаем

$$P_n\left(\frac{1}{2}, a\right) = -\frac{2^{n+a}\Gamma((a+n+1)/2)^2\Gamma(-a-n)\cos((\pi/2)(a+n))}{\sqrt{\pi}\Gamma((1+a-n)/2)\Gamma((n-a)/2+1)\cos(\pi n)},$$

$$Q_n\left(\frac{1}{2}, a\right) = \frac{\sqrt{\pi}2^{n-a}\Gamma((a+n+1)/2)\Gamma(a-n)\cos(\pi a)}{\Gamma((1+a-n)/2)^2\Gamma((a+n)/2+1)\cos(\pi(a-n))}.$$

После некоторых упрощений (с участием формулы дополнений) получим, что для всех $n \in \mathbb{N}$ и всех $a \notin \mathbb{Z}$, имеем

$$\frac{P_n(1/2, a)}{Q_n(1/2, a)} = -\frac{2\sin((\pi/2)(n+1+a))\sin((\pi/2)(2+a-n))\sin((\pi/2)(1+2a-2n))}{\sin(\pi(n+1+a))\sin((\pi/2)(1+2n))\sin((\pi/2)(1+2a))} = (-1)^{n+1},$$

как и ожидалось.

4. Линейное рекуррентное соотношение, связанное со следствием 2

Алгоритм Цайльбергера может производить рекуррентные соотношения для $\tilde{P}_n(x, a)$ и $\tilde{Q}_n(x, a)$ для любого заданного значения r , но не тогда, когда r – это переменная. Причина заключается в том, что алгоритм считает, что, например, $\binom{2n}{2k}$ является гипергеометрическим значением (и, таким образом, может найти рекуррентное соотношение для $\sum_k \binom{2n}{2k}$), но не

$\binom{rn}{rk}$. По крайней мере, поскольку $\tilde{P}_n(x, a)$ и $\tilde{Q}_n(x, a)$ могут быть выражены в виде значений функции ${}_3F_2(z)$ в $z = 1$ с параметрами вида $u(x, a)n + v(x, a)$, известно, что они удовлетворяют линейным рекуррентным соотношениям порядка не более 3 с полиномиальными коэффициентами из $\mathbb{Q}[n, x, a]$ (которые зависят от r). Предположительно порядок всегда 2, но мы не можем доказать это для общего случая.

Например, при $r = 1$ алгоритм Цайльбергера легко вычисляет линейное рекуррентное соотношение порядка 2, которому удовлетворяют $\tilde{P}_n(x, a)$ и $\tilde{Q}_n(x, a)$. Обе последовательности удовлетворяют соотношению

$$p_n(x, a)U_{n+2} = q_n(x, a)U_{n+1} + r_n(x, a)U_n,$$

где

$$\begin{aligned} p_n(x, a) &= (x + n + 1)(n + 2 + a)(n + 2 - a)(x + 1 + n + a)(a^2 - 5n^2 - 6nx - 2x^2 - 4n - 2x - 1), \\ q_n(x, a) &= (x + n)(n + a + 1)(n + 1 - a)(x + n - a)(a^2 - 5n^2 - 6nx - 2x^2 - 14n - 8x - 10), \\ r_n(x, a) &= 55n^6 + (176x + 319)n^5 + (-31a^2 + 234x^2 + 852x + 744)n^4 \\ &\quad + (-56a^2x + 160x^3 - 130a^2 + 924x^2 + 1580x + 891)n^3 \\ &\quad + (9a^4 - 36a^2x^2 + 56x^4 - 180a^2x + 496x^3 - 204a^2 + 1300x^2 + 1394x + 579)n^2 \\ &\quad + (8a^4x - 8a^2x^3 + 8x^5 + 19a^4 - 84a^2x^2 + 128x^4 - 188a^2x \\ &\quad + 480x^3 - 143a^2 + 766x^2 + 582x + 196)n \\ &\quad - a^6 + 2a^4x^2 + 8a^4x - 12a^2x^3 + 12x^5 + 12a^4 - 46a^2x^2 + 66x^4 - 64a^2x \\ &\quad + 144x^3 - 39a^2 + 158x^2 + 92x + 28. \end{aligned}$$

В силу этого можно записать общую цепную дробь, сходящуюся к $\Gamma(x)^2/(\Gamma(x+a)\Gamma(x-a))$, но это не проясняет ситуацию. Заметим, что характеристическое уравнение этого рекуррентного соотношения есть $X^2 - 11X - 1 = 0$, решения которого – это $(11 - 5\sqrt{5})/2$ и $(11 + 5\sqrt{5})/2$. По теореме Пуанкаре–Перрона первое решение управляет асимптотическим поведением $\tilde{Q}_n(x, a)R(x, a) - \tilde{P}_n(x, a)$, а второе – поведением $\tilde{P}_n(x, a)$ и поведением $\tilde{Q}_n(x, a)$. Конечно, это соответствует скоростям сходимости из следствия 2.

5. Заключительные замечания

5.1. Немного гипергеометрии. В качестве побочного результата при доказательстве теоремы 1 мы доказали, что

$$\frac{(n!)^{\ell-1}(1-a)_n}{\prod_{j=1}^{\ell}(x-b_j)_{n+1}} \cdot {}_{\ell+1}F_{\ell} \left[\begin{matrix} n+1-a, x-b_1, \dots, x-b_{\ell} \\ n+x-b_1+1, \dots, n+x-b_{\ell}+1 \end{matrix}; 1 \right] = \sum_{j=1}^{\ell} P_{n,j}(x)B(x-b_j, a). \quad (21)$$

Для $n = 0$, это дает формулу суммирования

$${}_{\ell+1}F_{\ell} \left[\begin{matrix} 1-a, x-b_1, \dots, x-b_{\ell} \\ x-b_1+1, \dots, x-b_{\ell}+1 \end{matrix}; 1 \right] = \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\prod_{j=1}^{\ell}(x-b_j)}{\prod_{p=1, p \neq j}^{\ell}(b_j - b_p)} \cdot B(x-b_j, a).$$

Эту формулу нетрудно доказать непосредственно. В самом деле, по определению

$${}_{\ell+1}F_{\ell} \left[\begin{matrix} 1-a, x-b_1, \dots, x-b_{\ell} \\ x-b_1+1, \dots, x-b_{\ell}+1 \end{matrix}; 1 \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-a)_k}{k!} \cdot \frac{\prod_{j=1}^{\ell}(x-b_j)}{\prod_{j=1}^{\ell}(x-b_j+k)}. \quad (22)$$

Так как $b_i - b_j \notin \mathbb{Z}$, нули $k \mapsto \prod_{j=1}^{\ell} (x - b_j + k)$ являются простыми, и разложением по частичным дробям (от k) мы получаем, что ряд справа в (22) равен

$$\sum_{j=1}^{\ell} \frac{\prod_{p=1, p \neq j}^{\ell} (x - b_p)}{\prod_{p=1, p \neq j}^{\ell} (b_j - b_p)} \cdot {}_2F_1 \left[\begin{matrix} 1 - a, x - b_j \\ x - b_j + 1 \end{matrix}; 1 \right].$$

Заканчиваем применением формулы суммирования Гаусса ([12; с. 28, (1.7.6)]) и аналитическим продолжением. Более общее уравнение (21) может быть доказано по той же схеме. На самом деле, мы могли бы начать статью от этого гипергеометрического ряда вместо интеграла $I_n(x, a, \mathbf{b})$, но мы выбрали настоящий подход, поскольку этот вид интеграла (Барнесова типа) является классическим в теории аппроксимаций Паде и диофантовых аппроксимаций; см., например, [13]–[15].

5.2. Другой подход. Формулы, приведенные в предыдущем пункте, обеспечивают альтернативный подход к построению хороших численных приближений к значениям $B(x - b_j, a)$. Рассмотрим гипергеометрический ряд

$$\begin{aligned} J_n(x, a, \mathbf{b}) &:= \frac{(n!)^{\ell}}{\Gamma(sn + 1 - a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k + 1 - a)}{k!} \cdot \frac{(k - sn + 1)_{sn}}{\prod_{j=1}^{\ell} (k + x - b_j)_{n+1}} \\ &= \frac{(n!)^{\ell}}{\prod_{j=1}^{\ell} (sn + x - b_j)_{n+1}} \cdot {}_{\ell+1}F_{\ell} \left[\begin{matrix} sn + 1 - a, sn + x - b_1, \dots, sn + x - b_{\ell} \\ (s + 1)n + x - b_1 + 1, \dots, (s + 1)n + x - b_{\ell} + 1 \end{matrix}; 1 \right], \end{aligned}$$

где s – такое целое число, что $(\ell - s)n + \ell > 1 - \operatorname{Re}(a)$, так что ряд сходится. Если $s = \ell$, то это предположение выполняется, если мы предполагаем, что $\operatorname{Re}(a) > -1$, так как $\ell \geq 2$. Множитель $(n!)^{\ell}/(sn)!$ является арифметической нормировкой, также мы могли бы выбрать $(n!)^{\ell-s}$. На первый взгляд, $J_n(x, a, \mathbf{b})$ довольно сильно отличается от ряда для $I_n(x, a, \mathbf{b})$: в числителе мы имеем $(k - sn + 1)_{sn}$ вместо $(k - a)_{n+1}$. Множитель $(k - sn + 1)_{sn}$ значит, что первые sn членов ряда равны 0 и что он должен быть “маленький” (см. п. 5.3).

Определим

$$Q_{n,j}(x, a, \mathbf{b}) = \sum_{p=0}^n \frac{(-1)^{n-p} (n!)^{\ell} (-x + b_j - p - sn)_{sn} (x - b_j)_p}{p! (n - p)! (1 - a)_{sn} (x + a - b_j)_p \prod_{q=1, q \neq j}^{\ell} (b_j - b_q - p)_{n+1}} \in \mathbb{Q}(x, a, b_1, \dots, b_{\ell}).$$

ТЕОРЕМА 3. *Имеем*

$$J_n(x, a, \mathbf{b}) = \sum_{j=1}^{\ell} Q_{n,j}(x, a, \mathbf{b}) B(x - b_j, a) = \int_{[0,1]^{\ell}} \frac{\prod_{j=1}^{\ell} u_j^{sn+x-b_j} (1 - u_j)^n}{(1 - u_1 \dots u_{\ell})^{sn+1-a}} du_1 \dots du_{\ell}.$$

Отметим, что на самом деле в этом интегральном выражении

$$J_n(x, a, \mathbf{b}) = \frac{n!}{(1 - a)_n} I_n(x + sn + 1, a - (s - 1)n, \mathbf{b}).$$

Таким образом, оба подхода по существу обеспечивают одинаковую информацию. Приведем теперь прямое доказательство теоремы 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Поскольку $s \leq n$, имеем разложение по частичным дробям (от k)

$$\frac{(k - sn)_{sn}}{\prod_{j=1}^{\ell} (k + x - b_j)_{n+1}} = \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{p=0}^n \frac{(-1)^{n-p} (-x + b_j - p - sn)_{sn}}{p! (n - p)! \prod_{q=1, q \neq j}^{\ell} (b_j - b_q - p)_{n+1}} \frac{1}{k + x - b_j + p}.$$

Следовательно,

$$J_n(x, a, \mathbf{b}) = \frac{1}{\Gamma(sn + 1 - a)} \sum_{p=0}^n \frac{(-1)^{n-p} (n!)^\ell (-x + b_j - p - sn)_{sn}}{p! (n-p)! \prod_{q=1, q \neq j}^\ell (b_j - b_q - p)_{n+1}} \sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma(k + 1 - a)}{k! (k + x - b_j + p)}.$$

Теперь с помощью формулы суммирования Гаусса получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(sn + 1 - a)} \sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma(k + 1 - a)}{k! (k + x - b_j + p)} \\ &= \frac{\Gamma(p + x - b_j) \Gamma(a)}{\Gamma(x - b + a - p) (1 - a)_{sn}} = \frac{(x - b_j)_p}{(x + a - b)_p (1 - a)_{sn}} B(x - b_j, a), \end{aligned}$$

так что

$$J_n(x, a, \mathbf{b}) = \sum_{j=1}^\ell \left(\sum_{p=0}^n (-1)^{n-p} \frac{(n!)^\ell (-x + b_j - p - sn)_{sn} (x - b_j)_p}{p! (n-p)! (1 - a)_{sn} (x + a - b_j)_p \prod_{q=1, q \neq j}^\ell (b_j - b_q - p)_{n+1}} \right) B(x - b_j, a).$$

Это интегральное выражение является следствием того факта, что $J_n(x, a, b)$ является гипергеометрическим рядом.

5.3. Диофантовы вопросы. Гипергеометрические ряды или интегралы, как те, что изучаются в настоящей работе, широко применяются, в частности, при исследовании арифметической природы дзета-значений; см., например, [10], [16], [17]. В теореме 2 нетрудно доказать, что

$$\left| \sum_{j=1}^\ell \tilde{P}_{n,j}(x, a, \mathbf{b}) B(x - b_j, a) \right| \ll \frac{1}{r^{\ell n + o(n)}} \quad \text{для любого } r,$$

где неявная константа не зависит от ℓ . Аналогично, в теореме 3 имеем

$$\left| \sum_{j=1}^\ell Q_{n,j}(x, a, \mathbf{b}) B(x - b_j, a) \right| \ll \frac{1}{(es)^{(\ell-s)n + o(n)}} \quad \text{для любого } s < \ell.$$

Когда в качестве x , a и b_j выбираются рациональные числа, $\tilde{P}_{n,j}(x, a, \mathbf{b})$ и $Q_{n,j}(x, a, \mathbf{b})$ являются рациональными числами. К сожалению, оказывается, что общий знаменатель $\tilde{P}_{n,j}(x, a, \mathbf{b})$ -х и соответственно $Q_{n,j}(x, a, \mathbf{b})$ -х, слишком большой для результативного применения критерия линейной независимости Нестеренко. Даже в простом случае $x = 1$, $a = 1/2$, $b_j = -j/\ell$ оказывается, что мы не можем получить нетривиальную нижнюю оценку размерности вектора пространства над $\mathbb{Q}$ через $B(1/2, 1/\ell), \dots, B(1/2, (\ell - 1)/\ell)$. Мы не приводим никаких подробностей, потому что даже если бы мы могли получить нетривиальную нижнюю оценку для большей размерности, результат не был бы новым. В самом деле, результаты [5] о линейной независимости бета-значений позволяют получить точное значение этой размерности, как и предсказывает гипотеза Рорлиха–Ланга.

Список литературы

- [1] T. Rivoal, “Approximations rationnelles des valeurs de la fonction Gamma aux rationnels: le cas des puissances”, *Acta Arith.*, **142**:4 (2010), 347–365.
- [2] T. Rivoal, “Approximations rationnelles des valeurs de la fonction Gamma aux rationnels”, *J. Number Theory*, **130**:4 (2010), 944–955.

- [3] T. Rivoal, J. Roques, “Hadamard products of algebraic functions”, *J. Number Theory*, **145** (2014), 579–603.
- [4] M. Waldschmidt, “Transcendence de périodes: état des connaissances”, *Proc. Tunisian Math. Soc.*, **11** (2007), 89–116.
- [5] J. Wolfart, G. Wüstholz, “Der Überlagerungsradius gewisser algebraischer Kurven und die Werte der Betafunktion an rationalen Stellen”, *Math. Ann.*, **273**:1 (1985), 1–15.
- [6] B. C. Berndt, *Ramanujan’s Notebooks*, Part II, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [7] L. Jacobsen, “Domains of validity for some of Ramanujan’s continued fraction formulas”, *J. Math. Anal. Appl.*, **143**:2 (1989), 412–437.
- [8] А. А. Кандаян, В. Н. Сорокин, “Многоточечные аппроксимации Эрмита–Паде бета-функций”, *Матем. заметки*, **87**:2 (2010), 217–232.
- [9] T. Rivoal, “Simultaneous polynomial approximations of the Lerch function”, *Canad. J. Math.*, **61**:6 (2009), 1341–1356.
- [10] K. Ball, T. Rivoal, “Irrationalité d’une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs”, *Invent. Math.*, **146**:1 (2001), 193–207.
- [11] R. J. McIntosh, “An Asymptotic formula for binomial sums”, *J. Number Theory*, **58**:1 (1996), 158–172.
- [12] L. J. Slater, *Generalized Hypergeometric Functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1966.
- [13] Ю. В. Нестеренко, “О показателе иррациональности числа $\ln 2$ ”, *Матем. заметки*, **88**:4 (2010), 549–564.
- [14] T. Schneider, *Introduction aux nombres transcendants*, Gauthier-Villars, Paris, 1959.
- [15] W. Zudilin, “Arithmetic of linear forms involving odd zeta values”, *J. Théor. Nombres Bordeaux*, **16**:1 (2004), 251–291.
- [16] Е. М. Никишин, “Об иррациональности значений функций $F(x, s)$ ”, *Матем. сб.*, **109 (151)**:3 (7) (1979), 410–417.
- [17] T. Rivoal, “La fonction zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **331**:4 (2000), 267–270.

Представление натуральных чисел слагаемыми определенного вида

В. Г. Чирский

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

Статья посвящена задаче о представлении натурального числа в виде суммы слагаемых определенного вида. Эта задача имеет давнюю историю. С ней связаны многие замечательные результаты и нерешенные проблемы.

Современные компьютерные технологии вызывают особый интерес к некоторым частным случаям этой задачи. Например, в алгоритмах возведения в степень часто используется представление натуральных чисел в системе с двумя основаниями (DBNS – double base number system). В этой задаче получены асимптотические оценки для количества членов в разложении натурального числа таким способом и для наименьшего натурального числа, не представляемого заданным количеством слагаемых в системе с двумя основаниями.

В предлагаемой работе эти оценки значительно уточняются. Для этого используются очень точные оценки линейных форм от логарифмов, установленные Салиховым [1].

Введем необходимые обозначения. Пусть $P = \{p_1, \dots, p_t\}$ обозначает множество, состоящее из конечного числа простых чисел $p_1, \dots, p_t$. Пусть A обозначает множество произведений целых неотрицательных степеней чисел $p_1, \dots, p_t$. Множество $A_{\pm}$ определяется как $A \cup (-A)$.

Жарден и Наркевич [2] доказали, что не существует такого натурального числа k , что любое натуральное число n можно представить суммой не более чем k слагаемых из множества A .

Из теоремы Натансона [3] следует, что для любого натурального числа k существует бесконечное множество целых чисел n таких, что число k представляет собой наименьшее значение l , для которых имеет место представление

$$n = a_1 + a_2 + \dots + a_l, \quad a_1, a_2, \dots, a_l \in A_{\pm}.$$

Обозначим через $F(k)$ -наименьшее натуральное число, которое нельзя представить в виде суммы менее чем k слагаемых из множества A . Величина $F_{\pm}(k)$ определяется аналогичным образом для множества $A_{\pm}$. Исследуем задачу получения оценок для величин $F(k)$, $F_{\pm}(k)$. В работе [4] получены такие оценки для общего случая $P = \{p_1, \dots, p_t\}$.

ТЕОРЕМА 1 [4; теорема 2]. Пусть $P = \{p_1, \dots, p_t\}$ – конечное множество простых чисел и A – множество произведений целых неотрицательных степеней чисел из P . Пусть k – натуральное число. Пусть $F(k)$ обозначает наименьшее натуральное число, которое нельзя представить в виде суммы $\sum_{i=1}^k a_i$ с $a_i \in A \cup [0]$, а $F_{\pm}(k)$ обозначает наименьшее натуральное число, которое нельзя представить в виде суммы $\sum_{i=1}^k a_i$ с $a_i \in A_{\pm} \cup [0]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют число s , зависящее только от двух наименьших чисел из P , число C , зависящее только от ε , и абсолютная постоянная $C_{\pm}$ такие, что

- 1) $F(k) > k^{ck}$ для всех $k > 1$;
- 2) $F(k) \leq C(kt)^{(1+\varepsilon)kt}$ для всех $k > 1$;
- 3) $F_{\pm}(k) < \exp((kt)^{C_{\pm}})$ для всех $k > 1$.

Для упомянутой выше задачи возведения в степень часто актуально представление натуральных чисел в системе с двумя основаниями: 2 и 3.

Одна из важных проблем – получение асимптотической оценки длины представления числа n суммой слагаемых вида $2^a 3^b$ с неотрицательными целыми a и b . Для разложения используется «жадный» алгоритм, состоящий в том, что из числа n вычитается наибольшее число вида $2^a 3^b$ с неотрицательными целыми a и b . Затем с полученным числом производится та же процедура и т.д.

В работе [5] установлена следующая асимптотическая оценка.

ТЕОРЕМА 2 [5]. *Продолжительность работы приведенного выше алгоритма равна*

$$O\left(\frac{\log_2 n}{\log_2 \log_2 n}\right), \quad n \rightarrow +\infty.$$

В доказательстве этой теоремы существенно использована теорема Тайдемана [6], в которой основную роль играет оценка линейной формы от логарифмов чисел 2 и 3. В работе [5] отмечено, что оценка для величины постоянной, подразумеваемой в этом асимптотическом соотношении, очень велика и далека от значений, получаемых при практических вычислениях.

Именно за счет использования очень точных оценок линейных форм от логарифмов чисел 2 и 3, установленных Салиховым [1], и удастся получить уточнение приведенных выше оценок.

Именно, в работе [7] доказано, что приведенное в теореме 2 асимптотическое соотношение выполняется при следующих условиях (формулируется несколько упрощенный и укороченный вариант теоремы из [7]).

ТЕОРЕМА 3 [7]. *При любом $C \geq 33/8$ и любом $\varepsilon > 0$ при $n \geq N(C, \varepsilon)$ продолжительность работы приведенного выше алгоритма не превосходит величины*

$$C_0 \frac{\ln n}{\ln \ln n},$$

где можно считать, что $C_0 = 6$.

Перейдем к уточнению оценок теоремы 1.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть A состоит из чисел вида $2^a 3^b$ с неотрицательными целыми a и b . Множество $A_{\pm}$ определяется, как $A \cup (-A)$. Обозначим через $F(k)(F_{\pm}(k))$ – наименьшее натуральное число, которое нельзя представить в виде суммы менее чем k слагаемых из множества $A(A_{\pm})$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует число k_0 такое, что при $k > k_0$ выполняются неравенства*

$$\left(\frac{k}{6}\right)^{k/6} \leq F(k) \leq F_{\pm}(k) \leq (2k)^{(1+\varepsilon)2k}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Постоянная k_0 в этой теореме не является эффективной. Результат с эффективной постоянной k_0 имеет значительно худшую оценку сверху вида $F_{\pm}(k) < \exp((2k)^{C_{\pm}})$. Поскольку объектом исследования являлось получение асимптотически наиболее точной оценки, требование эффективности постоянной опущено. Отметим, что улучшение известного результата достигнуто в оценке снизу величины $F(k)$ за счет того, что была использована теорема Салихова [1] об оценке линейной формы от $\ln 2, \ln 3$. Оценка $F(k) > k^{ck}$, полученная на основе теоремы Тайдемана, имеет значительно меньшую, чем $1/6$, величину (порядка 0.000001).

Перейдем к доказательству теоремы 4. Ввиду теоремы 3 количество слагаемых k в представлении числа n суммой слагаемых вида $2^a 3^b$ с неотрицательными целыми a и b удовлетворяет неравенству $k \geq 6 \ln n / \ln \ln n$, или $k \ln \ln n \geq 6 \ln n$, или $\ln(\ln n)^k \geq 6 \ln n$, откуда

$$(\ln n)^k \leq n^6.$$

Следовательно, используя неравенство $(1/6)k \ln \ln n \leq \ln n$, получаем

$$n \geq (\ln n)^{k/6} \geq \left(\frac{1}{6} k \ln \ln n\right)^{k/6} \geq \left(\frac{1}{6} k\right)^{k/6}.$$

Таким образом, $F(k)$, т.е. наименьшее число, которое нельзя представить в виде суммы менее чем k слагаемых из множества A , удовлетворяет неравенству

$$F(k) \geq \left(\frac{1}{6} k\right)^{k/6}.$$

Первая часть теоремы доказана.

Отметим очевидное неравенство $F(k) \leq F_{\pm}(k)$ (если удалось представить число в виде суммы слагаемых из A , то мы получили представление и в виде суммы слагаемых из $A_{\pm}$).

При получении оценки сверху для величины $F_{\pm}(k)$ мы следуем доказательству теоремы 3 из работы [4]. В нем использована теорема Эвертса о подпространствах [8], которую мы сформулируем в следующем виде.

ЛЕММА [8; следствие 1]. Пусть числа c, d удовлетворяют неравенствам $c > 0, 0 \leq d < 1$. Пусть $S_0 = \{2, 3\}$, и пусть l – натуральное число. Тогда существует лишь конечное число наборов целых чисел $(x_0, x_1, \dots, x_l)$ таких, что $\text{НОД}(x_0, x_1, \dots, x_l) = 1$ и выполняется равенство

$$x_0 + x_1 + \dots + x_l = 0,$$

а для любого собственного непустого подмножества $\{i_0, i_1, \dots, i_s\}$ множества $\{0, 1, \dots, l\}$ имеет место неравенство

$$x_{i_0} + x_{i_1} + \dots + x_{i_s} \neq 0$$

и, кроме того,

$$\prod_{j=0}^l (|x_j| |x_j|_2 |x_j|_3) \leq c \left(\max_{0 \leq j \leq l} |x_j| \right)^d.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Символы $|x_j|_2, |x_j|_3$ обозначают, соответственно, 2-адическое и 3-адическое нормирования целого числа x_j . Напомним, что если p – простое число и целое число x делится в точности на p^k , то $|x|_p = p^{-k}$.

Пусть n – целое число, не делящееся ни на 2, ни на 3, и пусть

$$n = a_1 + a_2 + \dots + a_l, \quad a_1, a_2, \dots, a_l \in A_{\pm}, \quad l \leq k.$$

Можно считать, что l минимальное, так что любая сумма, состоящая не из всех слагаемых $a_1, a_2, \dots, a_l$, не обращается в нуль. По определению множества $A_{\pm}$ $\text{НОД}(a_1, a_2, \dots, a_l) = 1$. Применим лемму с $c = 1, d = 1/2$ к уравнению $a_0 + a_1 + \dots + a_l = 0$, где $a_0 = -n$. Следовательно, для заданного k существует лишь конечное число наборов целых чисел $(n, a_1, a_2, \dots, a_l)$ с условиями, что n – целое число, не делящееся ни на 2, ни на 3, и $l \geq k$ таких, что

$$n = a_1 + a_2 + \dots + a_l, \quad a_1, a_2, \dots, a_l \in A_{\pm}, \quad n \leq \left(\max_{0 \leq j \leq l} |a_j| \right)^{1/2}, \quad n^2 \leq \max_{0 \leq j \leq l} |a_j|.$$

Пусть N_0 обозначает наибольшее из чисел $|n|$ для всех таких наборов (если таких наборов нет, то $N_0 = 0$). Рассмотрим натуральное число $n > N_0$, не делящееся ни на 2, ни на 3. Тогда для любого представления числа n в виде

$$n = a_1 + a_2 + \dots + a_l, \quad a_1, a_2, \dots, a_l \in A_{\pm}, \quad l \leq k,$$

выполняются неравенства

$$|a_j| < n^2, \quad j = 1, \dots, l.$$

Представим $a_j = \pm 2^{s_1} 3^{s_2}$ и получим неравенство $\max\{s_1, s_2\} < 2 \log_2 n$. Количество таких возможных наборов $(a_1, a_2, \dots, a_l)$ для заданного l не превосходит числа $2^l (2 \log_2 n)^{2l}$, а возможных наборов $(a_1, a_2, \dots, a_l)$, $l \leq k$, не больше чем $2 \cdot 2^k (2 \log_2 n)^{2k}$. Тогда при $N > N_0$ существует не более чем $N_0 + 2 \cdot 2^k (2 \log_2 N)^{2k}$ натуральных чисел $n \leq N$, не делящееся ни на 2, ни на 3, имеющих представление в виде суммы не более чем k слагаемых из $A_{\pm}$. Количество натуральных чисел $n \leq N$, не делящееся ни на 2, ни на 3, не меньше, чем $N/3$. Следовательно, для того, чтобы нашлось число $n \leq N$, не имеющее требуемого представления, достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{N}{3} > N_0 + 2 \cdot 2^k (2 \log_2 N)^{2k} = N_0 \cdot 2^{3k+1} (\log_2 N)^{2k},$$

или

$$N > 6N_0 \cdot 2^{3k} (\log_2 N)^{2k}.$$

Следовательно,

$$\log_2 N > 2k \left(\log_2 \log_2 N + \frac{3}{2} + \log_2 6N_0 \right)$$

или

$$2k < \frac{\log_2 N}{\log_2 \log_2 N + C_0}.$$

Пусть $N > (2k)^{(1+\varepsilon)2k}$. Ввиду монотонности функции $\log_2 x / (\log_2 \log_2 x + C_0)$ при больших x при достаточно больших k имеем

$$\frac{\log_2 N}{\log_2 \log_2 N + C_0} > \frac{(1+\varepsilon)2k \log_2 2k}{\log_2 2k + \log_2((1+\varepsilon) \log_2 2k) + C_0} > 2k.$$

Следовательно,

$$F_{\pm}(k) \leq (2k)^{(1+\varepsilon)2k}.$$

Теорема доказана.

Список литературы

- [1] В. Х. Салихов, “О мере иррациональности $\log 3$ ”, *Докл. РАН*, **417**:6 (2007), 753–755.
- [2] M. Jarden, W. Narkiewicz, “On sums of units”, *Monatsh. Math.*, **150**:4 (2007), 327–332.
- [3] M. B. Nathanson, “Geometric group theory and arithmetic diameter”, *Publ. Math. Debrecen*, **79**:3–4 (2011), 563–572.
- [4] L. Hajdu, R. Tijdeman, “Representing integers as linear combinations of power products”, *Arch. Math. (Basel)*, **98**:6 (2012), 527–533.
- [5] V. S. Dimitrov, G. A. Julien, W. C. Miller, “An algorithm for modular exponentiation”, *Inform. Process. Lett.*, **66**:3 (1998), 155–159.
- [6] R. Tijdeman, “On the maximal distance between integers composed of small primes”, *Compositio Math.*, **28** (1974), 159–162.
- [7] В. Г. Чирский, Р. Ф. Шакиров, “О представлении натуральных чисел с использованием нескольких оснований”, *Чебышевский сб.*, **14**:1 (2013), 86–93.
- [8] J.-H. Evertse, “On sums of S -units and linear recurrences”, *Compositio Math.*, **53**:2 (1984), 225–244.

Несколько замечаний к теореме о разложимости Балога–Вули и величинах D^+ , $D^\times$

И. Д. Шкредов

Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук

ilya.shkredov@gmail.com

1. Введение

Пусть $A, B \subset \mathbb{R}$ – конечные множества. Определим *сумму*, *произведение* и *частное* множеств A и B как

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}, \quad AB := \{ab : a \in A, b \in B\}$$

и

$$\frac{A}{B} := \left\{ \frac{a}{b} : a \in A, b \in B, b \neq 0 \right\}$$

соответственно. Гипотеза Эрдеша–Семереди [1] гласит, что для любого $\epsilon > 0$ выполнено

$$\max\{|A + A|, |AA|\} \gg |A|^{2-\epsilon}.$$

Грубо говоря, утверждается, что произвольное множество действительных (или целых) чисел не может одновременно иметь хорошую аддитивную и мультипликативную структуру. Современные оценки по данной гипотезе содержатся в [2]–[4].

Определим через

$$E^+(A, B) := |\{(a, a', b, b') \in A^2 \times B^2 : a + b = a' + b'\}|$$

и

$$E^\times(A, B) := |\{(a, a', b, b') \in A^2 \times B^2 : ab = a'b'\}|$$

аддитивную и мультипликативную общую энергию множеств A и B , соответственно. Числа $E^+(A, A)$, $E^\times(A, A)$ суть иные показатели для измерения аддитивной и мультипликативной структуры множества, нежели мощность множества сумм или произведений.

В [5] была доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ – конечное множество и $\delta = 2/33$. Тогда найдутся два непересекающиеся множества B и C такие, что $A = B \sqcup C$ и

$$\max\{E^+(B, B), E^\times(C, C)\} \ll |A|^{3-\delta} (\log |A|)^{1-\delta}, \quad (1.1)$$

а также

$$\max\{E^+(B, C), E^\times(B, C)\} \ll |A|^{3-\delta/2} (\log |A|)^{(1-\delta)/2}. \quad (1.2)$$

Здесь и ниже мы полагаем, что $|A| \geq 2$. Все логарифмы берутся по основанию 2. Знаки $\ll$ и $\gg$ суть обычные символы Виноградова, а именно $a \ll b$ тогда и только тогда, когда

$a = O(b)$. Будем писать $a \lesssim b$ или $b \gtrsim a$, когда $a = O(b \cdot \log^c |A|)$, $c > 0$. Если $a \lesssim b$ и $b \lesssim a$, то мы используем обозначение $a \sim b$.

Результаты, подобные теореме 1, достаточно полезны (см., например, работу [6]) и, по мнению автора, найдут в будущем и другие приложения. Также в [5] было доказано, что число δ нельзя взять большим, чем $2/3$.

В работе [4] был использован иной метод, который позволил получить такой результат.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ – конечное множество и $\delta = 1/5$. Тогда найдутся два непересекающихся множества B и C такие, что $A = B \sqcup C$ и

$$\max\{E^+(B, B), E^\times(C, C)\} \lesssim |A|^{3-\delta}.$$

На самом деле имеет место еще более сильное утверждение. Будем писать

$$E_3^+(A) = |\{(a_1, a'_1, a_2, a'_2, a_3, a'_3) \in A^6 : a_1 - a'_1 = a_2 - a'_2 = a_3 - a'_3\}|$$

и, аналогично, $E_3^\times(A)$. Используя тот факт, что величины $(E_3^+(f))^{1/6}, (E_3^\times(f))^{1/6}$ являются нормами вещественнозначной функции f (см. более точную формулировку в разделе 4), мы получаем

ТЕОРЕМА 3. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ – конечное множество и $\delta_1 = 2/5$. Тогда найдутся два непересекающихся множества B и C такие, что $A = B \sqcup C$ и

$$\max\{E_3^+(B), E_3^\times(C)\} \lesssim |A|^{4-\delta_1}, \quad (1.3)$$

Кроме того, неравенство (1.3) не может выполняться с $\delta_1 > 3/4$.

Применяя неравенство Гёльдера

$$(E^+(A, A))^2 \leq E_3^+(A)|A|^2, \quad (E^\times(A, A))^2 \leq E_3^\times(A)|A|^2,$$

легко видеть, что теорема 3 влечет теорему 2.

Оказывается, что наше доказательство позволяет сказать о множествах B, C гораздо больше, чем это содержится в теореме 3. Мы рассматриваем две величины $D^+, D^\times$ (см. определения в разделе 3) и доказываем самый сильный результат о разложимости.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ – конечное множество и $\delta_2 = 2/5$. Тогда найдутся два непересекающихся множества B и C такие, что $A = B \sqcup C$ и

$$\max\{D^+(B), D^\times(C)\} \lesssim |A|^{1-\delta_2}. \quad (1.4)$$

Кроме того, неравенство (1.4) не может выполняться с $\delta_2 > 3/4$.

Легко проверить, что теорема 4 влечет обе теоремы 2, 3 (см. обсуждение в разделе 5). Величины $D^+, D^\times$ играют важную роль в аддитивной комбинаторике (см., например, [3], [4], [7]). Отметим, что именно изучение этих характеристик множеств позволило усилить знаменитый $4/3$ результат Шоймоши (см. [2]).

Также в разделе 5 мы получаем несколько других форм теоремы Балога–Вули, изучаем величины $D^+(A), D^\times(A)$ и находим ряд новых приложений к вопросам теории сумм произведений (см., например, теорему 23 ниже).

Автор планирует получить аналогичные результаты в своей будущей статье и для поля $\mathbb{F}_p$.

2. Обозначения

Пусть $\mathbf{G}$ – абелева группа с групповой операцией $+$. Если группа $\mathbf{G}$ конечна, то обозначим через N мощность $\mathbf{G}$. Хорошо известно [8], что в этом случае двойственная группа $\widehat{\mathbf{G}}$ изоморфна группе $\mathbf{G}$. Пусть f – произвольная функция из $\mathbf{G}$ в $\mathbb{C}$. Преобразование Фурье функции f обозначается $\widehat{f}$ и определяется формулой

$$\widehat{f}(\xi) = \sum_{x \in \mathbf{G}} f(x) e(-\xi \cdot x), \quad (2.1)$$

где $e(x) = e^{2\pi i x}$, а ξ – любой гомоморфизм из $\widehat{\mathbf{G}}$ в $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $\xi: x \rightarrow \xi \cdot x$. Мы будем использовать несколько основных формул

$$\sum_{x \in \mathbf{G}} |f(x)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{\xi \in \widehat{\mathbf{G}}} |\widehat{f}(\xi)|^2, \quad (2.2)$$

$$\sum_{y \in \mathbf{G}} \left| \sum_{x \in \mathbf{G}} f(x) g(y - x) \right|^2 = \frac{1}{N} \sum_{\xi \in \widehat{\mathbf{G}}} |\widehat{f}(\xi)|^2 |\widehat{g}(\xi)|^2 \quad (2.3)$$

и

$$f(x) = \frac{1}{N} \sum_{\xi \in \widehat{\mathbf{G}}} \widehat{f}(\xi) e(\xi \cdot x). \quad (2.4)$$

Если

$$(f * g)(x) := \sum_{y \in \mathbf{G}} f(y) g(x - y) \quad \text{и} \quad (f \circ g)(x) := \sum_{y \in \mathbf{G}} f(y) g(y + x), \quad (2.5)$$

то

$$\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g} \quad \text{и} \quad \widehat{f \circ g} = \widehat{f}^c \widehat{g} = \overline{\widehat{f}} \widehat{g}, \quad (2.6)$$

где для функции $f: \mathbf{G} \rightarrow \mathbb{C}$ мы положили $f^c(x) := f(-x)$. Очевидно, что $(f * g)(x) = (g * f)(x)$ и $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(-x)$, $x \in \mathbf{G}$; k -я свертка, $k \in \mathbb{N}$, обозначается как $*_k$ и задается индуктивным образом $*_k := (*_{k-1})$.

Если $S \subseteq \mathbf{G}$ – некоторое множество, то будем писать $S(x)$ для его характеристической функции $S: \mathbf{G} \rightarrow \{0, 1\}$. Через $|S|$ обозначим мощность S . Для натурального n пишем $[n] = \{1, \dots, n\}$.

Число $E^+(A, B)$ называется *совместной аддитивной энергией* двух множеств $A, B \subseteq \mathbf{G}$ (см., например, [9]) и равно

$$E^+(A, B) = |\{(a_1, a_2, b_1, b_2) \in A^2 \times B^2 : a_1 + b_1 = a_2 + b_2\}|.$$

Если $A = B$, то вместо $E^+(A, A)$ мы пишем для краткости $E^+(A)$. Очевидно, что

$$E^+(A, B) = \sum_x (A * B)(x)^2 = \sum_x (A \circ B)(x)^2 = \sum_x (A \circ A)(x) (B \circ B)(x).$$

Отметим также простую оценку

$$E^+(A, B) \leq \min\{|A|^2|B|, |B|^2|A|, |A|^{3/2}|B|^{3/2}\}. \quad (2.7)$$

Далее, по неравенству Коши–Буняковского

$$E^+(A, B) \geq \frac{|A|^2|B|^2}{|A \pm B|}. \quad (2.8)$$

Если мы рассматриваем группу $\mathbf{G} = (\mathbf{G}, \times)$, то тогда мы пишем $E^\times(A, B)$ вместо $E^+(A, B)$. Таким образом,

$$E^\times(A, B) = |\{(a_1, a_2, b_1, b_2) \in A^2 \times B^2 : a_1 b_1 = a_2 b_2\}|.$$

Последняя величина называется *совместной мультипликативной энергией* двух множеств $A, B \subseteq \mathbf{G} = (\mathbf{G}, +)$. Очевидным образом, мультипликативная энергия $E^\times(A, B)$ может быть выражена через мультипликативные свертки, аналогичные задаваемым формулой (2.5). Пусть также

$$\sigma_k(A) := (A *_k A)(0) = |\{(a_1, \dots, a_k) \in A^k : a_1 + \dots + a_k = 0\}|.$$

Более общо, положим

$$E_k(A) = \sum_{x \in \mathbf{G}} (A \circ A)(x)^k = \sum_{x \in \mathbf{G}} |A_x|^k = |\{(a_1, a'_1, \dots, a_k, a'_k) \in A^k : a_1 - a'_1 = \dots = a_k - a'_k\}| \quad (2.9)$$

и

$$E_k(A, B) = \sum_{x \in \mathbf{G}} (A \circ B)^k(x) = |\{(a_1, \dots, a_k) \in A^k, (b_1, \dots, b_k) \in B^k : a_1 - b_1 = \dots = a_k - b_k\}|. \quad (2.10)$$

Величины выше суть *старшие энергии* множеств A и B (см. [10]). Здесь $A_x = A \cap (A - x)$, $x \in A - A$. Подобным образом, мы пишем $E_k(f, g) = \sum_x (\bar{f} \circ g)^k(x)$ для любых двух комплексных функций f, g и даже более общо, рассматриваем

$$E_k(f_1, \dots, f_k) = \sum_x (\bar{f}_1 \circ f_1)(x) \cdots (\bar{f}_k \circ f_k)(x).$$

Существует простая связь между энергиями E_k и E_2 . В самом деле,

$$E_{k+1}(A) = E(\Delta_k(A), A^k), \quad (2.11)$$

где

$$\Delta(A) = \Delta_k(A) := \{(a, a, \dots, a) \in A^k\}.$$

Равенство (2.11) позволяет нам использовать нижнюю оценку (2.8) для оценки старших энергий E_k^+ , $E_k^\times$. В частности,

$$|A|^6 \leq E_3^+(A) |A^2 \pm \Delta(A)| \quad (2.12)$$

и аналогичным образом для $E_3^\times$.

Величины $E_k(A, B)$ могут быть записаны в терминах старших свертков. Пусть $f_1, \dots, f_{k+1} : \mathbf{G} \rightarrow \mathbb{C}$ – произвольные функции, и пусть $F = (f_1, \dots, f_{k+1}) : \mathbf{G} \rightarrow \mathbb{C}^{k+1}$. Обозначим через

$$\mathcal{C}_{k+1}(F)(x) = \mathcal{C}_{k+1}(f_1, \dots, f_{k+1})(x_1, \dots, x_k)$$

функцию

$$\mathcal{C}_{k+1}(F)(x) = \mathcal{C}_{k+1}(f_1, \dots, f_{k+1})(x_1, \dots, x_k) = \sum_z f_1(z) f_2(z + x_1) \cdots f_{k+1}(z + x_k).$$

Таким образом,

$$\mathcal{C}_2(f_1, f_2)(x) = (f_1 \circ f_2)(x).$$

Если $f_1 = \dots = f_{k+1} = f$, то мы пишем $\mathcal{C}_{k+1}(f)(x_1, \dots, x_k)$ для $\mathcal{C}_{k+1}(f, \dots, f)(x_1, \dots, x_k)$.

По лемме 5 ниже имеем

$$E_{k+1}(A, B) = \sum_{x_1, \dots, x_k} \mathcal{C}_{k+1}(A)(x_1, \dots, x_k) \mathcal{C}_{k+1}(B)(x_1, \dots, x_k).$$

3. Предварительные результаты

Мы начнем с леммы из [11] о “коммутативности” обобщенных сверток.

ЛЕММА 5. Для произвольных функций $f_i, g_j: \mathbf{G} \rightarrow \mathbb{C}$ выполнено

$$\begin{aligned} \sum_{x_1, \dots, x_{l-1}} C_l(f_0, \dots, f_{l-1})(x_1, \dots, x_{l-1}) C_l(g_0, \dots, g_{l-1})(x_1, \dots, x_{l-1}) \\ = \sum_z (f_0 \circ g_0)(z) \cdots (f_{l-1} \circ g_{l-1})(z) \quad (\text{скалярное произведение}), \end{aligned} \quad (3.1)$$

более того,

$$\begin{aligned} \sum_{x_1, \dots, x_{l-1}} C_l(f_0)(x_1, \dots, x_{l-1}) \cdots C_l(f_{k-1})(x_1, \dots, x_{l-1}) \\ = \sum_{y_1, \dots, y_{k-1}} C_k^l(f_0, \dots, f_{k-1})(y_1, \dots, y_{k-1}) \quad (\text{мультискалярное произведение}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

и

$$\begin{aligned} \sum_{x_1, \dots, x_{l-1}} C_l(f_0)(x_1, \dots, x_{l-1}) (C_l(f_1) \circ \cdots \circ C_l(f_{k-1}))(x_1, \dots, x_{l-1}) \\ = \sum_z (f_0 \circ \cdots \circ f_{k-1})^l(z) \quad (\sigma_k \text{ для } C_l). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Следующая лемма показывает, что “старшие суммы” могут быть выражены в терминах обычных сумм (см., например, [10]).

ЛЕММА 6. Пусть $A \subseteq \mathbf{G}$ – произвольное множество. Тогда

$$|A^2 \pm \Delta(A)| = \sum_{x \in A-A} |A \pm A_x|. \quad (3.4)$$

Основные величины, которые изучаются в настоящей статье – это $D^+(A)$, $D^\times(A)$. Напомним их определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Конечное множество $A \subset \mathbb{R}$ имеет *аддитивный Семереди–Троттеровский тип* (кратко СТ-тип) с параметром $D^+ = D^+(A) > 0$, если неравенство

$$|\{s \in A - B \mid |A \cap (B + s)| \geq \tau\}| \leq \frac{D^+ |A| |B|^2}{\tau^3} \quad (3.5)$$

справедливо для любого конечного множества $B \subset \mathbb{R}$ и произвольного действительного числа $\tau \geq 1$.

Величину $D(A)$ можно понимать как инфимум чисел D , для которых неравенство (3.5) имеет место для любых множеств B и чисел $\tau \geq 1$. Разумеется, определение 7 наиболее эффективно только для множеств A с малым значением $D^+(A)$. Легко видеть, что $D^+(A) \leq |A|$, таким образом, мощность A может рассматриваться как тривиальная верхняя оценка для величины $D^+(A)$. Заметим также, что $D^+(A) \geq 1$ (нужно просто взять в качестве B любое одноэлементное множество, что даст $\tau = 1$ в формуле (3.5)).

Любое множество СТ-типа обладает тем свойством, что у него можно оценить число решений для широкого класса линейных уравнений (см., например, следствие 8 из [3]), где, тем не менее, использовалась другая величина $D(A)$, и леммы 7, 8 из [7].

ЛЕММА 8. Пусть $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}$ – произвольные конечные множества. Тогда

$$E^+(A_1, A_2) \ll (D^+(A_1))^{1/2} |A_1| |A_2|^{3/2}$$

и

$$E_3^+(A_1, A_2) \ll D^+(A_1) |A_1| |A_2|^2 \cdot \log(\min\{|A_1|, |A_2|\}).$$

Подобным образом рассмотрим “двойственную” характеристику множества действительных чисел.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Конечное множество $A \subset \mathbb{R}$ имеет мультипликативный Семерди–Троттеровский тип с параметром $D^\times = D^\times(A) > 0$, если неравенство

$$|\{s \in A/B \mid |A \cap sB| \geq \tau\}| \leq \frac{D^\times |A| |B|^2}{\tau^3} \quad (3.6)$$

справедливо для любого конечного множества $B \subset \mathbb{R}$ и произвольного действительного числа $\tau \geq 1$.

Конечно справедлив и мультипликативный аналог леммы 8.

ЛЕММА 10. Пусть $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}$ – произвольные конечные множества. Тогда

$$E^\times(A_1, A_2) \ll (D^\times(A_1))^{1/2} |A_1| |A_2|^{3/2},$$

и

$$E_3^\times(A_1, A_2) \ll D^\times(A_1) |A_1| |A_2|^2 \cdot \log(\min\{|A_1|, |A_2|\}).$$

4. Нормы E_k

Для произвольной функции $f: \mathbf{G} \rightarrow \mathbb{C}$ и любого целого $k \geq 1$ положим

$$\|f\|_{E_k} := (E_k(f))^{1/2k} = \left(\sum_x (\bar{f} \circ f)(x)^k \right)^{1/2k}. \quad (4.1)$$

По формуле (2.6) получаем

$$\|f\|_{E_k}^{2k} = N^{-(k-1)} \sum_{x_1 + \dots + x_k = 0} |\hat{f}(x_1)|^2 \dots |\hat{f}(x_k)|^2, \quad (4.2)$$

и, значит, выражение выше неотрицательно. Другой взгляд на величину $\|f\|_{E_k}$ дает нам формула (3.1) леммы 5, по которой мы имеем

$$\|f\|_{E_k}^{2k} = \sum_{x_1, \dots, x_{k-1}} |\mathcal{C}_k(f)(x_1, \dots, x_{k-1})|^2. \quad (4.3)$$

Заметим, что существуют ненулевые функции f с $\|f\|_{E_k} = 0$. Пусть, например, $\mathbf{G} = \mathbb{F}_p$, p – простое число, $k < p$ и $f(x) = e^{2\pi i x/p}$. Если мы ограничимся только рассмотрением вещественных функций, то все равно возможно найти ненулевые функции f , для которых $\|f\|_{E_k} = 0$.

ПРИМЕР 11. Пусть $\mathbf{G} = \mathbb{F}_2^n$ и $f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = (-1)^{x_1 + \dots + x_n}$. Тогда $\hat{f}(r) = 0$ для всех $r \neq (1, \dots, 1)$. Таким образом, по формуле (4.2) мы имеем $\|f\|_{E_k} = 0$ для всех нечетных k .

Если $k \geq 2$ четное, то последняя ситуация уже невозможна.

ЛЕММА 12. Пусть $f: \mathbf{G} \rightarrow \mathbb{R}$ – произвольная функция и $k \geq 2$ – четное число. Тогда $\|f\|_{E_k} = 0$ тогда и только тогда, когда $f \equiv 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы приведем даже три доказательства. Первое из них использует анализ Фурье, а два другие – нет. Применяя формулу (4.2), мы видим, что

$$|\widehat{f}(x_1)|^2 \cdots |\widehat{f}(x_k)|^2 = 0 \quad (4.4)$$

для всех $x_1, \dots, x_k \in \mathbf{G}$ таких, что $x_1 + \cdots + x_k = 0$. По нашему предположению функция f вещественная, таким образом $\widehat{f}(-x) = \overline{\widehat{f}(x)}$. Используя этот факт и подставляя переменные

$$x_1 = x, \quad x_2 = -x, \quad x_3 = x, \quad x_4 = -x, \quad \dots, \quad x_{k-1} = x, \quad x_k = x$$

в формулу (4.4), мы получаем $|\widehat{f}(x)|^{2k} = 0$ для всех x и, значит, $f \equiv 0$.

В нашем втором доказательстве мы используем тождество (4.3) и замечаем, что

$$C_k(f)(x_1, \dots, x_{k-1}) = \sum_z f(z)f(z+x_1) \cdots f(z+x_{k-1}) = 0$$

для всех $x_1, \dots, x_{k-1} \in \mathbf{G}$. Полагая $x_1 = \cdots = x_{k-1} = 0$ на основе предположения о том, что k четное, а также о том, что функция f вещественная, мы получаем $\sum_z f^k(x) = \sum_z |f(z)|^k = 0$, откуда вытекает, что $f \equiv 0$.

Наконец, используя условия доказываемой леммы, из определения (4.1) легко видеть, что $\|f\|_{E_k} \geq \|f\|_2$ (надо просто подставить $x = 0$ в (4.1)). Лемма доказана.

ЛЕММА 13. Для любого $k \geq 1$ и произвольных функций $f_1, f'_1, \dots, f_k, f'_k: \mathbf{G} \rightarrow \mathbb{C}$ имеем

$$\left| \sum_x (f_1 \circ f'_1)(x) \cdots (f_k \circ f'_k)(x) \right| \leq \prod_{j=1}^k \|f_j\|_{E_k} \|f'_j\|_{E_k}. \quad (4.5)$$

Если $k \geq 2$ четное и все функции выше вещественные, то можно убрать модули из формулы (4.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По формуле (3.1) леммы 5, имеем

$$\begin{aligned} \sigma &:= \sum_x (f_1 \circ f'_1)(x) \cdots (f_k \circ f'_k)(x) \\ &= \sum_{x_1, \dots, x_k} C_{k+1}(f_1, \dots, f_k)(x_1, \dots, x_k) C_{k+1}(f'_1, \dots, f'_k)(x_1, \dots, x_k). \end{aligned}$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского и формулу (3.1) леммы 5 еще раз, получаем

$$\begin{aligned} |\sigma|^2 &\leq \sum_{x_1, \dots, x_k} |C_{k+1}(f_1, \dots, f_k)(x_1, \dots, x_k)|^2 \cdot \sum_{x_1, \dots, x_k} |C_{k+1}(f'_1, \dots, f'_k)(x_1, \dots, x_k)|^2 \\ &= \sum_x (\overline{f_1} \circ f_1)(x) \cdots (\overline{f_k} \circ f_k)(x) \cdot \sum_x (\overline{f'_1} \circ f'_1)(x) \cdots (\overline{f'_k} \circ f'_k)(x). \end{aligned}$$

По неравенству Гёльдера достаточно доказать, что для любой функции $f: \mathbf{G} \rightarrow \mathbb{C}$ выполнено

$$|\sigma| = \sum_x |(\overline{f} \circ f)(x)|^k \leq \sum_x (|f| \circ |f|)(x)^k = \| |f| \|_{E_k}^{2k}.$$

Если k четное и f – действительная функция, то мы должны проверить, что

$$\sigma = \sum_x (f \circ f)(x)^k = \|f\|_{E_k}^{2k},$$

но это просто определение нормы E_k . Лемма доказана.

ПРИМЕР 14. Пусть $\mathbf{G} = \mathbb{F}_2^n$,

$$f_1(x) = f_{\vec{\lambda}'}(x) = f_1(x_1, \dots, x_n) = (-1)^{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n}, \quad \vec{\lambda}' = (\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

и, аналогично, $f_2(x) = f_{\vec{\lambda}''}(x)$, $f_3(x) = f_{\vec{\lambda}''' }(x)$. Возьмем три ненулевые вектора $\vec{\lambda}'$, $\vec{\lambda}''$, $\vec{\lambda}'''$ такие, что $\vec{\lambda}' + \vec{\lambda}'' + \vec{\lambda}''' = 0$. Тогда простые вычисления дают нам

$$\sum_x (f_1 \circ f_1)(x)(f_2 \circ f_2)(x)(f_3 \circ f_3)(x) = 2^{4n},$$

но, с другой стороны, для всех $j = 1, 2, 3$ имеем $\sum_x (f_j \circ f_j)^3(x) = 0$. Таким образом, (4.5) не выполнена без $|\cdot|$ в случае нечетного k и вещественных функций f_j .

Нам понадобится комбинаторная лемма. Пусть l – положительное целое, и пусть $\Omega_l = \{0, 1\}^l$. Для любого $\varepsilon \in \Omega_l$ пусть $\text{wt}(\varepsilon)$ равно числу единиц в ε . Наконец, если $k_1, \dots, k_s$ – произвольные целые неотрицательные такие, что $k_1 + \dots + k_s = k$, то будем писать $\binom{k}{k_1, \dots, k_s}$ для $k!/(k_1! \dots k_s!)$.

ЛЕММА 15. Пусть n, k, l – положительные числа, $n \leq lk$. Тогда

$$\sum_{\varepsilon \in \Omega_l} n_\varepsilon = k, \quad \sum_{\varepsilon \in \Omega_l} \text{wt}(\varepsilon) n_\varepsilon = n \quad \frac{k!}{\prod_{\varepsilon \in \Omega_l} n_\varepsilon!} = \frac{(lk)!}{n! (lk - n)!}. \quad (4.6)$$

В частности,

$$\sum_{n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = k, \quad 2n_1 + n_2 + n_3 = n} \frac{k!}{n_1! n_2! n_3! n_4!} = \frac{(2k)!}{n! (2k - n)!}. \quad (4.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_n \binom{lk}{n} x^n &= (1+x)^{lk} = \left(\sum_{i=0}^l \binom{l}{i} x^i \right)^k \\ &= \sum_{m_0 + m_1 + \dots + m_l = k} x^{\sum_{j=1}^l j m_j} \binom{k}{m_0, m_1, \dots, m_l} \prod_{r=0}^l \binom{l}{r}^{m_r}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \binom{lk}{n} &= \sum_{m_0 + m_1 + \dots + m_l = k, \quad \sum_{j=1}^l j m_j = n} \binom{k}{m_0, m_1, \dots, m_l} \prod_{r=0}^l \binom{l}{r}^{m_r} \\ &= \sum_{m_0 + m_1 + \dots + m_l = k, \quad \sum_{j=1}^l j m_j = n} \binom{k}{m_0, m_1, \dots, m_l} \prod_{r=0}^l \sum_{s_1 + \dots + s_{\binom{l}{r}} = m_r} \binom{m_r}{s_1, \dots, s_{\binom{l}{r}}}. \end{aligned}$$

Зафиксируем $r \in 0, \dots, l$ и обозначим $s_{\binom{l}{r}}$ переменных $s_{\binom{l}{r}}$ через n_ε , где $\varepsilon \in \Omega_l$ выбираются так, что $\text{wt}(\varepsilon) = r$. Таким образом, мы переобозначили все 2^l переменных $s_{\binom{l}{r}}$, $r = 0, \dots, l$, переменными n_ε , $\varepsilon \in \Omega_l$. Заметим, что $\sum_{\varepsilon \in \Omega_l} n_\varepsilon = m_0 + m_1 + \dots + m_l = k$. Далее, из нашего способа перенумеровки n_ε мы имеем $\sum_{\varepsilon \in \Omega_l} \text{wt}(\varepsilon) n_\varepsilon = \sum_{j=1}^l j m_j = n$. Таким образом, получаем

$$\binom{lk}{n} = \sum_{\varepsilon \in \Omega_l} n_\varepsilon = k, \quad \sum_{\varepsilon \in \Omega_l} \text{wt}(\varepsilon) n_\varepsilon = n \quad \frac{k!}{\prod_{\varepsilon \in \Omega_l} n_\varepsilon!},$$

что и требовалось.

Используя леммы выше, мы готовы доказать основной результат этого раздела.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 16. Пусть $k \geq 2$ – целое число. Тогда для любой пары функций $f, g: \mathbf{G} \rightarrow \mathbb{C}$ выполнено

$$\|f + g\|_{E_k} \leq \|f\|_{E_k} + \|g\|_{E_k}.$$

Если мы рассматриваем только вещественные функции и если число k четное, то $\|\cdot\|_{E_k}$ задает норму.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} \sigma &:= \|f + g\|_{E_k}^{2k} = \sum_x ((\bar{f} \circ f)(x) + (\bar{f} \circ g)(x) + (\bar{g} \circ f)(x) + (\bar{g} \circ g)(x))^k \\ &= \sum_{n_1+n_2+n_3+n_4=k} \binom{k}{n_1, n_2, n_3, n_4} \sum_x (\bar{f} \circ f)^{n_1}(x) (\bar{f} \circ g)^{n_2}(x) (\bar{g} \circ f)^{n_3}(x) (\bar{g} \circ g)^{n_4}(x). \end{aligned}$$

Применяя лемму 13, а также лемму 15 в случае $l = 2$, получаем

$$\begin{aligned} \sigma &\leq \sum_{n_1+n_2+n_3+n_4=k} \binom{k}{n_1, n_2, n_3, n_4} \|f\|_{E_k}^{2n_1+n_2+n_3} \|g\|_{E_k}^{n_2+n_3+2n_4} \\ &= \sum_{n+m=2k} \frac{(2k)!}{n!m!} \|f\|_{E_k}^n \|g\|_{E_k}^m = (\|f\|_{E_k} + \|g\|_{E_k})^{2k}, \end{aligned}$$

как и требовалось.

Если f, g – вещественные функции и число k четное, то, используя вторую часть леммы 13, получаем $\|f + g\|_{E_k} \leq \|f\|_{E_k} + \|g\|_{E_k}$. Кроме того, лемма 12 говорит нам, что в этом случае $\|f\|_{E_k} = 0$ тогда и только тогда, когда $f \equiv 0$. Предложение доказано.

5. Доказательство теоремы 4

В следующих двух разделах будут доказаны теоремы 3, 4. Мы начнем с более сильной теоремы 4, а затем воспользуемся аналогичными аргументами, соединенными с результатами раздела 4, и докажем теорему 3.

Прежде всего выразим величины $D^+(A)$, $D^\times(A)$ в терминах энергий $E_3^+(A, B)$, $E_3^\times(A, B)$. Достаточно рассмотреть случай $D^+(A)$, поскольку второй вариант аналогичен. Для конечно-го множества $A \subset \mathbb{R}$ положим

$$q^+(A) := \max_{B \neq \emptyset} \frac{E_3^+(A, B)}{|A||B|^2}. \quad (5.1)$$

Легко видеть, что максимум в (5.1) достигается. В самом деле, используя сдвиг, мы можем считать, что $0 \in B$; далее, размер B ограничен в терминах $|A|$, и лемма 5 дает нам

$$E_3^+(A, B) = \sum_{(x,y) \in A^2 - \Delta(A)} C_3(B)(x, y) C_3(A)(x, y). \quad (5.2)$$

Следовательно, мы видим по индукции, что $B \subseteq k(A - A)$, где k ограничено в терминах $|A|$. Таким образом, максимум в (5.1) действительно достигается.

Приведем несколько простых оценок для величины $q^+(A)$. Ввиду (2.7), (2.9) мы, очевидно, имеем

$$1 \leq \frac{E_3^+(A)}{|A|^3} \leq q^+(A) \leq |A|. \quad (5.3)$$

Более того, по формулам (2.7), (5.2) и неравенству Коши–Буняковского получаем

$$q^+(A) \leq \frac{(\mathbb{E}_3^+(A))^{1/2}}{|A|} \leq |A|. \quad (5.4)$$

Теперь мы готовы показать, что величины $D^+(A)$ и $q^+(A)$ пропорциональны с точностью до логарифмов.

ЛЕММА 17. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ – конечное множество. Тогда

$$q^+(A) \lesssim D^+(A) \leq q^+(A). \quad (5.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нижняя оценка в (5.5) немедленно вытекает из леммы 8. Предположим теперь, что для некоторого $B \subset \mathbb{R}$ и $\tau \geq 1$ выполнено $D^+(A)|A||B|^2 = \tau^3|S_\tau(A, B)|$, где

$$S_\tau(A, B) := \{s \in A - B : |A \cap (B + s)| \geq \tau\}.$$

Тогда

$$\mathbb{E}_3^+(A, B) = \sum_s (A \circ B)^3(s) \geq \sum_{s \in S_\tau(A, B)} (A \circ B)^3(s) \geq \tau^3|S_\tau(A, B)| = |A||B|^2 D^+(A).$$

Из последней формулы вытекает, что $q^+(A) \geq D^+(A)$. Лемма доказана.

Лемма выше, соединенная с леммами 8, 10 и неравенством (5.4), влечет, что между соответствующими величинами $D^+(A)$, $D^\times(A)$ и $\mathbb{E}_3^+(A)$, $\mathbb{E}_3^\times(A)$ имеется тесная связь.

СЛЕДСТВИЕ 18. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ – конечное множество. Тогда

$$|A|^2(D^+(A))^2 \leq \mathbb{E}_3^+(A) \lesssim D^+(A)|A|^3.$$

То же самое справедливо для $D^\times(A)$.

Теперь мы отметим, что, величины D^+ , $D^\times$ обладают некоторым свойством “субаддитивности”. На самом деле наши результаты справедливы для любых абелевых групп $\mathbf{G}$.

ЛЕММА 19. Пусть $A_1, \dots, A_k \subset \mathbb{R}$ – конечные множества. Тогда

$$D(A_1 \cup \dots \cup A_k) \lesssim k^3 \cdot \frac{1}{|A|} \sum_{j=1}^k D(A_j)|A_j|,$$

где $D = D^+$ или $D^\times$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай величины $D^\times$; ситуация с D^+ аналогичная. Мы приведем даже два доказательства. Положим $A = A_1 \cup \dots \cup A_k$. Рассмотрим произвольное множество $G \subset \mathbb{R}$ и действительное число $\tau \geq 1$. Мы должны оценить сверху размер множества

$$S_\tau = S_\tau(A, G) := \{s \in A/G : |A \cap sG| \geq \tau\}.$$

Для любого $s \in S_\tau$ имеем

$$\tau \leq |A \cap sG| \leq \sum_{j=1}^k |A_j \cap sG| \lesssim \sum_{j \in \Omega_\Delta(s)} |A_j \cap sG| \leq 2\Delta(s)|\Omega_\Delta(s)|, \quad (5.6)$$

где через $\Delta(s)$ мы обозначили некоторое число вида 2^j , $j \geq 0$, для которого

$$\Omega_\Delta(s) = \{j : \Delta(s) < |A_j \cap sG| \leq 2\Delta(s)\} \subseteq [k]$$

и $\tau k^{-1} \lesssim \Delta(s)$. Существование числа $\Delta(s)$ и множества $\Omega_\Delta(s)$ вытекает из принципа Дирихле. Используя принцип Дирихле еще раз, мы находим множество $S'_\tau \subseteq S_\tau$ такое, что $|S'_\tau| \gtrsim |S_\tau|$, и, далее, число Δ со свойством

$$\Omega_\Delta(s) = \{j : \Delta < |A_j \cap sG| \leq 2\Delta\} \subseteq [k]$$

и

$$\tau k^{-1} \lesssim \Delta \quad (5.7)$$

и такое, что для любого $s \in S'_\tau$ справедлив аналог (5.6), а именно

$$\tau \leq |A \cap sG| \lesssim \Delta |\Omega_\Delta(s)|.$$

По нашему построению имеем $S'_\tau \subseteq \bigcup_{j=1}^k S_\Delta(A_j, G)$. Ввиду (5.7) получаем

$$\begin{aligned} |S_\tau| &\lesssim |S'_\tau| \leq \sum_{j=1}^k |S_\Delta(A_j, G)| \leq \frac{|G|^2}{\Delta^3} \sum_{j=1}^k D(A_j) |A_j| \lesssim \frac{|G|^2 k^3}{\tau^3} \sum_{j=1}^k D(A_j) |A_j| \\ &= \frac{|G|^2 |A| k^3}{\tau^3} \cdot \frac{1}{|A|} \sum_{j=1}^k D(A_j) |A_j|. \end{aligned}$$

По определению это означает, что

$$D(A) \lesssim \frac{k^3}{|A|} \sum_{j=1}^k D(A_j) |A_j|.$$

Теперь мы приведем другое доказательство, которое будет использовать величину q . Прменяя неравенство Гёльдера и леммы 8, 10, имеем

$$\begin{aligned} E_3\left(\bigcup_{i=1}^k A_i, B\right) &\leq \sum_x \left(\sum_{i=1}^k A_i \circ B\right)^3(x) = \sum_x \left(\sum_{i=1}^k (A_i \circ B)(x)\right)^3 \\ &= \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^k \sum_x (A_{i_1} \circ B)(x) (A_{i_2} \circ B)(x) (A_{i_3} \circ B)(x) \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^k \left(\sum_x (A_i \circ B)^3(x)\right)^{1/3}\right)^3 \\ &\leq k^3 \sum_{i=1}^k \sum_x (A_i \circ B)^3(x) \lesssim k^3 |A| |B|^2 \cdot \frac{1}{|A|} \sum_{j=1}^k D(A_j) |A_j|. \end{aligned}$$

Таким образом, по лемме 17 получаем $D(A) \leq q(A) \lesssim \frac{k^3}{|A|} \sum_{j=1}^k D(A_j) |A_j|$, где q равно q^+ или $q^\times$ соответственно. Лемма доказана.

В [4] мы рассматривали две другие характеристики множеств A . Положим

$$\text{Sym}_t^\times(Q, R) = \{x : |Q \cap xR^{-1}| \geq t\}$$

и

$$d^+(A) = \min_{t>0} \min_{\emptyset \neq Q, R \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}} \frac{|Q|^2 |R|^2}{|A| t^3}, \quad (5.8)$$

где второй минимум в (5.8) берется по произвольным Q, R таким, что $A \subseteq \text{Sym}_t^\times(Q, R)$ и $\max\{|Q|, |R|\} \geq |A|$.

Подобным образом для произвольных множеств Q, R и действительного числа $t > 0$ положим

$$\text{Sym}_t^+(Q, R) := \{x : |Q \cap (x - R)| \geq t\}$$

и рассмотрим величину

$$d^\times(A) := \min_{t>0} \min_{\emptyset \neq Q, R \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}} \frac{|Q|^2 |R|^2}{|A| t^3}, \quad (5.9)$$

где второй минимум в (5.9) берется по произвольным Q, R таким, что $A \subseteq \text{Sym}_t^+(Q, R)$ и $\max\{|Q|, |R|\} \geq |A|$. Легко видеть [4], что $1 \leq d^+(A), d^\times(A) \leq |A|$. В [4] был доказан такой результат.

ЛЕММА 20. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ – конечное множество. Тогда A имеет аддитивный Семереди–Троттеровский тип с $O(d^+(A))$ и A имеет мультипликативный Семереди–Троттеровский тип с $O(d^\times(A))$.

Теперь мы можем сформулировать наш новый результат, который влечет теорему 2 с параметром $\delta = 1/5$, если соединить теорему 21 ниже с леммами 8, 10.

ТЕОРЕМА 21. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ – конечное множество и $\delta = 2/5$. Тогда найдутся два непесекающиеся множества B и C такие, что $A = B \sqcup C$ и

$$\max\{D^+(B), D^\times(C)\} \lesssim |A|^{1-\delta}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $1 \leq M \leq |A|$ – некоторый параметр, который мы выберем позже. Наше доказательство представляют собой алгоритм. В процессе работы этого алгоритма будет построена убывающая последовательность множеств

$$C_1 = A \supseteq C_2 \supseteq \dots \supseteq C_k,$$

а также возрастающая последовательность множеств

$$B_0 = \emptyset \subseteq B_1 \subseteq \dots \subseteq B_{k-1} \subseteq A$$

таких, что для любого $j = 1, 2, \dots, k$ множества C_j и B_{j-1} не пересекаются и, более того, $A = C_j \sqcup B_{j-1}$. Если на некотором шаге j алгоритма выполнено $D^\times(C_j) \leq |A|/M$, то мы останавливаем его работу, полагая $C = C_j$, $B = B_{j-1}$ и $k = j - 1$. В противном случае, мы имеем $D^\times(C_j) > |A|/M$. Положим $C' = C_j$. По определению найдутся число $\tau \geq 1$ и конечное множество $G = G_j \subset \mathbb{R}$ такие, что множество

$$S_\tau = S_\tau(G_j, C') := \{s \in C' / G : |C' \cap sG| \geq \tau\}$$

имеет размер не меньше чем $|C'|^2 |G|^2 / (M\tau^3)$. Тогда

$$\tau |S_\tau| \leq \sum_{s \in S_\tau} |C' \cap sG| = \sum_{a \in C'} |S_\tau \cap aG^{-1}|.$$

По принципу Дирихле существуют множество $A' \subseteq C'$ и число q такие, что $|A'|q \sim \tau |S_\tau|$ и $q < |S_\tau \cap aG^{-1}| \leq 2q$ для любого $a \in A'$. Другими словами, $A' \subseteq \text{Sym}_q^\times(S_\tau, G)$. Применяя лемму 20 с $P = S_\tau$, $Q = G$, находим

$$D^+(A') \ll d^+(A') \leq \frac{|S_\tau|^2 |G|^2}{q^3 |A'|}. \quad (5.10)$$

Далее, мы знаем, что $|A'|q \sim \tau|S_\tau|$ и $|S_\tau| > |C'|^2|G|^2/(M\tau^3)$. Соединяя эти неравенства с оценкой (5.10), получаем

$$D^+(A') \ll d^+(A') \lesssim \frac{|A'|^2|G|^2}{\tau^3|S_\tau|} < \frac{|A'|^2M}{|C'|^2}. \quad (5.11)$$

Так как $1 \leq d^+(A')$, то выполнено $|A'| \gtrsim |C'|M^{-1/2}$. Тривиальным образом $A' \subseteq C'$ и, значит, $D^+(A') \lesssim M$.

После этого мы полагаем $D_j = A'$, $C_{j+1} = C_j \setminus D_j$, $B_j = B_{j-1} \sqcup D_j$ и делаем следующий шаг алгоритма. Очевидно, что на шаге k мы имеем $B_k = \bigsqcup_{j=1}^k D_j$, и поскольку $|D_j| \gtrsim |C_j|M^{-1/2}$, то после некоторых вычислений получаем, что $k \lesssim M^{1/2}$. Таким образом, число шагов k конечно. Осталось оценить величину $D^+(B_k) = D^+(D_1 \cup \dots \cup D_k)$. Положим

$$U_j = \{i \in [k] : 2^{j-1} \leq D^+(D_i) \leq 2^j\}, \quad j \in [t], \quad k_j = |U_j|.$$

Поскольку для любого i выполнено $D^+(D_i) \lesssim M$, то число множеств U_j есть $t \lesssim 1$. Пусть также $B_k^{(j)} = \bigcup_{i \in U_j} D_i$. Применяя лемму 19, находим

$$D^+(B_k) \lesssim \frac{1}{|B_k|} \sum_{j=1}^t D^+(B_k^{(j)})|B_k^{(j)}|. \quad (5.12)$$

Фиксируя $j \in [t]$, мы видим, что $k_j \lesssim M^{1/2}2^{-j/2}$. Используя лемму 19 еще раз, получаем

$$D^+(B_k^{(j)}) \lesssim \frac{k_j^3}{|B_k^{(j)}|} \sum_{i \in U_j} D^+(D_i)|D_i| \lesssim M^{3/2}2^{-j/2} \frac{1}{|B_k^{(j)}|} \sum_{i \in U_j} |D_i| = M^{3/2}2^{-j/2}.$$

Подставляя поделную оценку в (5.12), имеем

$$D^+(B_k) \lesssim \frac{M^{3/2}}{|B_k|} \sum_{j=1}^t 2^{-j/2} |B_k^{(j)}| \ll M^{3/2}.$$

Выбирая значение параметра M оптимальным образом, т.е. полагая $M = |A|^{2/5}$, получаем требуемый результат. Теорема доказана.

Для доказательства нижних оценок в теоремах 3, 4 мы используем небольшую модификацию конструкции из [5]. Контрпример представляет собой так называемое $(H + \Lambda)$ -множество, см. [11].

ТЕОРЕМА 22. *Для любого положительного целого N найдется множество $A \subseteq \mathbb{N}$, $|A| = N$, такое, что для произвольного $B \subseteq A$ с $|B| \geq |A|/2$ выполнено $E_3^+(B), E_3^\times(B) \gg |A|^{13/4}$ и $D^+(B), D^\times(B) \gtrsim |A|^{1/4}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем целочисленный параметр $1 \leq K \ll N$, точное значение которого будет выбрано позднее, $t = \lceil N/K \rceil$ и положим $G = \{2^i\}_{i=1}^K$, $P = \{3 = p_1 < p_2 < \dots < p_t\}$ суть t последовательных нечетных простых. Наконец, положим $A = PG$, $|A| = tK = N + \theta K$, где $|\theta| \leq 1$. Таким образом, переопределяя, если это необходимо, число N , можно считать, что $|A| = N$.

Рассмотрим произвольное $B \subseteq A$ такое, что $|B| \geq |A|/2$. Для любого $j \in [K]$ положим $B_j = B \cap (P \cdot 2^j)$. По теореме о плотности простых чисел и оценкам (2.8) или (2.12) находим

$$E_3^+(B_j) \geq \frac{|B_j|^6}{|P + P|^2} \gtrsim \frac{|B_j|^6}{|P|^2}.$$

Таким образом, применяя неравенство Коши–Буняковского, получаем

$$E_3^+(B) \geq \sum_{j=1}^K E_3^+(B_j) \gtrsim |P|^{-2} \sum_{j=1}^K |B_j|^6 \geq \frac{|B|^6}{|P|^2 K^5} \gg \frac{N^4}{K^3}. \quad (5.13)$$

Теперь вычислим величину $E_3^\times(B)$. По формуле (2.12) имеем

$$|A|^6 \ll |B|^6 \leq E_3^\times(B) |B^2 \cdot \Delta(B)| \leq E_3^\times(B) |A^2 \cdot \Delta(A)|, \quad (5.14)$$

и, таким образом, нам достаточно оценить размер множества $A^2 \cdot \Delta(A)$. Положим $A_x = A \cap xA$. Применяя формулу (3.4) леммы 6 в мультипликативной форме, находим

$$\begin{aligned} |A^2 \cdot \Delta(A)| &= \sum_{x \in A/A} |AA_x| = \sum_{x \in G/G} |AA_x| + \sum_{x \in (A/A) \setminus (G/G)} |AA_x| \\ &\leq |G/G| |GGP| + \sum_{x \in (A/A) \setminus (G/G)} |AA_x| \ll N^2 + \sigma. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Докажем, что $\sigma \ll N^3/K$. Возьмем $x \in (A/A) \setminus (G/G)$. Другими словами, $x = g_1/g_2 \cdot p_1/p_2$ и $p_1 \neq p_2$. Теперь берем $a \in A_x$ и получаем

$$a = p'g' = \frac{g_1 p_1 p'' g''}{g_2 p_2},$$

или, что эквивалентно,

$$p'p_2 \cdot g'g_2 = p''p_1 \cdot g''g_1,$$

где $p', p'' \in P$, $g', g'' \in G$. Таким образом $p' = p_1$, $p'' = p_2$ и $g'g_2 = g''g_1$. Значит, $A_x = p_1 g_1 g_2^{-1} \cdot G$ и $|AA_x| \leq |GGP| \leq 2N$. Отсюда

$$\sigma \leq 2|A/A|N \ll N|G/G \cdot P/P| \ll N^3/K.$$

Возвращаясь к (5.14), (5.15) и вспоминая, что $K \ll N$, находим

$$N^6 \ll E_3^\times(B) \cdot \frac{N^3}{K}.$$

Ввиду (5.13) оптимальный выбор K есть $K \sim N^{1/4}$.

Наконец, неравенства $D^+(B), D^\times(B) \gtrsim |A|^{1/4}$ немедленно вытекают из полученных ниже оценок для $E_3^+(B), E_3^\times(B)$, формулы (5.3) и леммы 17. Теорема доказана.

Объединяя теорему 22 с теоремой 21, мы получаем теорему 4, а также теорему 3. Легко видеть, что неравенство (1.1), соединенное с неравенством Коши–Буняковского, влечет оценку (1.2) теоремы 1, и, следовательно, при таком подходе теряется величина $\delta/2$. Наш метод позволяет избежать таких потерь.

6. Другое доказательство теоремы 3 и дальнейшие замечания

В [4] было показано, что $d^+(A), d^\times(A)$ ограничены сверху величинами

$$d_*^+(A) := \min_{B \neq \emptyset} \frac{|AB|^2}{|A||B|} \quad \text{и} \quad d_*^\times(A) := \min_{B \neq \emptyset} \frac{|A+B|^2}{|A||B|}$$

соответственно (см. также [12]). Существует результат о суммах произведений, включающий величины $d_*^+(A), d_*^\times(A)$, но не суммы или произведения множеств (которые, тем не менее, спрятаны в определениях $d_*^+(A), d_*^\times(A)$).

ТЕОРЕМА 23. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ – конечное множество. Тогда

$$|A| \lesssim d_*^+(A) \cdot d_*^\times(A). \quad (6.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя лемму 20, лемму 17 и неравенство Гёльдера, мы получаем для любого непустого конечного множества $B \subset \mathbb{R}$, что

$$\frac{|A|^2|B|}{|A+B|^2} \leq \frac{E_3^+(A, -B)}{|A||B|^2} \leq q^+(A) \lesssim D^+(A) \ll d^+(A) \leq d_*^+(A).$$

Другими словами, для произвольного множества B выполнено

$$|A| \lesssim d_*^+(A) \cdot \frac{|A+B|^2}{|A||B|},$$

что и требовалось.

Конечно, оценка (6.1) оптимальна с точностью до логарифмов. На самом деле, в процессе доказательства теоремы 23 было установлено, что $|A| \lesssim D^+(A) \cdot d_*^\times(A)$ и $|A| \lesssim D^\times(A) \cdot d_*^+(A)$. Приведем другие нижние оценки для величин d_*^+ , $d_*^\times$.

ЗАМЕЧАНИЕ 24. Пусть $d := d_*^\times = |A+B|^2/(|A||B|)$. Прежде всего, заметим, что тривиальное неравенство $|A+B| \geq |A|$ влечет, что $|B| \geq |A|/d$. Далее, по неравенству Плоннеке–Ружи (см., например, [9] для всех целых $n, m \geq 1$) имеем

$$|nA - mA| \leq \frac{|A+B|^{n+m}}{|B|^{n+m-1}} \leq d^{n+m-1}|A|.$$

В частности,

$$\frac{|A-A|}{|A|} \leq d_*^\times(A) \leq \frac{|A \pm A|^2}{|A|^2}$$

и

$$\frac{|A+A-A|}{|A|} \leq d_*^\times(A)^2 \leq \frac{|A \pm A|^4}{|A|^4}.$$

Таким образом, величина $d_*^\times(A)$ тесно связана с суммами. Например, $d_*^\times(A) = O(1)$ тогда и только тогда, когда $|A \pm A| = O(|A|)$. Подобная эквивалентность выполняется и для $d_*^+(A)$.

Теорема 21, соединенная с леммами 8, 10, дает нам аналог теоремы 2 (либо же можно повторить рассуждения из работы [4] напрямую; мы оставляем это упражнение заинтересованному читателю).

СЛЕДСТВИЕ 25. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ – конечное множество и $\delta = 1/5$. Тогда найдутся два непересекающиеся множества B и C такие, что $A = B \sqcup C$ и

$$\max\{E^+(A, B), E^\times(A, C)\} \lesssim |A|^{3-\delta}.$$

Разумеется, теорема 21 и леммы 8, 10 позволяют вычислять старшие энергии разбивающих A множеств B, C . Мы приводим схему более прямого доказательства для энергий E_3^+ , $E_3^\times$, которое использует предложение 16.

ТЕОРЕМА 26. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ – конечное множество и $\delta_1 = 2/5$. Тогда найдутся два непересекающиеся множества B и C такие, что $A = B \sqcup C$ и

$$\max\{E_3^+(B), E_3^\times(C)\} \lesssim |A|^{4-\delta_1}.$$

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Используя аргументы из доказательства теоремы 20 работы [4], мы находим множество $A_1 \subseteq A$ такое, что $|A_1| \gtrsim (E_3^\times(A))^{1/2}|A|^{-1}$ и

$$|A_1|^5|A|^2 \gtrsim E_3^\times(A)E_3^+(A_1)$$

(подобным образом справедлива и двойственная версия неравенства выше). После этого применяя обозначения и алгоритм доказательства следствия 21 из этой статьи или же следуя схеме доказательства теоремы 21, а также предложения 16, мы получаем

$$E_3^+(D_j) \lesssim M|A|^{-2}|D_j|^5,$$

где

$$|D_j| \gtrsim |A|M^{-1/2}, \quad (6.2)$$

и из неравенства Гёльдера имеем

$$\begin{aligned} (E_3^+(B_k))^{1/6} &= (E_3^+(D_1 \cup \dots \cup D_k))^{1/6} \leq \sum_{j=1}^k (E_3^+(D_j))^{1/6} \lesssim (M|A|^{-2})^{1/6} \sum_{j=1}^k |D_j|^{5/6} \\ &\leq (M|A|^{-2})^{1/6} |A|^{5/6} k^{1/6} \lesssim M^{1/4} |A|^{1/2}. \end{aligned}$$

Последнее использованное неравенство, а именно $k \lesssim M^{1/2}$, есть следствие (6.2). Значит,

$$E_3^+(B_k) \lesssim M^{3/2} |A|^3.$$

Выбирая значение параметра M оптимальным образом, т.е. полагая $M = |A|^{2/5}$, получаем требуемый результат.

Мы не рассматриваем случай еще более старших энергий (хотя предложение 16 и позволяет делать это), поскольку они не адекватны нашей ситуации. Дело в том, что теорема Семереди–Троттера естественным образом соответствует только энергиям $E_3^+(A)$, $E_3^\times(A)$.

В работе [13] автор рассмотрел несколько более общий контекст, чем обычно предполагает задача о суммах произведений. Данный подход, соединенный с аргументами из [4], позволяет, в частности, доказать вариант теоремы 2.

ТЕОРЕМА 27. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ – конечное множество, $\alpha \neq 0$ – действительное число и $\delta = 1/5$. Тогда найдутся два непересекающихся множества B и C такие, что $A = B \sqcup C$ и

$$\max\{E^\times(B), E^\times(C + \alpha)\} \lesssim |A|^{3-\delta}.$$

Кроме того, существуют два непересекающихся множества B' и C' такие, что $A = B' \sqcup C'$ и

$$\max\{E^+(B'), E^+(\alpha/C')\} \lesssim |A|^{3-\delta}.$$

Конечно, можно доказать аналогичный результат и для энергий $E_3^+(B)$, $E_3^\times(C + \alpha)$, и для величин $D^+(B)$, $D^\times(C + \alpha)$, но мы оставляем это для заинтересованного читателя. Вместо этого выведем одно следствие результата выше.

СЛЕДСТВИЕ 28. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ – конечное множество. Положим

$$R[A] = \left\{ \frac{a_1 - a}{a_2 - a} : a, a_1, a_2 \in A, a_2 \neq a \right\}.$$

Тогда найдутся два множества $R', R'' \subseteq R[A]$, $|R'|, |R''| \geq |R[A]|/2$ такие, что $E^\times(R') \lesssim |R'|^{3-1/5}$ и $E^+(R'') \lesssim |R''|^{3-1/5}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего докажем существование множества R' . Положим $R = R[A]$, $R^* = R \setminus \{0\}$ и $\delta = 1/5$. Применяя теорему 27, находим $B, C \subseteq R$ такие, что $R = B \sqcup C$ и

$$\max\{E^\times(B), E^\times(C - 1)\} \lesssim |R|^{3-\delta}.$$

Если $|B| \geq |R|/2$, то все доказано. В противном случае $|C| \geq |R|/2$ и ввиду формулы $R = 1 - R$ (см. [13]), мы имеем $C' := 1 - C \subseteq R$, $|C'| = |C| \geq |R|/2$ и

$$E^\times(C') = E^\times(1 - C) = E^\times(C - 1) \lesssim |R|^{3-\delta}.$$

Таким образом, полагая R' равным B или C' , мы получаем требуемый результат.

Для того чтобы убедиться в существовании множества R'' , заметим, что $(R^*)^{-1} = R^*$. После этого воспользуемся второй частью теоремы 27, а также рассуждениями выше. Следствие доказано.

В частности, следствие 28 утверждает, что множество R имеет большую сумму $R + R$ и произведение RR (последнее известно из статьи [13] или же может быть получено прямым применением теоремы Семереди–Троттер).

То же самое доказательство позволяет найти подмножество A'_s множества

$$A_s \cup (A_{-s}) = A_s \cup (A_s - s), \quad A_s = A \cap (A + s), \quad s \in (A - A) \setminus \{0\},$$

имеющее мощность $|A_s|/2$, такое, что $E^\times(A'_s) \lesssim |A'_s|^{3-1/5}$ (подобным образом можно рассмотреть множество $A \cap (s - A)$ и найти в нем подмножество мощности $|A \cap (s - A)|/2$ с малой мультипликативной энергией). Этот вопрос двойственен тому, который поднимался в работах [3], [4]. Тот же самый результат имеет место и для мультипликативного аналога множеств A_s , а именно $A_s^* = A \cap (s/A)$, $s \in AA \setminus \{0\}$.

7. Добавление

Мы заканчиваем нашу статью обсуждением обобщения норм E_k . Поскольку наши рассуждения почти повторяют аргументы раздела 5, мы иногда приводим только схему доказательства.

Рассмотрим две числа $l \geq 2$, $k \geq 2$ и предположим, что либо k , либо l четное. В основном мы ограничимся рассмотрением вещественных функций. Для любой такой функции f положим

$$\|f\|_{E_{k,l}}^{kl} := \sum_{x_1, \dots, x_{k-1}} C_k^l(f)(x_1, \dots, x_{k-1}) = \sum_{y_1, \dots, y_{l-1}} C_l^k(f)(y_1, \dots, y_{l-1}) \geq 0. \quad (7.1)$$

При выводе второго равенства в последней формуле (7.1) мы воспользовались формулой (3.2) леммы 5. Для четных k и l имеем $\|f\|_{E_{k,l}} \geq \|f\|_l, \|f\|_k$, и, следовательно, в этом случае $\|f\|_{E_{k,l}} = 0$ тогда и только тогда, когда $f \equiv 0$.

Аналогично получаем аналог леммы 13.

ЛЕММА 29. Для любых $k, l \geq 2$ и произвольных функций $\varphi_1, \dots, \varphi_k: \mathbf{G} \rightarrow \mathbb{C}^l$, $\varphi_j = (\varphi_j^{(1)}, \dots, \varphi_j^{(l)})$, выполнено

$$\left| \sum_{x \in \mathbf{G}^{l-1}} C_l(\varphi_1)(x) \cdots C_l(\varphi_k)(x) \right| \leq \prod_{j=1}^k \prod_{i=1}^l \|\varphi_j^{(i)}\|_{E_{k,l}}. \quad (7.2)$$

Если $k, l \geq 2$ четные и все функции выше вещественные, то можно убрать модули из формулы (7.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi = (\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(l)})$. По неравенству Гёльдера достаточно рассмотреть суммы

$$\sum_{x \in \mathbf{G}^{l-1}} \mathcal{C}_l^k(\varphi)(x) = \sum_{x \in \mathbf{G}^{k-1}} \mathcal{C}_k(\varphi^{(1)})(x) \cdots \mathcal{C}_k(\varphi^{(l)})(x),$$

где равенство выше вытекает из формулы (3.2) леммы 5. Применяя неравенство Гёльдера еще раз, мы получаем требуемый результат.

Аналог предложения 16 следующий.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 30. Пусть $k, l \geq 2$ – целые числа. Тогда для любой пары функций $f, g: \mathbf{G} \rightarrow \mathbb{C}$ выполнено

$$\|f + g\|_{E_{k,l}} \leq \|f\|_{E_{k,l}} + \|g\|_{E_{k,l}}.$$

Если мы рассматриваем только вещественные функции и если числа k, l четные, то $\|\cdot\|_{E_{k,l}}$ задает норму.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что $\Omega_l := \{0, 1\}^l$. Имеем

$$\begin{aligned} \sigma := \|f + g\|_{E_{k,l}}^{kl} &= \sum_{x \in \mathbf{G}^{l-1}} \mathcal{C}_l^k(f + g)(x) = \sum_{x \in \mathbf{G}^{l-1}} \left(\sum_{\varepsilon \in \Omega_l} \mathcal{C}_l(\varphi_\varepsilon)(x) \right)^k \\ &= \sum_{\varepsilon \in \Omega_l} \sum_{n_\varepsilon = k} \binom{k}{n_1, \dots, n_{2^l}} \sum_{x \in \mathbf{G}^{l-1}} \prod_{\varepsilon \in \Omega_l} \mathcal{C}_l^{n_\varepsilon}(\varphi_\varepsilon)(x), \end{aligned}$$

где для $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l) \in \Omega_l$ мы положили $\varphi_\varepsilon = (\varphi_{\varepsilon_1}, \dots, \varphi_{\varepsilon_l})$ и $\varphi_1 = f$, $\varphi_0 = g$. Пусть $n = (n_\varepsilon) \in \mathbb{N}_0^{2^l}$ и $q(n) := \sum_{\varepsilon \in \Omega_l} \text{wt}(\varepsilon) n_\varepsilon$. Применяя лемму 29 и лемму 15, получаем

$$\begin{aligned} \sigma &\leq \sum_{\varepsilon \in \Omega_l} \sum_{n_\varepsilon = k} \binom{k}{n_1, \dots, n_{2^l}} \|f\|_{E_{k,l}}^{q(n)} \|g\|_{E_{k,l}}^{kl-q(n)} \\ &= \sum_{i+j=kl} \frac{(kl)!}{i!j!} \|f\|_{E_{k,l}}^i \|g\|_{E_{k,l}}^j = (\|f\|_{E_{k,l}} + \|g\|_{E_{k,l}})^{kl}, \end{aligned}$$

что и требовалось.

Автор благодарен С. В. Конягину за плодотворные обсуждения.

Список литературы

- [1] P. Erdős, E. Szemerédi, “On sums and products of integers”, *Studies in Pure Mathematics*, Birkhäuser, Basel, 1983, 213–218.
- [2] J. Solymosi, “Bounding multiplicative energy by the sumset”, *Adv. Math.*, **222**:2 (2009), 402–408.
- [3] С. В. Конягин, И. Д. Шкредов, “О суммах множеств, имеющих малое произведение”, *Современные проблемы математики, механики и математической физики*, Тр. МИАН, **290**, МАИК, М., 2015, 304–316.
- [4] С. В. Конягин, И. Д. Шкредов, “Новые результаты о суммах и произведениях в $\mathbb{R}$ ”, *Современные проблемы математики, механики и математической физики. II*, Сборник статей, Тр. МИАН, **294**, МАИК, М., 2016, 87–98.
- [5] A. Balog, T. D. Wooley, *A Low-Energy Decomposition Theorem*, 2015, arXiv: [1510.03309](https://arxiv.org/abs/1510.03309).
- [6] B. Hanson, *Estimates for Character Sums with Various Convolutions*, 2015, arXiv: [1509.04354](https://arxiv.org/abs/1509.04354).

- [7] И. Д. Шкредов, “О суммах множеств Семереди–Троттера”, *Избранные вопросы математики и механики*, Тр. МИАН, **289**, МАИК, М., 2015, 318–327.
- [8] W. Rudin, *Fourier Analysis on Groups*, John Wiley & Sons, New York, 1990.
- [9] T. Tao, V. Vu, *Additive Combinatorics*, Cambridge Stud. Adv. Math., **105**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006.
- [10] T. Schoen, I. D. Shkredov, “Higher moments of convolutions”, *J. Number Theory*, **133**:5 (2013), 1693–1737.
- [11] I. D. Shkredov, “Energies and structure of additive sets”, *Electron. J. Combin.*, **21**:3 (2014), P3.44.
- [12] O. E. Raz, O. Roche-Newton, M. Sharir, *Sets with Few Distinct Distances Do Not Have Heavy Lines*, 2014, arXiv: [1410.1654](https://arxiv.org/abs/1410.1654).
- [13] I. D. Shkredov, “Difference sets are not multiplicatively closed”, *Discrete Anal.*, **17** (2016), 1–20.

Научное издание

Современные проблемы математики

Выпуск 24

Математика и информатика

Компьютерная верстка: *Ю. А. Пупырев*

Подписано в печать 23.10.2017. Тираж 100 экз.

Отпечатано в Математическом институте им. В.А. Стеклова Российской академии наук
Москва, 119991, ул. Губкина, 8.

<http://www.mathnet.ru/spm/> e-mail: pupyrev@mi.ras.ru