Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. V. Voroshilov, A maximum dicut
in a digraph induced by a minimal dominating set, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.*,
2020, Volume 27, Issue 4, 5–20

DOI: <https://doi.org/10.33048/daio.2020.27.691>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms
of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.237.59.107

April 26, 2023, 12:37:18

РАЗРЕЗ НАИБОЛЬШЕГО ВЕСА В ОРГРАФЕ,
ПОРОЖДЁННЫЙ МИНИМАЛЬНЫМ
ДОМИНИРУЮЩИМ МНОЖЕСТВОМ

В. В. Ворошилов

Омский гос. университет им. Ф. М. Достоевского,
пр. Мира, 55а, 644077 Омск, Россия
E-mail: voroshil@gmail.com

Аннотация. Пусть $G = (V, A)$ — простой ориентированный граф с заданными неотрицательными весами дуг, $S \subseteq V$ — некоторое подмножество его вершин. Множество S называется доминирующим, если для каждой вершины $j \in V \setminus S$ существуют как минимум одна вершина $i \in S$ и дуга из i в j . Доминирующее множество называется минимальным по включению, если оно не содержит в себе доминирующих множеств меньшего размера. Разрезом $\{S \rightarrow \overline{S}\}$ называется множество дуг (i, j) таких, что $i \in S$, $j \in V \setminus S$. Весом разреза будем считать суммарный вес входящих в него дуг. В статье исследуется задача поиска разреза $\{S \rightarrow \overline{S}\}$ максимального веса среди всех минимальных доминирующих множеств S . Ил. 6, библиогр. 8.

Ключевые слова: ориентированный граф, взвешенный граф, максимальный разрез, минимальное по включению доминирующее множество.

Введение

Данная работа посвящена задаче поиска в простом взвешенном ориентированном графе разреза максимального веса, порождённого минимальным по включению доминирующим множеством вершин.

Определение 1. Разрезом, порождённым множеством вершин D , (или просто разрезом $\{D \rightarrow \overline{D}\}$) в простом ориентированном графе $G = (V, A)$ называется множество всех дуг, начало которых принадлежит D , а конец — множеству $\overline{D} = V \setminus D$.

Использование обозначения $\{D \rightarrow \overline{D}\}$ вместо более распространённого $(D, \overline{D})$ призвано подчеркнуть тот факт, что в отличие от определения разреза для ориентированного графа, данного Н. Кристофидесом в [1],

как объединения дуг, направленных как из, так и в множество D , в этой работе рассматриваются исключительно дуги, направленные из множества D .

Определение 2. *Весом разреза $\{D \rightarrow \overline{D}\}$ в простом ориентированном взвешенном графе $G = (V, A, w)$ с заданными неотрицательными весами дуг w будем называть сумму*

$$w_{dc}(D) = \sum_{(i,j) \in \{D \rightarrow \overline{D}\}} w(i, j).$$

Определение 3. Будем говорить, что $D \subseteq V$ — *доминирующее* множество вершин графа G (или просто доминирующее множество), если для любой вершины $i \in V \setminus D$ существует вершина $j \in D$ такая, что дуга (j, i) принадлежит A . Доминирующее множество, не содержащее в себе доминирующих множеств меньшего размера, будем называть *минимальным по включению доминирующим* множеством, или для краткости просто *минимальным доминирующим* множеством. Семейство всех доминирующих множеств обозначим через $D(G)$, а семейство всех минимальных доминирующих множеств — через $D_{\min}(G)$.

В данной работе рассматривается задача, которая может быть формально записана следующим образом

Задача 1 (MAX MDS DICUT).

$$w_{dc}(D) \rightarrow \max \tag{1}$$

при ограничениях

$$D \in D_{\min}(G). \tag{2}$$

Без ограничения (2) она может рассматриваться как ориентированный случай задачи MAX CUT, опубликованной (в виде задачи распознавания) под номером 21 Р. Карпом в 1972 г. в его списке NP-полных задач [2].

Стоит отметить, что существуют различные вариации задачи MAX CUT. Например, ориентированный случай с дополнительным ограничением на размер множества рассматривается в [3] под названием MAX DICUT WITH GST, а неориентированный случай с различными условиями на характер множества D (включая условие доминирования) подробно исследуется в [4]

Если же в целевую функцию к весам дуг разреза добавить веса остальных дуг, началом которых являются вершины множества D , т. е. сумму

$$w_{dc}(D) = \sum_{(i,j) \in \{D \rightarrow \overline{D}\}} w(i, j)$$

заменить суммой

$$w(D) = \sum_{i \in D} \sum_{(i,j) \in A} w(i,j) = \sum_{i \in D} w(i),$$

где $w(i)$ — вес вершины i , равный суммарному весу исходящих из неё дуг, то получившаяся задача превращается в ориентированный вариант задачи MAX MIN DOMINATING SET:

$$\sum_{D \in D_{\min}(G)} w(D) \rightarrow \max.$$

Эта задача (в её неориентированном варианте) была подробно исследована в [5], а её аппроксимационные особенности — в [6]. В частности показано, что при $P \neq NP$ не существует полиномиального алгоритма её решения и, более того, не существует приближённого полиномиального алгоритма с гарантированной оценкой $|V|^{\epsilon - \frac{1}{2}}$ для любого $\epsilon > 0$.

В целом обе упомянутые задачи можно рассматривать как однокритериальное упрощение следующей двукритериальной задачи:

$$\begin{cases} \sum_{i \in S} \sum_{(i,j) \in A} w(i,j) \rightarrow \max, \\ |S| \rightarrow \min, \\ S \in D(G). \end{cases} \quad (3)$$

Она рассматривается в [7] как задача определения ключевых показателей экономической безопасности региона. В ней веса дуг $w(i,j)$ отражают степень влияния одного экономического показателя на другой.

Авторами в [7] предлагается преобразовать задачу в однокритериальную путём замены критерия $|S| \rightarrow \min$ и ограничения $S \in D(G)$ ограничением $S \in D_{\min}(G)$, после чего она превращается в ориентированный вариант известной задачи MAX MIN DOMINATING SET.

Нетрудно заметить, что при таком подходе учитывается не только степень влияния друг на друга показателей из множества S с одной стороны и показателей за пределами S с другой, но и связи между показателями внутри самого множества, что может быть нежелательным побочным эффектом. Избавиться от него можно исключением из целевой функции дуг между вершинами множества S . Оставшиеся дуги в точности образуют разрез $\{D \rightarrow \overline{D}\}$, т. е. задача превращается в MAX MDS DICUT.

Оценки трудоёмкости задачи MAX MIN DOMINATING SET дали основания предположить, что MAX MDS DICUT также NP-трудна. Но и в этом случае наличие ЦЛП-модели несомненно будет полезным для разработки алгоритмов её точного или приближённого решения.

Основной материал данной работы разбит на две части. В разд. 1 доказывается принадлежность рассматриваемой задачи классу NP-трудных задач путём сведения к её распознавательному варианту NP-полной задачи выполнимости. В разд. 2 приводятся системы, обеспечивающие условия доминирования, минимального доминирования и принадлежности разрезу, с построением в итоге ЦЛП-модели для рассматриваемой задачи.

1. Класс сложности

Сформулируем задачу о поиске разреза максимального веса, порождённого минимальным по включению доминирующим множеством, в виде задачи распознавания.

Задача 2 (MAX MDS DICUT в виде задачи распознавания). Пусть $G = (V, A, w)$ — взвешенный ориентированный граф, $w(i, j) \geq 0$ — веса его дуг, $\beta \geq 0$ — параметр. Существует ли минимальное доминирующее множество D такое, что

$$w_{dc}(D) \geq \beta.$$

Очевидно, что задача 2 принадлежит классу NP. В самом деле, недетерминированному алгоритму достаточно угадать подходящее множество D , после чего за время $O(n^2)$ можно проверить, что D — минимальное доминирующее множество, и вычислить $w_{dc}(D)$.

Рассмотрим свойства двух подграфов специальной структуры, которые понадобятся в дальнейшем для доказательства NP-полноты.

Определение 4. «Хвостом» в ориентированном графе $G = (V, A)$ будем называть подграф $G_M = (V_M, A_M)$, где $V_M = \{r, q, s, k\}$, $A_M = \{(r, q), (q, s), (k, s)\}$, причём граф G не содержит никаких других дуг (за исключением входящих в вершину r), инцидентных вершинам r, s, q, k . Пример «хвоста» см. на рис. 1.

Рис. 1. Подграф «хвост»

Определение 5. Под «цилиндром» в ориентированном графе $G = (V, A)$ будем понимать подграф $G_T = (V_T, A_T)$, где $V_T = \{f, t, g, h\}$, $A_T = \{(t, f), (f, t), (g, h), (h, g), (f, h), (t, g)\}$, причём граф G не содержит никаких других дуг (за исключением исходящих из вершин t и f), инцидентных вершинам t, f, g, h . Пример «цилиндра» см. на рис. 2.

Рис. 2. Подграф «цилиндр»

Лемма 1 (свойство «хвоста»). Пусть $G = (V, A)$ — простой ориентированный граф, $G_M = (V_M, A_M)$ — «хвост» в нём. Тогда для любого минимального доминирующего множества D и разреза $\{D \rightarrow \bar{D}\}$ верно

$$(q, s) \in \{D \rightarrow \bar{D}\} \Rightarrow \exists p \in D: (p, r) \in A.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть D — выбранное произвольно минимальное доминирующее множество. Заметим, что вершина k обязательно ему принадлежит, поскольку у k нет входящих дуг. Пусть теперь дуга (q, s) принадлежит разрезу $\{D \rightarrow \bar{D}\}$. По определению разреза это означает, что $q \in D$, $s \notin D$.

Предположим, что в D не существует вершины p такой, что $(p, r) \in A$, но тогда $r \in D$ по определению доминирующего множества. Более того, $D \setminus \{q\}$ также доминирующее, поскольку $(r, q) \in A$, $k \in D$ и $(k, s) \in A$, откуда следует, что D не минимальное; противоречие. Значит, исходное предположение неверно, и в множестве D существует вершина p такая, что $(p, r) \in A$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2 (свойство «цилиндра»). Пусть $G = (V, A)$ — простой ориентированный граф, $G_T = (V_T, A_T)$ — «цилиндр» в нём. Тогда для любого минимального доминирующего множества D

$$|\{t, f\} \cap D| = 1 \Leftrightarrow |\{g, h\} \cap D| = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть минимальное доминирующее множество D выбрано произвольно и $|\{t, f\} \cap D| = 1$. Для определённости положим $t \in D$, $f \notin D$ (для $t \notin D$, $f \in D$ лемма доказывается аналогично). Случай $|\{g, h\} \cap D| = 0$ невозможен, поскольку у вершины h есть всего две входящих дуги (f, h) и (g, h) , но ни f , ни g множеству D не принадлежат, что противоречит определению D как доминирующего множества. Если же $|\{g, h\} \cap D| = 2$, то $D \setminus \{g\}$ также остаётся доминирующим, поскольку $h \in D$ и существует дуга (h, g) , но это противоречит определению D как минимального по включению доминирующего множества. Остаётся единственный вариант: $|\{g, h\} \cap D| = 1$.

В обратную сторону. Пусть минимальное доминирующее множество D выбрано произвольно и $|\{g, h\} \cap D| = 1$. Случай $|\{t, f\} \cap D| = 0$ невозможен, поскольку единственная входящая дуга в t — это (f, t) , а $f \notin D$, что

противоречит определению D как доминирующего множества. Если же $|\{t, f\} \cap D| = 2$, то $D \setminus \{g, h\}$ также остаётся доминирующим, поскольку $t, f \in D$ и существуют дуги (t, g) , (f, h) . Это противоречит определению D как минимального по включению доминирующего множества. Остаётся единственный вариант: $|\{t, f\} \cap D| = 1$. Лемма 2 доказана.

Теорема 1. *Задача 2 NP-полна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства NP-полноты выполним сведение к рассматриваемой задаче известной NP-полной задачи ВЫПОЛНИМОСТЬ, которая в [8] формулируется следующим образом.

Задача 3 (выполнимость). Пусть $U = \{u_i\}$, $i = 1, \dots, n$, — множество булевых переменных, $C = \{c_j\}$, $j = 1, \dots, m$, — множество дизъюнкций над переменными из U . Существует ли выполняющийся набор значений истинности для C ?

Итак, пусть имеется задача 3 с заданным множеством булевых переменных $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ и множеством дизъюнкций $C = \{c_1, \dots, c_m\}$, $c_j = \{u_{j_1}, \dots, u_{j_k}\} \cup \{\bar{u}_{j_{k+1}}, \dots, \bar{u}_{j_{k_l}}\}$.

Рис. 3. Пример графа для $U = \{u_1, u_2, u_3\}$, $C = \{c_1, c_2, c_3\}$,
 $c_1 = \{u_1, u_2\}$, $c_2 = \{u_2, \bar{u}_3\}$, $c_3 = \{u_1, \bar{u}_3\}$

Построим соответствующий ей ориентированный граф $G = (V, A)$, поставив в соответствие каждой переменной u_i отдельный «цилиндр», а каждой дизъюнкции c_j — отдельный «хвост». При этом если в дизъюнкции c_j входит переменная u_i , то в граф добавляется дуга (t_i, r_j) , а если в c_j входит отрицание переменной u_i , то добавляется дуга (f_i, r_j) (рис. 3). Или формально:

$$V = V_T \cup V_C,$$

$$\begin{aligned}
V_T &= \bigcup_{i=1}^n \{t_i, f_i, g_i, h_i\}, \\
V_C &= \bigcup_{j=1}^m \{q_j, r_j, s_j, k_j\}, \\
(t_i, g_i), (f_i, h_i) &\in A, \quad i = 1, \dots, n, \\
(g_i, h_i), (h_i, g_i) &\in A, \quad i = 1, \dots, n, \\
(t_i, f_i), (f_i, t_i) &\in A, \quad i = 1, \dots, n, \\
(r_j, q_j), (q_j, s_j), (k_j, s_j) &\in A, \quad j = 1, \dots, m, \\
(t_i, r_j) \in A &\Leftrightarrow u_i \in c_j, \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m, \\
(f_i, r_j) \in A &\Leftrightarrow \bar{u}_i \in c_j, \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m, \\
w(g_i, h_i) = w(h_i, g_i) &= 1, \quad i = 1, \dots, n, \\
w(q_j, s_j) &= 1, \quad j = 1, \dots, m, \\
w(t_i, g_i) = w(f_i, h_i) &= 0, \quad i = 1, \dots, n, \\
w(t_i, f_i) = w(f_i, t_i) &= 0, \quad i = 1, \dots, n, \\
w(r_j, q_j) = w(k_j, s_j) &= 0, \quad j = 1, \dots, m.
\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что указанный граф можно построить за время $O(mn)$.

Докажем, что для построенного графа G и $\beta = m+n$ решение задачи 2 существует тогда и только тогда, когда существует решение задачи 3.

Рис. 4. Минимальное доминирующее множество в «цилиндре», содержащее вершину t

Рис. 5. Минимальное доминирующее множество в «цилиндре», содержащее вершину f

Пусть существует решение задачи 2, т. е. найдётся минимальное доминирующее множество D такое, что $w_{dc}(D) \geq m+n$. Это может выполняться только в случае, когда для всех $i = 1, \dots, n$ и $j = 1, \dots, m$ дуги (q_j, s_j) принадлежат разрезу $\{D \rightarrow \bar{D}\}$ и $|\{g_i, h_i\} \cap D| = 1$. Из леммы 2 следует, что либо $t_i \in D$, $f_i \notin D$ (рис. 4), в этом случае полагаем $u_i = 1$, либо $t_i \notin D$, $f_i \in D$ (рис. 5), соответственно полагаем $u_i = 0$. Других вариантов быть не может, т. е. набор значений для u_i определяется непротиворечиво и единственно возможным образом.

Поскольку все (q_j, s_j) принадлежат разрезу $\{D \rightarrow \bar{D}\}$, из леммы 1 следует, что для всех r_j существует дуга из D в r_j (рис. 6), а значит, для

каждого j существует как минимум одно i такое, что либо $t_i \in D$, $u_i = 1$, $(t_i, r_j) \in A$ (и по построению графа G переменная u_i входит в c_j , делая её истинной), либо $f_i \in D$, $u_i = 0$, $(f_i, r_j) \in A$ (и по построению графа G отрицание переменной u_i входит в c_j , делая её истинной).

Рис. 6. Минимальное доминирующее множество в «хвосте», содержащее вершину q

Таким образом, имеем набор значений для u_i такой, что все c_j истинны, т. е. построенный набор u_i — решение задачи 3.

В обратную сторону. Пусть существует решение задачи 3, т. е. такой набор значений u_i , что все c_j истинны. Построим множество D следующим образом:

$$u_i = 1 \Rightarrow t_i, h_i \in D, \quad i = 1, \dots, n \text{ (рис. 4),}$$

$$u_i = 0 \Rightarrow f_i, g_i \in D, \quad i = 1, \dots, n \text{ (рис. 5),}$$

$$q_j, k_j \in D, \quad j = 1, \dots, m \text{ (рис. 6).}$$

Так как все c_j истинны, для каждого r_j существует как минимум одно ребро из D в r_j . Тогда множество D — доминирующее, более того, D — минимальное доминирующее. Заметим, что $w(g_i, h_i) + w(h_i, g_i) = 1$, поскольку $|\{g_i, h_i\} \cap D| = 1$ в силу леммы 2. Тогда

$$w_{dc}(D) = \sum_{j=1}^m w(q_j, s_j) + \sum_{i=1}^n (w(g_i, h_i) + w(h_i, g_i)) = m + n.$$

Значит, D является решением задачи 2. Теорема 1 доказана.

2. Построение ЦЛП-модели

Здесь и далее будем полагать, что $G = (V, A)$ — простой ориентированный граф, $N = |V|$, $M = |A|$. *Окрестностью в вершину i* графа G будем называть множество $N_{-}\{i\} = \{j \mid (j, i) \in A\}$. *Окрестностью из вершины i* графа G будем называть множество $N_{+}\{i\} = \{j \mid (i, j) \in A\}$. Определим также их замкнутые варианты:

$$N_{-}[i] = \{i\} \cup N_{-}\{i\}, \quad N_{+}[i] = \{i\} \cup N_{+}\{i\}.$$

Сопоставим множеству вершин графа N -мерное векторное пространство $\mathbb{R}^V$ посредством взаимно однозначного соответствия между элементами множества вершин V и осями координат пространства $\mathbb{R}^V$. Иными словами, пространство $\mathbb{R}^V$ можно рассматривать как пространство

вектор-столбцов, координаты которых индексируются элементами множества V .

Каждому множеству вершин $D \subseteq V$ сопоставим булев вектор $x^D \in \mathbb{R}^V$ с координатами

$$x^D = \{x_i^D\}, \quad x_i^D = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in D, \\ 0, & \text{если } i \in V \setminus D. \end{cases}$$

Тогда для любого множества вершин S верно соотношение

$$|S \cap D| = \sum_{j \in S} x_j^D.$$

Докажем вспомогательное утверждение, которое понадобится при построении ЦЛП-модели (аналогичное утверждение для неориентированного случая без доказательства приводится в [1]).

Лемма 3. Пусть $G = (V, A)$ — простой ориентированный граф, D — произвольное подмножество его вершин. Множество D является доминирующим тогда и только тогда, когда для любого $i \in V$

$$\sum_{j \in N_-[i]} x_j^D \geq 1.$$

Доказательство. Достаточность. Допустим, что D — доминирующее множество вершин. Выберем в графе G произвольную вершину i . Если вершина i принадлежит D , то

$$\sum_{j \in N_-[i]} x_j^D \geq x_i^D = 1.$$

Если же вершина i не принадлежит D , то (в силу определения доминирования) обязательно существует вершина k из D такая, что дуга (k, i) принадлежит A , или, другими словами, k принадлежит $N_-[i]$, но тогда

$$\sum_{j \in N_-[i]} x_j^D \geq x_k^D = 1.$$

В силу произвольности выбора вершины i утверждение леммы верно для всех вершин графа G .

Необходимость. Пусть для любой вершины i графа G выполняется

$$\sum_{j \in N_-[i]} x_j \geq 1.$$

Для любой вершины i , не принадлежащей D , это возможно, когда в $N_-[i]$ существует вершина k , отличная от i , такая, что $x_k = 1$ (поскольку $x_i = 0$). Значит, k принадлежит D и в A существует дуга (k, i) . Так как

это верно для любых вершин из $V \setminus D$, множество D доминирующее. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Решение $(\bar{x}, \bar{y})$ системы

$$\sum_{j \in N_-[i]} x_j \geq 1, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4)$$

$$\sum_{j \in N_+[i]} y_{ij} - x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (5)$$

$$\sum_{j \in N_-[i]} x_j - x_k \leq N(1 - y_{ki}), \quad (k, i) \in A, \quad (6)$$

$$y_{ki} = 0, \quad (k, i) \notin A, \quad (7)$$

относительно булевых переменных x_i, y_{ki} существует тогда и только тогда, когда $\bar{x} = x^D$ для некоторого минимального доминирующего множества D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(\bar{x}, \bar{y})$ — решение системы (4)–(7) и $\bar{x} = x^D$ для некоторого множества D . Тогда в силу леммы 3 D является доминирующим множеством. Предположим, что D не минимально по включению, т. е. существует $p \in D$ такое, что $D' = D \setminus \{p\}$ тоже доминирующее. Тогда по лемме 3 для D' и вектора $x^{D'}$ также выполняется неравенство

$$1 \leq \sum_{j \in N_-[i]} x_j^{D'} = \sum_{j \in N_-[i] \setminus \{p\}} x_j^D$$

и для всех $i = 1, \dots, N$ таких, что $(p, i) \in A$, верно

$$\begin{aligned} \sum_{j \in N_-[i]} x_j^D - x_p^D &\leq N(1 - \bar{y}_{pi}), \\ 1 &\leq \sum_{j \in N_-[i]} x_j^{D'} = \sum_{j \in N_-[i] \setminus \{p\}} x_j^D \leq N(1 - \bar{y}_{pi}), \\ \bar{y}_{pi} &= 0, \end{aligned}$$

т. е. $\bar{y}_{pi} = 0$ вообще для всех $i = 1, \dots, N$, но

$$\sum_{i \in N_+[p]} \bar{y}_{pi} \geq x_p^D = 1;$$

противоречие.

В обратную сторону. Пусть D — минимальное доминирующее множество. Положим для $i = 1, \dots, N, k = 1, \dots, N$

$$\bar{y}_{ki} = \begin{cases} 1, & \text{если } k \in D \text{ и } \sum_{j \in N_-[i]} x_j^D = 1, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \quad (8)$$

Покажем, что $(x^D, \bar{y})$ — решение системы (4)–(7). В самом деле, неравенство (4) выполняется в силу леммы 3. Выражение (7) верно по построению $\bar{y}_{ki}$. В случае $(k, i) \in A$ неравенство (6) всегда истинно для $\bar{y}_{ki} = 0$, а для $\bar{y}_{ki} = 1$ оно верно, поскольку в этом случае (по построению $\bar{y}_{ki}$) $k \in D$, $x_k^D = 1$ и

$$\sum_{j \in N_-[i]} x_j^D - x_k^D = \sum_{j \in N_-[i]} x_j^D - 1 = 0 \leq 0 = N(1 - \bar{y}_{ki}).$$

Неравенство (5), очевидно, верно для всех $x_k^D = 0$. Покажем, что оно верно и для $x_k^D = 1$. Поскольку D минимальное доминирующее, для любого $k \in D$ множество $D \setminus \{k\}$ доминирующим не будет, а значит, для каждого k такого, что $x_k^D = 1$, существует $i \in N_+[k]$ такое, что

$$\sum_{j \in N_-[i] \setminus \{k\}} x_j^D = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} 1 &\leq \sum_{j \in N_-[i]} x_j^D = \sum_{j \in N_-[i] \setminus \{k\}} x_j^D + \sum_{j \in N_-[i] \cap \{k\}} x_j^D = \sum_{j \in N_-[i] \cap \{k\}} x_j^D \leq 1, \\ &\sum_{j \in N_-[i]} x_j^D = 1. \end{aligned}$$

По построению $\bar{y}_{ki}$ получаем $\bar{y}_{ki} = 1$. Отсюда для всех $x_k^D = 1$ имеем

$$\sum_{j \in N_+[k]} \bar{y}_{kj} - x_k^D \geq \bar{y}_{ki} - x_k^D = 0.$$

Лемма 4 доказана.

В любом решении системы (4)–(7) значение $\bar{y}_{ki} = 1$ означает, что пересечение D с замкнутой окрестностью в вершину i состоит из единственной вершины k из D . Другими словами, вершина k — единственная среди всех вершин множества D , из которой вершина i достижима за один шаг.

В самом деле, при $\bar{y}_{ki} = 1$ (и обязательно $(k, i) \in A$, т. е. $k \in N_-[i]$) неравенство (6) превращается в следующее:

$$0 \geq \sum_{j \in N_-[i]} x_j - x_k,$$

откуда

$$1 \leq \sum_{j \in N_-[i]} x_j = x_k \leq 1,$$

а это в точности означает, что $k \in D$ и, как следствие, $N_-[i] \cap D = \{k\}$.

Лемма 5. Для любого заранее заданного множества D и соответствующего вектора x^D решение $\bar{z}$ системы

$$z_{ij} \leq x_i^D, \quad (i, j) \in A, \quad (9)$$

$$z_{ij} \leq 1 - x_j^D, \quad (i, j) \in A, \quad (10)$$

$$z_{ij} \geq (x_i^D - x_j^D), \quad (i, j) \in A, \quad (11)$$

$$z_{ij} = 0, \quad (i, j) \notin A, \quad (12)$$

относительно булевых переменных z_{ij} существует и единственно, при этом

$$\bar{z}_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (i, j) \in \{D \rightarrow \overline{D}\}, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем существование решения. Если в графе G отсутствует дуга (i, j) , то из (12) следует, что $z_{ij} = 0$. Пусть дуга (i, j) в графе присутствует. При $x_i^D = x_j^D$ из неравенств (9) и (10) получаем, что $z_{ij} = 0$. При $x_i^D < x_j^D$, что возможно только при $x_i^D = 0$, из (9) снова следует, что $z_{ij} = 0$.

Пусть теперь $x_i^D > x_j^D$, что возможно только при $x_i^D = 1$, $x_j^D = 0$. Тогда соотношения (9)–(11) превращаются в следующие неравенства:

$$z_{ij} \leq 1,$$

$$z_{ij} \leq 1 - 0,$$

$$z_{ij} \geq 1 - 0,$$

что сразу даёт равенство $z_{ij} = 1$. Таким образом, имеем однозначно определённые

$$\bar{z}_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } x_i^D = 1, x_j^D = 0 \text{ и } (i, j) \in A, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Однако условия $x_i^D = 1$, $x_j^D = 0$ и $(i, j) \in A$ в совокупности и означают, что дуга (i, j) принадлежит разрезу $\{D \rightarrow \overline{D}\}$. Лемма 5 доказана.

Отметим, что без ограничения (11) данная система приведена в [3]. Однако в таком (сокращённом) виде значения z_{ij} соответствуют разрезу $\{D \rightarrow \overline{D}\}$ лишь в том случае, если они присутствуют в целевой функции на максимум со строго положительными весовыми коэффициентами. В то же время решение приведённой в данной работе системы всегда однозначным образом соответствует разрезу $\{D \rightarrow \overline{D}\}$.

Теорема 2. Задача

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w(i, j) z_{ij} \rightarrow \max \quad (14)$$

при ограничениях

$$\sum_{j \in N_-[i]} x_j \geq 1, \quad i = 1, \dots, N, \quad (15)$$

$$\sum_{j \in N_+[i]} y_{ij} - x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (16)$$

$$\sum_{j \in N_-[i]} x_j - x_k \leq N(1 - y_{ki}), \quad (k, i) \in A, \quad (17)$$

$$y_{ki} = 0, \quad (k, i) \notin A, \quad (18)$$

$$z_{ki} \leq x_k, \quad (k, i) \in A, \quad (19)$$

$$z_{ki} \leq 1 - x_i, \quad (k, i) \in A, \quad (20)$$

$$z_{ki} \geq x_k - x_i, \quad (k, i) \in A, \quad (21)$$

$$z_{ki} = 0, \quad (k, i) \notin A, \quad (22)$$

относительно булевых переменных x_i, y_{ki}, z_{ki} эквивалентна задаче о минимальном по включению доминирующем множестве с разрезом наибольшего веса (1)–(2). При этом для множества D , определяемого вектором $x^D = \bar{x}$, верны следующие утверждения:

$$D \in D_{\min}(G),$$

$$y_{ki} = 1 \Rightarrow N_-[i] \cap D = \{k\},$$

$$z_{ki} = 1 \Leftrightarrow (k, i) \in \{D \rightarrow \bar{D}\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(\bar{x}_i, \bar{y}_{ki}, \bar{z}_{ki})$ — оптимальное решение задачи (14)–(22), D — множество, определяемое вектором $x^D = \bar{x}$. Ограничения (15)–(18) в силу леммы 4 обеспечивают минимальное доминирование для D . По лемме 5 ограничения (19)–(22) обеспечивают, что $\bar{z}_{ki} = 1$ тогда и только тогда, когда (k, i) принадлежит разрезу $\{D \rightarrow \bar{D}\}$, следовательно, выражения (14) и (1) эквивалентны.

В обратную сторону. Предположим, что минимальное доминирующее множество D — оптимальное решение задачи (1)–(2). Определим $\bar{x}_i$ как компоненты вектора x^D множества D , $\bar{y}_{ki}$ — согласно (8), а $\bar{z}_{ki}$ — согласно (13). Тогда из леммы 4 следует, что выбранные значения $\bar{x}_i, \bar{y}_{ki}$ удовлетворяют ограничениям (15)–(18), а из леммы 5 следует, что $\bar{z}_{ki}$ удовлетворяют (19)–(22), причём $\bar{z}_{ki}$ определяются единственно возможным образом, следовательно, выражение (14) для заданного D может принять одно единственное значение, совпадающее со значением выражения (1), и в силу единственности оно же будет максимальным. Значит, $(\bar{x}_i, \bar{y}_{ki}, \bar{z}_{ki})$ будет оптимальным решением задачи (14)–(22). Теорема 2 доказана.

Заключение

В рамках данной работы показано, что задача поиска минимального по включению доминирующего множества с разрезом наибольшего веса NP-полна в случае ориентированного графа.

Построенная модель в виде системы с $|V| + 2|A|$ переменными и $2|V| + 4|A|$ ограничениями вполне может уже сейчас использоваться в специализированных пакетах прикладных программ для расчётов на графах не очень высокой размерности.

Более того, после некоторого упрощения построенная ЦЛП-модель может быть применена и к задаче MAX MIN DOMINATING SET в её ориентированном варианте. Соответствующая система с $|V| + |A|$ переменными и $|V| + 2|A|$ ограничениями приведена в [7], а доказательство вытекает непосредственно из лемм 3 и 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. М.: Мир, 1978.
2. Karp R. M. Reducibility among combinatorial problems // Complexity of Computer Computations. Proc. Symp. CCC (Yorktown Heights, USA, Mar. 20–22, 1972). New York: Plenum Press, 1972. P. 85–103.
3. Ageev A., Hassin R., Sviridenko M. A 0.5-approximation algorithm for max dicut with given sizes of parts // SIAM J. Discrete Math. 2001. Vol. 14, No. 2. P. 246–255.
4. Lee J., Nagarajan V., Shen X. Max-cut under graph constraints // Integer Programming and Combinatorial Optimization. Proc. 18th Int. Conf. (Liège, Belgium, June 1–3, 2016). Cham: Springer, 2016. P. 50–62. (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 9682).
5. Cheston G. A., Fricke G., Hedetniemi S. T., Jacobs D. P. On the computational complexity of upper fractional domination // Discrete Appl. Math. 1990. Vol. 27, No. 3. P. 195–207.
6. Boria N., Della Croce F., Paschosdef V. Th. On the max min vertex cover problem // Discrete Appl. Math. 2015. Vol. 196. P. 62–71.
7. Симанчёв Р. Ю., Уразова И. В., Ворошилов В. В., Карпов В. В., Кораблёва А. А. Выбор системы ключевых показателей экономической безопасности региона с использованием модели (0, 1)-программирования // Вестн. Омск. гос. ун-та. Сер. Экономика. 2019. Т. 17, № 3. С. 170–179.
8. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.

Ворошилов Владимир Владимирович

Статья поступила

27 мая 2020 г.

После доработки —

19 июня 2020 г.

Принята к публикации

22 июня 2020 г.

A MAXIMUM DICUT IN A DIGRAPH INDUCED
BY A MINIMAL DOMINATING SET

V. V. Voroshilov

Dostoevsky Omsk State University,
55a Mir Avenue, 644077 Omsk, Russia

E-mail: voroshil@gmail.com

Abstract. Let $G = (V, A)$ be a simple directed graph and let $S \subseteq V$ be a subset of the vertex set V . The set S is called dominating if for each vertex $j \in V \setminus S$ there exist at least one $i \in S$ and an edge from i to j . A dominating set is called (inclusion) minimal if it contains no smaller dominating set. A dicut $\{S \rightarrow \overline{S}\}$ is a set of edges $(i, j) \in A$ such that $i \in S$ and $j \in V \setminus S$. The weight of a dicut is the total weight of all its edges. The article deals with the problem of finding a dicut $\{S \rightarrow \overline{S}\}$ with maximum weight among all minimal dominating sets. Illustr. 6, bibliogr. 8.

Keywords: directed graph, weighted graph, maximum dicut, inclusion minimal dominating set.

REFERENCES

1. **N. Christofides**, *Graph Theory: An Algorithmic Approach* (Academic Press, London, 1975; Mir, Moscow, 1978 [Russian]).
2. **R. M. Karp**, Reducibility among combinatorial problems, *Complexity of Computer Computations* (Proc. Symp. CCC, Yorktown Heights, USA, March 20–22, 1972) (Plenum Press, New York, 1972), pp. 85–103.
3. **A. Ageev**, **R. Hassin**, and **M. Sviridenko**, A 0.5-approximation algorithm for max dicut with given sizes of parts, *SIAM J. Discrete Math.* **14** (2), 246–255 (2001).
4. **J. Lee**, **N. Viswanath**, and **X. Shen**, Max-cut under graph constraints, *Programming and Combinatorial Optimization* (Proc. 18th Int. Conf., Liège, Belgium, June 1–3, 2016) (Springer, Cham, 2016), pp. 50–62 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 9682).

5. **G. A. Cheston, G. Fricke, S. T. Hedetniemi, and D. P. Jacobs**, On the computational complexity of upper fractional domination, *Discrete Appl. Math.* **27** (3), 195–207 (1990).
6. **N. Boria, F. Della Croce, and V. Th. Paschosdef**, On the max min vertex cover problem, *Discrete Appl. Math.* **196**, 62–71 (2015).
7. **R. Yu. Simanchev, I. V. Urazova, V. V. Voroshilov, V. V. Karpov, and A. A. Korableva**, Selection of the key-indicator system for the economic security of a region using a $(0,1)$ -programming model, *Vestn. Omsk. Univ., Ser. Ekonomika*, **17** (3), 170–179 (2019) [Russian].
8. **M. R. Garey and D. S. Johnson**, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness* (Freeman, San Francisco, 1979; Mir, Moscow, 1982 [Russian]).

Vladimir V. Voroshilov

Received May 27, 2020

Revised June 19, 2020

Accepted June 22, 2020