Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

K. L. Rychkov, On the perfectness of minimal regular partitions of the edge set of the n -dimensional cube, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.*, 2019, Volume 26, Issue 4, 74–107

DOI: <https://doi.org/10.33048/daio.2019.26.662>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.92.164.108

April 26, 2023, 07:53:41

О СОВЕРШЕННОСТИ МИНИМАЛЬНЫХ ПРАВИЛЬНЫХ РАЗБИЕНИЙ МНОЖЕСТВА РЁБЕР n -МЕРНОГО КУБА ^{*)}

К. Л. Рычков

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия
E-mail: rychkov@math.nsc.ru

Аннотация. Доказано, что при $n = 3, 5$ и при n , равном степени двойки, любое минимальное правильное разбиение множества рёбер n -мерного куба является совершенным. Следствием этих результатов является описание классов всех минимальных параллельно-последовательных контактных схем (π -схем), реализующих линейные булевы функции, существенно зависящие от n переменных при соответствующих значениях n . Библиогр. 16.

Ключевые слова: булева функция, π -схема, правильное разбиение множества рёбер n -мерного куба, нижняя оценка сложности.

Введение

В статьях [1–3] В. М. Храпченко сформулировал некоторый общий метод получения нижних оценок сложности π -схем, реализующих данную конкретную булеву функцию $f(x_1, \dots, x_n)$. В дальнейшем этот метод получил своё развитие в работах многих других авторов [4–10]. Заметим, что возможности метода не исчерпываются только нижними оценками сложности π -схем. В [11] на его основе удалось получить полное описание класса всех минимальных π -схем, реализующих линейную булеву функцию, существенно зависящую от $n = 2^k$ переменных. А именно, было показано, что любая минимальная π -схема для такой функции по сути является π -схемой, построенной по несколько обобщённому алгоритму С. В. Яблонского [11–13]. Естественным образом возникает гипотеза, состоящая в том, что та же картина должна сохраняться и для произвольного n , т. е. в случае линейной булевой функции, существенно зависящей от произвольного числа переменных. В настоящей работе приведено решение задач, к которым в [13] на основе метода В. М. Храпченко сведено

^{*)} Исследование выполнено при финансовой поддержке Программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.5.1 (проект № 0314–2019–0016).

доказательство этой гипотезы в случаях $n = 2^k$, $n = 3$ и $n = 5$. Эти задачи заключаются в том, чтобы доказать утверждения, сформулированные ниже как теоремы 1, 2 и 3 соответственно.

Единичным n -мерным кубом B^n называется множество всех двоичных наборов $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, где $\alpha_i \in \{0, 1\}$, $1 \leq i \leq n$. Сами двоичные наборы называются *вершинами куба*. Вершину $\alpha \in B^n$ будем называть *чётной*, если $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 0 \pmod{2}$. В противном случае назовём её *нечётной*. Через N^0, N^1 обозначим множество всех чётных и нечётных вершин куба B^n соответственно.

Элементы множества $N^0 \times N^1$ назовём *(0-1)-парами* куба B^n . Для произвольной (0-1)-пары $(\alpha, \beta) \in N^0 \times N^1$ вершины α, β будем называть *концами пары*. При этом вершину α назовём *чётным концом*, вершину β — *нечётным*, множество $N^0 \times N^1$ — *множеством (0-1)-пар* куба B^n .

Множество вида $A^0 \times A^1$, где $A^0 \subseteq N^0$, $A^1 \subseteq N^1$, будем называть *прямоугольным подмножеством* множества $N^0 \times N^1$ или *прямоугольником*.

Для произвольного подмножества $M \subseteq N^0 \times N^1$ через $N^0(M), N^1(M)$ обозначим соответственно множества всех чётных и нечётных концов (0-1)-пар из M . Прямоугольник $[M] = N^0(M) \times N^1(M)$ назовём *прямоугольником, натянутым на M* .

Через $\text{dist}(\alpha, \beta)$ обозначим *расстояние Хэмминга* между вершинами $\alpha, \beta \in B^n$, т. е. число разрядов, в которых наборы $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ отличаются друг от друга.

Пара $(\alpha, \beta) \in N^0 \times N^1$ называется *(0-1)-ребром* куба B^n , если $\text{dist}(\alpha, \beta) = 1$. Если при этом для некоторого $i \in \{1, \dots, n\}$ выполнено $\alpha_i \neq \beta_i$, то пара (α, β) называется *(0-1)-ребром направления i* . Если помимо этого $\alpha_i = 1$, $\beta_i = 0$, то пару (α, β) будем называть *отрицательным*, а если $\alpha_i = 0$, $\beta_i = 1$, то *положительным (0-1)-ребром направления i* .

Множество всех (0-1)-рёбер куба B^n будем называть *множеством R куба B^n* или просто *множеством R* . Множество R_i^{-1} всех отрицательных и множество R_i^1 всех положительных (0-1)-рёбер направления i куба B^n назовём *отрицательной* и *положительной компонентами с номером i множества R* соответственно, $i = 1, \dots, n$. Множество R_i всех (0-1)-рёбер направления i куба B^n назовём *большой компонентой с номером i множества R* , $i = 1, \dots, n$.

Подмножество Q множества R называется *однородным*, если существуют такие $i \in \{1, \dots, n\}$, $\delta \in \{-1, 1\}$, что $Q \subseteq R_i^\delta$ (другими словами, если Q состоит из (0-1)-рёбер одного направления и одного знака).

Семейство $P = \{Q_1, \dots, Q_L\}$ непустых подмножеств некоторого множества A называется *разбиением* этого множества, если подмножества $Q_1, \dots, Q_L$ попарно не пересекаются и $Q_1 \cup \dots \cup Q_L = A$. Мощность семейства P называется *мощностью разбиения*, а множества $Q_1, \dots, Q_L$ — *блоками разбиения*.

Разбиение $P = \{Q_1, \dots, Q_L\}$ множества R назовём *однородным*, если все блоки $Q_1, \dots, Q_L$ этого разбиения являются однородными подмножествами R . Разбиение $P = \{Q_1, \dots, Q_L\}$ множества R назовём *правильным*, если оно однородно и прямоугольники $[Q_1], \dots, [Q_L]$ попарно не пересекаются; назовём его *неправильным*, если оно однородно и не является правильным. Правильное разбиение множества R назовём *минимальным*, если оно имеет наименьшую мощность среди всех правильных разбиений этого множества. Мощность минимального правильного разбиения множества R обозначим через μ_n . Правильное разбиение $P = \{Q_1, \dots, Q_L\}$ множества R назовём *совершенным*, если выполнено равенство $[Q_1] \cup \dots \cup [Q_L] = N^0 \times N^1$.

Отметим, что множество рёбер любого n -мерного куба в евклидовом пространстве можно естественным образом отождествить с множеством R куба B^n . При этом такие понятия, как однородность, правильность и совершенность правильного разбиения множества рёбер n -мерного куба, не зависят от способа такого (естественного) отождествления. В этом смысле используем эти понятия как по отношению к множеству R куба B^n , так и по отношению к множеству рёбер произвольного n -мерного куба.

В [13] установлено, что в общем случае для доказательства вышеупомянутой гипотезы достаточно доказать, что, во-первых, справедливо равенство

$$\mu_n = n^2 + n(n - 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}) - 2(n - 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor})^2, \quad (1)$$

а во-вторых, все минимальные правильные разбиения множества R куба B^n совершенны.

В [14] приведено доказательство равенства (1) при $n = 2^k$ и при $n = 3, 5, 6, 7$. Поэтому для доказательства этой гипотезы в случаях $n = 2^k$, $n = 3$ и $n = 5$ достаточно доказать соответственно следующие три утверждения (что и составляет цель настоящей статьи).

Теорема 1. При $n = 2^k$ любое минимальное правильное разбиение множества рёбер n -мерного куба совершенно.

Теорема 2. Любое минимальное правильное разбиение множества рёбер 3-мерного куба совершенно.

Теорема 3. Любое минимальное правильное разбиение множества рёбер 5-мерного куба совершенно.

Теорема 1 впервые была доказана в [11]. Основным результатом настоящей статьи является теорема 3.

Заметим, что из равенства (1) следует, что $\mu_3 = 10$, $\mu_5 = 28$ и при $n = 2^k$ справедливо равенство $\mu_n = n^2$.

1. Доказательство теорем 1 и 2

Через U_n и Correct_n обозначим множество всех однородных и всех правильных разбиений множества R соответственно. Через $U_n(L)$ и $\text{Correct}_n(L)$ обозначим соответственно множество всех таких $P \in U_n$ и множество всех таких $P \in \text{Correct}_n$, что $|P| = L$.

Для произвольного семейства $P = \{Q_1, \dots, Q_L\}$ однородных подмножеств множества R множество $G(P) = \{[Q_1], \dots, [Q_L]\}$ назовём *гирляндой* семейства P , а величину $s(P) = |[Q_1]| + \dots + |[Q_L]|$ — *площадью гирлянды* $G(P)$.

Лемма 1. Для любого семейства P однородных подмножеств множества R справедливо равенство

$$s(P) = \sum_{Q \in P} |Q|^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из однородности произвольного $Q \in P$ следует, что (0-1)-рёбра из Q имеют одно направление и тем самым не имеют общих концов. Значит, справедливы равенства $|N^0(Q)| = |N^1(Q)| = |Q|$, а потому и равенство $|[Q]| = |Q|^2$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Если для правильного разбиения $P \in \text{Correct}_n$ справедливо неравенство $s(P) \geq (2^{n-1})^2$, то P совершенно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $|N^0 \times N^1| = (2^{n-1})^2$ и по определению для правильного разбиения $P = \{Q_1, \dots, Q_L\}$ множества R справедливо равенство $s(P) = |[Q_1] \cup \dots \cup [Q_L]|$. Поэтому из неравенства $s(P) \geq (2^{n-1})^2$ следует, что $|[Q_1] \cup \dots \cup [Q_L]| \geq |N^0 \times N^1|$. Значит, из включения $[Q_1] \cup \dots \cup [Q_L] \subseteq N^0 \times N^1$ вытекает, что $[Q_1] \cup \dots \cup [Q_L] = N^0 \times N^1$. Последнее равенство по определению означает, что разбиение P совершенно. Лемма 2 доказана.

В силу леммы 2 для доказательства теорем 1–3 достаточно установить справедливость неравенства $s(P) \geq (2^{n-1})^2$ для всех $P \in \text{Correct}_n(\mu_n)$ при соответствующих значениях n .

Лемма 3. При любом $n \geq 1$ для любого однородного разбиения $P \in U_n(n^2)$ справедливо неравенство $s(P) \geq (2^{n-1})^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольное однородное разбиение $P = \{Q_1, \dots, Q_{n^2}\}$ множества R . В силу леммы 1, неравенства Коши — Буняковского и очевидных равенств $|Q_1| + \dots + |Q_{n^2}| = |R| = n2^{n-1}$ имеем

$$\begin{aligned} s(P) &= |[Q_1]| + \dots + |[Q_{n^2}]| = |Q_1|^2 + \dots + |Q_{n^2}|^2 \\ &\geq \frac{(|Q_1| + \dots + |Q_{n^2}|)^2}{n^2} = \frac{|R|^2}{n^2} = \frac{(n2^{n-1})^2}{n^2} = (2^{n-1})^2. \end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

Справедливость неравенства $s(P) \geq (2^{n-1})^2$ для всех $P \in \text{Correct}_n(\mu_n)$ при $n = 2^k$ следует из выполненного при этих n равенства $\mu_n = n^2$, включения $\text{Correct}_n(n^2) \subseteq U_n(n^2)$ и леммы 3. Теорема 1 доказана.

Лемма 4. Для любого однородного разбиения $P \in U_3(10)$ справедливо неравенство $s(P) \geq (2^{3-1})^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что для множества R куба B^3 справедливо равенство $|R| = 12$, а для любого непустого однородного подмножества Q множества R куба B^3 справедливы неравенства $1 \leq |Q| \leq 2$. Поэтому произвольное однородное разбиение $P = \{Q_1, \dots, Q_{10}\}$ множества R куба B^3 состоит из 8 блоков мощности 1 и из двух блоков мощности 2. Значит, для этого разбиения в силу леммы 1 имеем

$$\begin{aligned} s(P) &= |[Q_1]| + \dots + |[Q_{10}]| \\ &= |Q_1|^2 + \dots + |Q_{10}|^2 = 8 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2 = 16 = (2^{3-1})^2. \end{aligned}$$

Лемма 4 доказана.

Справедливость неравенства $s(P) \geq (2^{n-1})^2$ для всех $P \in \text{Correct}_n(\mu_n)$ при $n = 3$ следует из равенства $\mu_3 = 10$, включения $\text{Correct}_3(10) \subseteq U_3(10)$ и леммы 4. Теорема 2 доказана.

В отличие от случаев $n = 2^k$ и $n = 3$ при $n = 5$ среди однородных разбиений $P \in U_n(\mu_n)$ существуют такие P , что $s(P) < (2^{n-1})^2$. Суть доказательства теоремы 3 заключается в том, чтобы показать неправильность всех таких P .

2. Признаки неправильности однородных разбиений множества R

Всюду далее полагаем $n \geq 2$.

Для произвольного однородного разбиения P множества R подмножества

$$P_i^{-1} = \{Q \in P \mid Q \subseteq R_i^{-1}\}, \quad P_i^1 = \{Q \in P \mid Q \subseteq R_i^1\}, \quad P_i = P_i^{-1} \cup P_i^1$$

множества P назовём *отрицательной*, *положительной* и *большой компонентой с номером i разбиения P* соответственно, $i = 1, \dots, n$.

Заметим, что любая компонента P_i^δ однородного разбиения P множества R является разбиением соответствующей компоненты R_i^δ множества R .

Матрицей сложности однородного разбиения P множества R назовём матрицу $\mathbb{L}(P) = (\ell_i^\delta)_{i=1, \dots, n}^{\delta=-1, 1}$ размера $2 \times n$, где $\ell_i^\delta = |P_i^\delta|$. Для произвольного $i \in \{1, \dots, n\}$ матрицу

$$\mathbb{L}_{(i)}(P) = \begin{pmatrix} \ell_1^{-1} & \dots & \ell_{i-1}^{-1} & \min\{\ell_i^{-1}, \ell_i^1\} & \ell_{i+1}^{-1} & \dots & \ell_n^{-1} \\ \ell_1^1 & \dots & \ell_{i-1}^1 & \min\{\ell_i^{-1}, \ell_i^1\} & \ell_{i+1}^1 & \dots & \ell_n^1 \end{pmatrix}$$

будем называть *нижней производной матрицы $\mathbb{L}(P)$ по столбцу с номером i* . Заметим, что элементы матриц $\mathbb{L}(P)$ и $\mathbb{L}_{(i)}(P)$ являются целыми положительными числами.

Величины $\|\mathbb{L}\|_{-1}$ и $\|\mathbb{L}\|_1$ для числовой матрицы $\mathbb{L} = (\ell_i^\delta)$ с ненулевыми элементами определим формулами $\|\mathbb{L}\|_{-1} = \sum_{i, \delta} \frac{1}{\ell_i^\delta}$, $\|\mathbb{L}\|_1 = \sum_{i, \delta} \ell_i^\delta$.

Заметим, что для любого однородного разбиения P множества R справедливо равенство $|P| = \|\mathbb{L}(P)\|_1$.

Через $\mathfrak{L}(k)$ обозначим множество всех матриц с целыми положительными элементами размера $2 \times k$. Пусть $\mathfrak{L} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathfrak{L}(k)$. Через $\mathfrak{L}_{-1}^4$ обозначим класс всех матриц $\mathbb{L} \in \mathfrak{L}$ таких, что $\mathbb{L}$ удовлетворяет одному из двух условий:

- 1) $\|\mathbb{L}\|_{-1} > 4$;
- 2) $\|\mathbb{L}\|_{-1} = 4$ и не все элементы матрицы $\mathbb{L}$ равны степеням двойки.

Следующие две теоремы из [14] будем называть соответственно *первым* и *вторым признаком неправильности однородных разбиений множества R* (в [14] эти теоремы имеют номера 4 и 11 соответственно).

Теорема 4 (первый признак неправильности). *Если матрица сложности однородного разбиения P множества R принадлежит классу $\mathfrak{L}_{-1}^4$, то разбиение P неправильное.*

Теорема 5 (второй признак неправильности). *Если для однородного разбиения P множества R при некотором $i \in \{1, \dots, n\}$ справедливо включение $\mathbb{L}_{(i)}(P) \in \mathfrak{L}_{-1}^4$, то разбиение P неправильное.*

Для произвольных $0 \leq k \leq n$, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, $\sigma_1, \dots, \sigma_k \in \{0, 1\}$ множество $B_{i_1, \dots, i_k}^{\sigma_1, \dots, \sigma_k} = \{\alpha \in B^n \mid \alpha_{i_1} = \sigma_1, \dots, \alpha_{i_k} = \sigma_k\}$ называется *гранью* куба B^n , а число $\dim(F) = n - k$ — *размерностью* грани $F = B_{i_1, \dots, i_k}^{\sigma_1, \dots, \sigma_k}$. Множества

$$\text{Dir}(F) = \{i_1, \dots, i_k\} \quad \text{и} \quad \text{Form}(F) = \{1, \dots, n\} \setminus \text{Dir}(F)$$

называются *направлением* и *множеством образующих* этой грани соответственно.

Множество всех граней куба B^n обозначим через $\mathfrak{F}(B^n)$. Через $\mathfrak{F}_k(B^n)$ и $\mathfrak{F}_{\geq k}(B^n)$ обозначим множество всех граней $F \in \mathfrak{F}(B^n)$ размерностей $\dim(F) = k$ и $\dim(F) \geq k$ соответственно. Через $\mathfrak{F}_{\geq k}^1(B^n)$ обозначим

множество всех таких граней $F \in \mathfrak{F}_{\geq k}(\mathbb{B}^n)$, что число $\dim(F)$ нечётное. Для произвольной грани $F \in \mathfrak{F}(\mathbb{B}^n)$ через $\mathfrak{F}_k(F)$ обозначим множество всех таких $X \in \mathfrak{F}_k(\mathbb{B}^n)$, что $X \subseteq F$.

Будем говорить, что (0-1)-ребро $(\alpha, \beta) \in R$ является (0-1)-ребром грани $F \in \mathfrak{F}(\mathbb{B}^n)$, если выполнено включение $\{\alpha, \beta\} \subseteq F$.

Для произвольной грани $F \in \mathfrak{F}(\mathbb{B}^n)$ через $R(F)$ обозначим множество всех (0-1)-рёбер грани F . Множества

$$R_i^{-1}(F) = \{r \in R(F) \mid r \in R_i^{-1}\}, \quad R_i^1(F) = \{r \in R(F) \mid r \in R_i^1\},$$

$$R_i(F) = R_i^{-1}(F) \cup R_i^1(F)$$

будем называть *отрицательной*, *положительной* и *большой компонентой с номером i множества $R(F)$* соответственно, $i = 1, \dots, n$.

Следующая лемма вытекает непосредственно из определений.

Лемма 5. Для любой грани $F \in \mathfrak{F}_{\geq 2}(\mathbb{B}^n)$ справедливо равенство

$$|R_i^\delta(F)| = \begin{cases} 2^{\dim(F)-2}, & \text{если } i \in \text{Form}(F), \delta \in \{-1, 1\}, \\ 0, & \text{если } i \in \text{Dir}(F), \delta \in \{-1, 1\}. \end{cases}$$

Будем говорить, что грань $F \in \mathfrak{F}_{\geq 2}(\mathbb{B}^n)$ является *опорной* для компоненты P_i^δ , $i \in \{1, \dots, n\}$, $\delta \in \{-1, 1\}$, однородного разбиения $P \in \mathcal{U}_n$, если $R_i^\delta(F) \neq \emptyset$ (т. е. если $i \in \text{Form}(F)$) и для некоторого $Q \in P_i^\delta$ выполнено включение $R_i^\delta(F) \subseteq Q$.

Множество $D(F) = \{(\alpha, \beta) \in N^0 \times N^1 \mid \text{dist}(\alpha, \beta) = \dim(F)\}$ называется *диаметральным множеством* грани F .

Соединением куба $\mathbb{B}^n$ будем называть любое однородное двухэлементное подмножество $e = \{r_1, r_2\}$ множества R . *Индексом* и *знаком соединения* e назовём номер направления и знак (0-1)-рёбер r_1, r_2 соответственно. Сами (0-1)-рёбра r_1, r_2 будем называть *концами* этого соединения.

Множество E всех соединений куба $\mathbb{B}^n$ будем называть *множеством E куба $\mathbb{B}^n$* или просто *множеством E* . Множество E_i^{-1} всех отрицательных и множество E_i^1 всех положительных соединений индекса i куба $\mathbb{B}^n$ назовём *отрицательной* и *положительной компонентой с номером i множества E* соответственно, $i = 1, \dots, n$. Множество E_i всех соединений индекса i куба $\mathbb{B}^n$ назовём *большой компонентой с номером i множества E* , $i = 1, \dots, n$.

Расстояние $\rho(r_1, r_2)$ между (0-1)-рёбрами $r_1, r_2 \in R$ определим как наименьшее из расстояний Хэмминга между концами (0-1)-ребра r_1 и концами (0-1)-ребра r_2 . *Длиной соединения $e = \{r_1, r_2\} \in E$* назовём величину $w(e) = \rho(r_1, r_2)$. Через $E[k]$ обозначим множество всех таких $e \in E$, что $w(e) = k$.

Заметим, что для любого соединения $e = \{r_1, r_2\} \in E$ минимум расстояний Хэмминга между концами (0-1)-ребра r_1 и концами (0-1)-ребра r_2

больше нуля и достигается на чётных (а также на нечётных) концах (0-1)-рёбер r_1, r_2 . Значит, длина $w(e)$ соединения $e \in E$ может принимать только чётные положительные значения и $w(e) < n$, поэтому справедливо равенство $E = \bigcup_{1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}} E[2k]$.

Будем говорить, что соединение $e = \{r_1, r_2\}$ куба B^n порождено семейством P однородных подмножеств множества R , если для некоторого $Q \in P$ оба конца этого соединения принадлежат Q . Для произвольного семейства P однородных подмножеств множества R через $E(P)$ обозначим множество всех соединений e куба B^n , порождённых семейством P . Через $E[k](P)$ обозначим множество всех таких $e \in E(P)$, что $w(e) = k$.

Для произвольного однородного подмножества $Q \subseteq R$ через $P_2(Q)$ обозначим множество всех 2-элементных подмножеств множества Q .

Следующая лемма вытекает непосредственно из определений.

Лемма 6. Для любого дизъюнктного семейства P однородных подмножеств множества R справедливо равенство $E(P) = \bigcup_{Q \in P} P_2(Q)$ и множества $P_2(Q)$, $Q \in P$, попарно не пересекаются.

Для произвольного соединения $e = \{r_1, r_2\} \in E$ через $\tilde{e}$ обозначим минимальную по включению грань $F \in \mathfrak{F}(B^n)$, содержащую все концы (0-1)-рёбер r_1, r_2 . При этом будем говорить, что соединение e порождает грань $F = \tilde{e}$ куба B^n . Заметим, что для любого соединения $e \in E$ справедливо равенство $\dim(\tilde{e}) = w(e) + 1$. Для произвольных однородного разбиения P множества R и грани $F \in \mathfrak{F}(B^n)$ через $E(P, F)$ обозначим множество всех таких $e \in E(P)$, что $\tilde{e} = F$.

Следующая лемма вытекает непосредственно из определений.

Лемма 7. Для любого однородного разбиения P множества R при любом чётном $k \in \{1, \dots, n-1\}$ множества $E(P, F)$, $F \in \mathfrak{F}_{k+1}(B^n)$, попарно не пересекаются и справедливо равенство

$$E[k](P) = \bigcup_{F \in \mathfrak{F}_{k+1}(B^n)} E(P, F).$$

Для произвольного однородного разбиения $P = \{Q_1, \dots, Q_L\}$ множества R точкой самопересечения гирлянды $G(P) = \{[Q_1], \dots, [Q_L]\}$ называется такая (0-1)-пара $(\alpha, \beta) \in N^0 \times N^1$, что $(\alpha, \beta) \in [Q_i] \cap [Q_j]$ для некоторых $[Q_i], [Q_j] \in G(P)$, $i \neq j$.

Очевидно, что однородное разбиение P множества R тогда и только тогда неправильно, когда гирлянда $G(P)$ имеет точку самопересечения.

Для произвольного однородного разбиения $P = \{Q_1, \dots, Q_L\}$ множества R и подмножества $M \subseteq N^0 \times N^1$ величина

$$\text{def}(P, M) = |M| - |([Q_1] \cup \dots \cup [Q_L]) \cap M|$$

называется *дефицитом гирлянды* $G(P)$ *относительно* M .

Заметим, что из этого определения следует, что $\text{def}(P, M) \geq 0$.

Теорема 6 (третий признак неправильности). *Если для однородного разбиения $P \in U_n$ существует такая грань $F \in \mathfrak{F}_{\geq 3}^1(B^n)$, что справедливо неравенство*

$$|E(P, F)| > 2^{\dim(F)-2} - \frac{1}{2}\text{def}(P, D(F)), \quad (2)$$

то разбиение P неправильное.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что диаметральное множество $D(F)$ грани F содержит точку самопересечения гирлянды $G(P)$. Предположим, напротив, что множество $D(F)$ не содержит точек самопересечения гирлянды $G(P)$. Лемма 47 из [14] утверждает, что в этом случае справедливо равенство

$$|E(P, F)| = \frac{1}{2}(|D(F)| - \text{def}(P, D(F))),$$

что в силу очевидного равенства $|D(F)| = 2^{\dim(F)-1}$ противоречит неравенству (2). Значит, наше предположение неверно и множество $D(F)$ содержит точку самопересечения гирлянды $G(P)$. Теорема 6 доказана.

Теорема 7 (четвёртый признак неправильности). *Если для однородного разбиения $P \in U_n$ существует такая 3-мерная грань $F \in \mathfrak{F}_3(B^n)$, что в множестве $E(P, F)$ имеются два соединения с разными индексами, то разбиение P неправильное.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что диаметральное множество $D(F)$ грани F содержит точку самопересечения гирлянды $G(P)$. Через e_1 и e_2 обозначим такие два соединения из $E(P, F)$, что e_1, e_2 имеют разные индексы. Тогда по определению множества $E(P, F)$ и по лемме 7 имеем $\tilde{e}_1 = \tilde{e}_2 = F$ и $e_1, e_2 \in E[2](P)$. Теорема 14 из [14] утверждает, что из этих соотношений и различия индексов соединений e_1, e_2 следует наличие в множестве $D(F)$ точки самопересечения гирлянды $G(P)$. Теорема 7 доказана.

Теорема 8 (пятый признак неправильности). *Если для некоторой компоненты P_i^δ , $i \in \{1, \dots, n\}$, $\delta \in \{-1, 1\}$, однородного разбиения $P \in U_n$ существует такая опорная для неё 4-мерная грань $F \in \mathfrak{F}_4(B^n)$, что каждый столбец матрицы сложности $\mathbb{L}(P) = (\ell_i^\delta)_{i=1, \dots, n}^{\delta=-1, 1}$ с номером из множества $\text{Form}(F) \setminus \{i\}$ содержит элемент, не превосходящий 3, то разбиение P неправильное.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что разбиение P является неправильным по четвёртому признаку (теорема 7). Для этого достаточно доказать существование такой 3-мерной грани $X \in \mathfrak{F}_3(F)$, что в множестве $E(P, X)$ имеются два соединения с разными индексами.

Без ограничения общности считаем, что грань F является опорной для компоненты P_1^1 , $\text{Form}(F) = \{1, 2, 3, 4\}$ и $\ell_2^1, \ell_3^1, \ell_4^1 \leq 3$. Тогда, во-первых, по лемме 5 при каждом $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ справедливо равенство $|R_i^1(F)| = 4$. Во-вторых, по определению опорной грани существует такое $Q \in P_1^1$, что $R_1^1(F) \subseteq Q$. В-третьих, при каждом $i \in \{2, 3, 4\}$ из $\ell_i^1 \leq 3$ и $R_i^1(F) \subseteq R_i^1$ следует существование такого $Q \in P_i^1$, что $|R_i^1(F) \cap Q| \geq 2$. Тем самым в силу леммы 6 имеем

$$\begin{aligned} |\mathbf{P}_2(R_1^1(F)) \cap E(P)| &= 6, & |\mathbf{P}_2(R_2^1(F)) \cap E(P)| &\geq 1, \\ |\mathbf{P}_2(R_3^1(F)) \cap E(P)| &\geq 1, & |\mathbf{P}_2(R_4^1(F)) \cap E(P)| &\geq 1. \end{aligned}$$

Эти соотношения наряду с включением $\mathbf{P}_2(R_i^\delta(F)) \subseteq E_i^\delta[2]$ означают существование девяти таких положительных соединений $e \in E[2](P)$, что $\tilde{e} \in \mathfrak{F}_3(F)$. Очевидно, что для любых двух различных $e_1, e_2 \in E[2]$ из одновременного совпадения индексов и знаков этих соединений следует, что $\tilde{e}_1 \neq \tilde{e}_2$. Поэтому равенство $|\mathfrak{F}_3(F)| = 8$ влечёт существование среди указанных девяти соединений двух таких, что они имеют разные индексы и порождают одну и ту же 3-мерную грань. Эта грань и является искомой гранью X . Теорема 8 доказана.

Теорема 9 (шестой признак неправильности). *Если для некоторой компоненты P_i^δ , $i \in \{1, \dots, n\}$, $\delta \in \{-1, 1\}$, однородного разбиения $P \in \mathcal{U}_n$ существует такая опорная для неё грань $F \in \mathfrak{F}_4(\mathcal{B}^n)$, что среди столбцов матрицы сложности $\mathbb{L}(P) = (\ell_i^\delta)_{i=1, \dots, n}^{\delta=-1, 1}$ с номерами из множества $\text{Form}(F) \setminus \{i\}$ найдутся два, один из которых содержит элемент, не превосходящий 2, а другой — элемент, не превосходящий 3, то разбиение P неправильное.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все рассуждения аналогичны рассуждениям из доказательства теоремы 8.

Без ограничения общности считаем, что грань F является опорной для компоненты P_1^1 , $\text{Form}(F) = \{1, 2, 3, 4\}$, $\ell_2^1 \leq 2$ и $\ell_3^1 \leq 3$. Тогда, во-первых, по лемме 5 при каждом $i \in \{1, 2, 3\}$ справедливо равенство $|R_i^1(F)| = 4$. Во-вторых, по определению опорной грани существует такое $Q \in P_1^1$, что $R_1^1(F) \subseteq Q$. В-третьих, из $\ell_2^1 \leq 2$ и $R_2^1(F) \subseteq R_2^1$ следует либо существование такого $Q \in P_2^1$, что $|R_2^1(F) \cap Q| \geq 3$, либо существование двух таких $Q_1, Q_2 \in P_2^1$, что $|R_2^1(F) \cap Q_1| = |R_2^1(F) \cap Q_2| = 2$. В-четвёртых, из $\ell_3^1 \leq 3$ и $R_3^1(F) \subseteq R_3^1$ следует существование такого

$Q \in P_3^1$, что $|R_3^1(F) \cap Q| \geq 2$, поэтому в силу леммы 6 имеем

$$\begin{aligned} |P_2(R_1^1(F)) \cap E(P)| &= 6, & |P_2(R_2^1(F)) \cap E(P)| &\geq 2, \\ |P_2(R_3^1(F)) \cap E(P)| &\geq 1. \end{aligned}$$

Теорема 9 доказана.

3. Отношение двойственности на множестве $E[2]$ и седьмой признак неправильности однородных разбиений множества R куба B^n

Двойственной парой трёхмерной грани $F \in \mathfrak{F}_3(B^n)$ назовём такую пару соединений $\{e_1, e_2\} \subseteq E[2]$, что e_1, e_2 имеют одинаковые индексы и противоположные знаки и справедливы равенства $\tilde{e}_1 = \tilde{e}_2 = F$.

На множестве $E[2]$ определим бинарное отношение, которое будем называть *отношением двойственности*: по определению два соединения $e_1, e_2 \in E[2]$ связаны отношением двойственности, если пара $\{e_1, e_2\}$ является двойственной парой некоторой трёхмерной грани куба B^n .

Лемма 8. Для любой трёхмерной грани $F \in \mathfrak{F}_3(B^n)$ двойственными парами этой грани являются три пары $\{R_i^{-1}(F), R_i^1(F)\}$, $i \in \text{Form}(F)$, и только они.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 5 для любой грани $F \in \mathfrak{F}_3(B^n)$ среди $2n$ компонент $R_1^{-1}(F), \dots, R_n^{-1}(F), R_1^1(F), \dots, R_n^1(F)$ множества $R(F)$ непустыми являются следующие шесть: $R_i^\delta(F)$, $i \in \text{Form}(F)$, $\delta \in \{-1, 1\}$. При этом мощность каждой из этих шести компонент равна 2. Значит, все они являются соединениями куба B^n . Очевидно, что для соединения $e \in E[2]$ равенство $\tilde{e} = F$ выполнено тогда и только тогда, когда e совпадает с одной из этих шести компонент. Лемма 8 доказана.

Если соединения $e_1, e_2 \in E[2]$ связаны отношением двойственности, будем говорить, что *соединение e_2 двойственно соединению e_1* и писать $e_2 = e_1^*$.

Следующие два утверждения с очевидностью вытекают из леммы 8.

Лемма 9. Для любого соединения $e \in E[2]$ существует единственное двойственное ему соединение $e^* \in E[2]$. При этом соединения e и e^* имеют одинаковые индексы и противоположные знаки и справедливо равенство $e^{**} = e$.

Лемма 10. Если для однородного разбиения $P \in U_n$ и 3-мерной грани $F \in \mathfrak{F}_3(B^n)$ два различных соединения $e_1, e_2 \in E(P, F)$ не связаны отношением двойственности, то они имеют разные индексы.

Отношение двойственности следующим образом расширим до множества E : по определению два соединения $e_1, e_2 \in E$ связаны отношением двойственности, если $e_1, e_2 \in E[2]$ и соединения e_1, e_2 связаны отношением двойственности в $E[2]$.

Для произвольного множества $A \subseteq E$ через $(A)^*$ обозначим множество всех таких соединений $e \in E$, что e связано отношением двойственности с некоторым соединением из A .

Заметим, что если для подмножества $A \subseteq E$ концы любого соединения $e \in A$ принадлежат некоторому подмножеству $Q \subseteq R$, то пара множеств (Q, A) представляет собой граф с множеством вершин Q и множеством рёбер A .

Для произвольного $A \subseteq E$ множество $V(A)$ всех (0-1)-рёбер куба B^n , которые являются концами соединений $e \in A$, назовём *носителем* множества A . Подмножество $A \subseteq E$ будем называть *треугольником*, если треугольником (полным графом с тремя вершинами) является граф $(V(A), A)$. Подмножество $A \subseteq E$ будем называть *звездой*, если все соединения $e \in A$ имеют один общий конец (т. е. если звездой является граф $(V(A), A)$). Для произвольного множества $A \subseteq E$ через $\tilde{A}$ обозначим минимальную по включению грань куба B^n , содержащую все концы (0-1)-рёбер из $V(A)$.

Следующее простое утверждение вытекает из лемм 35–37 и 39 в [14].

Лемма 11. Для любого треугольника $\Delta \subseteq E[2]$ множество $(\Delta)^*$ является звездой и справедливы равенства $\dim(\tilde{\Delta}) = 4$ и $(\tilde{\Delta})^* = \tilde{\Delta}$.

Подмножество $A \subseteq E$ назовём *двойственно независимым*, если никакие два соединения $e_1, e_2 \in A$ не связаны отношением двойственности. Для произвольного подмножества $M \subseteq E$ подмножество $A \subseteq M$ назовём *наибольшим двойственно независимым подмножеством* множества M , если A является двойственно независимым и имеет наибольшую мощность среди всех двойственно независимых подмножеств множества M . Числом двойственной независимости $\mathfrak{B}^*(P)$ произвольного семейства P однородных подмножеств множества R назовём мощность наибольшего двойственно независимого подмножества множества $E(P)$.

Теорема 10 (седьмой признак неправильности). Если для однородного разбиения $P \in U_n$ выполнено неравенство

$$\mathfrak{B}^*(P) > 2^{n-3} \binom{n}{3} + 2^{n-2} \sum_{2 \leq k \leq \frac{n-1}{2}} \binom{n}{2k+1}, \quad (3)$$

то разбиение P неправильное.¹⁾

¹⁾ $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для однородного разбиения $P \in U_n$ через $\mathfrak{B}_2^*(P)$ обозначим мощность наибольшего двойственно независимого подмножества множества $E[2](P)$.

По определению расширенного отношения двойственности никакое соединение e из множества $E(P)$ с длиной $w(e) > 2$ не связано отношением двойственности ни с каким другим соединением из этого множества. Поэтому для наибольшего двойственно независимого подмножества $A \subseteq E(P)$ при $k \geq 2$ справедливо равенство $A \cap E[2k](P) = E[2k](P)$, а множество $A \cap E[2](P)$ является наибольшим двойственно независимым подмножеством множества $E[2](P)$. Отсюда в силу того, что множества $E[2k](P)$, $1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$, попарно не пересекаются и справедливо равенство $E(P) = \bigcup_{1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}} E[2k](P)$, имеем

$$\mathfrak{B}^*(P) = \mathfrak{B}_2^*(P) + \sum_{2 \leq k \leq \frac{n-1}{2}} |E[2k](P)|.$$

Значит, из неравенства (3) следует, что либо выполнено неравенство $\mathfrak{B}_2^*(P) > 2^{n-3} \binom{n}{3}$, либо для некоторого k , $2 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$, выполнено неравенство $|E[2k](P)| > 2^{n-2} \binom{n}{2k+1}$.

Пусть $\mathfrak{B}_2^*(P) > 2^{n-3} \binom{n}{3}$. Тогда $|A| > 2^{n-3} \binom{n}{3}$ для наибольшего двойственно независимого подмножества A множества $E[2](P)$, поэтому из леммы 7 и равенства $|\mathfrak{F}_3(B^n)| = 2^{n-3} \binom{n}{3}$ следует существование такой 3-мерной грани $F \in \mathfrak{F}_3(B^n)$, что $|A \cap E(P, F)| \geq 2$. Последнее неравенство означает, что в множестве $E(P, F)$ имеются два различных соединения, не связанных отношением двойственности. По лемме 10 эти соединения имеют разные индексы. Значит, по четвёртому признаку (теорема 7) разбиение P неправильное.

Предположим, что для некоторого k , $2 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$, выполнено неравенство $|E[2k](P)| > 2^{n-2} \binom{n}{2k+1}$. Тогда в силу леммы 7 из равенства $|\mathfrak{F}_{2k+1}(B^n)| = 2^{n-2k-1} \binom{n}{2k+1}$ следует существование $(2k+1)$ -мерной грани $F \in \mathfrak{F}_{2k+1}(B^n)$ такой, что $|E(P, F)| > 2^{(2k+1)-2}$. Значит, по третьему признаку (теорема 6) разбиение P неправильное. Теорема 10 доказана.

4. О способах оценки величины $\mathfrak{B}^*(P)$

Множество всех целочисленных наборов $\bar{z} = (z_1, \dots, z_k)$ обозначим через $\mathbb{Z}^k$. Через $\mathfrak{M}(k)$ обозначим множество всех таких $\bar{z} = (z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{Z}^k$, что выполнены неравенства $z_1 \geq \dots \geq z_k \geq 1$. Пусть $\mathfrak{M} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathfrak{M}(k)$.

Величины $\|\bar{z}\|_{-1}$, $\|\bar{z}\|_1$, $\|\bar{z}\|_2$, $\|\bar{z}\|_C$ и $\|\bar{z}\|_T$ для произвольного набора $\bar{z} = (z_1, \dots, z_k) \in \mathfrak{M}$ определим формулами

$$\|\bar{z}\|_{-1} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{z_i}, \quad \|\bar{z}\|_1 = \sum_{i=1}^k z_i, \quad \|\bar{z}\|_2 = \sum_{i=1}^k z_i^2, \\ \|\bar{z}\|_C = \sum_{i=1}^k \binom{z_i}{2}, \quad \|\bar{z}\|_T = \sum_{i=1}^k \left\lfloor \frac{(z_i - 1)^2}{4} \right\rfloor.^{2)}$$

Через $\mathfrak{M}(k, L)$ обозначим множество таких $\bar{z} \in \mathfrak{M}(k)$, что $\|\bar{z}\|_1 = L$. Через $\bar{\mathfrak{m}}(k, L)$ обозначим *максимально равномерный вектор* из множества $\mathfrak{M}(k, L)$, т. е. такой набор $(z_1, \dots, z_k) \in \mathfrak{M}(k, L)$, что числа $z_1, \dots, z_k$ отличаются друг от друга не более чем на 1.

Нам понадобятся два следующих, доказанных в [14] (теорема 26 и лемма 50) утверждения.

Лемма 12. При любых k, L таких, что $1 \leq k \leq L$, и для любого $\bar{z} \in \mathfrak{M}(k, L)$ из того, что $\bar{z} \neq \bar{\mathfrak{m}}(k, L)$, следует, что

$$\|\bar{z}\|_{-1} > \|\bar{\mathfrak{m}}(k, L)\|_{-1}, \quad \|\bar{z}\|_C > \|\bar{\mathfrak{m}}(k, L)\|_C, \quad \|\bar{z}\|_T \geq \|\bar{\mathfrak{m}}(k, L)\|_T.$$

Лемма 13. При любых k, L таких, что $1 \leq k \leq L$, справедливо неравенство $\|\bar{\mathfrak{m}}(k, L)\|_{-1} > \|\bar{\mathfrak{m}}(k, L+1)\|_{-1}$.

Для произвольного подмножества $A \subseteq E$ множества

$$A_i^{-1} = A \cap E_i^{-1}, \quad A_i^1 = A \cap E_i^1, \quad A_i = A \cap E_i$$

будем называть *отрицательной, положительной и большой компонентой с номером i множества A* соответственно, $i = 1, \dots, n$.

Заметим, что большие компоненты $A_1, \dots, A_n$ любого подмножества $A \subseteq E$ попарно не пересекаются и, если $A \subseteq M \subseteq E$, то справедливы включения $A_1 \subseteq M_1, \dots, A_n \subseteq M_n$.

Лемма 14. Подмножество $A \subseteq M$ тогда и только тогда является наибольшим двойственно независимым подмножеством множества $M \subseteq E$, когда каждая большая компонента A_i этого подмножества является наибольшим двойственно независимым подмножеством соответствующей большой компоненты M_i множества M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно заметить, что в силу леммы 9 при $i \neq j$ соединения из M_i не связаны отношением двойственности с соединениями из M_j . Лемма 14 доказана.

Теорема 11. Для любого однородного разбиения $P \in U_n$ справедливо равенство

$$\mathfrak{B}^*(P) = \sum_{i=1}^n \mathfrak{B}^*(P_i).$$

²⁾ $\lfloor x \rfloor$ — наибольшее целое число, не превосходящее x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждая большая компонента $E_i(P)$ множества $E(P)$ связана равенством $E_i(P) = E(P_i)$ с соответствующей большой компонентой P_i однородного разбиения $P \in U_n$, и для наибольшего двойственно независимого подмножества A множества $E(P)$ справедливо равенство $|A| = |A_1| + \dots + |A_n|$. Поэтому теорема 11 является следствием леммы 14. Теорема 11 доказана.

Лемма 15. Для больших компонент однородного разбиения $P \in U_n$ справедливы неравенства

$$\mathfrak{B}^*(P_i) \geq |E(P_i^\delta)| + |E(P_i^{-\delta} \setminus (E[2](P_i^\delta))^*)|, \quad i = 1, \dots, n, \quad \delta = -1, 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 9 соединения e и e^* всегда имеют противоположные знаки. Значит, при любом $i \in \{1, \dots, n\}$ компоненты M_i^{-1} и M_i^1 произвольного множества $M \subseteq E$ являются двойственно независимыми подмножествами M , поэтому при любом $\delta \in \{-1, 1\}$ множество $M_i^\delta \cup (M_i^{-\delta} \setminus (M_i^\delta)^*)$ также является двойственно независимым подмножеством M . Из очевидного равенства $(M_i^\delta)^* = (M_i^\delta \cap E[2])^*$ следует, что $M_i^\delta \cup (M_i^{-\delta} \setminus (M_i^\delta)^*) = M_i^\delta \cup (M_i^{-\delta} \setminus (M_i^\delta \cap E[2])^*)$. Тем самым при любом $\delta \in \{-1, 1\}$ множество $M_i^\delta \cup (M_i^{-\delta} \setminus (M_i^\delta \cap E[2])^*)$ является двойственно независимым подмножеством множества M . Из $M_i^\delta \cap M_i^{-\delta} = \emptyset$ вытекает равенство

$$|M_i^\delta \cup (M_i^{-\delta} \setminus (M_i^\delta \cap E[2])^*)| = |M_i^\delta| + |(M_i^{-\delta} \setminus (M_i^\delta \cap E[2])^*)|.$$

Для завершения доказательства осталось заметить, что для компонент $E_i^\delta(P_i)$, $\delta \in \{-1, 1\}$, множества $E(P_i)$ справедливы равенства $E_i^\delta(P_i) = E(P_i^\delta)$ и $E_i^\delta(P_i) \cap E[2] = E[2](P_i^\delta)$. Лемма 15 доказана.

Лемма 16. Для компонент однородного разбиения $P \in U_n$ с матрицей сложности $\mathbb{L}(P) = (\ell_i^\delta)_{i=1, \dots, n}^{\delta=-1, 1}$ справедливы неравенства

$$|E(P_i^\delta)| \geq \|\overline{\mathfrak{m}}(\ell_i^\delta, 2^{n-2})\|_C, \quad i = 1, \dots, n, \quad \delta = -1, 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая, что компонента P_i^δ однородного разбиения $P \in U_n$ является разбиением соответствующей компоненты R_i^δ множества R и $|R_i^\delta| = 2^{n-2}$, по леммам 6 и 12 имеем

$$\begin{aligned} |E(P_i^\delta)| &= \sum_{Q \in P_i^\delta} |\mathbf{P}_2(Q)| = \sum_{Q \in P_i^\delta} \binom{|Q|}{2} \\ &\geq \|\overline{\mathfrak{m}}(|P_i^\delta|, |R_i^\delta|)\|_C = \|\overline{\mathfrak{m}}(\ell_i^\delta, 2^{n-2})\|_C. \end{aligned}$$

Лемма 16 доказана.

Теорема 12. Для больших компонент однородного разбиения $P \in U_n$ с матрицей сложности $\mathbb{L}(P) = (\ell_i^\delta)_{i=1, \dots, n}^{\delta=-1, 1}$ справедливы неравенства

$$\mathfrak{B}^*(P_i) \geq \|\overline{\mathfrak{m}}(\ell_i^\delta, 2^{n-2})\|_C, \quad i = 1, \dots, n, \quad \delta = -1, 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из лемм 15 и 16. Теорема 12 доказана.

Теорема 13. Если ни одна 4-мерная грань куба B^n не является опорной для компоненты P_i^δ , $i \in \{1, \dots, n\}$, $\delta \in \{-1, 1\}$, однородного разбиения $P \in U_n$ с матрицей сложности $\mathbb{L}(P) = (\ell_i^\delta)_{i=1, \dots, n}^{\delta=-1, 1}$, то для большой компоненты P_i этого разбиения справедливо неравенство

$$\mathfrak{B}^*(P_i) \geq \|\overline{\mathfrak{m}}(\ell_i^\delta, 2^{n-2})\|_C + \|\overline{\mathfrak{m}}(\ell_i^{-\delta}, 2^{n-2})\|_T.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из лемм 15 и 16 следует, что

$$\mathfrak{B}^*(P_i) \geq \|\overline{\mathfrak{m}}(\ell_i^\delta, 2^{n-2})\|_C + |E(P_i^{-\delta}) \setminus (E[2](P_i^\delta))^*|,$$

поэтому для доказательства теоремы 13 достаточно доказать следующее утверждение.

Лемма 17. Если ни одна 4-мерная грань куба B^n не является опорной для компоненты P_i^δ , $i \in \{1, \dots, n\}$, $\delta \in \{-1, 1\}$, однородного разбиения $P \in U_n$ с матрицей сложности $\mathbb{L}(P) = (\ell_i^\delta)_{i=1, \dots, n}^{\delta=-1, 1}$, то справедливо неравенство

$$|E(P_i^{-\delta}) \setminus (E[2](P_i^\delta))^*| \geq \|\overline{\mathfrak{m}}(\ell_i^{-\delta}, 2^{n-2})\|_T. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем неравенство (4) в предположении, что множество $(E[2](P_i^\delta))^*$ не содержит треугольников. Для этого рассмотрим граф с множеством вершин $R_i^{-\delta}$ и множеством рёбер $E(P_i^{-\delta}) \setminus (E[2](P_i^\delta))^*$, т. е. граф

$$(R_i^{-\delta}, E(P_i^{-\delta}) \setminus (E[2](P_i^\delta))^*).$$

В силу леммы 6 он является дизъюнктивным объединением графов

$$(Q, P_2(Q) \setminus (E[2](P_i^\delta))^*), \quad Q \in P_i^{-\delta}.$$

Кроме того, в силу нашего предположения каждый из этих последних графов является дополнением графа без треугольников.

Известная теорема Турана [15, 16] утверждает, что число рёбер у графа, имеющего q вершин и не содержащего треугольников, не превышает $\lfloor q^2/4 \rfloor$. Значит, дополнение такого графа имеет не меньше $\lfloor (q-1)^2/4 \rfloor$

рёбер. Отсюда и из леммы 12, учитывая, что $P_i^{-\delta}$ является разбиением множества $R_i^{-\delta}$, имеем

$$\begin{aligned} |E(P_i^{-\delta}) \setminus (E[2](P_i^{\delta}))^*| &= \sum_{Q \in P_i^{-\delta}} |\mathbf{P}_2(Q) \setminus (E[2](P_i^{\delta}))^*| \\ &\geq \sum_{Q \in P_i^{-\delta}} \left\lfloor \frac{(|Q| - 1)^2}{4} \right\rfloor \geq \|\overline{\mathbf{m}}(|P_i^{-\delta}|, |R_i^{-\delta}|)\|_{\mathbf{T}} = \|\overline{\mathbf{m}}(\ell_i^{-\delta}, 2^{n-2})\|_{\mathbf{T}}. \end{aligned}$$

Итак в предположении, что множество $(E[2](P_i^{\delta}))^*$ не содержит треугольников, неравенство (4) доказано, поэтому лемма 17 вытекает из следующего утверждения.

Лемма 18. *Если ни одна 4-мерная грань куба B^n не является опорной для компоненты P_i^{δ} , $i \in \{1, \dots, n\}$, $\delta \in \{-1, 1\}$, однородного разбиения $P \in \mathcal{U}_n$, то множество $(E[2](P_i^{\delta}))^*$ не содержит треугольников.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что, напротив, ни одна четырёхмерная грань куба B^n не является опорной для компоненты P_i^{δ} , но множество $(E[2](P_i^{\delta}))^*$ содержит некоторый треугольник Δ . Чтобы прийти к противоречию, покажем, что грань $F = \widetilde{\Delta}$ имеет размерность 4 и является опорной для P_i^{δ} .

Из включения $\Delta \subseteq (E[2](P_i^{\delta}))^*$ следует, что $\Delta \subseteq E[2]$. Значит, по лемме 11 справедливо равенство $\dim(\widetilde{\Delta}) = 4$, т. е. грань F имеет размерность 4.

Кроме того, по лемме 11 множество $(\Delta)^*$ является звездой, т. е. все соединения из $(\Delta)^*$ имеют общий конец — некоторое (0-1)-ребро r . Через Q обозначим блок однородного разбиения P , который содержит r . В силу леммы 9 из того, что $\Delta \subseteq (E[2](P_i^{\delta}))^*$, следует, что $(\Delta)^* \subseteq E[2](P_i^{\delta})$ и $|(\Delta)^*| = |\Delta| = 3$. Учитывая, что концы любого порождённого разбиением P соединения e по определению принадлежат одному и тому же блоку этого разбиения, отсюда имеем

$$\begin{aligned} (1) \quad (\Delta)^* &\subseteq \mathbf{P}_2(Q), \quad (2) \quad Q \in P_i^{\delta}, \\ (3) \quad V((\Delta)^*) &\subseteq Q \subseteq R_i^{\delta}, \quad (4) \quad |V((\Delta)^*)| = 4. \end{aligned}$$

По лемме 11 справедливо равенство $\widetilde{(\Delta)^*} = \widetilde{\Delta}$, поэтому из включения (3) следует, что $V((\Delta)^*) \subseteq R_i^{\delta}(F)$. Значит, $R_i^{\delta}(F) \neq \emptyset$ и по лемме 5 из того, что $\dim(F) = 4$, вытекает, что $|R_i^{\delta}(F)| = 4$. Тем самым из (4) получаем $R_i^{\delta}(F) = V((\Delta)^*)$. Это равенство наряду с включениями (3) и (2) означает, что 4-мерная грань $F = \widetilde{\Delta}$ является опорной для компоненты P_i^{δ} однородного разбиения P . Полученное противоречие показывает,

что наше предположение неверно. Лемма 18 доказана. Лемма 17 доказана. Теорема 13 доказана.

5. О матрицах сложности разбиений $P \in \text{Correct}_5(\mu_5)$

Заметим, что $\text{Correct}_5(\mu_5) = \text{Correct}_5(28) \subseteq U_5(28)$, поскольку $\mu_5 = 28$.

Матрицы $\mathbb{M}_1$ и $\mathbb{M}_2$ размера 2×5 с суммой элементов 28 определим равенствами

$$\mathbb{M}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{M}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Через $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ обозначим классы всех однородных разбиений $P \in U_5(28)$ таких, что матрица сложности $\mathbb{L}(P)$ разбиения P с точностью до перестановки столбцов совпадает с матрицами $\mathbb{M}_1$ и $\mathbb{M}_2$ соответственно.

Теорема 14. *Справедливо включение $\text{Correct}_5(28) \subseteq \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что для любого правильного разбиения $P \in \text{Correct}_5(28)$ матрица сложности $\mathbb{L}(P) = (\ell_i^\delta)_{i=1,\dots,5}^{\delta=-1,1}$ удовлетворяет следующим трём условиям.

1. Элементами матрицы $\mathbb{L}(P)$ могут быть только числа 2, 3, 4.
2. Матрица $\mathbb{L}(P)$ имеет столбец, оба элемента которого равны 4.
3. В каждом столбце матрицы $\mathbb{L}(P)$ нижний элемент равен верхнему.

Выполнение этих условий следует из включения $\text{Correct}_5(28) \subseteq U_5(28)$ и следующих трёх лемм.

Лемма 19. *Если матрица сложности $\mathbb{L}(P)$ однородного разбиения $P \in U_5(28)$ имеет элемент, равный 1 или не меньший 5, то разбиение P неправильное.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что матрица $\mathbb{L}(P)$ имеет элемент, равный 1. Тогда сумма остальных девяти элементов этой матрицы равна 27. Отсюда и в силу равенства $\overline{\mathbf{m}}(9, 27) = (\underbrace{3, \dots, 3}_9)$ по лемме 12 имеем

$$\|\mathbb{L}(P)\|_{-1} \geq \frac{1}{1} + \|\overline{\mathbf{m}}(9, 27)\|_{-1} = \frac{1}{1} + \frac{9}{3} = 4.$$

При этом в силу леммы 12 равенство $\|\mathbb{L}(P)\|_{-1} = 1 + \|\overline{\mathbf{m}}(9, 27)\|_{-1}$ возможно, только если девять остальных элементов матрицы $\mathbb{L}(P)$ совпадают с компонентами вектора $\overline{\mathbf{m}}(9, 27)$, т. е. если все они равны 3. Поэтому равенство $\|\mathbb{L}(P)\|_{-1} = 4$ возможно только в том случае, если не все элементы матрицы $\mathbb{L}(P)$ являются степенями двойки. По определению это означает, что $\mathbb{L}(P) \in \mathfrak{L}_{-1}^4$. Значит, по первому признаку (теорема 4) разбиение P является неправильным.

Предположим, что матрица $\mathbb{L}(P)$ имеет элемент, не меньший 5. Без ограничения общности считаем, что ℓ_1^1 является наибольшим элементом этой матрицы.

Пусть $\ell_1^1 = 5$ и $\ell_1^{-1} \leq 3$. Тогда сумма элементов матрицы $\mathbb{L}_{(1)}(P)$ не больше 26. В силу равенства $\overline{\mathfrak{m}}(10, 26) = (\underbrace{3, \dots, 3}_6, \underbrace{2, \dots, 2}_4)$ по леммам 12 и 13 имеем

$$\|\mathbb{L}_{(1)}(P)\|_{-1} \geq \|\overline{\mathfrak{m}}(10, 26)\|_{-1} = \frac{6}{3} + \frac{4}{2} = 4.$$

При этом, как и в предыдущем случае, равенство $\|\mathbb{L}_{(1)}(P)\|_{-1} = 4$ возможно, только если не все элементы матрицы $\mathbb{L}_{(1)}(P)$ являются степенями двойки. По определению это означает, что $\mathbb{L}_{(1)}(P) \in \mathfrak{L}_{-1}^4$. Значит, по второму признаку (теорема 5) разбиение P неправильное.

Пусть $\ell_1^1 = 5$ и $\ell_1^{-1} = 4$. Тогда сумма остальных восьми элементов матрицы $\mathbb{L}(P)$, а значит, и сумма соответствующих восьми элементов матрицы $\mathbb{L}_{(1)}(P)$ равна 19. В силу равенства $\overline{\mathfrak{m}}(8, 19) = (\underbrace{3, \dots, 3}_3, \underbrace{2, \dots, 2}_5)$ по лемме 12 имеем

$$\|\mathbb{L}_{(1)}(P)\|_{-1} \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \|\overline{\mathfrak{m}}(8, 19)\|_{-1} = \frac{2}{4} + \frac{3}{3} + \frac{5}{2} = 4.$$

Как и в предыдущих случаях, равенство $\|\mathbb{L}_{(1)}(P)\|_{-1} = 4$ возможно, только если не все элементы матрицы $\mathbb{L}_{(1)}(P)$ являются степенями двойки. Поэтому $\mathbb{L}_{(1)}(P) \in \mathfrak{L}_{-1}^4$, значит, по второму признаку (теорема 5) разбиение P является неправильным.

Пусть $\ell_1^1 = \ell_1^{-1} = 5$. Тогда сумма остальных восьми элементов матрицы $\mathbb{L}(P)$ равна 18. В силу равенства $\overline{\mathfrak{m}}(8, 18) = (\underbrace{3, \dots, 3}_2, \underbrace{2, \dots, 2}_6)$ по лемме 12 имеем

$$\|\mathbb{L}(P)\|_{-1} \geq \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \|\overline{\mathfrak{m}}(8, 18)\|_{-1} = \frac{2}{5} + \frac{2}{3} + \frac{6}{2} = 4\frac{1}{15} > 4,$$

тем самым $\mathbb{L}(P) \in \mathfrak{L}_{-1}^4$, а значит, по первому признаку (теорема 4) разбиение P неправильное.

Пусть $\ell_1^1 = 6$. Тогда сумма остальных девяти элементов матрицы $\mathbb{L}(P)$ равна 22. В силу равенства $\overline{\mathfrak{m}}(9, 22) = (\underbrace{3, \dots, 3}_4, \underbrace{2, \dots, 2}_5)$ по лемме 12 имеем

$$\|\mathbb{L}(P)\|_{-1} \geq \frac{1}{6} + \|\overline{\mathfrak{m}}(9, 22)\|_{-1} = \frac{1}{6} + \frac{4}{3} + \frac{5}{2} = 4.$$

Как и ранее, равенство $\|\mathbb{L}(P)\|_{-1} = 4$ возможно, только если не все элементы матрицы $\mathbb{L}(P)$ являются степенями двойки, поэтому $\mathbb{L}(P) \in \mathfrak{L}_{-1}^4$, значит, по первому признаку (теорема 4) разбиение P неправильное.

Пусть $\ell_1^1 \geq 7$. Тогда сумма остальных девяти элементов матрицы $\mathbb{L}(P)$ не больше 21. В силу равенства $\overline{\mathbf{m}}(9, 21) = (\underbrace{3, \dots, 3}_3, \underbrace{2, \dots, 2}_6)$ по леммам 12 и 13 имеем

$$\|\mathbb{L}(P)\|_{-1} \geq \frac{1}{\ell_1^1} + \|\overline{\mathbf{m}}(9, 21)\|_{-1} = \frac{1}{\ell_1^1} + \frac{3}{3} + \frac{6}{2} > 4.$$

Тем самым $\mathbb{L}(P) \in \mathfrak{L}_{-1}^4$, значит, по первому признаку (теорема 4) разбиение P неправильное. Лемма 19 доказана.

Лемма 20. *Если в каждом столбце матрицы сложности $\mathbb{L}(P)$ однородного разбиения $P \in \mathbf{U}_5(28)$ имеется элемент, не превосходящий 3, то разбиение P неправильное.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Считаем, что матрица сложности $\mathbb{L}(P)$ не содержит единиц (в противном случае однородное разбиение P неправильно по лемме 19). Кроме того, без ограничения общности считаем, что все элементы нижней строки матрицы $\mathbb{L}(P)$ не превосходят 3, т. е. $2 \leq \ell_1^1, \ell_2^1, \ell_3^1, \ell_4^1, \ell_5^1 \leq 3$. Через k обозначим число двоек в этой строке.

Если хотя бы одна компонента P_i^δ однородного разбиения P имеет опорную грань $F \in \mathfrak{F}_4(\mathbf{B}^5)$, то P неправильно по пятому признаку (теорема 8), поскольку каждый столбец матрицы $\mathbb{L}(P)$ содержит элемент, не превосходящий 3.

Если же компоненты однородного разбиения P не имеют опорных 4-мерных граней, то в силу теорем 11, 13 и леммы 12 имеем

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}^*(P) &= \sum_{i=1}^5 \mathfrak{B}^*(P_i) \geq \sum_{i=1}^5 (\|\overline{\mathbf{m}}(\ell_i^1, 8)\|_C + \|\overline{\mathbf{m}}(\ell_i^{-1}, 8)\|_T) \\ &= k \cdot \|\overline{\mathbf{m}}(2, 8)\|_C + (5 - k) \cdot \|\overline{\mathbf{m}}(3, 8)\|_C + \sum_{i=1}^5 \|\overline{\mathbf{m}}(\ell_i^{-1}, 8)\|_T \\ &\geq k \cdot (\|\overline{\mathbf{m}}(2, 8)\|_C - \|\overline{\mathbf{m}}(3, 8)\|_C) + 5 \cdot \|\overline{\mathbf{m}}(3, 8)\|_C + \left\| \overline{\mathbf{m}} \left(\sum_{i=1}^5 \ell_i^{-1}, 5 \cdot 8 \right) \right\|_T. \end{aligned}$$

Из равенств $\overline{\mathbf{m}}(2, 8) = (4, 4)$ и $\overline{\mathbf{m}}(3, 8) = (3, 3, 2)$ следуют равенства

$$\|\overline{\mathbf{m}}(2, 8)\|_C = 12, \quad \|\overline{\mathbf{m}}(3, 8)\|_C = 7.$$

Кроме того, из того, что $\sum_{i=1}^5 \ell_i^{-1} + \sum_{i=1}^5 \ell_i^1 = 28$, вытекает

$$\sum_{i=1}^5 \ell_i^{-1} = 28 - (k \cdot 2 + (5 - k) \cdot 3) = 13 + k.$$

Значит, справедливо неравенство

$$\mathfrak{B}^*(P) \geq k \cdot 5 + 35 + \|\overline{\mathfrak{m}}(13 + k, 40)\|_{\text{T}}.$$

Рассмотрим четыре возможных случая: $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$ и $k \geq 3$.

При $k = 0$ из того, что $\overline{\mathfrak{m}}(13, 40) = (4, \underbrace{3, \dots, 3}_{12})$, получаем равенство

$$\|\overline{\mathfrak{m}}(13, 40)\|_{\text{T}} = 14, \text{ поэтому } \mathfrak{B}^*(P) \geq 35 + 14 = 49.$$

При $k = 1$ из того, что $\overline{\mathfrak{m}}(14, 40) = (\underbrace{3, \dots, 3}_{12}, 2, 2)$, имеем $\|\overline{\mathfrak{m}}(14, 40)\|_{\text{T}} =$

$$12, \text{ тем самым } \mathfrak{B}^*(P) \geq 5 + 35 + 12 = 52.$$

При $k = 2$ из того, что $\overline{\mathfrak{m}}(15, 40) = (\underbrace{3, \dots, 3}_{10}, \underbrace{2, \dots, 2}_5)$, следует, что

$$\|\overline{\mathfrak{m}}(15, 40)\|_{\text{T}} = 10, \text{ поэтому } \mathfrak{B}^*(P) \geq 2 \cdot 5 + 35 + 10 = 55.$$

При $k \geq 3$ справедливо неравенство $\mathfrak{B}^*(P) \geq 3 \cdot 5 + 35 = 50$.

Во всех четырёх случаях справедливо неравенство $\mathfrak{B}^*(P) > 48$. Значит, во всех четырёх случаях однородное разбиение P неправильно по шестому признаку (теорема 9). Лемма 20 доказана.

Лемма 21. *Если в некотором столбце матрицы сложности $\mathbb{L}(P)$ однородного разбиения $P \in \mathcal{U}_5(28)$ нижний элемент не равен верхнему, то разбиение P неправильное.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Считаем, что матрица $\mathbb{L}(P)$ имеет столбец, оба элемента которого равны 4 (в противном случае однородное разбиение P неправильно по леммам 19 и 20). Кроме того, без ограничения общности считаем, что $\ell_1^1 \neq \ell_1^{-1}$. Тогда сумма элементов матрицы $\mathbb{L}_{(1)}(P)$ не превышает 27 и по крайней мере два элемента этой матрицы равны 4. Значит, сумма остальных восьми элементов этой матрицы не превышает 19. В силу равенства $\overline{\mathfrak{m}}(8, 19) = (\underbrace{3, \dots, 3}_3, \underbrace{2, \dots, 2}_5)$ по леммам 12 и 13 имеем

$$\|\mathbb{L}_{(1)}(P)\|_{-1} \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \|\overline{\mathfrak{m}}(8, 19)\|_{-1} = \frac{2}{4} + \frac{3}{3} + \frac{5}{2} = 4.$$

При этом равенство $\|\mathbb{L}_{(1)}(P)\|_{-1} = 4$ возможно, только если не все элементы матрицы $\mathbb{L}_{(1)}(P)$ являются степенями двойки. Тем самым получаем, что $\mathbb{L}_{(1)}(P) \in \mathfrak{L}_{-1}^4$, значит, по второму признаку (теорема 5) разбиение P неправильное. Лемма 21 доказана. Теорема 14 доказана.

6. Доказательство теоремы 3

Компоненту P_i^δ однородного разбиения $P \in \mathcal{U}_5(28)$ будем называть *максимально равномерной*, если мощности блоков $Q \in P_i^\delta$ отличаются друг от друга не более чем на 1.

По определению класса $\mathcal{K}_2$ любое однородное разбиений $P \in \mathcal{K}_2$ имеет ровно четыре компоненты P_i^δ мощности 3. Класс $\mathcal{K}_2$ разобьём на два подкласса в зависимости от того, имеется ли среди этих четырёх компонент максимально равномерная.

Через $\mathcal{K}_2^1$ обозначим множество всех однородных разбиений $P \in \mathcal{K}_2$ таких, что ни одна из четырёх компонент P_i^δ мощности 3 этого разбиения не является максимально равномерной. Через $\mathcal{K}_2^2$ обозначим множество всех однородных разбиений $P \in \mathcal{K}_2$ таких, что хотя бы одна из четырёх компонент P_i^δ мощности 3 этого разбиения является максимально равномерной. Очевидно, что справедливы равенства $\mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_2^1 \cup \mathcal{K}_2^2$ и $\mathcal{K}_2^1 \cap \mathcal{K}_2^2 = \emptyset$.

Теорема 15. Для любого однородного разбиения $P \in \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2^1$ справедливо неравенство $S(P) \geq (2^{5-1})^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 22. При любых k, L таких, что $1 \leq k \leq L$ и L чётное, для любого $\bar{z} \in \mathfrak{M}(k, L)$ из того, что $\bar{z} \neq \bar{\mathfrak{m}}(k, L)$ следует, что $\|\bar{z}\|_2 \geq 2 + \|\bar{\mathfrak{m}}(k, L)\|_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что для любого $\bar{z} \in \mathfrak{M}(k, L)$ справедливо равенство $\|\bar{z}\|_2 = 2 \cdot \|\bar{z}\|_C + L$. Значит, из чётности L следует чётность $\|\bar{z}\|_2$. Тем самым если $\bar{z} \neq \bar{\mathfrak{m}}(k, L)$, то в силу леммы 12 справедливо неравенство $\|\bar{z}\|_2 > \|\bar{\mathfrak{m}}(k, L)\|_2$, а значит, и неравенство $\|\bar{z}\|_2 \geq 2 + \|\bar{\mathfrak{m}}(k, L)\|_2$. Лемма 22 доказана.

Для произвольного однородного разбиения $P \in \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2^1$ из определения компонент P_i^δ этого разбиения и леммы 1 следует равенство

$$S(P) = \sum_{i=1}^5 \sum_{\delta \in \{-1, 1\}} S(P_i^\delta).$$

Если $P \in \mathcal{K}_1$, то по определению класса $\mathcal{K}_1$ шесть компонент P_i^δ разбиения P имеют мощность 2 и четыре — мощность 4. Учитывая, что P_i^δ является разбиением множества R_i^δ и $|R_i^\delta| = 8$, по лемме 22, а также в силу равенств $\bar{\mathfrak{m}}(2, 8) = (4, 4)$ и $\bar{\mathfrak{m}}(4, 8) = (2, 2, 2, 2)$ имеем

$$\begin{aligned} S(P) &= \sum_{i=1}^5 \sum_{\delta \in \{-1, 1\}} S(P_i^\delta) \geq 6 \cdot \|\bar{\mathfrak{m}}(2, 8)\|_2 + 4 \cdot \|\bar{\mathfrak{m}}(4, 8)\|_2 \\ &= 192 + 64 = (2^{5-1})^2. \end{aligned}$$

Если $P \in \mathcal{K}_2^1$, то по определению класса $\mathcal{K}_2^1$ четыре компоненты P_i^δ разбиения P имеют мощность 2, четыре — мощность 3 и две — мощность 4; при этом ни одна компонента мощности 3 не является максимально равномерной. Отсюда, как и в предыдущем случае, по лемме 22 и в силу равенства $\overline{\mathbf{m}}(3, 8) = (3, 3, 2)$ имеем

$$\begin{aligned} S(P) &= \sum_{i=1}^5 \sum_{\delta \in \{-1, 1\}} S(P_i^\delta) \geq 4 \cdot \|\overline{\mathbf{m}}(2, 8)\|_2 + 4 \cdot (2 + \|\overline{\mathbf{m}}(3, 8)\|_2) \\ &\quad + 2 \cdot \|\overline{\mathbf{m}}(4, 8)\|_2 = 128 + 96 + 32 = (2^{5-1})^2. \end{aligned}$$

Теорема 15 доказана.

Как уже было отмечено в разд. 1, для доказательства теоремы 3 достаточно установить справедливость неравенства $s(P) \geq (2^{5-1})^2$ для всех $P \in \text{Correct}_5(\mu_5)$, которая для всех таких P вытекает из равенства $\mu_5 = 28$, теорем 14, 15 и следующей теоремы.

Теорема 16. *Любое однородное разбиение $P \in \mathcal{K}_2^2$ неправильно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Класс однородных разбиений $\mathcal{K}_2^2$ следующим образом разобьём на два подкласса $\mathcal{K}_2^{2,1}$ и $\mathcal{K}_2^{2,2}$.

Через $\mathcal{K}_2^{2,1}$ обозначим множество всех однородных разбиений $P \in \mathcal{K}_2^2$ таких, что хотя бы одна из четырёх компонент P_i^δ мощности 3 этого разбиения имеет опорную 4-мерную грань куба B^5 . Через $\mathcal{K}_2^{2,2}$ обозначим множество всех однородных разбиений $P \in \mathcal{K}_2^2$ таких, что ни одна из четырёх компонент P_i^δ мощности 3 этого разбиения не имеет опорных 4-мерных граней куба B^5 . Очевидно, что справедливы равенства $\mathcal{K}_2^2 = \mathcal{K}_2^{2,1} \cup \mathcal{K}_2^{2,2}$ и $\mathcal{K}_2^{2,1} \cap \mathcal{K}_2^{2,2} = \emptyset$.

Теорема 16 вытекает из следующих двух теорем.

Теорема 17. *Любое однородное разбиение $P \in \mathcal{K}_2^{2,1}$ неправильно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольное однородное разбиение $P \in \mathcal{K}_2^{2,1}$. Без ограничения общности считаем, что $\mathbb{L}(P) = \mathbb{M}_2$ и компонента P_3^1 этого разбиения имеет опорную 4-мерную грань $F \in \mathfrak{F}_4(B^5)$. Тогда по определению справедливо включение $3 \in \text{Form}(F)$, а значит, $|\text{Form}(F) \setminus \{3\}| = 3$. Тем самым среди столбцов матрицы сложности $\mathbb{L}(P)$ с номерами из множества $\text{Form}(F) \setminus \{3\}$ найдутся два, один из которых содержит элемент, не превосходящий 2, а другой — элемент, не превосходящий 3. Отсюда по шестому признаку (теорема 9) однородное разбиение P неправильно. Теорема 17 доказана.

Теорема 18. *Любое однородное разбиение $P \in \mathcal{K}_2^{2,2}$ неправильно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что для любого $j \in \{1, \dots, 5\}$ грани $B_j^{5\ 0}$ и $B_j^{5\ 1}$ куба B^5 имеют размерность 4, поэтому при $i \in \{1, \dots, 5\} \setminus \{j\}$, $\delta \in \{-1, 1\}$ по лемме 5 справедливо равенство $|R_i^\delta(B_j^{5\ 0})| = |R_i^\delta(B_j^{5\ 1})| = 4$. Отсюда и из равенств $|R_i^\delta| = 8$ и $B_j^{5\ 0} \cap B_j^{5\ 1} = \emptyset$ следует, что при таких i, j, δ пара множеств $\{R_i^\delta(B_j^{5\ 0}), R_i^\delta(B_j^{5\ 1})\}$ является разбиением компоненты R_i^δ множества R .

Компоненту P_i^δ , $i \in \{1, \dots, 5\}$, $\delta \in \{-1, 1\}$, однородного разбиения $P \in U_5$ назовём *простой*, если $|P_i^\delta| = 2$ и для некоторого $j \in \{1, \dots, 5\} \setminus \{i\}$ выполнено равенство $P_i^\delta = \{R_i^\delta(B_j^{5\ 0}), R_i^\delta(B_j^{5\ 1})\}$. При этом число j будем называть *показателем простоты компоненты* P_i^δ .

Большую компоненту P_i , $i \in \{1, \dots, 5\}$, однородного разбиения $P \in U_5$ назовём *простой*, если $|P_i| = 4$ и простыми с равными показателями простоты являются компоненты P_i^{-1} и P_i^1 этого разбиения. При этом *показателем простоты большой компоненты* P_i будем называть показатель простоты компонент P_i^{-1} и P_i^1 .

Лемма 23. Для любой большой компоненты P_i , $i \in \{1, \dots, 5\}$, однородного разбиения $P \in U_5$ из равенства $|P_i| = 4$ следует неравенство

$$\mathfrak{B}^*(P_i) \geq \begin{cases} 12, & \text{если большая компонента } P_i \text{ является простой,} \\ 15 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что для некоторого $i \in \{1, \dots, 5\}$ выполнено равенство $|P_i| = 4$. Без ограничения общности считаем, что $i = 1$. Тогда если большая компонента P_1 является простой, то по определению выполнено равенство $|P_1^{-1}| = |P_1^1| = 2$. Поэтому для соответствующих элементов ℓ_1^{-1}, ℓ_1^1 матрицы сложности $\mathbb{L}(P)$ также справедливо равенство $\ell_1^{-1} = \ell_1^1 = 2$. Значит, по теореме 12 и в силу равенства $\overline{\mathfrak{m}}(2, 8) = (4, 4)$ имеем

$$\mathfrak{B}^*(P_1) \geq \|\overline{\mathfrak{m}}(\ell_1^1, 8)\|_C = \|\overline{\mathfrak{m}}(2, 8)\|_C = 6 + 6 = 12,$$

что и требовалось доказать.

Предположим, что большая компонента P_1 не является простой. Если при этом для некоторого $\delta \in \{-1, 1\}$ найдётся такой блок $Q' \in P_1^\delta$, что $|Q'| \geq 6$, то по леммам 15 и 6 имеем

$$\mathfrak{B}^*(P_1) \geq |E(P_1^\delta)| = \sum_{Q \in P_1^\delta} |\mathbf{P}_2(Q)| \geq |\mathbf{P}_2(Q')| \geq \binom{6}{2} = 15,$$

что и требовалось доказать.

Пусть большая компонента P_1 не является простой и все её блоки имеют мощность не более 5. Тогда поскольку компоненты P_1^{-1} и P_1^1 являются разбиениями множеств R_1^{-1} и R_1^1 (т. е. множеств мощности 8),

из равенства $|P_1^{-1}| + |P_1^1| = |P_1| = 4$ следует, что $|P_1^{-1}| = |P_1^1| = 2$. Если при этом хотя бы одна из компонент P_1^{-1} , P_1^1 не имеет опорных 4-мерных граней куба B^5 (без ограничения общности считаем, что такой компонентой является P_1^1), то по теореме 13 и в силу равенств $\ell_1^1 = \ell_1^{-1} = 2$, $\overline{\mathfrak{m}}(2, 8) = (4, 4)$ имеем

$$\mathfrak{B}^*(P_1) \geq \|\overline{\mathfrak{m}}(\ell_1^1, 8)\|_C + \|\overline{\mathfrak{m}}(\ell_1^{-1}, 8)\|_T = (6 + 6) + (2 + 2) = 16 > 15,$$

что и требовалось доказать.

Наконец, пусть большая компонента P_1 не является простой, все её блоки имеют мощность не более 5 и каждая из компонент P_1^{-1} и P_1^1 имеет опорную 4-мерную грань куба B^5 .

Через Q_1^{-1} и Q_2^{-1} обозначим блоки компоненты P_1^{-1} (таким образом, $P_1^{-1} = \{Q_1^{-1}, Q_2^{-1}\}$), через F^{-1} — её опорную 4-мерную грань. Точно так же через Q_1^1 и Q_2^1 обозначим блоки компоненты P_1^1 (таким образом, $P_1^1 = \{Q_1^1, Q_2^1\}$), через F^1 — её опорную 4-мерную грань.

Без ограничения общности считаем, что $|Q_1^{-1}| \geq |Q_2^{-1}|$ и $|Q_1^1| \geq |Q_2^1|$. Тогда с учётом того, что P_1^δ , $\delta \in \{-1, 1\}$, является разбиением множества R_1^δ и $|R_1^\delta| = 8$, имеем

$$\begin{aligned} 4 \leq |Q_1^{-1}| \leq 5, \quad |Q_1^{-1}| + |Q_2^{-1}| &= 8, \\ 4 \leq |Q_1^1| \leq 5, \quad |Q_1^1| + |Q_2^1| &= 8. \end{aligned}$$

Заметим, что максимальная равномерность компоненты P_1^δ , $\delta \in \{-1, 1\}$, равносильна её простоте. Действительно, из того, что $\dim(F^\delta) = 4$, следует, что грань F^δ куба B^5 является гранью вида B_j^5 , где $j \neq 1$. Тем самым из включения $R_1^\delta(F^\delta) \subseteq Q$, выполненного для некоторого блока $Q \in P_1^\delta$, следует, что равенство $|Q_1^\delta| = |Q_2^\delta| = 4$ равносильно равенству $P_1^\delta = \{R_1^\delta(B_j^5), R_1^\delta(B_j^5)\}$.

Заметим также, что если компонента P_1^δ , $\delta \in \{-1, 1\}$, не является максимально равномерной, то выполнены соотношения $|Q_1^\delta| = 5$, $|Q_2^\delta| = 3$ и $R_1^\delta(F^\delta) \subseteq Q_1^\delta$.

Возможны три следующих случая.

1. Обе компоненты P_1^{-1} , P_1^1 максимально равномерные.
2. Одна из двух компонент P_1^{-1} , P_1^1 максимально равномерна, а другая не является максимально равномерной.
3. Обе компоненты P_1^{-1} , P_1^1 не являются максимально равномерными.

Величину $\mathfrak{B}^*(P_1)$ будем оценивать по лемме 15 с помощью неравенства

$$\mathfrak{B}^*(P_1) \geq |E(P_1^1)| + |E(P_1^{-1}) \setminus (E[2](P_1^1))^*|. \quad (5)$$

По лемме 6 при любом $\delta \in \{-1, 1\}$ имеем

$$E(P_1^\delta) = P_2(Q_1^\delta) \cup P_2(Q_2^\delta), \quad P_2(Q_1^\delta) \cap P_2(Q_2^\delta) = \emptyset,$$

поэтому для первого слагаемого правой части неравенства (5) справедливо равенство $|E(P_1^1)| = |P_2(Q_1^1)| + |P_2(Q_2^1)|$. Значит, если компонента P_1^1 максимально равномерная, то $|E(P_1^1)| = 12$; если компонента P_1^1 не является максимально равномерной, то $|E(P_1^1)| = 13$. Чтобы оценить второе слагаемое, понадобятся следующие два понятия.

Соединение $e = \{r_1, r_2\}$ куба B^5 будем называть *внутренним для грани* $F \in \mathfrak{F}(B^5)$, если $\{r_1, r_2\} \subseteq R(F)$. Будем говорить, что соединение $e = \{r_1, r_2\}$ *связывает грани* $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}(B^5)$, если $r_1 \in R(F_1)$ и $r_2 \in R(F_2)$.

Следующие два утверждения очевидны.

Лемма 24. Соединение $e \in E[2]$ куба B^5 тогда и только тогда является внутренним для грани B_i^5 , $i \in \{1, \dots, 5\}$, $\sigma \in \{0, 1\}$, когда двойственное ему соединение e^* является внутренним для этой грани.

Лемма 25. Соединение $e \in E[2]$ куба B^5 тогда и только тогда связывает грани B_i^5 и B_i^5 , $i \in \{1, \dots, 5\}$, когда двойственное ему соединение e^* связывает эти грани.

Рассмотрим случай 1. В этом случае обе компоненты P_1^{-1}, P_1^1 простые. Но в силу того, что большая компонента P_1 не является простой, показатели простоты этих компонент не совпадают. Без ограничения общности считаем эти показатели равными 2 и 3 соответственно. Тогда также без ограничения общности имеем $F^{-1} = B_2^5$, $F^1 = B_3^5$ и

$$\begin{aligned} Q_1^{-1} &= R_1^{-1}(B_2^5), & Q_2^{-1} &= R_1^{-1}(B_2^5), \\ Q_1^1 &= R_1^1(B_3^5), & Q_2^1 &= R_1^1(B_3^5). \end{aligned}$$

Значит, множество $E(P_1^{-1})$ содержит 8 соединений, связывающих грани B_2^5 и B_3^5 (четыре из них принадлежат множеству $P_2(Q_1^{-1})$ и четыре — множеству $P_2(Q_2^{-1})$). При этом множество $E(P_1^1)$ (а значит, по лемме 25 и множество $(E[2](P_1^1))^*$) вообще не содержит таких соединений. Тем самым справедливо неравенство

$$|E(P_1^{-1}) \setminus (E[2](P_1^1))^*| \geq 8.$$

Значит, в силу неравенства (5) имеем $\mathfrak{B}^*(P_1) \geq 12 + 8 > 15$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим случай 2. Без ограничения общности считаем, что компонента P_1^{-1} является максимально равномерной и $F^{-1} = B_2^5$. Тогда, как и в предыдущем случае, без ограничения общности имеем

$$Q_1^{-1} = R_1^{-1}(B_2^5), \quad Q_2^{-1} = R_1^{-1}(B_2^5).$$

Как отмечено выше, для компоненты P_1^1 , поскольку она не является максимально равномерной, выполнены соотношения $|Q_1^1| = 5$, $|Q_2^1| = 3$ и $R_1^1(F^1) \subseteq Q_1^1$. Значит, если $F^1 = B^{5\ 0}_2$ или $F^1 = B^{5\ 1}_2$ (без ограничения общности считаем, что $F^1 = B^{5\ 0}_2$), то

$$R_1^1(B^{5\ 0}_2) \subseteq Q_1^1, \quad |Q_1^1 \cap R_1^1(B^{5\ 1}_2)| = 1, \quad Q_2^1 \subseteq R_1^1(B^{5\ 1}_2).$$

Тогда множество всех внутренних для грани $B^{5\ 1}_2$ соединений $e \in E(P_1^1)$ совпадает с множеством $\mathbf{P}_2(Q_2^1)$ и потому состоит из трёх соединений. Следовательно, по лемме 24 множество $(E[2](P_1^1))^*$ содержит не более трёх внутренних для грани $B^{5\ 1}_2$ соединений. Тогда в силу того, что множество $E(P_1^{-1})$ содержит 6 внутренних для грани $B^{5\ 1}_2$ соединений (эти соединения принадлежат множеству $\mathbf{P}_2(Q_2^{-1})$), справедливо неравенство

$$|E(P_1^{-1}) \setminus (E[2](P_1^1))^*| \geq 6 - 3 = 3.$$

Значит, в силу неравенства (5) имеем $\mathfrak{B}^*(P_1) \geq 13 + 3 > 15$, что и требовалось доказать.

Если же $F^1 \neq B^{5\ 0}_2$ и $F^1 \neq B^{5\ 1}_2$, то без ограничения общности полагаем $F^1 = B^{5\ 0}_3$. Тогда

$$R_1^1(B^{5\ 0}_3) \subseteq Q_1^1, \quad |Q_1^1 \cap R_1^1(B^{5\ 1}_3)| = 1, \quad Q_2^1 \subseteq R_1^1(B^{5\ 1}_3),$$

поэтому множество всех связывающих грани $B^{5\ 0}_3$ и $B^{5\ 1}_3$ соединений $e \in E(P_1^1)$ состоит из четырёх соединений (все они принадлежат множеству $\mathbf{P}_2(Q_1^1)$). Следовательно, по лемме 25 множество $(E[2](P_1^1))^*$ содержит не более четырёх соединений, связывающих грани $B^{5\ 0}_3$ и $B^{5\ 1}_3$. Тем самым в силу того, что множество $E(P_1^{-1})$ содержит 8 соединений, связывающих грани $B^{5\ 0}_3$ и $B^{5\ 1}_3$, справедливо неравенство

$$|E(P_1^{-1}) \setminus (E[2](P_1^1))^*| \geq 8 - 4 = 4.$$

Значит, в силу неравенства (5) имеем $\mathfrak{B}^*(P_1) \geq 13 + 4 > 15$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим случай 3. Без ограничения общности считаем, что $F^{-1} = B^{5\ 0}_2$. Тогда

$$R_1^{-1}(B^{5\ 0}_2) \subseteq Q_1^{-1}, \quad |Q_1^{-1} \cap R_1^{-1}(B^{5\ 1}_2)| = 1, \quad Q_2^{-1} \subseteq R_1^{-1}(B^{5\ 1}_2).$$

Если при этом $F^1 = F^{-1} = B^{5\ 0}_2$, то имеем

$$R_1^1(B^{5\ 0}_2) \subseteq Q_1^1, \quad |Q_1^1 \cap R_1^1(B^{5\ 1}_2)| = 1, \quad Q_2^1 \subseteq R_1^1(B^{5\ 1}_2).$$

Тогда множество всех внутренних для грани $B^{5\ 1}_2$ соединений $e \in E(P_1^1)$ совпадает с множеством $\mathbf{P}_2(Q_2^1)$ и потому является треугольником. Отсюда и из очевидного включения $\mathbf{P}_2(Q_2^1) \subseteq E[2]$ по леммам 24 и 11 следует, что множество всех внутренних для грани $B^{5\ 1}_2$ соединений $e \in$

$(E[2](P_1^1))^*$ является звездой. Точно так же множество всех внутренних для грани $B_2^{5\frac{1}{2}}$ соединений $e \in E[2](P_1^{-1})$ совпадает с множеством $P_2(Q_2^{-1})$ и потому является треугольником. Следовательно, справедливо неравенство $|E[2](P_1^{-1}) \setminus (E[2](P_1^1))^*| \geq 1$.

Заметим, что одно из четырёх связывающих грани $B_2^{5\frac{0}{2}}$ и $B_2^{5\frac{1}{2}}$ соединений $e \in E(P_1^{-1})$ имеет длину 4, поэтому справедливо неравенство $|E[4](P_1^{-1})| \geq 1$.

Отсюда следует, что

$$|E(P_1^{-1}) \setminus (E[2](P_1^1))^*| = |E[4](P_1^{-1})| + |E[2](P_1^{-1}) \setminus (E[2](P_1^1))^*| \geq 2,$$

поэтому в силу неравенства (5) имеем $\mathfrak{B}^*(P_1) \geq 13 + 2 = 15$, что и требовалось доказать.

Если $F^1 = B_2^{5\frac{1}{2}}$, то

$$R_1^1(B_2^{5\frac{0}{2}}) \subseteq Q_1^1, \quad |Q_1^1 \cap R_1^1(B_2^{5\frac{0}{2}})| = 1, \quad Q_2^1 \subseteq R_1^1(B_2^{5\frac{0}{2}}).$$

Тогда множество всех внутренних для грани $B_2^{5\frac{0}{2}}$ соединений $e \in E(P_1^1)$ совпадает с множеством $P_2(Q_2^1)$ и потому состоит из 3 соединений. Следовательно, по лемме 24 множество $(E[2](P_1^1))^*$ содержит не более трёх внутренних для грани $B_2^{5\frac{0}{2}}$ соединений. Тем самым в силу того, что множество $E(P_1^{-1})$ содержит 6 внутренних для грани $B_2^{5\frac{0}{2}}$ соединений (эти соединения принадлежат множеству $P_2(Q_1^{-1})$), справедливо неравенство

$$|E(P_1^{-1}) \setminus (E[2](P_1^1))^*| \geq 6 - 3 = 3.$$

Значит, в силу неравенства (5) имеем $\mathfrak{B}^*(P_1) \geq 13 + 3 > 15$, что и требовалось доказать.

Если $F^1 \neq B_2^{5\frac{0}{2}}$ и $F^1 \neq B_2^{5\frac{1}{2}}$, то без ограничения общности полагаем $F^1 = B_3^{5\frac{0}{3}}$. Тогда

$$R_1^1(B_3^{5\frac{0}{3}}) \subseteq Q_1^1, \quad |Q_1^1 \cap R_1^1(B_3^{5\frac{0}{3}})| = 1, \quad Q_2^1 \subseteq R_1^1(B_3^{5\frac{0}{3}}),$$

поэтому множество всех связывающих грани $B_3^{5\frac{0}{3}}$ и $B_3^{5\frac{1}{3}}$ соединений $e \in E(P_1^1)$ состоит из четырёх соединений (все они принадлежат множеству $P_2(Q_1^1)$). Следовательно, по лемме 25 множество $(E[2](P_1^1))^*$ содержит не более четырёх соединений, связывающих грани $B_3^{5\frac{0}{3}}$ и $B_3^{5\frac{1}{3}}$. Тогда в силу того, что множество $E(P_1^{-1})$ содержит 8 соединений, связывающих грани $B_3^{5\frac{0}{3}}$ и $B_3^{5\frac{1}{3}}$ (шесть из них принадлежат множеству $P_2(Q_1^{-1})$ и два — множеству $P_2(Q_2^{-1})$), справедливо неравенство

$$|E(P_1^{-1}) \setminus (E[2](P_1^1))^*| \geq 8 - 4 = 4.$$

Значит, в силу неравенства (5) имеем $\mathfrak{B}^*(P_1) \geq 13 + 4 > 15$, что и требовалось доказать. Лемма 23 доказана.

Заметим, что любое однородное разбиение $P \in \mathcal{K}_2^{2,2}$ по определению имеет ровно две большие компоненты мощности 4, поэтому теорема 18 вытекает из следующих двух лемм.

Лемма 26. *Если хотя бы одна из двух больших компонент мощности 4 однородного разбиения $P \in \mathcal{K}_2^{2,2}$ не является простой, то P неправильное.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности считаем, что выполнено равенство $\mathbb{L}(P) = \mathbb{M}_2$ и компонента P_1^1 разбиения P не является простой. Тогда по теореме 11, лемме 23, теореме 13, теореме 12, а также в силу равенств $\overline{\mathbf{m}}(3, 8) = (3, 3, 2)$ и $\overline{\mathbf{m}}(4, 8) = (2, 2, 2, 2)$ имеем

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}^*(P) &= \sum_{i=1}^n \mathfrak{B}^*(P_i) \geq 15 + 12 + 2 \cdot (\|\overline{\mathbf{m}}(3, 8)\|_C + \|\overline{\mathbf{m}}(3, 8)\|_T) + \|\overline{\mathbf{m}}(4, 8)\|_C \\ &= 15 + 12 + 2 \cdot (7 + 2) + 4 = 49 > 48. \end{aligned}$$

Значит, по седьмому признаку (теорема 10) однородное разбиение P неправильное. Лемма 26 доказана.

Лемма 27. *Если обе большие компоненты мощности 4 однородного разбиения $P \in \mathcal{K}_2^{2,2}$ простые, то P неправильна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности считаем, что выполнено равенство $\mathbb{L}(P) = \mathbb{M}_2$ и компонента P_3^1 однородного разбиения P является максимально равномерной.

Через j и k обозначим показатели простоты больших компонент P_1 и P_2 соответственно. Тогда по определению простой компоненты имеем $j \neq 1$, $k \neq 2$ и

$$P_1^1 = \{R_1^1(B_j^{5\ 0}), R_1^1(B_j^{5\ 1})\}, \quad P_2^1 = \{R_2^1(B_k^{5\ 0}), R_2^1(B_k^{5\ 1})\}.$$

Отсюда следует, что 4-мерная грань $B_j^{5\ 0}$ куба B^5 является опорной для компоненты P_1^1 однородного разбиения P и 4-мерная грань $B_k^{5\ 0}$ куба B^5 опорная для компоненты P_2^1 однородного разбиения P .

В случае $j \neq 2$ из равенства $\text{Form}(B_j^{5\ 0}) = \{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus \{j\}$ следует включение $2 \in \text{Form}(B_j^{5\ 0}) \setminus \{1\}$. Тем самым среди столбцов матрицы сложности $\mathbb{L}(P)$ с номерами из множества $\text{Form}(B_j^{5\ 0}) \setminus \{1\}$ найдутся два, один из которых содержит элемент, не превосходящий 2, а другой — элемент, не превосходящий 3. Отсюда по шестому признаку (теорема 9) однородное разбиение P неправильное.

Точно так же в случае $k \neq 1$ справедливо $1 \in \text{Form}(B_k^{5\ 0}) \setminus \{2\}$, поэтому среди столбцов матрицы сложности $\mathbb{L}(P)$ с номерами из множества $\text{Form}(B_k^{5\ 0}) \setminus \{2\}$ найдутся два, один из которых содержит элемент,

не превосходящий 2, а другой — элемент, не превосходящий 3. Отсюда по шестому признаку (теорема 9) однородное разбиение P неправильное.

Покажем, что в случае, когда $j = 2$ и $k = 1$, найдётся такая 3-мерная грань $F \in \mathfrak{F}_3(B^5)$, что некоторые два соединения $e_1, e_2 \in E(P, F)$ имеют разные индексы. Последнее означает, что однородное разбиение P является неправильным по четвёртому признаку (теорема 7).

Действительно, в этом случае имеем

$$P_1^1 = \{R_1^1(B^5_2), R_1^1(B^5_1)\}, \quad P_2^1 = \{R_2^1(B^5_1), R_2^1(B^5_1)\},$$

поэтому множество $E(P_1^1)$ состоит из двенадцати соединений индекса 1, шесть из которых являются внутренними для грани B^5_2 и шесть — для грани B^5_1 . Эти двенадцать соединений порождают двенадцать различных 3-мерных граней из множества $\mathfrak{F}_3(B^5_2) \cup \mathfrak{F}_3(B^5_1)$. Очевидно, что этими двенадцатью гранями являются все грани из этого множества за исключением следующих четырёх: $B^{5,0,0}_{1,2}, B^{5,0,1}_{1,2}, B^{5,1,0}_{1,2}, B^{5,1,1}_{1,2}$.

Аналогично множество $E(P_2^1)$ состоит из двенадцати соединений индекса 2, шесть из которых являются внутренними для грани B^5_1 и шесть — для грани B^5_2 . Эти двенадцать соединений порождают все грани из множества $\mathfrak{F}_3(B^5_2) \cup \mathfrak{F}_3(B^5_1)$ за исключением тех же четырёх: $B^{5,0,0}_{1,2}, B^{5,0,1}_{1,2}, B^{5,1,0}_{1,2}, B^{5,1,1}_{1,2}$.

Таким образом, любая 3-мерная грань из множества

$$X = (\mathfrak{F}_3(B^5_2) \cup \mathfrak{F}_3(B^5_1) \cup \mathfrak{F}_3(B^5_1) \cup \mathfrak{F}_3(B^5_1)) \setminus \{B^{5,0,0}_{1,2}, B^{5,0,1}_{1,2}, B^{5,1,0}_{1,2}, B^{5,1,1}_{1,2}\}$$

порождается некоторым соединением $e \in E(P_1^1) \cup E(P_2^1)$. Значит, чтобы доказать существование вышеуказанной грани F , достаточно найти такое соединение $e' \in E(P)$, что $\tilde{e}' \in X$ и e' имеет индекс, отличный от 1 и 2. Покажем, что такое e' имеется среди соединений, порождённых максимально равномерной компонентой P_3^1 , т. е. в множестве $E(P_3^1)$.

Рассмотрим четыре множества (0-1)-рёбер:

$$R_3^1(B^{5,0,0}_{1,2}), \quad R_3^1(B^{5,0,1}_{1,2}), \quad R_3^1(B^{5,1,0}_{1,2}), \quad R_3^1(B^{5,1,1}_{1,2}).$$

Обозначим их через $M^{0,0}, M^{0,1}, M^{1,0}, M^{1,1}$ соответственно.

По лемме 5 имеем $|M^{0,0}| = |M^{0,1}| = |M^{1,0}| = |M^{1,1}| = 2$. Кроме того, очевидно, что эти четыре множества образуют разбиение множества R_3^1 .

Два множества $M^{\delta,\sigma}$ и $M^{\gamma,\lambda}$, $\delta, \sigma, \gamma, \lambda \in \{0, 1\}$, назовём *соседними*, если наборы δ, σ и γ, λ различаются в одном разряде, и *противоположными*, если — в двух.

Блоки максимально равномерной компоненты P_3^1 однородного разбиения P обозначим через Q_1, Q_2 и Q_3 . При этом полагаем $|Q_1| = |Q_2| = 3$ и $|Q_3| = 2$.

Заметим, что хотя бы один из блоков Q_1, Q_2, Q_3 имеет непустое пересечение с некоторой парой соседних множеств из вышеуказанной четвёрки. Действительно, если таковым блоком не является Q_1 (блок мощности 3), то для некоторой пары противоположных множеств $M^{\delta,\sigma}$ и $M^{\gamma,\lambda}$ справедливо включение $Q_1 \subseteq M^{\delta,\sigma} \cup M^{\gamma,\lambda}$. Без ограничения общности считаем, что $M^{\delta,\sigma} = M^{0,0}$, $M^{\gamma,\lambda} = M^{1,1}$ и $M^{0,0} \subseteq Q_1$, $|M^{1,1} \cap Q_1| = 1$. Если, кроме того, таковым блоком не является Q_2 (блок мощности 3), то без ограничения общности считаем, что $M^{0,1} \subseteq Q_2$ и $|M^{1,0} \cap Q_2| = 1$. Тогда в силу того, что компонента P_3^1 является разбиением множества R_3^1 , для пары соседних множеств $M^{1,1}$, $M^{1,0}$ и блока Q_3 (блока мощности 2) имеем $|M^{1,1} \cap Q_3| = 1$ и $|M^{1,0} \cap Q_3| = 1$.

Если некоторый блок $Q \in P_3^1$ имеет непустое пересечение с парой соседних множеств $M^{\delta,\sigma}$ и $M^{\gamma,\lambda}$, то для некоторого 2-элементного подмножества $\{r_1, r_2\} \subseteq Q$ имеем $r_1 \in M^{\delta,\sigma}$ и $r_2 \in M^{\gamma,\lambda}$. Ясно, что соединение $e' = \{r_1, r_2\}$ принадлежит множеству $E(P_3^1)$ и $\tilde{e} \in X$. Лемма 27 доказана. Теорема 18 доказана. Теорема 16 доказана. Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Храпченко В. М. О сложности реализации линейной функции в классе П-схем // Мат. заметки. 1971. Т. 9, № 1. С. 35–40.
2. Храпченко В. М. Об одном методе получения нижних оценок сложности П-схем // Мат. заметки. 1971. Т. 10, № 1. С. 83–92.
3. Храпченко В. М. Упрощённое доказательство одной нижней оценки сложности // Дискрет. математика. 2013. Т. 25, № 2. С. 82–84.
4. Рычков К. Л. Модификация метода В. М. Храпченко и применение её к оценке сложности П-схем для кодовых функций // Методы дискретного анализа в теории графов и схем. Вып. 42. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1985. С. 91–98.
5. Razborov A. Applications of matrix methods to the theory of lower bounds in computational complexity // Combinatorica. 1990. Vol. 10, No. 1. P. 81–93.
6. Karchmer M., Wigderson A. Monotone circuits for connectivity require super-logarithmic depth // SIAM J. Discrete Math. 1990. Vol. 3, No. 2. P. 255–265.
7. Håstad J. The shrinkage exponent of de Morgan formulas is 2 // SIAM J. Comput. 1998. Vol. 27. P. 48–64.
8. Черухин Д. Ю. К вопросу о логическом представлении счётчика чётности // Неформальная наука. 2009. № 2. С. 14–23.
9. Августиневич С. В., Васильев Ю. Л., Рычков К. Л. Формульная сложность тернарной линейной функции // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2012. Т. 19, № 3. С. 3–12.
10. Васильев Ю. Л., Рычков К. Л. Нижняя оценка формульной сложности тернарной линейной функции // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2013. Т. 20, № 4. С. 15–26.

11. Рычков К. Л. О минимальных π -схемах для линейных булевых функций // Дискрет. анализ. 1991. Вып. 51. С. 84–104.
12. Яблонский С. В. Реализация линейной функции в классе Π -схем // Докл. АН СССР. 1954. Т. 94, № 5. С. 805–806.
13. Рычков К. Л. Достаточные условия локальной неповторности минимальных π -схем, реализующих линейные булевы функции // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2015. Т. 22, № 5. С. 71–85.
14. Рычков К. Л. О сложности реализации линейной булевой функции в классе π -схем // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2018. Т. 25, № 3. С. 36–94.
15. Harary F. Graph theory. London: Addison-Wesley, 1969. 273 p.
16. Turán P. Eine Extremalaufgabe aus der Graphentheorie // Mat. Fiz. Lapok. 1941. Bd 48. S. 436–452. [Hungarian].

Рычков Константин Леонидович

Статья поступила

10 июня 2019 г.

После доработки —

29 июля 2019 г.

Принята к публикации

28 августа 2019 г.

ON THE PERFECTNESS OF MINIMAL REGULAR PARTITIONS OF THE EDGE SET OF THE n -DIMENSIONAL CUBE^{*)}

K. L. Rychkov

Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptug Avenue, 630090 Novosibirsk, Russia
E-mail: rychkov@math.nsc.ru

Abstract. We prove that, for n equal to 3, 5, and a power of 2, every minimal partition of the edge set of the n -dimensional cube is perfect. As a consequence, we obtain some description of the classes of all minimal parallel-serial contact schemes (π -schemes) realizing the linear Boolean functions that depend essentially on n variables for the corresponding values of n . Bibliogr. 16.

Keywords: Boolean function, π -scheme, regular partition of the edge set of the n -dimensional cube, lower complexity bound.

REFERENCES

1. **V. M. Khrapchenko**, Complexity of the realization of a linear function in the class of Π -circuits, *Mat. Zametki* **9** (1), 35–40 (1971) [Russian] [*Math. Notes Acad. Sci. USSR* **9** (1), 21–23 (1971)].
2. **V. M. Khrapchenko**, A method of determining lower bounds for the complexity of Π -schemes, *Mat. Zametki* **10** (1), 83–92 (1971) [Russian] [*Math. Notes Acad. Sci. USSR* **10** (1), 474–479 (1971)].
3. **V. M. Khrapchenko**, A simplified proof of a lower complexity estimate, *Discrete Math.* **25** (2), 82–84 (2013) [Russian] [*Discrete Math. Appl.* **23** (2), 171–174 (2013)].
4. **K. L. Rychkov**, A modification of Khrapchenko's method and its application to estimation of complexity of Π -schemes for code functions, in *Methods of Discrete Analysis in Theory of Graphs and Schemes*, Vol. 42 (Izd. Inst. Mat., Novosibirsk, 1985), pp. 91–98 [Russian].
5. **A. Razborov**, Applications of matrix methods to the theory of lower bounds in computational complexity, *Combinatorica* **10** (1), 81–93 (1990).
6. **M. Karchmer** and **A. Wigderson**, Monotone circuits for connectivity require super-logarithmic depth, *SIAM J. Discrete Math.* **3** (2), 255–265 (1990).

^{*)} This research is supported by the Programme for Fundamental Scientific Research of SB RAS No. I.5.1 (Project 0314–2019–0016).

7. **J. Håstad**, The shrinkage exponent of de Morgan formulas is 2, *SIAM J. Comput.* **27** (1), 48–64 (1998).
8. **D. Yu. Cherukhin**, To the question of a logical representation for the parity counter, *Neform. Nauka*, No. 2, 14–23 (2009) [Russian].
9. **S. V. Avgustinovich**, **Yu. L. Vasil'ev**, and **K. L. Rychkov**, The computation complexity in the class of formulas, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **19** (3), 3–12 (2012) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **6** (4), 403–409 (2012)].
10. **Yu. L. Vasil'ev** and **K. L. Rychkov**, A lower bound on formula size of a ternary linear function, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **20** (4), 15–26 (2013) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **7** (4), 490–499 (2013)].
11. **K. L. Rychkov**, On minimal π -schemes for linear Boolean functions, in *Methods of Discrete Analysis in Synthesis of Schemes for Boolean Functions*, Vol. 51 (Izd. Inst. Mat., Novosibirsk, 1991), pp. 84–104 [Russian] [*Sib. Adv. Math.* **3** (3), 172–185 (1993)].
12. **S. V. Yablonskii**, Realization of a linear function in the class of Π -circuits, *Dokl. Akad. Nauk SSSR, Nov. Ser.* **94** (5), 805–806 (1954) [Russian].
13. **K. L. Rychkov**, Sufficient conditions for the minimal π -schemes for linear Boolean functions to be locally nonrepeating, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **22** (5), 71–85 (2015) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **9** (4), 580–587 (2015)].
14. **K. L. Rychkov**, Complexity of the realization of a linear Boolean function in the class of π -schemes, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **25** (3), 36–94 (2018) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **12** (3), 540–576 (2018)].
15. **F. Harary**, *Graph Theory* (Addison-Wesley, London, 1969).
16. P. Turán, Eine Extremalaufgabe aus der Graphentheorie, *Mat. Fiz. Lapok* **48** (1), 436–452 (1941) [Hungarian].

Konstantin L. Rychkov

Received June 10, 2019

Revised July 29, 2019

Accepted August 28, 2019