Д. В. Падучих, Об автоморфизмах строго регулярного графа с параметрами $(85, 14, 3, 2)$,
Дискрет. матем., 2009, том 21, выпуск 1, 78–104

Дискретная математика

том 21 выпуск 1 * 2009

УДК 519.14

Об автоморфизмах строго регулярного графа с параметрами $(85, 14, 3, 2)$

© 2009 г. Д. В. Падучих

Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(85, 14, 3, 2)$, g — элемент простого порядка p из $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ и $\Delta = \mathrm{Fix}(g)$. В работе доказано, что либо $p = 5$ или $p = 17$ и Δ — пустой граф, либо $p = 7$ и Δ является 1-кликой или $p = 5$ и Δ является 5-кликой, либо $p = 3$ и Δ является четырехугольником или 2×5 решеткой, либо $p = 2$ и Δ является объединением φ изолированных вершин и ψ изолированных треугольников, $\psi = 1$ и $\varphi \in \{4, 6\}$ или $\psi = 0$ и $\varphi = 5$. Кроме того, установлено, что граф Γ не является вершинно транзитивным.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 05–01–00046.

1. Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a и b — вершины графа Γ, то через $d(a, b)$ обозначается расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ, индуцированный множеством вершин, которые находятся на расстоянии i в Γ от вершины a. Подграф $\Gamma_1(a)$ называется окрестностью вершины a и обозначается $[a]$. Через $a^\perp$ обозначается подграф, являющийся шаром радиуса 1 с центром в a.

Граф Γ называется регулярным графом степени k, если $[a]$ содержит точно k вершин для любой вершины a из Γ. Граф Γ называется реберно регулярным графом с параметрами (v, k, λ), если Γ содержит v вершин, является регулярным степени k и каждое ребро Γ лежит в λ треугольниках. Граф Γ называется вполне регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ), если Γ реберно регулярен с соответствующими параметрами и подграф $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин в случае $d(a, b) = 2$. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется сильно регулярным графом. Граф Γ называется сильным с параметрами (λ, μ), если каждое его ребро лежит точно в λ треугольниках и подграф $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин в случае $[a] \cap [b] = 2$. Число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначим через $\lambda(a, b)$ (через $\mu(a, b)$), если $d(a, b) = 1$ (если $d(a, b) = 2$), а соответствующий подграф назовем λ-подграфом (μ-подграфом). Если Δ — подграф графа Γ и $a, b \in \Delta$, то через $d_\Delta(a, b)$ обозначим расстояние между a и b в графе Δ, а через $X_i(\Delta)$ обозначим множество вершин из $\Gamma - \Delta$, каждая из которых смежна с i вершинами из Δ.

Если X — подмножество группы автоморфизмов графа Γ, то через $\mathrm{Fix}(X)$ обозначим подграф на множестве вершин, остающихся неподвижными под действием любого автоморфизма из X. Подграфы неподвижных точек автоморфизмов сильно регулярного графа с малыми значениями параметров λ и μ имеют жестко заданное строение. Так, подграф неподвижных точек автоморфизма графа Мура сам является графом Мура или звездой (см. лемму 1 в [1]).

Хорошо известно (см. предложение 1.1.2 в [2]), что сильный граф с $\mu \geqslant 2$ регулярен. Поэтому связные компоненты непустых подграфов неподвижных точек 2-автоморфизмов сильно регулярного графа с $\max\{\lambda, \mu\} \leqslant 2$ либо являются кликами, либо сильно регулярны с этими же параметрами. Автоморфизмы графов Мура, то есть сильно регулярных графов с параметрами $(v, k, 0, 1)$ изучались в [1]. Автоморфизмы сильно регулярных графов с $\mu = 2$ и $\lambda \in \{0, 1\}$ рассматривались в [3, 4].

В данной работе изучаются автоморфизмы сильно регулярных графов с параметрами $(v, r, 3, 2)$. Кроме обычных теоретико-графовых методов, в данной статье используется метод Хигмена, позволяющий уточнить возможные порядки автоморфизмов и строение подграфов их неподвижных точек с помощью теории характеров конечных групп.

Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(v, k, 3, 2)$. Используя равенство $(\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu) = n^2$, получим, что $n^2 = 4k - 7$. Поэтому

$$n = 2u + 1, \qquad k = u^2 + u + 2,$$

и неглавные собственные значения графа Γ равны $u + 1$ и $-u$. Кратность собственного значения $u + 1$ равна

$$f = (u - 1)k(k + u)/(n\mu) = (u - 1)(u^2 + u + 2)(u^2 + 2u + 2)/(4u + 2),$$

следовательно, $2u + 1$ делит 105. В случае $u = 2$ получим, что $k = 8$ и Γ является 5×5 решеткой. Если $u = 3$, то $k = 14$, и Γ имеет параметры $(85, 14, 3, 2)$. Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(85, 14, 3, 2)$, g — элемент простого порядка p из $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ и $\Delta = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *$p = 5$ или $p = 17$ и Δ — пустой граф;*

(2) *$p = 7$ и Δ является 1-кликой или $p = 5$ и Δ является 5-кликой;*

(3) *$p = 3$, Δ является четырехугольником или 2×5 решеткой, и в последнем случае для шести вершин из Δ их окрестности содержат точно две максимальные клики;*

(4) *$p = 2$, окрестность каждой вершины из Δ связна, Δ является объединением φ изолированных вершин и ψ изолированных треугольников, причем либо $\psi = 1$ и $\varphi \in \{4, 6\}$, либо $\psi = 0$ и $\varphi = 5$.*

Следствие 1. *Сильно регулярный граф с параметрами $(85, 14, 3, 2)$ не является вершинно транзитивным.*

2. Предварительные результаты

Лемма 1. *Пусть γ является сильно регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ) и неглавными собственными значениями r, s, $s < 0$. Если Δ — индуцированный регулярный подграф графа Γ степени d с w вершинами, то*

$$s \leqslant d - \frac{w(k - d)}{v - w} \leqslant r,$$

причем одно из равенств достигается тогда и только тогда, когда каждая вершина из $\Gamma - \Delta$ *смежна точно с* $w(k-d)/(v-w)$ *вершинами* Δ.

Это утверждение хорошо известно, см., например, [6].

Лемма 2. *Пусть* Γ *является связным графом и число* $|[a]\cap[b]|$ *равно* 3 *для любых смежных вершин* a, b, *равно* 2 *для любых вершин с* $d(a,b)=2$. *Тогда* Γ *является вполне регулярным графом.*

Это утверждение следует из предложения 1.1.2 в [2].

Лемма 3. *Пусть* Γ *— сильно связный граф с параметрами* (v,k,λ,μ), Δ *— его индуцированный подграф с* N *вершинами,* M *ребрами и степенями вершин* $d_1,\dots,d_N$. *Тогда*

$$(v-N)-(kN-2M)+\lambda M+\mu\left(\binom{N}{2}-M\right)-\sum_{i=1}^{N}\left(\binom{d_i}{2}\right)=x_0+\sum_{i=1}^{N}\left(\binom{i-1}{2}\right)x_i$$

и

$$\left(\sum_{i=1}^{N} i x_i\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} i^2 x_i,$$

где x_i *— число вершин из* $\Gamma-\Delta$, *смежных ровно с* i, $i=0,1,\dots,N$, *вершинами из* Δ.

Доказательство. Подсчитав число вершин в $\Gamma-\Delta$, число ребер между Δ и $\Gamma-\Delta$ и число 2-путей с концами в Δ и средней вершиной в $\Gamma-\Delta$, получим равенства

$$v-N=\sum_{i=1}^{N} x_i, \qquad kN-2M=\sum_{i=1}^{N} i x_i,$$
$$\lambda M+\mu\left(\binom{N}{2}-M\right)-\sum_{i=1}^{N}\left(\binom{d_i}{2}\right)=\sum_{i=1}^{N}\left(\binom{i}{2}x_i\right).$$

Вычитая второе равенство из суммы первого и третьего, получим равенство из заключения леммы. Квадратный трехчлен

$$\sum_{i=1}^{N}(i-x)2x_i=\sum_{i=1}^{N} i^2 x_i^{-}2x\sum_{i=1}^{N} i x_i + x^2\sum_{i=1}^{N} x_i$$

неотрицателен, поэтому дискриминант $\left(\sum_{i=1}^{N} i x_i\right)^2-\sum_{i=1}^{N} x_i\sum_{i=1}^{N} i^2 x_i$ этого квадратного трехчлена неположителен. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть* Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* $(85,14,3,2)$ *и неглавными собственными значениями* 4, -3. *Если* Δ *— индуцированный регулярный подграф* Γ *степени* d *с* w *вершинами, то*

(1) $d-4\leqslant w(14-d)/(85-w)\leqslant d+3$, *причем одно из равенств достигается тогда и только тогда, когда каждая вершина* $\Gamma-\Delta$ *смежна точно с* $w(14-d)/(85-w)$ *вершинами из* Δ;

(2) *если* $d=6$, *то* $17\leqslant w\leqslant 45$, *в частности,* Γ *не содержит* 3×5 *решеток.*

Доказательство. Первое утверждение следует из леммы 1. Второе утверждение следует из первого.

Лемма 5. *Пусть γ — сильно регулярный граф с параметрами* $(85, 14, 3, 2)$. *Если окрестность вершины а является несвязным графом, то* $[a]$ *имеет связную компоненту* Δ *с* 10 *вершинами и* $\mu_\Delta = 1$, $\lambda_\Delta \leqslant 1$ *и выполняется одно из утверждений:*

(1) *Δ — граф Петерсена;*

(2) *Δ содержит два треугольника, и существует единственная вершина в Δ, не смежная с вершинами этих треугольников;*

(3) *Δ содержит три треугольника, и существует единственная вершина Δ, не принадлежащая ни одному из треугольников, смежная с одной вершиной в каждом треугольнике.*

Доказательство. Через K обозначим 4-клику из $[a]$. Заметим, что $[a]$ — регулярный граф степени 3, так как $\lambda = 3$ в графе Г. Следовательно, клика K изолирована в $[a]$. В $[a]$ не существует других 4-клик, поскольку в противном случае граф $[a]$ был бы объединением двух изолированных 4-клик и подграфа с 6 вершинами степени 3, а это либо $K_{3,3}$, либо 3-призма. Получаем противоречие с тем, что $\mu_\Gamma = 2$. Таким образом, $[a]$ является объединением изолированной 4-клики K и связного регулярного подграфа Δ степени 3 с 10 вершинами. Ограничения на параметры μ_Δ и λ_Δ вытекают из сильной регулярности графа Г. Остается доказать, что граф Δ удовлетворяет одному из трех утверждений леммы.

Допустим, что Δ не содержит треугольников. Тогда граф Δ вполне регулярен с параметрами $(10, 3, 0, 1)$ и является графом Петерсена. В этом случае выполняется утверждение (1).

Пусть Δ содержит один треугольник T. Обозначим $\Delta_i(T)$ подграф графа Δ, состоящий из вершин, находящихся на расстоянии i от T. В силу ограничений на μ_Δ и λ_Δ граф $\Delta_1(T)$ является кокликой, $\Delta_2(T)$ состоит из 6 вершин. Получаем противоречие с тем, что $|\Delta| = 10$.

Если Δ содержит три треугольника, то выполняется утверждение (3).

Пусть теперь Δ содержит ровно два треугольника T_1 и T_2. Предположим, что каждая вершина Δ смежна с вершиной из $T_1 \cup T_2$. Если вершина a смежна с вершиной b из T_1 и вершиной c из T_2, то смежная с a вершина d из $\Delta - (T_1 \cup T_2)$ не смежна с вершинами из $T_1 \cup T_2$, получаем противоречие. Значит, каждая вершина из $\Delta - (T_1 \cup T_2)$ смежна с единственной вершиной из $T_1 \cup T_2$. Получаем противоречие с тем, что тогда подграф $\Delta - (T_1 \cup T_2)$ является четырехугольником. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть* Г *является связным графом, в котором окрестности вершин являются 3-путями. Тогда* Г *получается из ленты, состоящей из путей* $p_1 \dots p_{n+1}$, $q_1 \dots q_{n+1}$, $p_i \sim q_i$, $i = 1, \dots, n+1$, $n \geqslant 4$, *отождествлением вершин*

(1) p_1 *с* p_{n+1} *и* q_1 *с* q_{n+1}, *или*

(2) p_1 *с* q_{n+1}, q_2 *с* p_{n+1} *и* q_1 *с* p_n.

Доказательство. Представим $p_1^\perp$ как 4-цикл $p_1 p_2 q_2 q_1$ с диагональю $\{p_1, q_2\}$ и дополнительной вершиной p_{-1}, смежной с p_1, p_2. Добавим к этому подграфу 2 вершины из окрестности p_2. Указанную вершину обозначим через q_3, а концевую вершину — через p_3. Продолжим процесс. На некотором шаге подграф $\{p_n, q_n\}$ пересекает $\{p_{-1}, q_1\}$. Если

$p_n = p_{-1}$, то вершина q_n смежна с q_1 и Γ — граф из пункта (1) леммы. В этом случае $n \geqslant 4$ (в случае $n = 3$ получим октаэдр).

Если $q_n = p_{-1}$, то $p_n = q_1$ (так как степень p_n равна 4) и Γ — граф из пункта (2) леммы. В этом случае $n \geqslant 4$ (в случае $n = 4$ получим граф, дополнительный к семиугольнику).

Если же $p_{-1} \notin \{p_n, q_n\}$, то $p_n = q_1$ и степень q_1 в графе Γ не меньше 5, получаем противоречие. Лемма доказана.

3. Характеры групп и автоморфизмы графов

Доказательство теоремы 1 опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами сильно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [9]. При этом граф Γ рассматривается как симметричная схема отношений $(X, \mathcal{R})$, где X — множество вершин графа, R_0 — отношение равенства на X, R_1 — отношение смежности в Γ, R_2 — отношение смежности в дополнительном графе $\bar{\Gamma}$. Если P и Q — первая и вторая матрицы собственных значений схемы, то

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & r & s \\ v-k-1 & -r-1 & -s-1 \end{pmatrix},$$

$PQ = QP = vI$. Здесь v — число вершин, k, r, s — собственные значения графа Γ кратностей 1, f, g соответственно (указанные кратности образуют первый столбец матрицы Q).

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v, C)$. Пространство C^v является ортогональной прямой суммой собственных G-инвариантных подпространств $W_0 \oplus W_1 \oplus W_2$ матрицы смежности графа Γ. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i}. Тогда для любого $g \in G$

$$\chi_i(g) = v^{-1} \sum_{j=0}^{2} Q_{ij} \alpha_j(g),$$

где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $(x, x^g) \in R_j$. Заметим, что значения характеров $\chi_i(g)$ являются целыми алгебраическими числами.

До конца статьи будем предполагать, что Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(85, 14, 3, 2)$ и $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. Тогда Γ имеет собственные значения 14, 4, -3 кратностей 1, 34, 50, и

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 14 & -3 & 4 \\ 70 & 2 & -5 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 50 & -75/7 & 10/7 \\ 34 & 68/7 & -17/7 \end{pmatrix}.$$

Поэтому значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности 50 равно

$$\chi_1(g) = (50\alpha_0(g) - (75\alpha_1(g) - 10\alpha_2(g))/7)/85.$$

Подставляя в эту формулу значение $\alpha_2(g) = v - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)$, получим равенство

$$\chi_1(g) = (4\alpha_0(g) - \alpha_1(g) + 10)/7.$$

Выберем подгруппу X из G порядка, взаимно простого с 6. Пусть $\Omega = \mathrm{Fix}(X)$ — множество вершин графа Γ, неподвижных относительно X. Если a, b — две вершины из Ω, то $[a] \cap [b]$ — подграф, допустимый относительно X, поэтому $[a] \cap [b] \in \Omega$. Значит, Ω — либо пустой граф, либо сильно регулярный граф с $\lambda = 3$, $\mu = 2$, либо является кликой с числом вершин, не большим 5. Если Ω является 5×5 решеткой, то получаем противоречие с леммой 5.

Пусть g —элемент простого порядка p из G, $\Delta = \mathrm{Fix}(g)$, $X_i = X_i(\Delta)$, и $x_i = |X_i|$.

Лемма 7. *Пусть $p = 2$, $a \in \Delta$ и $[a]$ содержит g-допустимую 5-клику K. Тогда Δ пересекает $[a] - K$.*

Доказательство. Пусть $p = 2$, а $a \in \Delta$ и $[a]$ содержит g-допустимую 5-клику K. Предположим, что g действует без неподвижных точек на $\Phi = [a] - K$.

Заметим, что два треугольника из Φ не пересекаются. В противном случае они пересекаются по ребру и индуцируют 4-клику L (иначе μ-подграф двух вершин содержит не менее 3 вершин). Теперь $\Phi - L$ является графом степени 3 с шестью вершинами и снова некоторый μ-подграф содержит не менее 3 вершин. Из действия g на Φ следует, что Φ либо не содержит треугольников и является графом Петерсена, либо содержит точно 2 треугольника $\{x, y, z\}$ и $\{x^g, y^g, z^g\}$. Но граф Петерсена не имеет инволютивных автоморфизмов, действующих без неподвижных точек.

Если некоторая вершина u из Φ несмежна с вершинами из $\{z, y, z\} \cup \{x^g, y^g, z^g\}$, то $\Phi - \{z, y, z\} \cup \{x^g, y^g, z^g\}$ является 3-лапой из $u^{\perp}$. Получаем противоречие с тем, что $u \neq u^g$. Допустим сначала, что x смежна с вершиной из $\{x^g, y^g, z^g\}$, тогда $[y] \cap [s^g]$ пусто для любой вершины $s \in \{x, y, z\}$, иначе число вершин, попадающих в объединение окрестностей треугольников $\{x, y, z\}$ и $\{x^g, y^g, z^g\}$, не больше 9. Для $u \in \Phi(y) - K$ и $w \in \Phi(z) - K$ вершины u и w несмежны. В противном случае $\{x, y, z, w\}$ — четырехугольник. Но теперь $\{u, w, u^g, w^g\}$ является четырехугольником.

Итак, между вершинами из $\{x, y, z\}$ и из $\{x^g, y^g, z^g\}$ ребер нет. Тогда некоторая вершина u попадает в пересечение окрестностей треугольников $\{x, y, z\}$ и $\{x^g, y^g, z^g\}$. Но окрестность каждого из этих треугольников без вершин этого треугольника является 3-кликой. Получили противоречие с тем, что тогда степень u в графе Φ равна 2. Лемма доказана.

Лемма 8. *Справедливы следующие утверждения:*

(1) *если Δ — пустой граф, то $p = 5$ или $p = 17$;*

(2) *если Δ является β-кликой, то либо $\beta = 2$ и $p = 7$, либо $\beta = 5$ и $p = 5$;*

(3) *если Δ является сильно регулярным графом, то либо $p = 3$ и Δ является четырехугольником, либо $p = 2$ и Δ является n-кликой, $n \in \{5, 7\}$.*

Доказательство. Напомним, что $\chi_1(g) = (4\alpha_0(g) - \alpha_1(g) + 10)/7$. Если Δ — пустой граф, то p делит 85, поэтому $p = 5$ или $p = 17$. В случае $p = 17$ на множестве вершин графа Γ имеется пять $\langle g\rangle$-орбит и $\alpha_1(g)$ сравнимо с 3 по модулю 7. Отсюда $\alpha_1(g) = 17$. В случае $p = 5$ на множестве вершин графа Γ имеется семнадцать $\langle g\rangle$-орбит и $\alpha_1(g)$ равно 10 или 45. Утверждение (1) доказано.

Если Δ является β-кликой, то p делит $85 - \beta$ и $15 - \beta$, поэтому либо $\beta = 1$ и $p = 2$ или $p = 7$, либо $\beta = 3$ и $p = 2$, либо $\beta = 5$ и $p = 2$ или $p = 5$.

Пусть $\beta = 1$ и $\Delta = \{a\}$. Если $p = 2$ и вершина x смежна с x^g, то g действует на 3-вершинном подграфе $[x] \cap [x^g]$ и $x \in [a]$. Заметим, что любая вершина y из $[a]$ смежна с y^g. Отсюда $\alpha_2(g) = 14$ и $\chi_1(g) = (4\alpha_0(g) - \alpha_1(g) + 10)/7 = 0$. С другой стороны, если y — отличная от x^g вершина из $[a] \cap [x]$, то $\{x, y, x^g, y^g\}$ является четырехугольником или 4-кликой. В первом случае получим, что $[x] \cap [y^g] = \{a, x^g, y\}$, это противоречит тому, что $\mu = 2$. Значит, $\{x, y, x^g, u^g\}$ является 4-кликой, и $[a]$ разбивается 4-кликами, что противоречит тому, что $k = 14$.

Если $\beta = 1$ и $p = 7$, то $[a]$ содержит две $\langle g \rangle$-орбиты, каждая из которых является кликой или семиугольником. Заметим, что $\chi_1(g) = (14 - \alpha_1(g))/7$ является целым числом.

Если $\beta = 2$ и $p = 3$, то для $\Delta = \{a, b\}$ элемент g действует на 10-вершинном подграфе $[a] - b^{\perp}$, получаем противоречие.

Если $\beta = 3$ и $p = 2$, то $\Delta = \{a, b, c\}$ и $[a] \cap [b] = \{c, x, x^g\}$. Если вершины x, x^g смежны, то $[x] \cap [x^g]$ совпадает с $\{a, b, c\}$, что противоречит лемме 7. Значит, вершины x, x^g несмежны. Если вершины u, u^g смежны, то u смежна с единственной вершиной из $\{a, b, c\}$ и $\alpha_1(g) = 24$. Отсюда

$$\chi_1(g) = (4\alpha_0(g) - \alpha_1(g) + 10)/7 = -2/7,$$

получаем противоречие.

Ясно, что $\beta \neq 4$. Пусть $\beta = 5$, тогда $p \neq 2$ по лемме 7. Значит, $p = 5$ и каждая нетривиальная $\langle g \rangle$-орбита является кокликой или пятиугольником. Поскольку $\alpha_1(g) = 5w$ и $\chi_1(g) = (30 - \alpha_1(g))/7$, справедливо равенство $w = 7t + 6$ для подходящего целого t и $\alpha_1(g) = 35t + 30$. Отсюда $t = 0$ и $\alpha_1(g) = \alpha_1(g^2) = 30$. Утверждение (2) доказано.

Пусть Δ — сильно регулярный граф с параметрами (v', k', λ', μ'). Если $\lambda' = 3$, $\mu' = 2$, то Δ является 5×5 решеткой. Получаем противоречие с тем, что для $a \in \Delta$ подграф $[a]$ содержит две изолированные 4-клики и 6-вершинный граф степени 3.

Если $p = 3$, то $\lambda' = 0$ и $k' = 2$ или $k' = 5$. Если Δ является графом с параметрами $(16, 5, 0, 2)$, то каждая вершина $\Gamma - \Delta$ смежна либо не более чем с одной вершиной Δ, либо с ребром Δ. С другой стороны, в Δ имеется 40 ребер, каждое из которых попадает в окрестности трех вершин из $\Gamma - \Delta$, получаем противоречие. Если Δ является четырехугольником, то $\chi_1(g) = (26 - \alpha_1(g))/7$ и $\alpha_1(g) = 21t + 12$ для некоторого целого числа t. С другой стороны, окрестность каждой вершины Δ содержит 2 вершины из Δ, шесть вершин, смежных с ребрами из Δ, и шесть вершин, смежных с одной вершиной из Δ. Поэтому $\alpha_1(g) \leqslant 24$ и $t = 0$.

Пусть $p = 2$. Если $\mu' = 2$, то $\lambda' = 1$ и Δ является 3×3-решеткой. Применяя лемму 3, получаем, что

$$\sum_i x_i = 76, \quad \sum_i i x_i = 90, \quad \sum_i \binom{i}{2} x_i = 54 + 36 - 54 = 36.$$

Отсюда

$$\alpha_1(g) = x_1 + x_3 = 4x_3 + 18,$$
$$\chi_1(t) = (4\alpha_0(t) - \alpha_1(t) + 10)/7 = (28 - 4x_3)/7,$$

поэтому $x_3 = 14$, получаем противоречие.

Если $\mu' = 0$, то Δ является объединением n изолированных γ-клик, γ равно 1, 3 или 5. По лемме 7 параметр $\gamma \neq 5$. Положим $X_i = X_i(\Delta)$ и $x_i = |X_i|$.

Пусть $\gamma = 3$. В силу леммы 7 треугольники в Δ являются максимальными кликами в Γ. Далее,

$$x_0 + x_1 + x - 2 + x_3 = 85 - 3n, \qquad x_1 + 2x2 + 3x_3 = 36n,$$
$$x_2 + 3x_3 = (6n + 9n(n - 1).$$

Вычитая из суммы первого и третьего равенств второе, получим, что

$$x_0 + x_3 = 9n^2 - 42n + 85.$$

Итак,

$$x_0 = 9n^2 - 42n + 85 - x_3,$$
$$x_1 = 42n - 18n^2 + 3x_3,$$
$$x_2 = 9n^2 - 3n - 3x_3.$$

Так как при $n \geqslant 5$ параметр x_1 отрицателен, то

$$n = 3, \quad x_0 = 40 - x_3, \quad x_1 = 3x_3 - 36, \quad x_2 = 72 - 3x_3.$$

Заметим, что $\alpha_1(g)x_1 + x_3$, поэтому

$$\chi_1(g) = (4\alpha_0(g) - \alpha_1(g) + 10)/7 = (82 - 4x_3)/7.$$

Отсюда $x_3 + 1$ делится на 7 и $x_3 = 21s + 10$ для некоторого целого числа s. Так как $x_1 \geqslant 0$, справедливы неравенства $x_3 \geqslant 52$ и $x_1 \geqslant 120$, получаем противоречие.

Пусть $\gamma = 1$. Тогда

$$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 85 - n, \qquad x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14n,$$
$$x_2 + 3x_3 = n^2 - n.$$

Вычитая из суммы первого и третьего равенств второе равенство, получаем, что

$$x_0 + x_3 = n^2 - 16n + 85.$$

Итак,

$$x_0 = n^2 - 16n + 85 - x_3,$$
$$x_1 = 16n - 2n2 = 3x - 3,$$
$$x_2 = n^2 - n - 3x - 3.$$

Пусть для $a \in \Delta$ подграф $[a]$ содержит ν_1 вершин, смежных с их образами под действием g, и ν_2 вершин, несмежных с их образами под действием g. По лемме 7 граф $[a]$ не содержит g-допустимых 4-клик, поэтому для вершины u из $[a]$, смежной с ее образом при действии g, подграф $[a] \cap [u]$ содержит u^g и две вершины из X_2. Вершина из $[a] \cap X_2$ смежна не более чем с 3 вершинами из $[a] - X_2$, поэтому $2\nu_1 \leqslant 3\nu_2$ и $\nu_2 \geqslant 28/5$. Значит, $\nu_2 \geqslant 6$.

Из леммы 4 следует, что $n \leqslant 15$, причем в случае $n = 15$ справедливы равенства

$$x_3 = 70, \qquad \chi_1(g) = (4\alpha_0(g) - \alpha_1(g) + 10)/7 = 0.$$

В этом случае $\nu_2 = 0$, получаем противоречие.

Если $n = 13$, то $x_0 = 46 - x_3$, $x_1 = 4x_3 - 130$, поэтому $\chi_1(g) = (192 - 4x_3)/7$ и $x_3 + 1$ делится на 7. Отсюда $x_3 = 14s + 6$ для некоторого целого числа s. Получаем противоречие с тем, что $4 \leqslant x_3 \leqslant 46$.

Если $n = 11$, то $x_0 = 30 - x_3$, $x_1 = 3x_3 - 66$, поэтому $\chi_1(g) = (120 - 4x_3)/7$ и $x_3 - 2$ делится на 7. Отсюда $x_3 = 14s + 2$ для некоторого целого числа s. Поэтому $x_0 = 0$,

$x_3 = 30$, $x_1 = 24$ и $x_2 = 20$. В этом случае для подходящей вершины a получим, что $\nu_2 \leqslant 40/11$, что невозможно.

Если $n = 9$, то $x_0 = 22 - x_3$, $x_1 = 3x_3 - 18$, поэтому $\chi_1(g) = (64 - 4x_3)/7$ и $x_3 - 2$ делится на 7. Отсюда $x_3 = 14s + 2$ для некоторого целого числа s. Следовательно, $x_0 = 6$, $x_3 = 16$, $x_1 = 30$ и $x_2 = 24$. Снова для подходящей вершины a получим, что $\nu_2 \leqslant 48/9$, что невозможно.

Если $n = 7$, то $x_0 = 22 - x_3$, $x_1 = 3x_3 + 14$, поэтому $\chi_1(g) = (24 - 4x_3)/7$ и $x_3 + 1$ делится на 7. Отсюда $x_3 = 14s + 6$ для некоторого целого числа s. Так как $x_3 \leqslant 14$, поэтому $s = 0$, $x_3 = 6$, $x_0 = 16$, $x_1 = 32$ и $x_2 = 24$.

Если $n = 5$, то $x_0 = 30 - x_3$, $x_1 = 3x_3 + 30$, поэтому $\chi_1(g) = -4x_3/7$ и $x_3 = 14s$ для некоторого целого числа s. Отсюда $x_3 = 0$, $x_0 = x_1 = 30$ и $x_2 = 20$.

Если $n = 3$, то $x_0 = 46 - x_3$, $x_1 = 3x_3 + 30$, поэтому $\chi_1(g) = -(4x_3 + 8)/7$ и Получаем противоречие с тем, что $x_3 = 0$ или $x_3 = 2$. Лемма доказана.

В силу леммы 8 можно считать, что Δ — непустой граф, не являющийся кликой или сильно регулярным графом. Отсюда, в частности, следует, что $p \leqslant 3$. До конца параграфа предполагается, что $p = 3$.

Лемма 9. *Если $\Delta(a) \cap \Delta(b)$ является кокликой для любых двух несмежных вершин $a, b \in \Delta$, то Δ является 2×5 решеткой и для шести вершин из Δ их окрестности содержат точно две максимальные 3-клики.*

Доказательство. Пусть $p = 3$ и $\Delta(a) \cap \Delta(b)$ является кокликой для любых для любых двух смежных вершин $a, b \in \Delta$. Так как $|\Delta(u) \cap \Delta(v)|$ есть 0 или 3 для любых смежных вершин $u, v \in \Delta$, граф Δ является регулярным, в котором окрестность любой вершины является объединением x изолированных вершин и y клик порядка 4, причем $y \leqslant 1$.

Граф Δ не является сильно регулярным, поэтому $y = 1$. Из действия g на $[a] - K$, где K есть 4-клика в $\Delta(a)$, заключаем, что $x = 1$ и Δ является 2×5 решеткой. Положим $X_i = X_i(\Delta)$ и $x_i = |X_i|$. Тогда $x_2 = 15$, $x_1 = 60$ и $x_0 = 0$. Далее, каждая вершина из X_2 несмежна с ее образом под действием g. Пусть $b \in \Delta$ и L является 5-кликой из Δ, содержащей b. Если вершина $u \in [b]$ смежна с u^g, то по лемме 5 граф Δ содержит точно два треугольника, один из которых содержит u. Пусть γ — число вершин из Δ, окрестности которых содержат точно две максимальные 3-клики. Тогда

$$\alpha_1(g) = 6\gamma, \qquad \chi_1(g) = (4\alpha_0(g) - \alpha_1(g) + 10)/7.$$

Отсюда $\gamma = 6$.

Лемма 10. *Подграф $\Delta(a) \cap \Delta(b)$ не является кликой для любых двух несмежных вершин a и b.*

Доказательство. Предположим, что $\Delta(a) \cap \Delta(b)$ является кликой для двух несмежных вершин $a, b \in \Delta$. Тогда $\Delta(a)$ содержит ребро. Легко видеть, что тогда связная компонента графа $[a]$, содержащая ребро из Δ, содержится в Δ. Если $[a] \subset \Delta$, то $\Delta = \Gamma$, получаем противоречие. Значит, $[a]$ содержит 4-клику K, содержащую единственную вершину $b \in \Delta$ и $[a] - K \subset \Delta$.

Если $u \in \Gamma_2(a)$ и несмежна ни с одной вершиной из $K - b$, то $u \in \Delta$. Отсюда

$$|\Gamma - \Delta| = 33, \qquad \chi_1(g) = (4\alpha_0(g) - \alpha_1(g) + 10)/7 = (218 - \alpha_1(g))/7,$$

$\alpha_1(g) - 1$ делится на 7, и $\alpha_1(g) = 15$. Таким образом, $\Gamma - \Delta$ содержит точно пять g-допустимых треугольников и число вершин из Δ, окрестности которых содержат ребро из Δ, не больше 10.

Допустим, что $d \in \Delta$ и $\Delta(d)$ является кокликой. Тогда каждая вершина из $[d] - \Delta$ смежна с вершиной из $K - \{b\}$ и $|[d] - \Delta| \leqslant 6$. Теперь $\Delta(d)$ является n-кокликой для $n \geqslant 8$. Получаем противоречие с тем, что число ребер между $\Delta(d)$ и $[d]-\Delta$ не меньше 24, но не больше 18. Лемма доказана.

4. Инволютивные автоморфизмы графа с параметрами $(85, 14, 3.2)$

Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(85, 14, 3.2)$, t —инволютивный автоморфизм графа Γ и $\Omega = \mathrm{Fix}(t)$. Пусть X_i — множество вершин $\Gamma - \Omega$, смежных точно с i вершинами Ω, $x_i = |X_i|$.

Лемма 11. *Пусть $a \in \Omega$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *$[a]$ не содержится в Ω;*

(2) *если степень a в графе Ω не меньше 10, то $[a]$ — несвязный граф;*

(3) *если подграф $[a]$ является объединением 4-клики K' и компоненты Φ, имеющей 10 вершин, то $\Phi \cap \Omega$ является ребром или 3-лапой.*

Доказательство. Пусть $[a] \subset \Omega$. Так как $[a]$ содержит 21 ребро и каждое такое ребро попадает в окрестности не более 2 вершин из $\Gamma - a^{\perp}$, не менее 28 вершин из $\Gamma - a^{\perp}$ попадает в Ω. Заметим, что вершина $u \in \Gamma - \Omega$ смежна с ребром из $[a]$, поэтому вершина из $[a]$ смежна не более чем с 6 вершинами из $\Gamma - \Omega$. Допустим, что вершина c из $[a]$ смежна менее чем с 6 вершинами из $\Gamma - \Omega$. Тогда вершина u из $[c] \cap \Gamma - \Omega$ смежна с единственной вершиной d из $[a] \cap [c]$. Если u смежна с отличной от d вершиной e из $\Omega(c)$, то $[d] \cap [e]$ содержит 3 вершины c, u, u^t. Поэтому вершины d, e смежны, что противоречит тому, что $[a] \cap [d] = \{c, u, u^t\}$. Значит, подграф $[c] - \Omega$ является регулярным графом степени 2 на 4 вершинах. Получаем противоречие с тем, что $\mu = 2$. Значит, $[c] \subset \Omega$.

Допустим, что вершина c из $[a]$ смежна ровно с 6 вершинами из $\Gamma - \Omega$. Тогда $[a] \cap [c] = \{d_1, d_2, d_3\}$ и каждая вершина из $[c] \cap \Gamma - \Omega$ смежна с единственной вершиной из $\{d_1, d_2, d_3\}$, поэтому $\{d_1, d_2, d_3\}$ является кликой и $K' = \Omega(c) - [a]$ оказывается 4-кликой. Так как d_i смежна с вершинами из $\Gamma - \Omega$, верно одно из утверждений:

(а) граф $[a]$ — связный граф без треугольников и каждая вершина из $[a]$ смежна с 6 вершинами из $\Gamma - \Omega$, или

(б) $[a]$ является объединением изолированной 4-клики K' и графа Петерсена Φ, причем $|\Gamma - \Omega| = 30$ и каждая вершина $\Gamma - \Omega$ смежна с ребром из Φ.

Положим $\Omega_0 = \Omega - a^{\perp}$. В первом случае $|\Omega_0| = 28$, получаем противоречие с тем, что Ω_0 разбивается четырнадцатью 4-кликами. Во втором случае $|\Omega_0| = 40$ и Ω_0 разбивается десятью 4-кликами. Но в этом случае для $u \in \Gamma - \Omega$ подграф $[u]$ содержит по две вершины из $[z]$ для каждого $z \in K' \cup \{a\}$. Получаем противоречие с тем, что $|[u] \cap [u^t]| \geqslant 10$. Утверждение (1) доказано.

Пусть степень a в графе Ω не меньше 10. Заметим, что каждая вершина из $[a] - \Omega$ смежна не более чем с одной вершиной из $\Omega(a)$, поэтому степень каждой вершины в графе $[a] - \Omega$ не меньше 2 и $[a] - \Omega| = 4$. Теперь $[a] - \Omega$ является 4-кликой, четырехугольником или 4-кликой с удаленным ребром. Но в двух последних случаях для несмежных вершин $u, w \in [a] - \Omega$ получим, что $|[u] \cap [w]| \geqslant 3$. Получаем противоречие. Утверждение (2) доказано.

Пусть $a \in \Omega$ и связная компонента Φ из $[a]$ имеет 10 вершин. Допустим, что $\Phi \subset \Omega$. В силу утверждения (1) клика $K' = [a] - \Phi$ содержит вершину u из $\Gamma - \Omega$. Далее, $[u] - a^{\perp}$ содержит 10 вершин из $\Gamma - \Omega$, каждая из которых смежна с единственной вершиной из Φ. Если K' содержит 2 вершины b, c из Ω, то $[b] - a^{\perp}$ содержится в Ω (для $d \in \Phi$ подграф $[b] \cap [d]$ содержит a и единственную вершину из $[b] - a^{\perp}$). Если вершина w несмежна ни с одной вершиной из $K' \cup \{a\}$, то $[w]$ содержит по две вершины из Φ и из $[b] - a^{\perp}$, поэтому $w \in \Omega$. Значит, $|\Gamma - \Omega| = 22$ и для $z \in [u] - a^{\perp}$ подграф $[z] \cap \Omega$ содержит 3 вершины из $u^{\perp}$, вершину из $[u^t] - a^{\perp}$ и 10 вершин из Ω. Получаем противоречие с тем, что $|[z] \cap [z^t]| \geqslant 10$. Значит, $K = \{u, u^t, w, w^t\} \subset \Gamma - \Omega$.

Так как для вершин b из $\Omega - \{a\}$ и $u \in K'$ подграф $[b] \cap [u]$ содержит точно 2 вершины из $\Gamma - \Omega$, степень b в Ω не больше 6, и $|\Omega - a^{\perp}| \leqslant 10$.

Допустим, что Φ содержит три треугольника и вершину z. Каждое ребро такого треугольника попадает в окрестность единственной вершины из $\Omega - a^{\perp}$ и $|\Omega - a^{\perp}| \geqslant 9$. Обозначим через z' десятую вершину из $\Omega - a^{\perp}$. Пусть $\Phi(z) = \{c, d, e\}$ и окрестности вершин f_1, f_2 из $\Omega - a^{\perp}$ содержат по инцидентному c ребру, лежащему в треугольнике из Φ. Аналогично получим по 2 вершины, смежные с d и e соответственно. Тогда $[f_i] \cap [z]$ содержит c и вершину z'. Далее, подграф $[a] \cap [z']$ содержит z и еще одну вершину из Φ. Если z' смежна с вершиной из $\{c, d, e\}$, скажем с c, то $[c] \cap [z]$ содержит a, z' и еще одну вершину из $\Omega - a^{\perp}$, получаем противоречие. Если же z' смежна с вершиной g из $\Phi - z^{\perp}$, то $[g] \cap [z]$ содержит a, z' и вершину из $\{c, d, e\}$. Получаем противоречие.

Допустим, что Φ содержит два треугольника и 3-лапу $\{z; c, d, e\}$. Каждое ребро треугольника из Φ попадает в окрестность единственной вершины из $\Omega - a^{\perp}$, и $\Omega - a^{\perp}$ содержит 6 вершин такого типа. Пусть окрестность вершины b из $\Omega - a^{\perp}$ содержит ребро треугольника из Φ, инцидентного вершинам c', d', смежным с c, d соответственно. Тогда $[b] \cap [c]$ содержит c' и еще одну вершину f из $\Omega - a^{\perp}$. Теперь каждая из вершин c, d, e смежна по крайней мере с 2 вершинами из $\Omega - a^{\perp}$, причем $[c] \cap [d] = \{a, z\}$, поэтому $|\Omega - a^{\perp}| \geqslant 12$.

Предположим, что Φ — граф Петерсена. Допустим, что $\Omega \subset a^{\perp}$. Тогда для b из $\Omega - \{a\}$ подграф $[b]$ содержит 4 вершины, находящиеся от a на расстоянии не менее 3 в графе $[b]$. Поэтому $[b]$ содержит 4 вершины, смежные с их образами при действии t. Отсюда

$$\alpha_1(t) = 44, \qquad \chi_1(t) = (4\alpha_0(t) - \alpha_1(t) + 10)/7,$$

получаем противоречие.

Пусть z принадлежит $\Omega - a^{\perp}$, тогда $\Phi \cap [z]$ совпадает с некоторым ребром $\{b, c\}$ из Φ. Для любой вершины d из $(\Phi(b) \cup \Phi(c)) - \{b, c\}$ подграф $[d] \cap [z]$ содержит по вершине из $\{b, c\}$ и из $\Omega - a^{\perp}$. Поэтому степень z в графе $\Omega - a^{\perp}$ равна 4, и вершины z, z' из $[b] \cap [c] - a^{\perp}$ несмежны. Таким образом, $\Omega - a^{\perp} \subset z^{\perp} \cup (z')^{\perp}$ и $\Omega - a^{\perp}$ является либо объединением двух изолированных клик, либо вполне регулярным графом с $\lambda = 1$ и $\mu = 2$. В первом случае для любой отличной от z вершины x, лежащей в 5-клике, содержащей z, подграф $[b] \cap [x]$ содержит вершину из Φ. В последнем случае $\Omega - a^{\perp}$ является графом Тейлора, и, по теореме 1.5.3 из [2], окрестность Δ вершины в графе $\Omega - a^{\perp}$ является сильно регулярным графом с $k(\Delta) = 2\mu(\Delta)$, получаем противоречие.

Итак, Φ не содержится в Ω. Покажем, что $\Phi \cap \Omega$ является 3-лапой или ребром. Утверждение очевидно, если Φ — граф Петерсена. Допустим, что Φ является объединением трех треугольников и вершины b. Если t фиксирует все треугольники, то либо некоторый треугольник попадает в Ω, либо t переставляет несмежные вершины с b во всех треугольниках. Заметим, что $\Phi - b^{\perp}$ является шестиугольником, поэтому второй случай невозможен, а в первом случае $\Phi \subset \Omega$. Значит, t представляет собой два треугольника и $\Phi \cap \Omega$ является ребром.

Допустим, что Φ является объединением двух треугольников и 3-лапы. Если t переставляет указанные треугольники, то $\Phi \cap \Omega$ является ребром. Пусть t фиксирует указанные треугольники. Граф Φ не содержит Ω, поэтому t переставляет две вершины в указанной 3-лапе. Следовательно, t переставляет вершины треугольников, смежные с переставляемыми вершинами 3-лапы и $\Phi \cap \Omega$ является новой 3-лапой с центром в концевой вершине исходной 3-лапы.

Лемма 12. *Пусть $a \in \Omega$, $[a]$ является объединением 4-клики K' и компоненты Φ, имеющей 10 вершин. Тогда $\Phi \cap \Omega$ не является 3-лапой.*

Доказательство. Пусть $\Phi \cap \Omega$ является 3-лапой с центральной вершиной z. Тогда Φ не может содержать три треугольника. Если Φ — граф Петерсена, то для любой вершины f из $\Phi - \Omega$ вершина f^t является антиподом f в шестиугольнике $\Phi - \Omega$. Если Φ является объединением двух треугольников и 3-лапы, то либо указанная 3-лапа содержится в Ω и снова любая вершина f из $\Phi - \Omega$ несмежна с f^t, либо $\Phi \cap \Omega$ пересекает указанные треугольники и $\Phi - \Omega$ содержит точно два t-допустимых ребра.

Допустим, что $\Omega \subset a^{\perp}$. Тогда $\alpha_0 = 5$. Далее, $[a]$ содержит 4 вершины, находящиеся от z на расстоянии не менее 3 в графе $[a]$. Поэтому $[a]$ содержит 4 вершины, смежные с их образами при действии t. Аналогично $[z]$ содержит 4 вершины, смежные с их образами при действии t. Пусть b принадлежит $\Omega - \{a, z\}$. Тогда $[b] - (a^{\perp} \cup z^{\perp})$ содержит 8 вершин и каждая из этих вершин смежна с ее образом под действием t. Отсюда

$$\alpha_1(t) = 4 + 4 + 3 \cdot 8, \qquad \chi_1(t) = (4\alpha_0(t) - \alpha_1(t) + 10)/7 = -2/7,$$

получаем противоречие.

Пусть $k' \subset \Gamma - \Omega$. Тогда каждая вершина из $\Omega - a^{\perp}$ смежна либо с ребром 3-лапы $\Phi \cap \Omega$, либо с ребром из $\Phi - \Omega$. Если любая вершина f из $\Phi - \Omega$ несмежна с f', то $|\Omega - a^{\perp}| = 6$, $\Omega \subset z^{\perp}$ и степень z равна 10. Получаем противоречие с леммой 11.

Итак, некоторая вершина f из $\Phi - \Omega$ смежна с f'. Выше, в первом абзаце доказательства, показано, что подграф Φ является объединением двух треугольников $\{b, f, f^t\}$, $\{c, g, g^t\}$ и 3-лапы $\{d; u, u^t, z\}$, и $\Phi \cap \Omega = \{z; b, c, d\}$. Далее, $[f] \cup [f^t] = \{a, b, e\}$ и $[g] \cap [g] \cap [g^t] = \{a, c, h\}$ для некоторых вершин $e, h \in \Omega \cap \Gamma_2(a)$. Поэтому либо $|\Omega - a^{\perp}| = 2$, либо $\Omega - a^{\perp}$ содержит вершину i, смежную с ребром 3-лапы $\Phi \cap \Omega$. В последнем случае μ-подграф $[i] \cap]x]$ для $x \in \{b, c, d\} - [i]$ содержит вершину из $\Omega - a^{\perp}$ (очевидно, смежную с z), $|\Omega - a^{\perp}| = 8$, степень z в Ω равна 10, снова получаем противоречие с леммой 11.

Таким образом, $\Omega - a^{\perp} = \{e, h\}$ и вершины e, h изолированы в Ω. Применяя лемму 3, получаем, что

$$\sum_i x_i = 78, \quad \sum_i i x_i = 20 + 36 + 28, \quad \sum_i \binom{i}{2} x_i - 21 + 28 - 15 = 34.$$

Отсюда

$$\alpha_1(t) = x_1 + x_3 = 16 + 4x_3,$$
$$\chi_1(t) = (4\alpha_0(t) - \alpha_1(t) + 10)/7,$$

поэтому $x_3 = 2$, $x_1 = 22$, $x_2 = 28$ и $x_0 = 26$. Подсчитаем число геодезических 2-путей, концевые вершины которых лежат в Ω, а средняя вершина лежит вне Ω. Число пар несмежных вершин в Ω, лежащих в окрестности вершины, не принадлежащих Ω, равно 11, поэтому указанное число не больше 22. С другой стороны, каждой вершине из X_2 отвечает один указанный 2-путь. Получаем противоречие.

Допустим, что $K' \subset \Omega$. Тогда $\Omega(z)$ содержит изолированную 3-лапу из $a^{\perp}$ и 4 вершины, лежащие на расстоянии не менее 3 от a. Либо вершины из $\Omega(z) \cap \Gamma_2(a)$ образуют 4-клику, либо некоторая вершина f из $\Omega(z) \cap \Gamma_2(a)$ находится на расстоянии 3 от a в графе $[z]$. В последнем случае для подходящей вершины $x \in \{b, c, d\}$ подграф $[x \cap [f]$ содержит z и вершину из $[z]$, попадающую в Ω, получаем противоречие. Положим $K = \{a\} \cup K'$, $L = \{z\} \cup (\Omega(z) - a^{\perp})$. Тогда подграф $k \cup L$ является 2×5 решеткой. Допустим, что найдутся такие смежные вершины $b \in K$, $c \in L$, что $|[c] \cap \Omega(b)| = 1$ (то есть c — концевая вершина 3-лапы $\Omega(b)$). Тогда центральная вершина y 3-лапы $\Omega(b)$ лежит в 5-клике M и $K \cup L \cup M$ является 3×5 решеткой, получаем противоречие с леммой 4.

Итак, решетка $K \cup L$ содержит центральные вершины всех 3-лап вида $\Omega(x) - K$, $x \in K$. В этом случае

$$x_3 = \alpha_1(t) = 60, \qquad \chi_1(t) = (4\alpha_0(t) - \alpha_1(t) + 10)/7 = 50/7,$$

получаем противоречие. Мы доказали, что вершина, окрестность которой содержит 3-лапу из Ω, не лежит в 5-клике из Ω.

Допустим, что K' содержит точно 2 вершины b, c из Ω и пару вершин u, u^t. Положим $[z] \cap [b] = \{a, d\}$, $[z] \cap [c] = \{a, e\}$. Тогда расстояние от d и от e до a в графе $\Omega(z)$ не меньше 4, поэтому $\Omega(z)$ содержит 4-клику $L' = \{d, e, w, w^t\}$.

Положим $K = K' \cup \{a\}$, $L = L' \cup \{z\}$. Если центральная вершина f 3-лапы $\Omega(b)$ отлична от d, то f лежит в 5-клике M, и $(K \cup L \cup M) \cap \Omega$ является 3×3 решеткой (μ-подграфы пар несмежных вершин из $(K \cup L) \cap \Omega$ содержатся в $K \cup L$). Выберем вершину g из $[z] \cap \Omega(a) - M$. Тогда $[g] \cap \Omega(d)$ содержит z и вершину h, не лежащую в $K \cup L \cup M$. По лемме 11 подграф $\Omega(d) - L$ является 3-лапой. Получаем противоречие с тем, что b или f является центром этой 3-лапы.

Таким образом, решетка $(K \cup L) \cap \Omega$ содержит центральные вершины всех 3-лап вида $\Omega(x) - K$, $x \in K \cap \Omega$. В этом случае

$$\alpha_0(t) = 15, \qquad \sum_i x_i = 70,$$
$$\sum_i i x_i = 6 \cdot 8 + 9 \cdot 10 = 138, \qquad \sum_i \binom{i}{2} x_i = 108 + 138 - 144 = 102.$$

Отсюда $22 \leqslant x_3 \leqslant 34$,

$$\alpha_1(t) = x_1 + x_3 = 4x_3 - 66,$$
$$\chi_1(t) = (4\alpha_0(t) - \alpha_1(t) + 10)/7,$$

поэтому $x_3 + 1$ делится на 7. Таким образом, $x_3 = 34$, $x_0 = x_2 = 0$ и $x_1 = 36$. Подсчитаем число геодезических 2-путей, концевые вершины которых лежат в Ω, а средняя вершина лежит вне Ω. Число пар несмежных вершин в Ω, лежащих в окрестности вершины, не принадлежащей Ω, равно $36 - 9 \cdot 2 = 18$, поэтому указанное число не больше 36. С другой стороны, число вершин из X_3, смежных с треугольником из Ω, не больше 10. Оставшиеся вершины из X_3 смежны либо с 3-кликой, либо с вершиной и изолированным ребром, поэтому число указанных путей не меньше 48, получаем противоречие. Лемма доказана.

Лемма 13. *Если $a \in \Omega$, то $[a]$ является связным графом.*

Доказательство. Пусть $a \in \Omega$, $[a]$ является объединением 4-клики L' и 10-вершинного графа Φ. Из лемм 11, 12 следует, что $\Phi \cap \Omega$ является ребром $\{b, c\}$. Из доказательства леммы 11 следует, что Φ содержит три треугольника или является графом Петерсена.

Если Φ содержит три треугольника, то можно считать, что b не лежит ни в одном из них, c лежит в треугольнике $\{c, f, f^t\}$ и (f, g, h, h^t, g^t, f^t) является 6-циклом из Φ. Тогда $[f] \cap [f^t]$ содержит вершину d из $\Omega - a^\perp$ и $[g] \cap [g^t]$ содержит вершину e из $\Omega - a^\perp$.

Если Φ — граф Петерсена, то пары вершин $\{f, f^t\}$ и $\{h, h^t\}$ из $\Phi - a^\perp$ являются ребрами.

Предположим, что K' не пересекает Ω. Допустим сначала, что $\Omega(b) \cap c = \{a\}$. В случае графа Петерсена каждая вершина из $\Omega - a^\perp$ смежна с ребром из $\Phi - (b^\perp \cup c^\perp)$, поэтому $|\Omega|$ равен 5 или 7. Если $|\Omega| = 5$, то

$$\sum_i x_i = 80, \quad \sum_i i x_i = 36 = 28 = 64, \quad \sum_i \binom{i}{2} x_i = 9 + 14 - 3 = 20.$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= x_1 + x_3 = 8 + 4x_3, \\ \chi_1(t) &= (4\alpha_0(t) - \alpha_1(t) = 10)/7, \end{aligned}$$

поэтому $x_3 = 5$, это противоречит тому, что x_3 четно.

Если $|\Omega| = 7$, то $\Omega - a^\perp$ является кликой или четырехугольником. Пусть $\Omega - a^\perp$ является кликой. Тогда

$$\sum_i x_i = 78, \quad \sum_i i x_i = 36 + 56 = 92, \quad \sum_i \binom{i}{2} x_i = 9 + 36 - 3 = 42.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= x_1 + x_3 = 8 + 4x_3, \\ \chi_1(t) &= (4\alpha_0(t) - \alpha_1(t) + 10)/7 = (30 - 4x_3)/7, \end{aligned}$$

поэтому $x_3 = 4$, $x_1 = 20$, $x_2 = 30$, $x_0 = 24$. Подсчитаем число геодезических 2-путей, конечные вершины которых лежат в Ω. Так как в Ω число пар несмежных вершин равно 18, указанное число не больше 36. С другой стороны, каждой вершине из X_2 отвечает один указанный 2-путь, а вершине из X_3 — по крайней мере два указанных 2-пути, итого не меньше 38 путей, получаем противоречие.

Пусть Ω является четырехугольником. Тогда

$$\sum_i x_i = 78, \quad \sum_i i x_i = 36 + 48 = 84, \quad \sum_i \binom{i}{2} x_i = 21 + 28 - 7 = 42.$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= x_1 + x_3 = 4x_3, \\ \chi_1(t) &= (4\alpha_0(t) - \alpha_1(t) + 10)/7 = (38 - 4x_3)/7, \end{aligned}$$

поэтому $x_3 = 6$, $x_1 = 18, x_2 = 24$, $x_0 = 24$. Подсчитаем число геодезических 2-путей, конечные вершины которых лежат в Ω, а средняя вершина лежит вне Ω. Как и выше, указанное число не больше 24. С другой стороны, каждой вершине из X_2 отвечает один указанный 2-путь, а вершине из X_3 — по крайней мере два указанных 2-пути, итого не меньше 36 путей, как и выше, получаем противоречие.

Допустим теперь, что $\Omega \cap [c] = \{a, g, h\}$. В этом случае $|\Omega|$ равно 5, 7 или 9. Заметим, что вершины g, h несмежны, иначе $l = \{b, c, g, h\}$ является 4-кликой из Ω, и $\Omega - L$ содержит 6 вершин, смежных с ребрами L, получаем противоречие.

Если $|\Omega| = 5$, то

$$\sum_i x_i = 80, \quad \sum_i i x_i = 20 + 36 = 56, \quad \sum_i \binom{i}{2} x_i = 21 + 6 - 15 = 12.$$

Отсюда

$$\alpha_1(t) = x_1 + x_3 = 32 + 4x_3,$$
$$\chi_1(t) = (4\alpha_0(t) - \alpha_1(t) + 10)/7 = (-2 - 4x_3)/7,$$

поэтому $x_3 = 3$, $x_1 = 22$, $x_2 = 28$, $x_0 = 26$, и следовательно, $x_3 = 3$, получаем противоречие с тем, что x_3 четно.

Если $|\Omega| = 7$, то $\Omega - a^\perp$ является кликой или четырехугольником. Пусть $\Omega - a^\perp$ есть клика. Тогда

$$\sum_i x_i = 78, \quad \sum_i i x_i = 20 + 36 + 28 = 84, \quad \sum_i \binom{i}{2} x_i = 21 + 6 - 15 = 12.$$

Отсюда

$$\alpha_1(t) = x_1 + x_3 = 16 + 4x_3,$$
$$\chi_1(t) = (4\alpha_0(t) - \alpha_1(t) + 10)/7 = (22 - 4x_3)/7,$$

поэтому $x_3 = 2$, $x_1 = 22$, $x_2 = 28$, $x_0 = 26$. Подсчитаем число геодезических 2-путей, конечные вершины которых лежат в Ω, а средняя вершина лежит вне Ω. Так как в Ω число пар несмежных вершин, лежащих в окрестности вершины, не принадлежащей Ω, равно 11, указанное число не больше 22. С другой стороны, каждой вершине из X_2 отвечает один указанный 2-путь, получаем противоречие.

Пусть $\Omega - a^\perp$ является четырехугольником. Тогда вершины g, h смежны, и $\Omega - a^\perp$ содержит не менее 5 вершин, получаем противоречие.

Пусть $|\Omega| = 9$. Заметим, что $[b] \cap (\Omega - a^\perp) = \{g, h\}$, поэтому вершины g, h изолированы в $\Omega - a^\perp$. Таким образом, Ω является объединением изолированной короны $\{b, c; a, g, h\}$ и либо 4-коклики, либо четырехугольника. Допустим, что $\Omega - \{b, c; a, g, h\}$ есть 4-коклика. Тогда

$$\sum_i x_i = 76, \quad \sum_i i x_i = 20 + 36 + 56 = 112, \quad \sum_i \binom{i}{2} x_i = 21 + 58 - 15 = 64.$$

Отсюда следует, что

$$\alpha_1(t) = x_1 + x_3 = 4x_3 - 16,$$
$$\chi_1(t) = (4\alpha_0(t) - \alpha_1(t) + 10)/7 = (62 - 4x_3)/7,$$

поэтому $x_3 = 12$, $x_1 = 20$, $x_2 = 28$, $x_0 = 16$. Подсчитаем число геодезических 2-путей, конечные вершины которых лежат в Ω, а средняя вершина лежит вне Ω. Так как в Ω число пар несмежных вершин, лежащих в окрестности вершины, не принадлежащей Ω, равно 26, указанное число не больше 52. Пусть $u \in X_3 \cap [a] \cap [b]$. Тогда $[u] \cap [u^t]$ содержит 3 вершины из Ω, поэтому вершины u, u^t смежны. Аналогично, смежны вершины w, w^t из $X_3 \cap [a] \cap [c]$. Получаем противоречие с тем, что ввиду леммы 5 подграф $\Phi \cap \Omega$ содержит вершину, не попадающую ни в один из треугольников $\{b, u, u^t\}$, $\{c, w, w^t\}$.

Пусть Ω является объединением изолированной короны $\{b, c; a, g, h\}$ и четырехугольника. В этом случае

$$\sum_i x_i = 76, \quad \sum_i i x_i = 18 + 44 + 42 = 104, \quad \sum_i \binom{i}{2} x_i = 33 + 50 - 19 = 64.$$

Отсюда следует, что

$$\alpha_1(t) = x_1 + x_3 = 4x_3 - 24,$$
$$\chi_1(t) = (4\alpha_0(t) - \alpha_1(t) + 10)/7 = (70 - 4x_3)/7,$$

поэтому $x_3 = 14$, $x_1 = 18$, $x_2 = 22$, $x_0 = 22$. Подсчитаем число геодезических 2-путей, конечные вершины которых лежат в Ω, а средняя вершина лежит вне Ω. Так как в Ω число пар несмежных вершин, лежащих в окрестности вершины, не принадлежащей Ω, равно 20, указанное число не больше 40. С другой стороны, каждая вершина из X_3 смежна с ребром в одной из связных компонент графа Ω и с вершиной в другой. Поэтому указанное число путей равно $2 \cdot 14 + (22 - 6) = 44$, получаем противоречие.

Значит, K' содержит 2 вершины y, z из Ω. Тогда подграф $\Omega \cap (a^{\perp} \cup y^{\perp} \cup z^{\perp})$ является 3×3-решеткой. Если $|\Omega| = 9$, то справедливы равенства

$$\sum_i x_i = 76, \quad \sum_i i x_i = 90, \quad \sum_i \binom{i}{2} x_i = 54 + 36 - 54 = 36.$$

Отсюда следует, что

$$\alpha_1(t) = x_1 + x_3 = 4x_3 + 18,$$
$$\chi_1(t) = (4\alpha_0(t) - \alpha_1(t) + 10)/7 = (28 - 4x_3)/7,$$

поэтому $x_3 = 0$, $x_1 = 18$, $x_2 = 36$, $x_0 = 22$. Получаем противоречие с тем, что X_3 содержит 2 вершины из K'.

Итак, $|\Omega| > 9$. Тогда $\Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(y) \cap \Gamma_2(z)$ содержит 2, 4 или 6 вершин из Ω. Допустим, что $[b[\cap[c]$ содержит 2 вершины p, q из $\Omega - \Gamma_2(a)$. Тогда $p, q \in \Gamma_2(y) \cap \Gamma_2(z)$. Далее, $\Omega(b)$ содержит изолированное ребро $\{r, s\}$ из $[y] \cup [z]$ и 4-вершинный подграф $\{a, c, p, q\}$. Ввиду леммы 12 граф $[b]$ является связным. Если расстояние от c до r в графе $[b]$ равно 3, то расстояние от r до некоторой вершины из $\{p, q\}$, скажем до p, в графе $[b]$ равно 2. Положим $[p] \cap [r] = \{b, t\}$ и $[b]\cap]r] = \{s, t, o\}$. Тогда p несмежна с o, поэтому p смежна с q. В этом случае вершина q смежна с o, o смежна с s, и s смежна с t. Получаем противоречие с тем, что вершины t, o несмежны и $[t] \cap [o]$ содержит b, r, s.

Итак, расстояние от c до любой из вершин r, s не меньше 4. Шар радиуса 2 в графе $[b]$ с центром c содержит 8 или 10 вершин, а $(z^{\perp} \cup s^{\perp}) \cap [b]$ содержит 5 или 6 вершин, поэтому шар радиуса 2 в графе $[b]$ с центром c содержит 8 вершин и вершины p, q смежны. Но в этом случае $[b] \cap [p] = \{c, q, p'\}$, $[b] \cap [q] = \{e, p, q'\}$, $|\Omega(b)| = 8$ и каждая из вершин p',

q' смежна с 2 вершинами из $[b] - \Omega$, попадающими в $[r] \cup [s]$. Пусть $[p'] \cap [r]$ содержит вершину u из $[b] - \Omega$. Тогда $[p'] \cap [r] = \{b, u, u'\}$, получаем противоречие.

Таким образом, каждая вершина из $\Omega \cap \Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(y) \cap \Gamma_2(z)$ смежна не более чем с одной вершиной 3×3 решетки $\Omega \cap (a^\perp \cup y^\perp \cup z^\perp)$, и Ω является объединением изолированной 3×3 решетки и либо четырехугольника, либо коклики.

Пусть Ω является объединением изолированной 3×3 решетки и четырехугольника. Тогда

$$\sum_i x_i = 72, \quad \sum_i i x_i = 20 + 48 = 138, \quad \sum_i \binom{i}{2} x_i = 36 + 12 + 72 = 120.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} x_1 &= 3x_3 - 102, & 102 &\leqslant 3x_3 \leqslant 120, \\ \alpha_1(t) &= x_1 + x_3 = 4x_3 - 102, & \chi_1(t) &= (4\alpha_0(t) - \alpha_1(t) + 10)/7 = (154 - 4x_3)/7, \end{aligned}$$

поэтому $x_3 = 35$, получаем противоречие с тем, что x_3 четно.

Пусть Ω является объединением изолированной 3×3 решетки и 4-коклики. Тогда

$$\sum_i x_i = 72, \quad \sum_i i x_i = 90 + 56 = 146, \quad \sum_i \binom{i}{2} x_i = 36 + 12 + 72 = 120.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} x_1 &= 3x_3 - 92, & 92 &\leqslant 3x_3 \leqslant 120, \\ \alpha_1(t) &= x_1 + x_3 = 4x_3 - 92, & \chi_1(t) &= (4\alpha_0(t) - \alpha_1(t) + 10)/7 = (144 - 4x_3)/7, \end{aligned}$$

поэтому $x_3 = 36$, $x_1 = 16$, $x_2 = 12$ и $x_0 = 6$. Пусть s вершин из X_3 смежны с 3-кликами из Ω. Тогда число вершин из X_3, смежных с ребром решетки и вершиной 4-коклики из Ω, не превосходит $18 - 3s$. Поэтому число вершин из X_3, смежных с вершиной решетки и двумя вершинами 4-коклики из Ω, не меньше $18 + 2s$. Получаем противоречие с тем, что число вершин последнего типа не больше $2\binom{4}{2}$.

Пусть Ω является объединением изолированной 3×3 решетки и 2-коклики. Тогда

$$\sum_i x_i = 74, \quad \sum_i i x_i = 90 + 28 = 108, \quad \sum_i \binom{i}{2} x_i = 36 + 2 + 36 = 74.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} x_1 &= 3x_3 - 40, & 40 &\leqslant 3x_3 \leqslant 74, \\ \alpha_1(t) &= x_1 + x_3 = 4x_3 - 40, & \chi_1(t) &= (4\alpha_0(t) - \alpha_1(t) + 10)/7 = (84 - 4x_3)/7, \end{aligned}$$

поэтому $x_3 = 14$, $x_1 = 2$, $x_2 = 32$ и $x_0 = 26$. Пусть s вершин из X_3 смежны с 3-кликами из Ω. Тогда число вершин из X_3, смежных с ребром решетки и вершиной 4-коклики из Ω, не больше $18 - 3s$. Поэтому число вершин из X_3, смежных с вершиной решетки и двумя вершинами 4-коклики из Ω, не меньше $2s - 4$. Отсюда $s = 2$, и окрестности вершин изолированной 2-коклики из Ω содержат 2 общих вершины из X_2 и по 12 вершин из X_3. Объединение окрестностей вершин из X_3 содержит 15 ребер, поэтому $x_2 = 2 + 3 \cdot 2$, получаем противоречие. Лемма доказана.

Лемма 14. *Если $a \in \Omega$, то выполняются следующие утверждения:*

(1) $|\Omega(a)| \leqslant 8$,

(2) *если $\Omega(a)$ содержит треугольник $L = \{b, c, d\}$, то для любой вершины $x \in \{b, c, d\}$ подграф $[a] \cap [x] - L$ содержит единственную вершину e_{ax}, $|\Omega(a)| = 6$, $[a] - \Omega$ содержит точно две вершины u, u^t, несмежные с вершинами из $\Omega(a)$ и либо вершины u, u^t смежны и подграф $[a] - \Omega$ после удаления ребра $\{u, u^t\}$ становится восьмиугольником, причем t действует как центральная симметрия на этом восьмиугольнике, либо вершины u, u^t несмежны, $[u]$ содержит точно одну вершину из $[a] \cap [e_{ax}]$ для любой вершины $x \in \{b, c, d\}$, и*

   (i) *подграф $[a] \cap [e_{ax}] - \{x\}$ является ребром для любой вершины $x \in \{b, c, d\}$, или*

   (ii) *подграф $[a] \cap [e_{ax}] - \{x\}$ является ребром для единственной вершины $x \in \{b, c, d\}$, и подграф, полученный удалением из $[a] - \Omega$ этого ребра и инцидентных ему вершин, является шестиугольником или объединением двух треугольников,*

(3) *если Ω содержит 4-клику $K = \{a, b, c, d\}$, то смежные с парами вершин из K вершины из $\Omega - K$ образуют 6-клику E, и либо $X_3(E) - K$ содержит 4 вершины, смежные с гранями графа E, либо $X_4(E)$ содержит 3 вершины, смежные с различными парами факторов графа K, где, по определению, фактор графа K есть пара вершин из E, объединение окрестностей которых содержит K, а грань подграфа E есть тройка вершин из E, несмежных с некоторой вершиной из K.*

Доказательство. Пусть $a \in \Omega$. Из лемм 11 и 13 следует, что $|\Omega(a)| \leqslant 8$. Утверждение (1) доказано.

Допустим, что Ω содержит 4-клику $K = \{a, b, c, d\}$. Тогда Γ не содержит вершин, смежных с тройками вершин из K, и для любых смежных вершин $x, y \in K$ подграф $[x] \cap [y]$ содержит единственную вершину e_{xy} из $\Omega - K$. Отвечающие парам вершин из K вершины из Ω образуют 6-клику E. Заметим, что $[e_{ab}] \cap [e_{ac}] = \{a, f\}$ содержится в Ω. Если $f \in [a]$, то степени вершин e_{ab}, e_{ac}, f в графе $\Omega(a)$ равны 3 и $|\Omega(a)| \geqslant 10$. Получаем противоречие с утверждением (1). Значит, $f \in \Gamma_2(a)$. Положим $[a] - \bigcup_{x \in \{b,c,d\}} [e_{ax}] = \{u, w\}$. Если $u \in \Omega$, то $w \in \Omega$ и $[u] \cap [e_{ax}]$ содержит вершину из $\Omega(a)$ для подходящей вершины $x \in \{b, c, d\}$, получаем противоречие. Итак, $w = u^t$. Допустим, что $[e_{ab}]$ содержит две вершины g, h из $\Omega(a)$. Тогда вершины g, h несмежны, иначе $\{e_{ax}, g, h\}$ был бы треугольником в $\Omega(a)$, g смежна с одной из вершин e_{ac} или e_{ad} и $|\Omega(a)| \geqslant 10$. Так как либо вершины g, h несмежны с u, либо вершины u, u^t смежны с одной и той же вершиной из $\{g, h\}$, некоторая из вершин g, h попадает в $\Gamma_2(e_{ac}) \cup \Gamma_2(e_{ad}) \cap [a]$, получаем противоречие.

Таким образом, $|[a] - \Omega| = 8$. Если вершины u, u^t несмежны, то $[u]$ содержит точно одну вершину из $[a] \cap [e_{ax}]$ для любой вершины $x \in \{b, c, d\}$. В этом случае либо $[a] \cap [e_{ax}] - \{x\}$ является ребром для любой вершины $x \in \{b, c, d\}$, либо $[a] \cap [e_{ax}] - \{x\}$ является ребром для единственной вершины $x \in \{b, c, d\}$ и подграф, полученный удалением из $[a] - \Omega$ этого ребра и инцидентных ему вершин, является шестиугольником или объединением двух треугольников. Если вершины u, u^t смежны, то, удалив из $[a] - \Omega$ ребро $\{u, u^t\}$, получим восьмиугольник, причем t действует как центральная симметрия на этом восьмиугольнике. Утверждение (2) доказано.

Лемма 15. *Пусть $a \in \Omega$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *если a изолирована в Ω, то* $|\Omega| \leqslant 11$,

(2) $|\Omega(a)| \leqslant 6$.

Доказательство. Пусть $a \in \Omega$. Допустим, что вершина a изолирована в Ω. Тогда $|\Omega - \{a\}|$ не превосходит суммы удвоенного числа t-допустимых ребер и числа t-допустимых 2-коклик из $[a]$. Пусть A — объединение t-допустимых ребер из $[a]$, B — объединение t-допустимых 2-коклик из $[a]$, $|A| = 2\alpha$ и $|B| = 2\beta$. Тогда $\alpha + \beta = 7$, и число ребер между A и B равно α, но не больше 6β. Отсюда следует, что $\alpha \leqslant 4$. В случае $\alpha = 4$ получаем, что $\beta = 3$ и $|\Omega|$ четно. Значит, $\alpha \leqslant 3$ и $|\Omega| \leqslant 11$. Утверждение (1) доказано.

Предположим, что $\Omega(a)$ не содержит треугольников. Заметим, что $\Omega(a)$ не содержит четырехугольников и покажем, что $\Omega(a)$ не содержит n-угольников для $n \in \{5, \dots, 8\}$. Пусть n — наименьшее из чисел 5, 6, 7, 8 такое, что $\Omega(a)$ содержит n-угольник P. Тогда расстояния в $\Omega(a)$ между вершинами из P равно расстоянию между ними в P, иначе $\Omega(a)$ содержал бы цикл длины, меньшей n. Аналогично, каждая вершина из $\Omega(a) - P$ смежна не более чем с одной вершиной из P, в противном случае $\Omega(a)$ снова содержал бы цикл цикл длины, меньшей n. С другой стороны, каждая вершина из P смежна с единственной вершиной из $\Omega(a) - P$.

Итак, $\Omega(a)$ является ациклическим графом и степень каждой его вершины равна 1 или 3. Покажем, что для любого конечного дерева Δ, степени вершин которого равны 1 или 3, справедливо неравенство $n_1 \geqslant n_3 + 2$, где n_i — число вершин, имеющих степень i в графе Δ. Используем индукцию по n_3. Если $n_3 = 0$, то Δ является двухвершинной кликой. Пусть $n_3 \geqslant 1$ и вершина w инцидентна трем ребрам e_1, e_2, e_3 графа Δ. Построим новый граф Δ' заменой w на 3-клику $\{w_1, w_2, w_3\}$, где w_i инцидентна единственному ребру e_i. Тогда Δ' содержит три компоненты связности Δ'_1, Δ'_2 и Δ'_3, где Δ'_i содержит ребро e_i, $i = 1, 2, 3$. Заметим, что

$$n_3 = \sum_i n_3(\Delta'_i) + 1, \qquad n_1(\Delta') = \sum_i n_1(\Delta'_i) - 3.$$

Тем самым, неравенство $n_1(\Delta'_i) \geqslant n_3(\Delta'_i) + 2$ влечет требуемое неравенство.

Пусть n_i — число вершин, имеющих степень i в графе $\Omega(a)$. Каждая вершина, имеющая степень 1 в $\Omega(a)$, смежна с 2 вершинами из $[a] - \Omega(a)$ и каждая вершина из $[a] - \Omega(a)$ смежна не более чем с одной вершиной из $\Omega(a)$, поэтому число вершин в $[a] - \Omega(a)$ не меньше $2n_1$. Итак, $n_1 \geqslant n_3 + 2$ и $14 - n_1 - n_3 \geqslant 2n_1$, поэтому $|\Omega(a)| \leqslant 6$, причем в случае $|\Omega(a)| \geqslant n_3 + 2$ справедливы равенства $n_1 = 4$ и $n_3 = 2$.

Если же $\Omega(a)$ содержит треугольник, то $|\Omega(a)| = 6$ по лемме 14.

Лемма 16. *Подграф Ω не содержит 4-клик.*

Доказательство. Пусть Ω содержит 4-клику $K = \{a, b, c, d\}$, E состоит из вершин в $\Omega - K$, смежных с парами вершин из L, и K' состоит из вершин в Ω, смежных с вершинами из E. По лемме 14, степень каждой вершины из E в графе Ω равна 4 и либо K' является 4-кликой, состоящей из вершин, смежных с гранями графа E, либо K' является треугольником, состоящим из вершин, смежных с разными парами факторов графа K. Ввиду леммы 15, подграф $\Delta = K \cup E \cup K'$ является связной компонентой графа Ω. Если $z \in \Omega - \Delta$, то число 2-путей с началом z и концом в Δ не менее 26, в частности, вершина z изолирована в Ω. С другой стороны, если $u \in [z]$ и вершины u, u^t смежны, то для $w \in [u] \cup [z]$ вершины w, w^t несмежны. Таким образом, указанное число 2-путей не превосходит $4 + 10 \cdot 2$, получаем противоречие.

Итак, $\Omega = \Delta$ и $|\Omega| = 13$, и, кроме того,

$$\sum_i x_i = 72, \quad \sum_i i x_i = 56 + 60 = 116, \quad \sum_i \binom{i}{2} x_i = 99 + 90 - 36 - 105 = 48.$$

Отсюда

$$x_0 + x_3 = 4, \qquad x_1 = 3x_3 + 20,$$
$$\alpha_1(t) = x_1 + x_3 = 4x_3 + 20, \qquad \chi_1(t) = (4\alpha_0(t) - \alpha_1(t) + 10)/7 = (42 - 4x_3)/7,$$

поэтому $x_3 = 0$, $x_1 = 20$, $x_2 = 48$, $x_0 = 4$.

Для $u \in X_0$ подграф $[u] \cap [u^t]$ содержится в X_0 или X_1 (если $w \in X_2 \cap [u] \cap [u^t]$, то $[w] \cap [w^t]$ содержит u, u^t и две вершины из Ω). Число 2-путей с началом в X_2 и концом в Ω равно 26 и $[u]$ содержит либо 1 вершину из X_0 и 13 из X_2, либо 2 вершины из X_1 и 12 из X_2. Значит, $[u] \cap [u^t]$ содержит t-орбиту из X_1 и $[u]$ содержит 12 вершин из X_2.

Подграф X_1 является объединением десяти t-допустимых ребер. Для двух из этих ребер $\{p, p^t\}$ и $\{q, q^t\}$ пересечения $[p] \cap [p^t]$ и $[q] \cap [q^t]$ содержат по паре вершин из X_0 и вершину, имеющую степень 6 в Ω. Для $r \in X_1 - \{p, p^t, q, q^t\}$ подграф $[r] \cap [r^t]$ содержит вершину из Ω и t-орбиту $\{s, s^t\}$ из X_i. В силу выбора r, справедливо неравенство $i > 0$. Если $i = 2$, то $[s] \cap [s^t]$ содержит r, r^t и две вершины из Ω. Поэтому $i = 1$ и $X_1 - \{p, p^t, q, q^t\}$ является объединением четырех t-допустимых 4-клик. Число ребер между $[p]$ и $\Omega - [p]$ равно 24. Вершина b из $\Omega \cap [p]$ смежна с 4 или 6 вершинами из $\Omega - [p]$. Вершины из $\{p^t\} \cup (X_0 \cap [p])$ не дают новых ребер, каждая из двух вершин графа $[p] \cap [b] - \{p^t\}$ инцидентна не более одному ребру, поэтому $[p] - (\{b, p^t\} \cup X_0) \subset X_2$ и вершина b смежна с 6 вершинами из $\Omega - [p]$.

Число ребер между $[r]$ и $\Omega - [r]$ равно 24. Вершина c из $\Omega \cap [r]$ смежна с r^t и с 4 или 6 вершинами из $\Omega - [p]$. Каждая из вершин s, s^t инцидентна одному ребру. Оставшиеся 10 вершин из $[r]$ инцидентны 18 или 16 ребрам. В первом случае $[r] - \{r^t, c, s, s^t\} \subset X_2$ и вершина c смежна с 4 вершинами из $\Omega - [r]$. Во втором случае $[r] - \{r^t, c, s, s^t\}$ содержит точно две вершины из X_1 и вершина c смежна с 6 вершинами из $\Omega - [r]$.

Пусть $a \in \Omega$. Если степень a в Ω равна 6, то либо a лежит 3-клике из Ω и $[a] - \Omega$ является восьмиугольником из X_2, либо a лежит в 4-клике из Ω, $\Omega(a)$ содержит треугольник и 3 висячие вершины, 6 вершин из $[a] - \Omega$ смежны с висячими вершинами из $\Omega(a)$ и 6 вершин из $[a] - \Omega$ смежны с висячими вершинами из $\Omega(a)$ и $|X_1 \cap [a]| \leqslant 2$. Если степень a в Ω равна 4, то каждая вершина из $\Omega(a)$ смежна с 2 вершинами из $[a] - \Omega$ и снова $|X_1 \cap [a]| \leqslant 2$. Так как $x_1 = 20$, каждая вершина, лежащая в 4-клике из Ω, и каждая вершина, имеющая степень 4 в $\Omega(a)$, смежна точно с двумя вершинами из X_1.

Пусть r смежна с вершиной c, лежащей в 4-клике K из Ω и с вершинами o, o^t из $X_1 - \{r^t, s, s^t\}$. Тогда o смежна с вершиной d из $K - \{c\}$. Напомним, что окрестности двух вершин из K содержит ребра $\{p, p^t\}$ и $\{q, q^t\}$ соответственно, изолированные в X_1, поэтому $o \in [d]$ и $o' = o^t$. Получаем противоречие с тем, что $[r] \cap [r^t]$ содержит c, s, s^t, o. Лемма доказана.

В силу леммы 16, окрестность каждой вершины в графе Ω является пустым графом, двухвершинной кликой, объединением двух изолированных ребер, 3-лапой, или 6-вершинным графом, содержащим 4 вершины степени 1 и две смежные вершины степени 3. Через Ω_0 обозначим множество вершин, имеющих степень 6 в Ω.

Лемма 17. *Пусть $|\Omega(a)| = 6$ для некоторой вершины $a \in \Omega$, b, c — две вершины степени 3 из $\Omega(a)$, $\{b_1, b_2\} = \Omega(a) \cap [b]$ и $\{c_1, c_2\} = \Omega(a) \cap [c]$. Тогда $\Omega(b) \cap [c] = \{a\}$ и выполняются следующие утверждения:*

(1) $11 \leqslant |\Omega| \leqslant 17$ *и* Ω *не содержит изолированных вершин;*

(2) *окрестность любой вершины из* Ω_0 *в графе* Ω_0 *является* 4*-путем или пустым графом;*

(3) Ω_0 *является кокликой.*

Доказательство. Число ребер между $\Omega(a)$ и $[a]-\Omega$ равно 8. Покажем, что $[a]-\Omega$ является восьмиугольником. Если некоторая вершина $u \in [a]-\Omega$ смежна с двумя вершинами из $\Omega(a)$, то $[a]$ содержит 4-клику. Получаем противоречие с леммой 13. Итак, подграф $[a]-\Omega$ является регулярным степени 2. Так как $[a]$ не содержит четырехугольников, $[a]-\Omega$ является восьмиугольником.

Заметим, что $\Omega-a^{\perp}$ содержит 4 вершины d_{ij}, смежные с 2-кокликами $\{b_i, c_j\}$ из $\Omega(a)$. Такие вершины назовем кокликовыми (относительно a). Вершину из $\Omega-a^{\perp}$, смежную с ребром из $\Omega(a)$, назовем реберной. Заметим, что пересечение окрестностей двух реберных вершин, отвечающих разным ребрам, не пересекает $\Omega(a)$.

Заметим, что пересечение шара радиуса 2 с центром a с подграфом Ω содержит 7 вершин из $a^{\perp}$ и не менее 4 кокликовых вершин. Поэтому $|\Omega| \geqslant 11$. Далее, Ω содержит не более 4 реберных вершин и не более двух вершин, смежных с t-допустимыми ребрами восьмиугольника $[a]-\Omega$, поэтому $|\Omega| \leqslant 17$.

Если вершина z изолирована в Ω, то в силу леммы 15 справедливо неравенство $|\Omega-\{z\}| \geqslant 11$. Утверждение (1) доказано.

Допустим, что $[b]\cap[c]$ содержит вершины e_1, e_2 из $\Omega-a^{\perp}$. Тогда висячие ребра из Ω не попадают в окрестности вершин из $\Omega-a^{\perp}$, поэтому степени вершин b_i, c_j в Ω равны 4, и их окрестности в Ω содержат по два изолированных ребра. Далее,

$$[b_1]\cap([c_1]\cup[c_2])-\{a\} = [b_1]\cap([e_1]\cup[e_2])-b,$$

поэтому $\{d_{ij}\}$ совпадает с множеством кокликовых вершин относительно b. Каждой вершине из $\Omega-\{a,b,c\}$, смежной с двумя вершинами из $\{a,b,c\}$, отвечает ребро в d_{ij}, поэтому $\{d_{ij}\}$ является кликой, получаем противоречие с леммой 16.

Допустим, что вершины g_1, g_2 из $\Omega-a^{\perp}$ смежны с ребром $\{b,b_1\}$ из $\Omega(a)$. Тогда $[c]\cap\Omega(g_i)=\{b, f_i\}$, $|\Omega(c)|=6$, и одна из вершин c_1, c_2, скажем c_1, имеет степень 3 и поэтому смежна с f_1, f_2. Повторив это утверждение для $[c_2]$, получим, что вершина b_i смежна с вершиной h_i из $\Omega(c_1)\cap[f_1]$, $i=1,2$. Утверждение (2) доказано.

Допустим, что $b,c \in \Omega_0$. Тогда в содержащей a компоненте Δ подграфа Ω_0 окрестность каждой вершины является 3-путем. По лемме 6, граф Δ содержит $2n$ или $2n-1$ вершин для некоторого $n \geqslant 4$. Далее, каждое ребро, соединяющие вершины из $\{p_1,\dots,p_{n-1}\}$ и из $\{q_1,\dots,q_{n-1}\}$, лежит в окрестности единственной вершины из $\Omega-\Omega_0$.

Пусть $b_1, c_1 \in \Delta$. Тогда вершины bb_1 и $(bb_1)'$ из $[b]\cap[b_1]-[a]$ смежны с кокликовыми вершинами b_1c_2 и b_2c_2. Симметрично, вершины cc_1 и $(cc_1)'$ из $[c]\cap[c_1]-[a]$ смежны с кокликовыми вершинами b_1c_2 и b_2c_2. Поэтому $\Omega(b_2c_2)$ содержит 3-валентные вершины b_1c_2 и b_2c_1, смежные с c_2, bb_1, и b_2, cc_1 соответственно. Таким образом, вершина, смежная с боковым ребром графа Δ, смежна с двумя такими ребрами. Отсюда следует, что число боковых ребер четно, число $|\Delta|$ четно, и $n \leqslant 5$ (иначе $|\Omega| \geqslant 18$). В случае $n=4$ подграф Δ является μ-замкнутым, получаем противоречие с тем, что некоторая вершина из Ω смежна с двумя боковыми ребрами графа Δ. Итак, $n=5$, $\Delta=\Omega_0$ и $|\Omega|=15$. Далее,

$$\sum_i x_i = 70, \quad \sum_i i x_i = 80+50=130, \quad \sum_i \binom{i}{2} x_i = 120+130-30-150=70.$$

Отсюда

$$x_0 + x_3 = 10, \qquad x_1 = 3x_3 - 10,$$
$$\alpha_1(t) = x_1 + x_3 = 4x_3 - 10, \qquad \chi_1 = (4\alpha_0(t) - \alpha_1(t) + 10)/7,$$

поэтому $x_3 = 6$, $x_1 = 8$, $x_2 = 52$ и $x_0 = 4$. Так как $|\Omega - \Omega_0| = 5$, некоторая вершина u из X_1 смежна с вершиной a из Ω_0. Получаем противоречие с тем, что $[a] - \Omega$ является 8-циклом из $X_2 \cup X_3$.

Лемма 18. *Справедливы следующие утверждения:*

(1) $|\Omega_0| = 0$ *и если для вершины a, степень которой в Ω не больше 2, подграф $[a]$ содержит четыре попарно изолированные t-допустимые ребра, то указанные ребра не пересекают Ω и $|\Omega(a)| = 2$;*

(2) *каждая связная компонента Δ графа Ω является одновершинным графом, 3-кликой, короной или 3×3 решеткой;*

(3) *если Δ является короной, то $|\Omega| \leqslant 9$;*

(4) *если Δ является 3×3 решеткой, то $11 \leqslant |\Omega| \leqslant 13$.*

Доказательство. Допустим, что $a \in \Omega_0$, b_1, b_2 — 3-валентные вершины из $\Omega(a)$, и $\{c_1, c_2\} = \Omega(a) \cap [b_1] - \{b_2\}$, $\{c_3, c_4\} = \Omega(a) \cap [b_2] - \{b_1\}$, $\{a, d_{ij}\} = [c_i] \cap [c_j]$ для $i \in \{1, 2\}$ и $j \in \{3, 4\}$. В силу леммы 17, степени вершин c_i в Ω равны 4, поэтому $\Omega(c_1) = \{a, b_1, d_{13}, d_{14}\}$ является объединением двух изолированных ребер. Поэтому подграф $\Delta = \{d_{13}, d_{14}, d_{23}, d_{24}\}$ содержит 4-цикл. Далее, $[c_1] \cap [d_{23}]$ содержит d_{13} и еще одну вершину из Ω, поэтому Δ является 4-кликой. Получаем противоречие с леммой 16.

Пусть степень вершины a в Ω не больше 2 и подграф $[a]$ содержит 4 попарно изолированных t-допустимых ребра. Через A обозначим множество вершин, инцидентным указанным ребрам. Тогда число ребер между A и $[a]-A$ равно 16, поэтому $[a]-A$ является объединением 4 изолированных вершин и t-инвариантного ребра. Если A пересекает Ω, то $[a]$ содержит 4-цикл. Значит, A не пересекает Ω и ребро из $[a] - A$ содержится в Ω. Утверждение (1) доказано.

Допустим, что $a \in \Omega$ и подграф $\Omega(a)$ является объединением изолированных ребер $\{b_1, b_2\}$ и $\{c_1, c_2\}$. Тогда $[b - i] \cap [c_j] = \{a, d_{ij}\}$ содержится в Ω для любых $i, j \in \{1, 2\}$. Так как $\Omega(b_1)$ является объединением изолированных ребер, вершины d_{11}, d_{12} смежны и подграф $\{a, b_1, b_2, c_1, c_2, d_{11}, d_{12}, d_{21}, d_{22}\}$ является 3×3 решеткой.

Ясно, что связная компонента графа Ω, содержащая вершину степени 2, является 3-кликой. Утверждение (2) доказано.

Пусть $\Delta = \{a, b, c_1, c_2, c_2\}$ является короной, $u \in [a] - \Omega$. Допустим сначала, что $u \in [c_i]$. Если вершины u, u^t смежны, то $[u] \cap [u^t]$ содержит единственную вершину из $\Omega - \Delta$, если же вершины u, u^t несмежны, то $[u] \cap [u^t]$ не пересекает $\Omega - \Delta$. Пусть вершины c_1, c_2, c_3 несмежны с u. Если вершины u, u^t смежны, то $[u] \cap [u^t]$ содержит единственную вершину из $\Omega - \Delta$.

Если для любого $i \in \{1, 2, 3\}$ подграф $[a] \cap [c_1]$ содержит t-инвариантное ребро, то оставшиеся t-инвариантные пары вершин из $[a] - \Omega$ являются кокликами (иначе для нового t-инвариантного ребра $\{u, u^t\}$ вершина u была бы смежна с вершиной из $[a] \cap c_i]$ и $[a] - \Omega$ содержал бы 4-цикл). В этом случае $|\Omega - \Delta| = 5$, получаем противоречие с тем, что $|\Omega|$ нечетно.

Если подграфы $[a]\cap[c_1]$ и $[a]\cap[c_2]$ содержат t-инвариантные ребра, а $[a]\cap[c_3]$ содержит t-инвариантную коклику $\{u, u^t\}$, то одна из двух оставшихся t-инвариантных пар вершин является кокликой. В противном случае, так как $[a]-\Omega$ не содержит четырехугольников, вершина u смежна с вершинами из $[a]\cap[c_1]$ и из $[a]\cap[c_2]$. Получаем противоречие с тем, что тогда $[a]-([c_1]\cup[c_2]\cup[c_3])$ является 4-кликой. Значит, в этом случае $|\Omega-\Delta|\leqslant 4$. Утверждение (3) доказано.

Пусть Δ является 3×3 решеткой, $a\in\Delta$. В силу леммы 9 справедливо неравенство $|\Omega|>9$. Далее, $[a]-\Omega$ содержит четыре t-допустимых пары вершин, смежных с вершинами из $\Delta(a)$, и еще одну пару y, y^t. Если y лежит в цикле графа $[a]-\Omega$, не содержащем y^t, то $[a]-\Omega$ является объединением двух 5-циклов, соединенных ребром $\{y, y^t\}$. В этом случае $|\Omega|=11$. Если же каждый цикл графа $[a]-\Omega$, проходящий через y содержит y^t, то t действует на трех путях, соединяющих y и y^t. Пусть t инвертирует единственный из этих путей. Тогда граф $[a]-\Omega$ содержит единственное t-инвариантное ребро. Если это ребро лежит в окрестности вершины из $\Omega(a)$, то $|\Omega|=11$. Если же это ребро совпадает с $\{y, y^t\}$, то $|\Omega|$ равно 9 или 11. Пусть t инвертирует все 3 указанных пути. Тогда граф $[a[-\Omega$ содержит три t-инвариантных ребра. Если все эти ребра попадают в окрестности вершин из $\Omega(a)$, то $|\Omega|=13$. Если же одно из этих ребер совпадает с $\{y, y^t\}$, то $|\Omega|$ равно 11 или 13. Лемма доказана.

Лемма 19. *Подграф* Ω *не содержит корон и* 3×3 *решеток.*

Доказательство. Если Ω содержит корону, то $|\Omega|$ равно 5, 7 или 9 в силу леммы 18.

Пусть $|\Omega|=5$. В этом случае $x_3=0$. Из леммы 3 следует, что

$$\sum_i x_i=80,\quad \sum_i ix_i=20+36=56,\quad \sum_i\binom{i}{2}=x_2=21+6-15=12.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}&\alpha_1(t)=x_1+x_3=32,\\ &\chi_1(t)=(4\alpha_0(t)-\alpha_1(t)+10)/7=-2/7,\end{aligned}$$

получаем противоречие.

Пусть $|\Omega|=7$. Из леммы 3 следует, что

$$\sum_i x_i=78,\quad \sum_i ix_i=20+36+28=84,\quad \sum_i\binom{i}{2}=21+6-15=12.$$

Теперь отсюда следует, что

$$\begin{aligned}&\alpha_1(t)=x_1+x_3=32+4x_3,\\ &\chi_1(t)=(4\alpha_0(t)-\alpha_1(t)+10)/7=(6-4x_3)/7,\end{aligned}$$

поэтому $x_3\geqslant 5$, получаем противоречие с тем, что $x_2+3x_3=12$.

Пусть $|\Omega|=9$. Тогда $\Omega-\Delta$ является 4-кокликой или объединением треугольника и изолированной вершины. В первом случае получим равенства

$$\sum_i x_i=76,\quad \sum_i ix_i=20+36+56=112,\quad \sum_i\binom{i}{2}x_i=21+58-15=64.$$

Отсюда следует, что

$$\alpha_1(t) = x_1 + x_3 = 4x_3 - 16,$$
$$\chi_1(t) = (4\alpha_0(t) - \alpha_1(t) + 10)/7 = (62 - 4x_3)/7,$$

поэтому $x_3 = 12$, $x_2 = 28$ и $x_0 = 28$ и $x_1 = 8$. Во втором случае получим, что

$$\sum_i x_i = 76, \quad \sum_i i x_i = 20 + 36 + 50 = 106, \quad \sum_i \binom{i}{2} x_i = 30 + 70 - 18 = 82.$$

Отсюда

$$\alpha_1(t) = x_1 + x_3 = 4x_3 - 58,$$
$$\chi_1(t) = (4\alpha_0(t) - \alpha_1(t) + 10)/7 = (104 - 4x_3)/7,$$

поэтому $x_3 = 12$, $x_2 = 46$, $x_0 = 28$ и $x_0 = 52$. Подсчитаем число 2-путей, концевые вершины которых лежат в Ω, а средняя вершина лежит вне Ω. Так как число пар вершин в Ω, попадающих в указанные пути, равно $36 - 1 - 3$, число путей равно 64. Получаем противоречие с тем, что $x_2 + 3x_3 = 82$.

Если Ω содержит 3×3 решетку, то по лемме 18 или $|\Omega| = 11$, или $|\Omega| = 13$.

Пусть $|\Omega| = 11$. В силу леммы 3

$$\sum_i x_i = 74, \quad \sum_i i x_i = 90 + 28 = 118, \quad \sum_i \binom{i}{2} x_i = 54 + 74 - 54 = 74.$$

Отсюда

$$\alpha_1(t) = x_1 + x_3 = 4x_3 - 30,$$
$$\chi_1(t) = (4\alpha_0(t) - \alpha_1(t) + 10)/7 = (84 - 4x_3)/7,$$

поэтому $x_3 = 14$, $x_2 = 32$, $x_0 = 16$, $x_1 = 12$. Подсчитаем число 2-путей, концевые вершины которых лежат в Ω, а средняя вершина лежит вне Ω. Так как число пар вершин в Ω, попадающих в указанные пути, равно $55 - 18$, число путей равно 74. Получаем противоречие с тем, что $x_2 + 3x_3 = 84$.

Пусть $|\Omega| = 13$. Тогда $\Omega - \Delta$ является 4-кокликой или объединением треугольника и изолированной вершины. В любом случае Ω содержит изолированную вершину и в силу леммы 15 справедливо неравенство $|\Omega| \leqslant 11$, получаем противоречие.

Лемма 20. *Если Ω является объединением φ изолированных вершин и ψ изолированных треугольников, то справедливо одно из следующих утверждений:*

(1) $\varphi = 4$, $\psi = 1$, $x_0 = 24$, $x_1 = 20$, $x_2 = 30$, $x_3 = 4$,

(2) $\varphi = 5$, $\psi = 0$, $x_0 = 30$, $x_1 = 30$, $x_2 = 20$, $x_3 = 0$,

(3) $\varphi = 6$, $\psi = 1$, $x_0 = 14$, $x_1 = 18$, $x_2 = 30$, $x_3 = 14$.

Доказательство. Пусть Ω является объединением φ изолированных вершин и ψ изолированных треугольников. Тогда $|\Omega| = \varphi + 3\psi$ нечетно, причем при $\varphi \neq 0$, в силу леммы 15, верно неравенство $|\Omega| \leqslant 11$. Из леммы 3 следует, что

$$\sum_i x_i = 85 - \varphi - 3\psi, \quad \sum_i i x_i = 14\varphi + 16\psi, \quad \sum_i \binom{i}{2} = (\varphi + 3\psi)(\varphi + 3\psi - 1).$$

Отсюда следует, что

$$\alpha_1(t) = x_1 + x_3 = 4x_3 - 2\varphi^2 - 18\psi^2 - 12\varphi\psi + 16\varphi + 42\psi,$$
$$\chi_1(t) = (4\alpha_0(t) - \alpha_1(t) + 10)/7 = (2\varphi^2 + 18\psi^2 + 12\varphi\psi - 12\varphi - 30\psi + 10 - 4x_3)/7).$$

Если $\psi = 0$, то по лемме 8 подграф Ω является 5-кликой. В силу леммы 8, справедливо неравенство $\varphi > 0$. Пусть $\varphi = 1$. Тогда

$$\psi = 2, \qquad (2\varphi^2 + 18\psi^2 + 12\varphi\psi - 12\varphi - 30\psi + 10 - 4x_3)/7 = (36 - 4x_3)/7,$$

поэтому $x_3 = 16 + 14e$. Далее,

$$\sum_i x_i = 78, \quad \sum_i i x_i = 86, \quad \sum_i \binom{i}{2} = 42.$$

Следовательно, $x_2 = 42 - 3x_3$, $x_0 = 34 - x_3$, $x_1 = 3x_3 + 2$, получаем противоречие.

Пусть $\varphi = 2$. Тогда ψ нечетно и $18\psi^2 - 6\psi - 6 - 4x_3$ делится на 7. Если $\psi = 1$, то

$$\sum_i x_i = 80, \quad \sum_i i x_i = 64, \quad \sum_i \binom{i}{2} = 20,$$

и $x_3 = 12 + 14t$. Следовательно, $x_2 = 20 - 3x_3$, $x_0 = 36 - x_3$, $x_1 = 24 + 3x_3$, получаем противоречие. Значит,

$$\psi = 3, \quad \sum_i x_i = 74, \quad \sum_i i x_i = 136, \quad \sum_i \binom{i}{2} = 110,$$

и $x_3 = 10 + 14t$. Следовательно, $x_2 = 110 - 3x_3$, $x_0 = 48 - x_3$, $x_1 = 3x_3 - 84$, получаем противоречие.

Пусть $\varphi = 3$. Тогда ψ четно и $18\psi^2 - 6\psi - 8 - 4x_3$ делится на 7. Если $\psi = 2$, то

$$\sum_i x_i = 76, \quad \sum_i i x_i = 114, \quad \sum_i \binom{i}{2} = 72,$$

и $x_3 = 12 + 14t$. Следовательно, $x_2 = 72 - 3x_3$, $x_0 = 34 - x_3$, $x_1 = 3x_3 - 30$, получаем противоречие. Значит,

$$\psi = 3, \quad \sum_i x_i = 74, \quad \sum_i i x_i = 136, \quad \sum_i \binom{i}{2} = 110,$$

и $x_3 = 10 + 14t$. Следовательно, $x_2 = 110 - 3x_3$, $x_0 = 48 - x_3$, $x_1 = 3x_3 - 84$, получаем противоречие.

Пусть $\varphi = 4$. Тогда $\psi = 1$ и $2x_3 - 12$ делится на 7. Далее,

$$\sum_i x_i = 78, \quad \sum_i i x_i = 92, \quad \sum_i \binom{i}{2} = 42,$$

и $x_3 = 4 + 14t$. Следовательно, $x_2 = 42 - 3x_3$, $x_0 = 28 - x_3$, $x_1 = 3x_3 + 8$ и $x_3 = 4$. В этом случае выполняется утверждение (1).

Пусть $\varphi = 5$. Тогда ψ четно и $18\psi^2 + 30\psi - 3x_4$ делится на 7. Если $\psi = 0$, то

$$\sum_i x_i = 80, \quad \sum_i i x_i = 70, \quad \sum_i \binom{i}{2} = 20,$$

и $x_3 = 14t$. Следовательно, $x_2 = 20 - 3x_3$, $x_0 = 30 - x_3$, $x_1 = 3x_3 + 30$ и $x_3 = 0$. В этом случае выполняется утверждение (2).

Если $\psi = 2$, то

$$\sum_i x_i = 74, \quad \sum_i i x_i = 142, \quad \sum_i \binom{i}{2} = 110,$$

и $x_3 = 2 + 14t$. Следовательно, $x_2 = 110 - 3x_3$, $x_0 = 42 - x_3$, $x_1 = 3x_3 - 78$ и $x_3 = 30$. Получаем противоречие с тем, что по лемме 18 число t-допустимых треугольников равно $(x_1 + 3x_3)/2$ и не больше $3\varphi + 12\psi$.

Заметим, что в случае $\varphi \geqslant 6$ величина ψ равна 0 или 1. Пусть $\psi = 1$. Тогда $2\varphi^2 - 2 - 4x_3$ делится на 7. Если $\varphi = 6$, то

$$\sum_i x_i = 76, \quad \sum_i i x_i = 120, \quad \sum_i \binom{i}{2} x_i = 72,$$

и $x_3 = 14t$. Следовательно, $x_2 = 72 - 3x_3$, $x_0 = 28 - x_3$, $x_1 = 3x_3 - 24$ и $x_3 = 14$. В этом случае выполняется утверждение (3). Если $\varphi = 8$, то

$$\sum_i x_i = 74, \quad \sum_i i x_i = 148, \quad \sum_i \binom{i}{2} = 110,$$

и $x_3 = 14t$. Следовательно, $x_2 = 110 - 3x_3$, $x_0 = 36 - x_3$, $x_1 = 3x_3 - 72$ и $x_3 = 28$. Получаем противоречие с тем, что по лемме 18 число t-допустимых треугольников равно $(x_1 + 3x_3)/2$ и не больше $3\varphi + 12\psi$.

Лемма, а вместе с ней и теорема доказаны.

5. Группа автоморфизмов графа с параметрами $(85, 14, 3, 2)$

Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(85, 14, 3, 2)$ и G — группа автоморфизмов графа Γ.

Лемма 21. *Справедливы следующие утверждения:*

(1) *если g — элемент порядка 17 из G, то $C_G(g) = \langle g \rangle$;*

(2) *G не содержит регулярных подгрупп;*

(3) *если G транзитивна на Γ и $A \in \Gamma$, то цоколь L группы G является простой неабелевой группой, действующей примитивно на Γ.*

Доказательство. Пусть g — элемент порядка 17 из G. Если $h \in C_G(g) - \langle g \rangle$, то g действует на $\mathrm{Fix}(h)$ и, ввиду теоремы, подграф $\mathrm{Fix}(h)$ является простым и $|h| = 5$. В силу леммы 8, $\alpha_1(t)$ равно 10 или 45, и g действует на множестве $\langle h \rangle$-орбит, в которых элемент смежен с его образом под действием h, получаем противоречие. Утверждение (1) доказано.

Пусть группа G транзитивна на Γ и $a \in \Gamma$. Сильно регулярный граф с импримитивной группой автоморфизмов является полным многодольным графом или его дополнением, поэтому G действует примитивно на Γ. В силу утверждения (2) цоколь L группы G является простой неабелевой группой. Из примитивности G следует, что L транзитивна на Γ.

Лемма 22. *Группа G не содержит элементов порядка* 4.

Доказательство. Пусть g — элемент порядка 4 из G, $t - g^2$. Тогда g фиксирует некоторую вершину a из Γ. Из действия $\langle g \rangle$ на $[a]$ следует, что $\Omega = \mathrm{Fix}(t)$ содержит ребро $\{b, c\}$ из $[a]$ и ввиду теоремы $|\Omega| = 9$. Получаем противоречие с тем, что g действует на множестве $X_3(\Omega)$ и по лемме 20 справедливо равенство $|X_3(\Omega)| = 14$. Лемма доказана.

Завершим доказательство следствия. Пусть группа G транзитивна на Γ и L — цоколь группы G. По теореме Уолтера [7] (см. также [8]), группа L изоморфна $L_2(q)$, $q = \pm 3 \bmod 8$, $L_2(2^n)$, ${}^2G_2(3^{2n+1})$, $n \geqslant 2$, или группе Янко J_1. Так как $\pi(L)$ лежит в $\{2, 3, 5, 7, 17\}$ и содержит 5, 17, то $L = L_2(16)$. Пусть P — подгруппа порядка 5 из L. Тогда $\Delta = \mathrm{Fix}(P)$ является 5-кликой. Получаем противоречие с тем, что для инволюции t из L, инвертирующей P, окрестность вершины a из Δ, фиксируемой t, должна быть связной. Следствие доказано.

Список литературы

1. Махнев А. А., Падучих Д. В., Об автоморфизмах графа Ашбахера. *Алгебра и логика* (2001) **40**, №2, 125–134.
2. Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A., *Distance-regular graphs*. Springer, Berlin, 1989.
3. Махнев А. А., Носов В. В., Об автоморфизмах сильно регулярных графов с $\lambda = 1$, $\mu = 2$. *Матем. сборник* (2004) **185**, №3, 47–68.
4. Махнев А. А., Минакова И. М., Об автоморфизмах графов с $\lambda = 1$, $\mu = 2$. *Дискретная математика* (2004) **16**, №1, 95–104.
5. Brouwer A. E., Haemers W. H., The Gewirtz graph: an exercise in the theory of graph spectra. *European J. Comb.* (1993) **14**, 397–407.
6. Махнев А. А., Падучих Д. В., О сильной регулярности некоторых реберно регулярных графов. В сб.: *Алгебра, логика и кибернетика. Тезисы докладов*. Иркутский госуниверситет, Иркутск, 2004, с. 181–183.
7. Walter J., The characterization of finite groups with Abelian Sylov 2-subgroups. *Ann. Math.* (1969) **89**, 405–514.
8. Bombieri E., Thompson's problem ($\sigma^2 = 3$). *Invent. Math.* (1980) **58**, 77–100.
9. Cameron P., *Permutation groups*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.

Статья поступила 29.01.2007.