Ю. А. Будников, Асимптотическая верхняя оценка хроматического индекса случайных гиперграфов,
Дискрет. матем., 2011, том 23, выпуск 3, 63–81

Дискретная математика

том 23 выпуск 3 * 2011

УДК 519.2

Асимптотическая верхняя оценка хроматического индекса случайных гиперграфов

© 2011 г. Ю. А. Будников

В работе предложена верхняя асимптотическая оценка хроматического индекса случайных гиперграфов для случая, когда длина ребра гиперграфа — возрастающая функция, зависящая от числа вершин гиперграфа.

Показано, что асимптотически с вероятностью 1 хроматический индекс $\chi(G)$ случайного однородного гиперграфа $G(n)$ не превосходит $cD(n)\log(k(n))$, где n — число вершин $G(n)$, $D(n)$ — математическое ожидание степени вершины $G(n)$, $k(n)$ — число вершин на любом ребре $G(n)$, $k(n) = o(n)$ при $n \to \infty$, $c > 1$ — некоторая константа.

1. Введение

В статьях, посвященных теории гиперграфов, широко исследуются вопросы, относящиеся к оценке хроматического индекса гиперграфа. В [1] приводится доказательство верхней оценки хроматического индекса $\chi(G)$ любого однородного гиперграфа G, имеющего длину ребер k и максимальную степень вершины D:

$$\chi(G) \leqslant (D-1)k + 1. \tag{1}$$

Для детерминированных гиперграфов с фиксированной длиной ребра в [1] была доказана известная теорема об асимптотике хроматического индекса. Оказалось, что при ряде ограничений, наложенных на некоторые параметры асимптотически регулярного и однородного гиперграфа, его хроматический индекс ведет себя как степень вершины, если число вершин гиперграфа стремится к бесконечности.

Обобщение этого результата на случай, когда длина ребра гиперграфа растет с ростом числа вершин гиперграфа, невозможно. Доказательство этого факта представлено в [2], где приводится пример бесконечной подпоследовательности гиперграфов, хроматический индекс каждого из которых в точности равен его верхней оценке [1]

$$\chi(G) = k(D-1) + 1,$$

где k — длина ребра, D — максимальная из степеней вершин гиперграфа. Поэтому теорему из [1] нельзя обобщить на случай, когда длина ребра растет с ростом числа вершин гиперграфа.

Тем не менее, можно построить несложные примеры последовательностей однородных и регулярных гиперграфов G, для которых $\chi(G) = D$.

Если перейти к модели случайных гиперграфов, то при фиксированной длине ребра асимптотика их хроматического индекса получается напрямую из теоремы статьи [1], а в случае растущей длины ребра, как следует из работы [2], асимптотика хроматического индекса случайных гиперграфов может отличаться от полученной в [1].

В данной работе получена верхняя асимптотическая оценка хроматического индекса случайных гиперграфов для случая, когда длина ребра гиперграфа — некоторая возрастающая функция, зависящая от числа вершин гиперграфа.

Для удобства изложения введем обозначения

$$\begin{aligned} f(n) \sim g(n) \quad &\iff \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1, \\ f(n) \lesssim g(n) \quad &\iff \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \leqslant 1, \\ f(n) \gtrsim g(n) \quad &\iff \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \geqslant 1, \\ f(n) = o(g(n)) &\iff \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0. \end{aligned}$$

Для формулировки основного результата необходимы следующие определения.

Упаковка в гиперграфе G — это набор P непересекающихся ребер G.

Хроматический индекс $\chi(G)$ графа G — минимальное число упаковок, на которые можно разбить все ребра G. Рассмотрим полный гиперграф

$$G(n) = (V(G(n)), E(G(n)))$$

на n вершинах, k-однородный, то есть любое его ребро $e \in E(G(n))$ содержит в точности k вершин из множества $V(G(n))$. Степень любой его вершины есть $\binom{n-1}{k-1}$, и $|E(G(n))| = \binom{n}{k}$.

Введем вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, где Ω — множество всех подмножеств $Z_i \in E(G)$, $i = 1, \ldots, 2^{\binom{n}{k}}$, $\mathcal{F}$ — множество всевозможных подмножеств Ω. Если происходит элементарный исход $Z_i = \{e_{i_1}, \ldots, e_{i_m}\}$, то говорим, что родились ребра $e_{i_1}, \ldots, e_{i_m}$. Пусть все ребра рождаются независимо с вероятностью $p(n)$. На самом деле имеется в виду стандартная вероятностная модель испытаний Бернулли, где элементарные события — это кортежи из 0, 1 длины $\binom{n}{k}$, где единицы на каких-то позициях соответствуют рожденным ребрам, а нули — нерожденным. На Ω вводится следующая вероятностная мера:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z_i) &= \mathbf{P}\left(\begin{array}{c} \text{родилось множество ребер} \{e_{i_1}, \ldots, e_{i_m}\} \\ \text{и не родились все оставшиеся ребра } G(n) \end{array} \right) \\ &= p(n)^m (1 - p(n))^{\binom{n}{k} - m}. \end{aligned}$$

На этом вероятностном пространстве определяется случайная величина $G(n, p)$, принимающая значения Z_i с вероятностями $\mathbf{P}(Z_i)$. Это и есть случайный гиперграф, хроматический индекс которого оценивается в данной работе.

Пусть

$$p(n) = \frac{D(n)}{\binom{n-1}{k-1}},$$

где $D(n)$ — возрастающая функция от n. Далее для краткости будем опускать аргумент у функций $D(n)$, $p(n)$, $k(n)$, если это не будет приводить к неоднозначной трактовке.

2. Асимптотика числа родившихся упаковок

Далее везде c — произвольная константа, превосходящая 1. Длина ребра гиперграфа $k(n)$ — функция от числа вершин гиперграфа n, возрастающая с ростом n в дискретном смысле [2].

Введем понятие случайной упаковки. Просто упаковка в детерминированном гиперграфе — это любое подмножество попарно непересекающихся ребер этого гиперграфа. Случайная упаковка — это упаковка в случайном гиперграфе $G(n, p)$. Она определяется следующим образом. Рассмотрим упаковку $P = \{e_{i_1}, \ldots, e_{i_s}\}$ полного гиперграфа на n вершинах. Для каждого ее ребра e_{i_j}, $j = 1, \ldots, s$ на вероятностном пространстве Ω можно определить индикаторную случайную величину $I(e_{i_j}) = 1$ с вероятностью p, $I(e_{i_j}) = 0$ с вероятностью $1 - p$. Если $I(e_{i_j}) = 1$, то говорим, что родилось ребро e_{i_j}, в противном случае говорим, что ребро e_{i_j} не родилось. По определению, случайной упаковкой случайного гиперграфа $G(n, p)$ называется случайная величина

$$I(P) = \prod_{j=1}^{s} I(e_{i_j}).$$

Пусть $M(n)$ — число упаковок размера $n/(kc)$ полного гиперграфа $G(n)$. В силу леммы 1 в [2],

$$\begin{aligned} M(n) &= \frac{n!}{(k!)^{n/(kc)}(n(1-1/c))!\,(n/(kc))!} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^{n/kc}\binom{n-n/c+ik}{k}}{(n/(kc))!}. \end{aligned}$$

Пусть $PG(n)$ — множество упаковок размера $n/(kc)$ в $G(n)$. Естественным образом вводится понятие числа упаковок случайного гиперграфа $G(n, p)$ размера $n/(kc)$. Это есть случайная величина, равная сумме по всевозможным упаковкам P размера $n/(kc)$ полного гиперграфа $G(n)$ индикаторных случайных величин $I(P)$, то есть $\sum_{P \in PG(n)} I(P)$. Подсчитаем ее математическое ожидание:

$$\begin{aligned} N(n) = \mathbf{E}\left(\sum_{P \in PG(n)} I(P)\right) &= M(n)\left(\frac{D}{\binom{n-1}{k-1}}\right)^{n/(kc)} \\ &= \frac{n!}{(k!)^{n/(kc)}(n(1-1/c))!\,(n/(kc))!}\left(\frac{D}{\binom{n-1}{k-1}}\right)^{n/(kc)}. \end{aligned} \tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть $G(n, p(n))$ — случайный гиперграф, $k(n)$ — возрастающая функция от n, причем $k(n) = o(n)$ при $n \to \infty$ и, начиная с некоторого n,*

$$p(n) = \frac{D(n)}{\binom{n-1}{k(n)-1}} \leqslant 1, \qquad D(n) > c\left(\frac{n}{k(n)c}\right)^3 \left(\frac{c}{c-1}\right)^{k(n)}.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого n,

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{N(n)}\sum_{P \in PG(n)} I(P) - 1\right| > \varepsilon\right) < \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{1}{N(n)} + \frac{1}{(n/k(n))(c/(c-1))^{k(n)}}\right).$$

Доказательство. В качестве основного инструмента используется неравенство Чебышёва:

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{\sum_{P\in PG(n)} I(P)}{N(n)}-1\right|>\varepsilon\right)\leqslant\frac{\mathbf{D}\left(\sum_{P\in G(n)} I(P)\right)}{N^2(n)\varepsilon^2},$$

где $\mathbf{D}(\xi)$ — дисперсия случайной величины ξ.

Далее рассматриваем упаковки P в $G(n)$ только размера $n/(kc)$. Ясно, что

$$\mathbf{D}\left(\sum_{P\in PG(n)} I(P)\right)=\sum_{P\in G(n)}\mathbf{D}(I(P))+2\sum_{\substack{P_i,P_j\in G(n)\\ P_i\neq P_j}}\operatorname{cov}(I(P_i),I(P_j)),$$

где $\operatorname{cov}(\xi,\eta)$ — ковариация случайных величин ξ и η.

Поскольку $I(P)$ — индикаторная случайная величина, то при $n\to\infty$

$$\mathbf{D}(I(P))=\left(\frac{D}{\binom{n-1}{k-1}}\right)^{n/(kc)}\left(1-\left(\frac{D}{\binom{n-1}{k-1}}\right)^{n/(kc)}\right)\to\frac{1}{N^2(n)\varepsilon^2}\sum_{\substack{P\in PG(n)\\ |P|=n/(kc)}}\mathbf{D}(I(P))$$

$$=\frac{M(n)}{N^2(n)\varepsilon^2}\left(\frac{D}{\binom{n-1}{k-1}}\right)^{n/(kc)}\left(1-\frac{D}{\binom{n-1}{k-1}}\right)^{n/(kc)}$$

$$=\frac{1}{N(n)\varepsilon^2}\left(1-\left(\frac{D}{\binom{n-1}{k-1}}\right)^{n/(kc)}\right)<\frac{1}{N(n)\varepsilon^2}\to 0,$$

потому что

$$N(n)=M(n)\left(\frac{D}{\binom{n-1}{k-1}}\right)^{n/(kc)}.$$

Пусть

$$L(n)=\frac{1}{N^2(n)\varepsilon^2}\sum_{\substack{P_i,P_j\in PG(n)\\ P_i\neq P_j}}\operatorname{cov}(I(P_i),I(P_j)).$$

Для доказательства теоремы 1 осталось показать, что при $n\to\infty$

$$L(n)\to 0. \tag{3}$$

Если рассмотреть сумму всевозможных ковариаций некоторой фиксированной случайной упаковки $I(P)$, $P\in PG(n)$, и всех остальных случайных упаковок, то для каждой такой упаковки $I(P)$, $P\in G(n)$, эта сумма будет одной и той же из соображений симметрии. Поэтому можно упростить выражение для суммы ковариаций следующим образом:

$$R=\sum_{\substack{P_i,P_j\in PG(n)\\ P_i\neq P_j}}\operatorname{cov}(I(P_i),I(P_j))=M(n)\sum_{P_j\in G(n)}\operatorname{cov}(I(P),I(P_j)),$$

где P — любая фиксированная упаковка размера $n/(kc)$ полного гиперграфа $G(n)$.

Далее, выделим группы ковариаций в соответствии с числом общих ребер в упаковках P и P_j в $G(n)$. Для любого $i=1,\dots,n/(kc)-1$ определим число упаковок $R(i)$ в $G(n)$, имеющих в точности i ребер, которых нет в упаковке P. Это означает, что оставшиеся $n/(kc)-i$ ребер каждой такой упаковки совпадают с какими-то ребрами упаковки P.

Если упаковка P_j имеет в точности $n/(kc)-i$ ребер, которые есть в упаковке P, то есть i ее ребер не содержатся в упаковке P, то

$$\operatorname{cov}(P, P_j) = \mathbf{E}(I(P)I(P_j)) - \mathbf{E}(I(P))\mathbf{E}(I(P_j)) = \left(\frac{D}{\binom{n-1}{k-1}}\right)^{n(kc)+i} - \left(\frac{D}{\binom{n-1}{k-1}}\right)^{2n/(kc)}.$$

Замечание 1. Если $i = n/(kc)$, то есть все ребра упаковок P и P_j различны, то случайные величины $I(P)$ и $I(P_j)$ независимы и $\operatorname{cov}(P, P_j) = 0$.

Если $i = 0$, то $\operatorname{cov}(P, P_j) = \mathbf{D}(P)$, а сумма дисперсий уже оценена выше.

Поэтому можно перегруппировать R следующим образом:

$$R = \sum_{i=1}^{n/(kc)-1} R(i)\left(\left(\frac{D}{\binom{n-1}{k-1}}\right)^{n/(kc)+i} - \left(\frac{D}{\binom{n-1}{k-1}}\right)^{2n/(kc)}\right).$$

Предложение 1. *Для* $i = 1, \ldots, n/(kc)-1$

$$R(i) = \frac{1}{i!}\binom{n/(kc)}{i}\prod_{r=1}^{i}\left(\binom{n-n/c+rk}{k} - i\right).$$

Доказательство. Упаковка P уже имеет $n/(kc)-i$ общих ребер с P_j. Надо добрать еще i ребер.

Число способов выбрать из $n/(kc)$ ребер упаковки P какие-то фиксированные i ее ребер, по которым отличаются упаковка P и другие упаковки $G(n)$ (то есть этих i ребер в них нет, а все остальные ребра упаковки P в них есть) равно $\binom{n/(kc)}{i}$. Из симметрии полного гиперграфа следует, что при любом выборе этих i ребер получим одно и то же число упаковок $G(n)$, которые отличаются от упаковки P по этим i ребрам.

Число способов выбрать r-е ребро упаковки P_j, которая уже имеет $n/(kc)-i$ общих ребер с P равно $\binom{n-n/c+rk}{k} - i$.

Все это надо еще разделить на $i!$, поскольку мы добираем всего i ребер, и начинать этот процесс можно с любого из этих i ребер, то есть посчитали их ровно $i!$ раз.

Предложение 1 доказано.

Докажем теперь (3). Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned}
L(n) &= \frac{1}{N^2(n)\varepsilon^2}\sum_{\substack{P_i, P_j \in PG(n)\\ P_i \neq P_j}} \operatorname{cov}(I(P_i), I(P_j)) = \frac{M(n)R}{N^2(n)\varepsilon^2}\\
&= \frac{M(n)}{N^2(n)\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{n/(kc)-1} R(i)\left(\left(\frac{D}{\binom{n-1}{k-1}}\right)^{n/(kc)+i} - \left(\frac{D}{\binom{n-1}{k-1}}\right)^{2n/(kc)}\right)\\
&= \frac{1}{N(n)\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{n/(kc)-1} R(i)\left(\left(\frac{D}{\binom{n-1}{k-1}}\right)^{i} - \left(\frac{D}{\binom{n-1}{k-1}}\right)^{n/(kc)}\right)\\
&\leqslant \frac{1}{N(n)\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{n/(kc)-1} R(i)\left(\frac{D}{\binom{n-1}{k-1}}\right)^{i} \leqslant (n/(kc)-1)\max_{i=1,\ldots,n/(kc)-1}\frac{R(i)}{N(n)\varepsilon^2}\left(\frac{D}{\binom{n-1}{k-1}}\right)^{i}
\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{n}{kc} - 1\right) \max_{i=1,\dots,n/(kc)-1} \frac{1}{N(n)\varepsilon^2} \binom{n/(kc)}{i} \frac{1}{i\,!} \prod_{r=1}^{i} \left(\binom{n - n/c + rk}{k} - i \right) \left(\frac{D}{\binom{n-1}{k-1}} \right)^i$$

$$= \left(\frac{n}{kc} - 1\right) \max_{i=1,\dots,n/(kc)-1} \frac{\binom{n/(kc)}{i}(1/i\,!) \prod_{r=1}^{i} \left(\binom{n-n/c+rk}{k} - i\right) \left(D/\binom{n-1}{k-1}\right)^i}{(1/(n(kc))!) \prod_{r=1}^{n/(kc)} \binom{n-n/c+rk}{k} \left(D/\binom{n-1}{k-1}\right)^{n/(kc)} \varepsilon^2}$$

$$\leqslant \left(\frac{n}{kc} - 1\right) \max_{i=1,\dots,n/(kc)-1} \frac{\binom{n/(kc)}{i}(1/i\,!) \prod_{r=1}^{i} \binom{n-n/c+rk}{k} \left(D/\binom{n-1}{k-1}\right)^i}{(1/(n(kc))) \prod_{r=1}^{n/(kc)} \binom{n-n/c+rk}{k} \left(D/\binom{n-1}{k-1}\right)^{n/(kc)} \varepsilon^2}$$

$$\leqslant \left(\frac{n}{kc} - 1\right)! \max_{i=1,\dots,n/(kc)-1} \frac{\binom{n/(kc)}{i}}{i\,! \left(D/\binom{n-1}{k-1}\right)^{n/(kc)-i} \prod_{r=i+1}^{n/(kc)} \binom{n-n/c+rk}{k} \varepsilon^2}.$$

Пусть

$$B(i) = \frac{\binom{n/(kc)}{i}}{i\,! \left(D/\binom{n-1}{k-1}\right)^{n/(kc)-i} \prod_{r=i+1}^{n/(kc)} \binom{n-n/c+rk}{k} \varepsilon^2}.$$

Тогда получаем, что

$$L(n) \leqslant \left(\frac{n}{kc} + 1\right)! \max_{i=1,\dots,n/(kc)-1} B(i). \tag{4}$$

Отсюда следует соотношение (3).

Предложение 2. *Если выполнены условия теоремы* 1, *то* $B(i)$ *монотонно возрастает по* $i = 1, \dots, n/(kc) - 1$.

Доказательство. Оценим снизу отношение $B(i)/B(i-1)$. Нетрудно видеть, что

$$\frac{B(i)}{B(i-1)} = \frac{\binom{n/(kc)}{i}(i-1)! \left(D/\binom{n-1}{k-1}\right)^{n/(kc)-i+1} \prod_{r=i}^{n/(kc)} \binom{n-n/c+rk}{k} \varepsilon^2}{i\,! \left(D/\binom{n-1}{k-1}\right)^{n/(kc)-i} \prod_{r=i+1}^{n/(kc)} \binom{n-n/c+rk}{k} \varepsilon^2 \binom{n/(kc)}{i-1}}$$

$$= \frac{1}{i^2}\left(\frac{n}{kc} - i + 1\right) D \frac{\binom{n-n/c+ik}{k}}{\binom{n-1}{k-1}} = \frac{1}{c} \frac{(n/(kc) - i + 1) D \binom{n-n/c+ik}{k}}{(n/(kc))\binom{n}{k} i^2}$$

$$= \frac{1}{c} \frac{(n/(kc) - i + 1)D}{ni^2/kc} \frac{(n - n/c + ik)!\,(n-k)!}{n!\,(n - n/c + (i-1)k)!}$$

$$= \frac{1}{c} \frac{(n/(kc) - i + 1)D}{ni^2/(kc)} \frac{\prod_{l=0}^{k-1}(n - n/c + ik - l)}{\prod_{l=0}^{k-1}(n-l)}$$

$$\geqslant \frac{1}{c} \frac{(n/(kc) - i + 1)D}{ni^2/(kc)} \frac{\prod_{l=0}^{k-1}(n - n/c - l)}{\prod_{l=0}^{k-1}(n-l)}.$$

Поскольку $k = o(n)$ при $n \to \infty$, мы получаем, что при $n \to \infty$

$$\frac{1}{c} \frac{(n/(kc) - i + 1)D}{ni^2/(kc)} \frac{\prod_{l=0}^{k-1}(n - n/c - l)}{\prod_{l=0}^{k-1}(n-l)} \sim \frac{1}{c} \frac{(n/(kc) - i + 1)D}{ni^2/(kc)} \left(\frac{n - n/c}{n}\right)^k$$

$$= \frac{1}{c} \frac{(n/(kc) - i + 1)D}{ni^2/(kc)} \left(1 - \frac{1}{c}\right)^k.$$

Отсюда видно, что при $D > c(n/(kc))^3(c/(c-1)^k$ справедливо неравенство $B(i) > B(i-1)$ для любых $i = 1, \dots, n/(kc) - 1$. Предложение 2 доказано.

Из предложения 2 и (4) получаем, что

$$L(n) = \frac{\sum_{\substack{P_i, P_j \in PG(n) \\ P_i \neq P_j}} \operatorname{cov}(I(P_i), I(P_j))}{N^2(n)\varepsilon^2} \leqslant \left(\frac{n}{kc} + 1\right)! \, B\left(\frac{n}{kc} - 1\right)$$
$$= \left(\frac{n}{kc} + 1\right)! \, \frac{n/(kc)}{(n/(kc) - 1)! \left(D/\binom{n-1}{k-1}\right)\binom{n}{k}\varepsilon^2}$$
$$= \frac{(n/(kc)(n/(kc) + 1)}{D\varepsilon^2} \sim \frac{(n/(kc))^2}{D\varepsilon^2} \to 0$$

при $n \to \infty$, так как

$$D > c\left(\frac{n}{kc}\right)^3 \left(\frac{c}{c-1}\right)^k.$$

Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *В условиях теоремы* 1 *для любого* $\varepsilon > 0$ *при* $n \to \infty$

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{\sum_{P \in PG(n)} I(P)}{N(n)} - 1\right| > \varepsilon\right) \to 0.$$

Замечание 2. Утверждение следствия 1 означает сходимость по вероятности к 1 отношения числа упаковок случайного гиперграфа $G(n, p)$ к его математическому ожиданию.

Замечание 3. В данном случае нельзя использовать закон больших чисел, потому что упаковки случайного гиперграфа — зависимые случайные величины.

3. Асимптотика числа родившихся упаковок, содержащих фиксированное ребро $G(n)$

Пусть $M(n)$ — число упаковок размера $n/(kc)$ полного гиперграфа $G(n)$, содержащих фиксированное ребро A из множества ребер исходного полного гиперграфа $G(n)$. Это число совпадает с числом всех упаковок в $G(n)$ размера $n/(kc) - 1$, все ребра которых не пересекают ребро A (то есть не имеют с ним общих вершин). По аналогии с доказательством леммы 1 из [1] можно получить, что

$$M(n) = \frac{\prod_{i=1}^{n/(kc)-1} \binom{n-n/c+ik}{k}}{(n/(kc) - 1)!} = \frac{(n-k)!}{(k!)^{n/(kc)-1}(n(1-1/c))! \, (n/(kc) - 1)!}.$$

Пусть $PAG(n)$ — множество упаковок размера $n/(kc) - 1$ в $G(n)$, каждое ребро которых не имеет общих вершин с ребром A.

Введем понятие числа упаковок случайного гиперграфа $G(n, p)$ размера $n/(kc)$, содержащих фиксированное ребро A из множества ребер исходного полного гиперграфа $G(n)$. По определению, это случайная величина, равная сумме по всевозможным упаковкам P, содержащим ребро A, размера $n/(kc)$ полного гиперграфа $G(n)$ индикаторных случайных величин $I(P)$:

$$\sum_{P : P \in PG(n), P \ni A} I(P) = I(A) \sum_{P \in PAG(n)} I(P).$$

Подсчитаем ее математическое ожидание:

$$\mathbf{E}\left(\sum_{P:P\in PG(n),A\in P} I(P)\right) = M(n)\left(\frac{D}{\binom{n-1}{k-1}}\right)^{n/(kc)}$$
$$= \frac{(n-k)!}{(k!)^{n/(kc)-1}(n(1-1/c))!\,(n/(kc)-1)!}\left(\frac{D}{\binom{n-1}{k-1}}\right)^{n/(kc)}.$$

Найдем математическое ожидание числа упаковок в $PAG(n)$:

$$N(n) = \mathbf{E}(\sum_{P\in PAG(n)} I(P)) = M(n)\left(\frac{D}{\binom{n-1}{k-1}}\right)^{n/(kc)-1}$$
$$= \frac{(n-k)!}{(k!)^{n/(kc)-1}(n(1-1/c))!\,(n/(kc)-1)!}\left(\frac{D}{\binom{n-1}{k-1}}\right)^{n/(kc)-1}.$$

Теорема 2. *Пусть $G(n, p(n))$ — случайный гиперграф и при $n \to \infty$*

$$p(n) = \frac{D(n)}{\binom{n-1}{k(n)-1}} \leqslant 1, \quad k(n) = o(n), \quad D(n) > c\left(\frac{n}{k(n)c}\right)^3\left(\frac{c}{c-1}\right)^{k(n)},$$

где $k(n)$ — возрастающая функция n. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ при $n \to \infty$

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{N(n)}\sum_{P:P\in PG(n),A\in P} I(P) - 1\right| > \varepsilon \mid I(A) = 1\right) < \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{1}{N(n)} + \frac{1}{(n/k(n))(c/(c-1))^{k(n)}}\right).$$

Доказательство. В качестве основного инструмента используется неравенство Чебышёва:

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{N(n)}\sum_{P:P\in PG(n),A\in P} I(P) - 1\right| > \varepsilon \mid I(A) = 1\right) = \mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{N(n)}\sum_{P\in PAG(n)} I(P) - 1\right| > \varepsilon\right)$$
$$\leqslant \frac{1}{N^2(n)\varepsilon^2}\mathbf{D}\left(\sum_{P\in PAG(n)} I(P)\right),$$

поскольку

$$\sum_{P:P\in PG(n),A\in P} I(P) = I(A)\sum_{P\in PAG(n)} I(P) = \sum_{P\in PAG(n)} I(P)$$

при $I(A) = 1$, и $\sum_{P\in PAG(n)} I(P)$ не зависит от $I(A)$.

Далее мы рассматриваем упаковки P только из множества $PAG(n)$. Ясно, что

$$\mathbf{D}\left(\sum_{P\in PAG(n)} I(P)\right) = \sum_{P\in PAG(n)} \mathbf{D}(I(P)) + 2\sum_{\substack{P_i,P_j\in PAG(n)\\ P_i\neq P_j}} \operatorname{cov}(I(P_i), I(P_j)).$$

Подсчитаем сумму дисперсий. Поскольку $I(P)$ — индикаторная случайная величина,

$$\mathbf{D}(I(P)) = \left(\frac{D}{\binom{n-1}{k-1}}\right)^{n/(kc)-1}\left(1-\left(\frac{D}{\binom{n-1}{k-1}}\right)^{n/(kc)-1}\right) \Rightarrow \frac{1}{N^2(n)\varepsilon^2}\sum_{P\in PAG(n)}\mathbf{D}(I(P))$$
$$= \frac{1}{N^2(n)\varepsilon^2}M(n)\left(\frac{D}{\binom{n-1}{k-1}}\right)^{n/(kc)-1}\left(1-\left(\frac{D}{\binom{n-1}{k-1}}\right)^{n/(kc)-1}\right)$$
$$= \frac{1}{N(n)\varepsilon^2}\left(1-\left(\frac{D}{\binom{n-1}{k-1}}\right)^{n/(kc)-1}\right) < \frac{1}{N(n)\varepsilon^2} \to 0$$

при $n \to \infty$, потому что

$$N(n) = M(n)\left(\frac{D}{\binom{n-1}{k-1}}\right)^{n/(kc)-1}.$$

Пусть

$$L(n) = \frac{1}{N^2(n)\varepsilon^2}\sum_{\substack{P_i,P_j\in PAG(n)\\ P_i\neq P_j}}\operatorname{cov}(I(P_i), I(P_j)).$$

Для доказательства теоремы 2 осталось показать, что при $n \to \infty$

$$L(n) \to 0. \tag{5}$$

Если рассмотреть сумму всевозможных ковариаций некоторой фиксированной случайной упаковки $I(P)$, $P \in PAG(n)$, и всех остальных случайных упаковок, то для каждой такой упаковки $I(P)$, $P \in PAG(n)$, эта сумма будет одной и той же из соображений симметрии. Поэтому можно упростить выражение для суммы ковариаций следующим образом:

$$R = \sum_{\substack{P_i,P_j\in PAG(n)\\ P_i\neq P_j}}\operatorname{cov}(I(P_i), I(P_j)) = M(n)\sum_{P_j\in PAG(n)}\operatorname{cov}(I(P), I(P_j)),$$

где P — любая фиксированная упаковка из $PAG(n)$.

Далее, выделим группы ковариаций в соответствии с числом общих ребер в упаковках P и P_j в $G(n)$. Для любого $i = 1, \ldots, n/(kc) - 2$ определим $R(i)$ как число упаковок в $G(n)$, имеющих в точности i ребер, которых нет в упаковке P. Это означает, что оставшиеся $n/(kc) - i$ ребер каждой такой упаковки совпадают с какими-то ребрами упаковки P.

Если упаковка P_j имеет в точности $n/(kc) - i$ ребер, которые есть в упаковке P (то есть i ее ребер нет в упаковке P), то

$$\operatorname{cov}(P, P_j) = \mathbf{E}\{I(P)I(P_j)\} - \mathbf{E}\{I(P)\}\mathbf{E}\{I(P_j)\} = \left(\frac{D}{\binom{n-1}{k-1}}\right)^{n(kc)-1+i} - \left(\frac{D}{\binom{n-1}{k-1}}\right)^{2n/(kc)-2}.$$

Замечание 4. Если $i = n/(kc) - 1$, то есть все ребра упаковок P и P_j различны, то случайные величины $I(P)$ и $I(P_j)$ независимы и $\operatorname{cov}(P, P_j) = 0$.

Если $i = 0$, то $\operatorname{cov}(P, P_j) = \mathbf{D}(P)$, а сумма дисперсий уже оценена выше.

Поэтому можно сгруппировать R следующим образом:

$$R=\sum_{i=1}^{n/(kc)-2} R(i)\left(\left(\frac{D}{\binom{n-1}{k-1}}\right)^{n/(kc)-1+i}-\left(\frac{D}{\binom{n-1}{k-1}}\right)^{2n/(kc)-2}\right).$$

Предложение 3. *Для* $i=1,\dots,n/(kc)-2$

$$R(i)=\binom{n/(kc)-1}{i}\frac{1}{i!}\prod_{r=1}^{i}\left(\binom{n-n/c+rk}{k}-i\right).$$

Доказательство. Упаковка P уже имеет $n/(kc)-i$ общих ребер с P_j. Надо добрать еще i ребер.

Число способов выбрать из $n/(kc)-1$ ребер упаковки P какие-то фиксированные i ее ребер, по которым отличаются упаковка P и другие упаковки $G(n)$ (то есть этих i ребер в них нет, а все остальные ребра упаковки P в них есть) равно $\binom{n/(kc)-1}{i}$. Из симметрии полного гиперграфа следует, что при любом выборе этих i ребер получим одно и то же число упаковок $G(n)$, которые отличаются от упаковки P по этим i ребрам.

Число способов выбрать r-е ребро упаковки P_j, которая уже имеет $n/(kc)-i$ общих ребер с P, есть $\binom{n-n/c+rk}{k}-i$, так как нельзя брать ребра, пересекающие ребро A и эти $n/(kc)-i$ общих ребер с P.

Все это надо еще разделить на $i!$, поскольку добираем всего i ребер и начинать процесс добора ребер могли с любого из этих i ребер, то есть посчитали их ровно $i!$ раз. Предложение 3 доказано.

Докажем (5). Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned}
L(n)&=\frac{1}{N^2(n)\varepsilon^2}\sum_{\substack{P_i,P_j\in PAG(n)\\ P_i\neq P_j}}\operatorname{cov}(I(P_i),I(P_j))=\frac{M(n)R}{N^2(n)\varepsilon^2}\\
&=\frac{M(n)}{N^2(n)\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{n/(kc)-2} R(i)\left(\left(\frac{D}{\binom{n-1}{k-1}}\right)^{n/(kc)-1+i}-\left(\frac{D}{\binom{n-1}{k-1}}\right)^{2n/(kc)-2}\right)\\
&=\frac{1}{N(n)\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{n/(kc)-2} R(i)\left(\left(\frac{D}{\binom{n-1}{k-1}}\right)^{i}-\left(\frac{D}{\binom{n-1}{k-1}}\right)^{n/(kc)-1}\right)\leqslant\frac{1}{N(n)\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{n/(kc)-2} R(i)\left(\frac{D}{\binom{n-1}{k-1}}\right)^{i}\\
&\leqslant\left(\frac{n}{kc}-2\right)\max_{i=1,\dots,n/(kc)-2}\frac{1}{N(n)\varepsilon^2}R(i)\left(\frac{D}{\binom{n-1}{k-1}}\right)^{i}.
\end{aligned}$$

Продолжая эту цепочку неравенств с учетом предложения 3, получаем, что

$$\begin{aligned}
L(n)&=\left(\frac{n}{kc}-2\right)\frac{1}{N(n)\varepsilon^2}\\
&\quad\times\max_{i=1,\dots,n/(kc)-2}\binom{n/(kc)-1}{i}\frac{1}{i!}\prod_{r=1}^{i}\left(\binom{n-n/c+rk}{k}-i\right)\left(\frac{D}{\binom{n-1}{k-1}}\right)^{i}\\
&=\left(\frac{n}{kc}-2\right)\\
&\quad\times\max_{i=1,\dots,n/(kc)-2}\frac{\binom{n/(kc)-1}{i}(1/i!)\prod_{r=1}^{i}\left(\binom{n-n/c+rk}{k}-i\right)\left(D/\binom{n-1}{k-1}\right)^{i}}{1/((n/(kc)-1)!)\left(\prod_{r=1}^{n/(kc)-1}\binom{n-n/c+rk}{k}\right)\left(D/\binom{n-1}{k-1}\right)^{n/(kc)-1}\varepsilon^2}
\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{n}{kc} - 2\right) \times \max_{i=1,\dots,n/(kc)-2} \frac{\binom{n/(kc)-1}{i}(1/i!)\prod_{r=1}^{i}\binom{n-n/c+rk}{k}\left(D/\binom{n-1}{k-1}\right)^{i}}{(1/(n/(kc)-1)!)\left(\prod_{r=1}^{n/(kc)-1}\binom{n-n/c+rk}{k}\right)\left(D/\binom{n-1}{k-1}\right)^{n/(kc)-1}\varepsilon^2}$$

$$\leqslant \left(\frac{n}{kc}\right)! \max_{i=1,\dots,n/(kc)-2} \frac{\binom{n/(kc)-1}{i}}{i!\left(D/\binom{n-1}{k-1}\right)^{n/(kc)-1-i}\prod_{r=i+1}^{n/(kc)-1}\binom{n-n/c+rk}{k}\varepsilon^2}.$$

Положим

$$B(i) = \frac{\binom{n/(kc)-1}{i}}{i!\left(D/\binom{n-1}{k-1}\right)^{n/(kc)-1-i}\prod_{r=i+1}^{n/(kc)-1}\binom{n-n/c+rk}{k}\varepsilon^2}.$$

Тогда

$$L(n) \leqslant \left(\frac{n}{kc}\right)! \max_{i=1,\dots,n/(kc)-2} B(i). \tag{6}$$

Предложение 4. *В условиях теоремы 2 функция $B(i)$ монотонно возрастает с ростом $i = 1, \dots, n/(kc) - 2$.*

Доказательство. Оценим снизу отношение $B(i)/B(i-1)$. Нетрудно видеть, что

$$\frac{B(i)}{B(i-1)} = \frac{\binom{n/(kc-1)}{i}(i-1)!\left(D/\binom{n-1}{k-1}\right)^{n/(kc)-1-i+1}\prod_{r=i}^{n/(kc)-1}\binom{n-n/c+rk}{k}\varepsilon^2}{i!\left(D/\binom{n-1}{k-1}\right)^{n/(kc)-1-i}\prod_{r=i+1}^{n/(kc)-1}\binom{n-n/c+rk}{k}\varepsilon^2\binom{n/(kc)-1}{i-1}}$$

$$= \frac{(n/(kc)-i)\left(D/\binom{n-1}{k-1}\right)\binom{n-n/c+ik}{k}}{i^2} = \frac{1}{c}\frac{(n/(kc)-i)D\binom{n-n/c+ik}{k}}{(ni^2/(kc))\binom{n}{k}}$$

$$= \frac{1}{c}\frac{(n/(kc)-i)D}{ni^2/(kc)}\frac{(n-n/c+ik)!\,(n-k)!}{n!\,(n-n/c+(i-1)k)!}$$

$$= \frac{1}{c}\frac{(n/(kc)-i)D}{ni^2/(kc)}\frac{\prod_{l=0}^{k-1}(n-n/c+ik-l)}{\prod_{l=0}^{k-1}(n-l)}q$$

$$\geqslant \frac{1}{c}\frac{(n/(kc)-i)D}{ni^2/(kc)}\frac{\prod_{l=0}^{k-1}(n-n/c-l)}{\prod_{l=0}^{k-1}(n-l)}.$$

Учитывая, что $k = o(n)$ при $n \to \infty$, находим, что последний член в полученной цепочке неравенств при $n \to \infty$ эквивалентен

$$\frac{1}{c}\frac{(n/(kc)-i)D}{ni^2/(kc)}\left(\frac{n-n/c}{n}\right)^k = \frac{1}{c}\frac{(n/(kc)-i)D}{ni^2/(kc)}\left(1-\frac{1}{c}\right)^k.$$

Отсюда видно, что при

$$D > c\left(\frac{n}{kc}\right)^3\left(\frac{c}{c-1}\right)^k$$

выполняется неравенство $B(i) > B(i-1)$ для любых $i = 1, \dots, n/kc - 2$. Предложение 4 доказано.

Из предложения 4 и (6) получаем, что

$$L(n) = \frac{\sum_{\substack{P_i, P_j \in PAG(n) \\ P_i \neq P_j}} \operatorname{cov}(I(P_i), I(P_j))}{N^2(n)\varepsilon^2} \leqslant \left(\frac{n}{kc}\right)! \, B\left(\frac{n}{kc} - 2\right)$$
$$= \left(\frac{n}{kc}\right)! \frac{n/(kc) - 1}{(n/(kc) - 2)! \left(D/\binom{n-1}{k-1}\right)\binom{n}{k}\varepsilon^2} = \frac{(n/(kc))(n/(kc) - 1)}{D\varepsilon^2}.$$

При $n \to \infty$ последний член цепочки эквивалентен $(n/(kc))^2/(D\varepsilon^2)$ и стремится к нулю, поскольку $D > c(n/(kc))^3(c/(c-1))^k$. Теорема 2 доказана.

Следствие 2. *В условиях теоремы* 2 *для любого* $\varepsilon > 0$ *при* $n \to \infty$

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{N}\sum_{P \in PG(n), A \in P} I(P) - 1\right| > \varepsilon \mid I(A) = 1\right) \to 0.$$

Замечание 5. Утверждение следствия 2 означает сходимость по вероятности к 1 отношения числа упаковок случайного гиперграфа $G(n, p)$, содержащих ребро A из $G(n)$, и некоторой случайной величины, похожей на его математическое ожидание.

Замечание 6. В данном случае нельзя использовать закон больших чисел, потому что упаковки случайного гиперграфа — зависимые случайные величины.

4. Оценка сверху хроматического индекса случайного гиперграфа

Теорема 3. *Пусть* $G(n, p(n))$ — *случайный гиперграф,*

$$p(n) = \frac{D(n)}{\binom{n-1}{k(n)-1}} \leqslant 1, \qquad D(n) > c\left(\frac{n}{k(n)c}\right)^3\left(\frac{c}{c-1}\right)^{k(n)},$$

где $k(n)$ — *возрастающая функция от* n *и* $k(n) = o(n)$ *при* $n \to \infty$. *Тогда при* $n \to \infty$ *для любого* $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}(\chi(G(n, p(n))) \leqslant [1 + \varepsilon + c\ln(k(n))]D(n)) \to 1.$$

Доказательство. Введем следующее вероятностное пространство. Пусть Ω_0 — множество векторов из 0 и 1 длины $\binom{n}{k}$, каждый из которых соответствует конкретному подмножеству Z_i, $i = 1, \ldots, 2^{\binom{n}{k}}$, множества ребер полного гиперграфа $G(n)$, $\Omega_0 = Z_1, \ldots, Z_{2^k}$. Определим независимые в совокупности случайные величины ξ_0, ξ_i^j, $i = 1, \ldots, 2^{\binom{n}{k}}$, $1 \leqslant j \leqslant cD\ln(k)$, следующим образом. Определим дискретную случайную величину ξ_0, которая описывает процесс равномерного и независимого выбора ребер $G(n)$:

$$\mathbf{P}(\xi_0 = (e_1, \ldots, e_{\binom{n}{k}}) \colon e_{i_1} = 1, e_{i_2} = 1, e_{i_r} = 1, \text{остальные } e_j = 0) = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r},$$
$$0 \leqslant r \leqslant n, \qquad r \in \mathbf{Z}.$$

Далее, для каждого набора ребер, соответствующего Z_i, определяем множество Ω_i, $i = 1, \dots, 2^k$, всех упаковок размера $n/(kc)$, которые можно построить на ребрах Z_i (какие-то $\Omega_i = \varnothing$). Эти множества необходимы для описания процесса случайного и независимого выбора упаковок в случайном гиперграфе $G(n, p)$.

Далее выберем $cD\ln(k)$ равномерно распределенных упаковок случайного гиперграфа $G(n, p)$. Для этого определим случайные величины, введенные ранее, следующим образом: для всех $i \in \{1, \dots, 2^{\binom{n}{k}}\}$, $j \in \{1, \dots, cD\ln(k)\}$ положим

$$\mathsf{P}(\xi_i^j = P) = \frac{1}{|\Omega_i|}, \quad P \in \Omega_i, \quad |P| = \frac{n}{kc}.$$

Если $\Omega_i = \varnothing$, то $\mathsf{P}(\xi_i^j = 0) = 1$ есть специально выделенный элемент для того, чтобы показать невозможность выбора упаковки размера $n/(kc)$ на Z_i. Если $\Omega_i \neq \varnothing$, то $\mathsf{P}(\xi_i^j = 0) = 0$.

Доказательство того, что существует вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, на котором определены данные случайные величины, приведено на стр. 314–323 в [3].

На этом вероятностном пространстве определим случайные величины

$$\eta_j = \sum_{i=1}^{2^{\binom{n}{k}}} I(\xi_0 = Z_i)\xi_i^j, \qquad j = 1, \dots, \leqslant cD\ln(k).$$

Эти случайные величины описывают процесс равномерного выбора упаковки из Ω_i.

Введем дополнительно случайные величины — индикаторы событий $I(\xi_0 = Z_i) = 1$, происходящих с вероятностью $\mathsf{P}(\xi_0 = Z_i)$, где ξ_0 соответствует последовательности независимых испытаний Бернулли, как отмечалось ранее.

Зафиксируем индекс j, $1 \leqslant j \leqslant cD\ln(k)$. Пусть $\eta \equiv \eta_j$, $\xi_i \equiv \xi_i^j$, $i = 1 \dots, 2^{\binom{n}{k}}$, $A \in E(G(n))$ — фиксированное ребро полного гиперграфа на n вершинах. Формальная запись того, что это ребро принадлежит случайной упаковке η, если оно родилось, то есть принадлежит случайному гиперграфу $G(n, p)$, такова:

$$\text{Событие } (A \text{ родилось}) = \left(\bigcup_{i: Z_i \ni A} (I(\xi_0 = Z_i) = 1)\right),$$

$$\text{Событие } (A \in \eta \,\&\, A \text{ родилось}) = \left(\bigcup_{i: A \in Z_i} \left((\xi_0 = Z_i) \,\&\, \left(\bigcup_{P: \Omega_i \ni P \ni A} (\xi_i = P)\right)\right)\right).$$

Оценим вероятность последнего события с учетом независимости в совокупности случайных величин ξ_0, ξ_i, $i \in \{1, \dots, 2^{\binom{n}{k}}\}$:

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(A \in \eta \,\&\, A \text{ родилось}) &= \mathsf{P}\left(\bigcup_{i: A \in Z_i} \left((\xi_0 = Z_i) \,\&\, \left(\bigcup_{P: \Omega_i \ni P \ni A} (\xi_i = P)\right)\right)\right) \\
&= \sum_{i: Z_i \ni A} \sum_{P: \Omega_i \ni P \ni A} \mathsf{P}(\xi_i = P)\mathsf{P}(\xi_0 = Z_i) \\
&= \sum_{i: Z_i \ni A} \sum_{P: \Omega_i \ni P \ni A} \frac{1}{|\Omega_i|}\mathsf{P}(\xi_0 = Z_i).
\end{aligned}$$

Далее используем теоремы 1 и 2 для того, чтобы получить асимптотику этой вероятности. В теореме 1 говорится о том, что число родившихся упаковок отклоняется от своего математического ожидания не более, чем в $(1+\varepsilon_1)$ раз на мере, стремящейся к 1 при $n \to \infty$. В теореме 2 говорится о том, что число родившихся упаковок, содержащих фиксированное ребро A полного гиперграфа $G(n)$, отклоняется от своего математического ожидания не более, чем в $(1+\varepsilon_2)$ раз на мере, стремящейся к 1 при $n \to \infty$ при условии, что ребро A родилось. Из доказательства теорем 1 и 2 следует, что можно выбрать $\varepsilon_1(n)$ и $\varepsilon_2(n)$ как функции от n, стремящиеся к 0 при $n \to \infty$. Следовательно, можно выделить упаковку с вероятностью, не меньшей $1/(cD)$ при $n \to \infty$. При $n \to \infty$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(A \in \eta \,\&\, A \text{ родилось}) \\
&\qquad \gtrsim \frac{\dfrac{(n-k)!}{(k!)^{n/(kc)-1}(n(1-1/c))!\,(n/(kc)-1)!}\left(\dfrac{D}{\binom{n-1}{k-1}}\right)^{n/(kc)-1}}{\dfrac{n!}{(k!)^{n/(kc)}(n(1-1/c))!\,(n/(kc))!}\left(\dfrac{D}{\binom{n-1}{k-1}}\right)^{n/(kc)}}\mathbf{P}(A \text{ родилось}) \\
&\qquad = \frac{1}{cD}\mathbf{P}(A \text{ родилось}) \Rightarrow \mathbf{P}(A \in \eta \mid A \text{ родилось}) \gtrsim \frac{1}{cD}.
\end{aligned}$$

Таким образом, мы получили следующее утверждение.

Предложение 5. *Для любого ребра $A \in E(G(n))$ при $n \to \infty$*

$$\mathbf{P}(A \in \eta \mid A \text{ родилось}) \gtrsim \frac{1}{cD}.$$

Предложение 6. *Для любого ребра $A \in E(G(n))$ при $n \to \infty$*

$$\mathbf{P}(A \notin \eta \mid A \text{ родилось}) \gtrsim 1 - \frac{1}{cD}.$$

Доказательство. Оценим снизу

$$\mathbf{P}(A \notin \eta \,\&\, A \text{ родилось}) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{i:A\in Z_i}\left((\xi_0 = Z_i) \,\&\, \left(\bigcup_{P:\Omega_i\ni P, A\notin P}(\xi_i = P)\right)\right)\right).$$

В силу независимости случайных величин ξ_0, ξ_i, $i \in \{1,\dots,2^{\binom{n}{k}}\}$, для этой вероятности получаем оценку снизу

$$\begin{aligned}
\sum_{i:Z_i\ni A}\ \sum_{P:\Omega_i\ni P, A\notin P}\mathbf{P}(\xi_i = P)\mathbf{P}(\xi_0 = Z_i) &= \sum_{i:Z_i\ni A}\ \sum_{P:\Omega_i\ni P, A\notin P}\frac{1}{|\Omega_i|}\mathbf{P}(\xi_0 = Z_i) \\
&= \sum_{i:Z_i\ni A}\mathbf{P}(\xi_0 = Z_i)\left(1 - \sum_{P:\Omega_i\ni P\ni A}\frac{1}{|\Omega_i|}\right).
\end{aligned}$$

Проведя те же рассуждения, что и при доказательстве предложения 5, получим, что

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(A \notin \eta \ \&\ A \text{ родилось}) \\
&\gtrsim \left(1 - \frac{\dfrac{(n-k)!}{(k!)^{n/(kc)-1}(n(1-1/c))!\,(n/(kc)-1)!}\left(\dfrac{D}{\binom{n-1}{k-1}}\right)^{n/(kc)-1}}{\dfrac{n!}{(k!)^{n/(kc)}(n(1-1/c))!\,(n/(kc))!}\left(\dfrac{D}{\binom{n-1}{k-1}}\right)^{n/(kc)}}\right)\mathbf{P}(A \text{ родилось}) \\
&= \left(1 - \frac{1}{cD}\right)\mathbf{P}(A \text{ родилось}) \Rightarrow \mathbf{P}(A \notin \eta \mid A \text{ родилось}) \gtrsim \left(1 - \frac{1}{cD}\right).
\end{aligned}$$

Предложение 6 доказано.

Предложение 7. *Для любого ребра $A \in E(G(n))$ при $n \to \infty$*

$$\mathbf{P}(A \notin \eta \mid A \textit{ родилось}) \sim 1 - \frac{1}{cD}.$$

Доказательство. По формуле полной вероятности

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A \text{ родилось}) &= \mathbf{P}(A \notin \eta \ \&\ A \text{ родилось}) + \mathbf{P}(A \in \eta \ \&\ A \text{ родилось}) \\
&\Rightarrow \mathbf{P}(A \notin \eta \mid A \text{ родилось}) = \mathbf{P}(A \text{ родилось}) - \mathbf{P}(A \in \eta \ \&\ A \text{ родилось}) \\
&\lesssim \mathbf{P}(A \text{ родилось}) - \frac{1}{cD}\mathbf{P}(A \text{ родилось}) = \left(1 - \frac{1}{cD}\right)\mathbf{P}(A \text{ родилось}).
\end{aligned}$$

Здесь использовалось предложение 5. Из предложения 6 следует, что нижняя асимптотическая оценка будет такой же. Предложение 7 доказано.

Из предложения 7 следует, что

$$\mathbf{P}(A \in \eta \mid A \text{ родилось}) \sim \frac{1}{cD}.$$

Отметим полезное свойство, которое пригодится в дальнейшем: при $n \to \infty$

$$\mathbf{P}(A \in \xi_i) = \sum_{P : \Omega_i \ni P \ni A} P(\xi_i = P) \sim \frac{1}{cD}.$$

Это верно для почти всех $i \in \{1, \dots, 2^{\binom{n}{k}}\}$ в силу ранее доказанного.

Теперь проделаем похожие вычисления, но не для одной случайной упаковки η, а для $cD\ln(k)$ упаковок η_j, $j \in \{1, \dots, cD\ln(k)\}$.

Предложение 8. *Для любого ребра $A \in E(G(n))$ при $n \to \infty$*

$$\mathbf{P}(A \notin \eta_j, j \in \{1, \dots, cD\ln(k)\} \mid A \textit{ родилось}) \sim \frac{1}{k}.$$

Доказательство. Найдем асимптотику при $n \to \infty$ для вероятности

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(A \notin \eta_j, j \in \{1, \dots, cD\ln(k)\} \ \&\ A \text{ родилось}) \\
&\qquad = \mathbf{P}\left(\bigcup_{i : A \in Z_i}\left((\xi_0 = Z_i) \ \&\ \left(\bigcap_{j \in \{1, \dots, cD\ln(k)\}} \ \bigcup_{P : \Omega_i \ni P, A \notin P} (\xi_i^j = P)\right)\right)\right).
\end{aligned}$$

Учитывая независимость в совокупности случайных величин ξ_0, ξ_i^j, $i \in \{1,\dots,2^{\binom{n}{k}}\}$, $j \in \{1,\dots,cD\ln(k)\}$, и одинаковую распределенность ξ_i^j, $i \in \{1,\dots,2^{\binom{n}{k}}\}$, для $j \in \{1,\dots,cD\ln(k)\}$), и продолжая цепочку равенств, получаем, что

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(A \notin \eta_j,\, j \in \{1,\dots,cD\ln(k)\}\ \&\ A \text{ родилось})\\
&= \sum_{i:Z_i\ni A}\Bigg(\sum_{P:\Omega_i\ni P, A\notin P}\mathbf{P}(\xi_i = P)\Bigg)^{cD\ln(k)}\mathbf{P}(\xi_0 = Z_i)\\
&= \sum_{i:Z_i\ni A}\Bigg(\sum_{P:\Omega_i\ni P, A\notin P}\frac{1}{|\Omega_i|}\Bigg)^{cD\ln(k)}\mathbf{P}(\xi_0 = Z_i)\\
&= \sum_{i:Z_i\ni A}\mathbf{P}(\xi_0 = Z_i)\Bigg(1-\sum_{P:\Omega_i\ni P\ni A}\frac{1}{|\Omega_i|}\Bigg)^{cD\ln(k)} \sim \sum_{i:Z_i\ni A}\mathbf{P}(\xi_0 = Z_i)\left(1-\frac{1}{cD}\right)^{cD\ln(k)}\\
&= \mathbf{P}(A \text{ родилось})e^{\ln(1-1/(cD))cD\ln(k)} \sim \mathbf{P}(A \text{ родилось})e^{-1/(cD)cD\ln(k)} = \frac{1}{k}\mathbf{P}(A \text{ родилось}).
\end{aligned}$$

Предложение 8 доказано.

Замечание 7. В предпоследнем предельном переходе предполагалось, что ε_1 и ε_2 из теорем 1 и 2 можно выбрать как функции от n, например, порядка $(k^2/n)(c-1)/c)^k$.

Таким образом, получена асимптотика вероятности того, что фиксированное ребро из полного гиперграфа $G(n)$ не входит ни в одну из выбранных $cD\ln(k)$ случайных упаковок. Определим случайный гиперграф G' как объединение этих случайных упаковок, то есть

$$G' = \eta_1 \cup \eta_2 \cup \ldots \cup \eta_{cD\ln(k)}.$$

Тогда его хроматический индекс удовлетворяет неравенству

$$\chi(G') \leqslant cD\ln(k).$$

Если определить $\widetilde{G} = G(n,p) \setminus G'$ как гиперграф, который остался от $G(n,p)$ после исключения из множества его ребер всех ребер гиперграфа G', то, используя оценку (1), для его хроматического индекса можно получить оценку

$$\chi(\widetilde{G}) \leqslant k(\max_{v\in V(\widetilde{G})}\deg_{\widetilde{G}} v - 1) + 1,$$

где $\deg_{\widetilde{G}} v$ — степень вершины v в гиперграфе $\widetilde{G}$. Осталось оценить

$$\deg_{\widetilde{G}} v = \sum_{A:A\ni v} I(A \text{ родилось}\ \&\ A \notin \eta_j, 1 \leqslant j \leqslant cD\ln(k)).$$

Здесь $I(X)$ — индикатор события X, то есть $I(X) = 1$ с вероятностью $\mathbf{P}(X)$, $I(X) = 0$ с вероятностью $1-\mathbf{P}(X)$. Подсчитаем математическое ожидание этой случайной величины:

$$\mathbf{E}(\deg_{\widetilde{G}} v) = \binom{n-1}{k-1}\mathbf{P}(A \text{ родилось}\ \&\ A \notin \eta_j, 1 \leqslant j \leqslant cD\ln(k)).$$

Используя предложение 8 для получения асимптотики этой вероятности, находим, что при $n \to \infty$

$$\mathbf{E}(\deg_{\widetilde{G}} v) \sim \binom{n-1}{k-1} \frac{D}{k\binom{n-1}{k-1}} = \frac{D}{k}.$$

Далее надо показать, что $\deg_{\widetilde{G}} v$ отклоняется асимптотически от своего математического ожидания с небольшой вероятностью.

Предложение 9. *При $n \to \infty$ для любого $\varepsilon > 0$*

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{\deg_{\widetilde{G}} v}{D/k} - 1\right| > \varepsilon\right) \to 0.$$

Доказательство. Используем, как и ранее, неравенство Чебышёва для оценки этой вероятности. Рассмотрим события

$$A = (\text{ребро } A \text{ родилось } \& \ A \notin \eta_j, 1 \leqslant j \leqslant cD\ln(k)),$$
$$B = (\text{ребро } B \text{ родилось } \& \ B \notin \eta_j, 1 \leqslant j \leqslant cD\ln(k)).$$

Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{\deg_{\widetilde{G}} v}{D/k} - 1\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sum_{A:A\ni v} \mathbf{D}(I(A)) + \sum_{A\neq B:A\ni v, B\ni v} \operatorname{cov}(I(A), I(B))}{\varepsilon^2 D^2/k^2}$$

и при $n \to \infty$

$$\mathbf{D}(I(A)) = \mathbf{P}(A)(1-\mathbf{P}(A)) \leqslant \mathbf{P}(A) = \frac{D}{\binom{n-1}{k-1}} \Rightarrow \sum_{A:A\ni v} \mathbf{D}(I(A)) \leqslant \binom{n-1}{k-1}\frac{D}{\binom{n-1}{k-1}} = D$$
$$\Rightarrow \frac{\sum_{A:A\ni v} \mathbf{D}(I(A))}{\varepsilon^2 D^2/k^2} \to 0,$$

поскольку по условию

$$D > c\left(\frac{n}{kc}\right)^3 \left(\frac{c}{c-1}\right)^k$$

и $k = o(n)$ при $n \to \infty$. Поэтому осталось оценить $\sum_{A\neq B:A\ni v, B\ni v} \operatorname{cov}(I(A), I(B))$. Нетрудно видеть, что

$$\operatorname{cov}(I(A), I(B)) = \mathbf{P}(A \,\&\, B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$$

и

$$\mathbf{P}(A \,\&\, B) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{i:A\in Z_i, B\in Z_i}\left((\xi_0 = Z_i) \,\&\, \left(\bigcap_{1\leqslant j\leqslant cD\ln(k)} \ \bigcup_{P:\Omega_i\ni P, A\notin P, B\notin P} (\xi_i^j = P)\right)\right)\right).$$

Учитывая независимость в совокупности случайных величин ξ_0, ξ_i^j, $i \in \{1, \ldots, 2^{\binom{n}{k}}\}$, $1 \leqslant j \leqslant cD\ln(k)$, и одинаковую распределенность величин ξ_i^j, $i \in \{1, \ldots, 2^{\binom{n}{k}}\}$,

$1 \leqslant j \leqslant cD\ln(k)$, и продолжая оценивание, находим, что при $n \to \infty$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A \,\&\, B) &= \sum_{i:Z_i \ni A, Z_i \ni B} \left(\sum_{P:\Omega_i \ni P, A \notin P, B \notin P} \mathbf{P}(\xi_i = P) \right)^{cD\ln(k)} \mathbf{P}(\xi_0 = Z_i) \\
&= \sum_{i:Z_i \ni A, Z_i \ni B} \left(\sum_{P:\Omega_i \ni P, A \notin P, B \notin P} \frac{1}{|\Omega_i|} \right)^{cD\ln(k)} \mathbf{P}(\xi_0 = Z_i) \\
&= \sum_{i:Z_i \ni A, Z_i \ni B} \mathbf{P}(\xi_0 = Z_i) \left(1 - \sum_{P:\Omega_i \ni P \ni A} \frac{2}{|\Omega_i|} \right)^{cD\ln(k)} \\
&\sim \sum_{i:Z_i \ni A, Z_i \ni B} \mathbf{P}(\xi_0 = Z_i) \left(1 - \frac{2}{cD} \right)^{cD\ln(k)} \\
&= \mathbf{P}(A, B \text{ родились}) e^{\ln(1-2/(cD))cD\ln(k)} \\
&\sim \mathbf{P}(A, B \text{ родились}) e^{-2/(cD)cD\ln(k)} \\
&= \frac{1}{k^2} \mathbf{P}(A \text{ родилось}) \mathbf{P}(B \text{ родилось}).
\end{aligned}$$

Асимптотика $\mathbf{P}(A)$, $\mathbf{P}(B)$ была найдена ранее (см. предложение 8). Теперь можно оценить ковариацию: если $n \to \infty$, то

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(I(A), I(B)) &= \mathbf{P}(A \,\&\, B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) \\
&= \mathbf{P}(A \text{ родилось}) \mathbf{P}(B \text{ родилось}) \left(\frac{1}{k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) \right) \\
&\qquad - \mathbf{P}(A \text{ родилось}) \mathbf{P}(B \text{ родилось}) \left(\frac{1}{k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) \right) \\
&= o\left(\frac{1}{k^2}\right) \left(\frac{D}{\binom{n-1}{k-1}} \right)^2 \Rightarrow \frac{\sum_{A \neq B: A \ni v, B \ni v} \operatorname{cov}(I(A), I(B))}{\varepsilon^2 D^2 / k^2} \\
&= \frac{\binom{n-1}{k-1}^2 o(1/k^2) \left(D / \binom{n-1}{k-1} \right)^2}{\varepsilon^2 D^2 / k^2} = o(1).
\end{aligned}$$

Предложение 9 доказано.

Из этого предложения следует тот факт, что для любого $\varepsilon > 0$ при $n \to \infty$

$$\mathbf{P}(\chi(\widetilde{G}) \leqslant (1 + \varepsilon)D) \to 1.$$

Здесь использована оценка хроматического индекса (1).

Поскольку

$$\chi(G(n, p)) \leqslant \chi(G') + \chi(\widetilde{G}),$$

отсюда получаем утверждение теоремы 3.

Автор благодарен своему научному руководителю А. А. Ирматову за ценные указания.

Список литературы

1. Pippenger N., Spencer J., Asymptotic behavior of the chromatic index for hypergraphs. *J. Comb. Theory* (1989) **51**, 24–42.

2. Будников Ю. А., Об асимптотическом поведении хроматического индекса случайных гиперграфов. *Интеллектуальные системы* (2007) **11**, 343–360.

3. Ширяев А. Н., *Вероятность*. МЦНМО, Москва, 2004.

Статья поступила 12.02.2010.