Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Селезнева, О приближении с заданной точностью функций k -значных логик полиномами, *Дискрет. матем.*, 2008, том 20, выпуск 2, 32–45

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1002>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 14:15:31

О приближении с заданной точностью функций k -значных логик полиномами

© 2008 г. С. Н. Селезнева

Рассматриваются приближения функций k -значных логик полиномами с разными точностями. Находятся оценки ранга и длины приближающих полиномов в зависимости от точности приближения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 06-01-00438-а и 07-01-00444.

1. Введение

Задачи о возможностях приближения одних функций другими, более простыми в некоторых смыслах, находят применение в приложениях. В [1] рассматривались приближенные задания булевых функций стандартными формами, такими, как полиномы Жегалкина, ДНФ и некоторыми их обобщениями, и получены оценки сложности таких заданий.

В настоящей работе рассматриваются приближения с заданной точностью функций k -значных логик полиномами и находятся оценки ранга и длины приближающих полиномов.

2. Основные понятия

Пусть $k \geq 2$, $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$. Функцией k -значной логики называется отображение $f^n: E_k^n \rightarrow E_k$, $n = 0, 1, \dots$. Множество всех функций k -значной логики обозначим через P_k , множество всех функций k -значной логики, зависящих от переменных $x_1, \dots, x_n$, обозначим через P_k^n . Для функций из P_k^n наборы значений переменных множества E_k^n будем называть точками.

Будем задавать функции k -значной логики полиномами. Под сложением и умножением будем понимать сложение и умножение по модулю k . Выражение вида $x_{i_1}^{m_1} \dots x_{i_r}^{m_r}$, где $1 \leq m_1, \dots, m_r \leq k-1$, называется мономом. Рангом монома называется число r . Мы будем считать константу 1 вырожденным мономом ранга 0. Сумму вида $\sum_{i=1}^l c_i X_i$, где $c_i \in E_k \setminus \{0\}$, X_i — различные мономы, $i = 1, \dots, l$, назовем полиномом. Длиной полинома называется число l . Рангом полинома назовем наибольший ранг его слагаемых. Мы будем полагать константу 0 вырожденным полиномом с рангом и длиной, равными 0.

Пусть k — простое число. В этом случае каждую функцию k -значной логики можно однозначно записать полиномом [2]. Обозначим полином, задающий функцию $f(x_1, \dots, x_n)$, через $P(f)$. Ранг и длину полинома $P(f)$ обозначим $r(f)$ и $l(f)$ соответственно.

Если $f, g \in P_k^n$, то назовем расстоянием между функциями f и g величину $d(f, g)$, равную числу точек из множества E_k^n , в которых эти функции различаются.

Пусть $\delta, 0 \leq \delta \leq 1$, — действительное число.

Для функции $f(x_1, \dots, x_n)$ функция $g(x_1, \dots, x_n)$ называется приближением с точностью δ , или δ -приближением, если доля точек из E_k^n , в которых функции f и g отличаются, не превосходит δ , то есть $d(f, g)/k^n \leq \delta$. Если при этом $\delta = q/k^n$, где $q, q \geq 1$, — натуральное число, то функцию $g(x_1, \dots, x_n)$ назовем приближением функции $f(x_1, \dots, x_n)$ с точностью до q точек. В этом случае функции f и g отличаются не более, чем в q точках из E_k^n , то есть $d(f, g) \leq q$.

Будем исследовать числовые характеристики полиномов, которые при каждом n приближают с заданной точностью все функции из P_k^n .

Пусть $\delta_n, 0 \leq \delta_n \leq 1, n = 0, 1, \dots$, — последовательность действительных чисел. Пусть при каждом n величина $r_k^{\delta_n}(n)$ ($l_k^{\delta_n}(n)$) обозначает такое наименьшее число, что полиномами над переменными $x_1, \dots, x_n$ ранга, не большего $r_k^{\delta_n}(n)$ (длины, не большей $l_k^{\delta_n}(n)$), можно приблизить все функции из P_k^n с точностью δ_n . Другими словами, пусть для функции $f \in P_2^n$ определены $r^\delta(f) = \min r(g)$ и $l^\delta(f) = \min l(g)$, где минимум берется по всем функциям $g \in P_2^n$, являющимся приближениями с точностью δ функции f . Тогда $r_k^{\delta_n}(n) = \max r^{\delta_n}(f)$ и $l_k^{\delta_n}(n) = \max l^{\delta_n}(f)$, где максимум берется по всем функциям f из P_k^n .

В зависимости от вида последовательности δ_n введем некоторые упрощения обозначений. Если $\delta_n = \delta$, где $\delta, 0 \leq \delta \leq 1$, — действительная постоянная, то величины $r_k^{\delta_n}(n)$ и $l_k^{\delta_n}(n)$ будем обозначать $r_k^\delta(n)$ и $l_k^\delta(n)$ соответственно.

Если $\delta_n = q/k^n$, где $q \geq 1$ — натуральное число, то величины $r_k^{\delta_n}(n)$ и $l_k^{\delta_n}(n)$ будем обозначать $r_k^{(q)}(n)$ и $l_k^{(q)}(n)$ соответственно. Заметим, что в этом случае каждая функция $f \in P_k^n$ будет приближаться с точностью до q точек.

Предложение 1. Пусть $k, k \geq 2$, — простое число, $\delta, 0 < \delta \leq 1$, — действительная постоянная, $\delta_n, 0 < \delta_n \leq 1$, — последовательность действительных чисел, стремящихся к нулю, $1/k^n = \bar{o}(\delta_n)$, число q натуральное, $q \geq 1$.

Тогда для всех n , начиная с некоторого значения n_0 ,

$$(1) \quad 0 \leq r_k^\delta(n) \leq r_k^{\delta_n}(n) \leq r_k^{(q)}(n) \leq \dots \leq r_k^{(1)}(n) \leq n,$$

$$(2) \quad 0 \leq l_k^\delta(n) \leq l_k^{\delta_n}(n) \leq l_k^{(q)}(n) \leq \dots \leq l_k^{(1)}(n) \leq k^n.$$

В [1] были получены следующие оценки сложности приближения булевых функций:

$$(1) \quad r_2^\delta(n) = 0 \text{ при } \delta \geq 1/2;$$

$$(2) \quad r_2^\delta(n) \sim (1/2)n \text{ при } 0 < \delta < 1/2 \text{ и } n \rightarrow \infty;$$

$$(3) \quad l_2^\delta(n) = 1 \text{ при } \delta \geq 1/2;$$

$$(4) \quad l_2^\delta(n) \leq ((1 - \delta)/2)2^n(1 + \varepsilon(n)) \text{ при } 0 < \delta < 1/2, \text{ где } \varepsilon(n) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Мы докажем следующие оценки.

Теорема 1. Пусть число $k, k \geq 2$, простое, $\delta, 0 \leq \delta \leq 1$, — действительная константа, $\delta_n, 0 < \delta_n \leq 1$ — последовательность, стремящихся к нулю действительных чисел, $q, q \geq 1$, — натуральное число. Тогда

- (1) $r_k^\delta(n) = 0$ при $\delta \geq (k-1)/k$;
- (2) $r_k^\delta(n) \sim ((k-1)/k)n$ при $0 < \delta < (k-1)/k$ и $n \rightarrow \infty$;
- (3) $r_k^{\delta_n}(n) \sim ((k-1)/k)n$ при $\log_k(1/\delta_n) = \bar{o}(n)$ и $n \rightarrow \infty$;
- (4) $r_k^{(q)}(n) = n$ для всех n , начиная с некоторого значения n_0 , при $k \geq 3$;
- (5) $n-2 \leq r_2^{(q)}(n) \leq n-1$ для всех n , начиная с некоторого значения n_0 при $q \geq 2$,
 $r_2^{(1)}(n) = n-1$;
- (6) $r_k^\delta(n) = n$ при $\delta = 0$.

Теорема 2. Пусть число k , $k \geq 2$, простое, δ , $0 \leq \delta \leq 1$, — действительная константа, δ_n , $0 < \delta_n \leq 1$ — последовательность стремящихся к нулю действительных чисел, q , $q \geq 1$, — натуральное число. Тогда

- (1) $l_k^\delta(n) = 1$ при $\delta \geq (k-1)/k$;
- (2) $l_k^\delta(n) \lesssim ((k-1)/k)(1-\delta)k^n$ при $0 < \delta < (k-1)/k$ и $n \rightarrow \infty$;
- (3) $l_k^{\delta_n}(n) \sim ((k-1)/k)k^n$ при $\delta_n \geq ((k-1)/k)^n$ и $n \rightarrow \infty$;
- (4) $l_2^{(q)}(n) \sim (1/2)2^n$ при $n \rightarrow \infty$;
- (5) $l_k^\delta(n) = k^n$ при $\delta = 0$.

3. О свойствах биномиальных сумм

Вначале докажем вспомогательные леммы.

3.1. Свойства функций k -значной энтропии

Рассмотрим функцию действительного аргумента

$$H_k(x) = x \log_k \frac{1}{x} + (1-x) \log_k \frac{1}{1-x} + x \log_k(k-1)$$

на интервале $(0, 1)$. Назовем ее функцией k -значной энтропии. Исследуем ее свойства.

1. Функция $H_k(x)$ непрерывна в своей области определения.
2. Найдем ее первую производную: $(H_k(x))' = \log_k((k-1)(1-x))/x$. Отсюда получаем, что $x = (k-1)/k$ — точка максимума. Заметим, что

$$H_k((k-1)/k) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} H_k(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1} H_k(x) = \log_k(k-1).$$

Следовательно, при $x \in (0, (k-1)/k]$ функция $H_k(x)$ строго возрастает, принимая значения из полуинтервала $(0, 1]$, а при $x \in [(k-1)/k, 1)$ функция $H_k(x)$ строго убывает, принимая значения из полуинтервала $[1, \log_k(k-1))$.

3. Найдем ее вторую производную: $(H_k(x))'' = 1/(x(x-1)) \ln k$. В области определения функции $H_k(x)$ ее вторая производная отрицательна. Следовательно, функция $H_k(x)$ во всей области определения выпукла вверх.

3.2. Свойства биномиальных сумм

Лемма 1. Для всех натуральных n , $n \geq 1$, и $r \leq n$

$$\binom{n}{r} \leq \frac{n^n}{r^r (n-r)^{n-r}}$$

(для определенности полагаем, что $0^0 = 1$). При этом, если $r = \lambda n$ для некоторого λ , $0 < \lambda < 1$, то

$$\binom{n}{r} \leq (\lambda)^{-\lambda n} (1-\lambda)^{-(1-\lambda)n}.$$

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по значению n .

В качестве базиса индукции возьмем следующий случай. Заметим, что для всех $n \geq 1$ справедливы равенства $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ и утверждение леммы 1 для $r = 0$ и $r = n$ выполняется.

Проведем индуктивный переход. Пусть для всех натуральных n' , $n' < n$, и $r \leq n'$ первое утверждение леммы 1 верно. Рассматривая $\binom{n}{r}$ при $1 \leq r \leq n$, получаем, что

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! (n-r)!} = \frac{(n-1)!}{(r-1)! (n-r)!} \frac{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} \frac{n}{r}.$$

По предположению индукции

$$\binom{n-1}{r-1} \leq \frac{(n-1)^{n-1}}{(r-1)^{r-1} (n-r)^{n-r}}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \binom{n}{r} &\leq \frac{(n-1)^{n-1}}{(r-1)^{r-1} (n-r)^{n-r}} \frac{n}{r} = \frac{(n-1)^{n-1}}{(r-1)^{r-1} (n-r)^{n-r}} \frac{n^{n-1}}{n^{n-1}} \frac{r^{r-1}}{r^{r-1}} \frac{n}{r} \\ &= \frac{(1 + 1/(r-1))^{r-1}}{(1 + 1/(n-1))^{n-1}} \frac{n^n}{r^r (n-r)^{n-r}} \leq \frac{n^n}{r^r (n-r)^{n-r}}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что последовательность $(1 + 1/n)^n$ является неубывающей.

Пусть теперь $r = \lambda n$, где $0 < \lambda < 1$. Тогда

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{\lambda n} \leq \frac{n^n}{(\lambda n)^{\lambda n} ((1-\lambda)n)^{(1-\lambda)n}} = \lambda^{-\lambda n} (1-\lambda)^{-(1-\lambda)n}.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть $k \geq 2$ и $r < k - 1n/k$. Тогда

$$\sum_{i=0}^r \binom{n}{i} (k-1)^i \leq \frac{(k-1)(n-r)}{(k-1)n - kr} \binom{n}{r} (k-1)^r.$$

Если при этом $\lambda = r/n \leq \delta$ для некоторого действительного числа $\delta < (k-1)/k$, то

$$\sum_{i=0}^r \binom{n}{i} (k-1)^i \leq \frac{1}{1-k\delta/(k-1)} k^{H_k(\delta)n}.$$

Пусть $k \geq 2$ и $r > (k-1)n/k$. Тогда

$$\sum_{i=r}^n \binom{n}{i} (k-1)^i \leq \frac{r}{kr - (k-1)n} \binom{n}{r} (k-1)^r.$$

Если при этом $1 - \lambda = r/n \geq 1 - \delta$ для некоторого действительного числа $\delta < 1/k$, то

$$\sum_{i=0}^r \binom{n}{i} (k-1)^i \leq \frac{1}{1-k\delta} k^{H_k(\delta)n}.$$

Доказательство. Докажем первое утверждение. Пусть $r < (k-1)/kn$. Следуя рассуждениям из [2], подсчитаем сумму $\sum_{i=0}^r \binom{n}{i} (k-1)^i$. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^r \binom{n}{i} (k-1)^i &= \binom{n}{0} (k-1)^0 + \binom{n}{1} (k-1)^1 + \dots + \binom{n}{r} (k-1)^r \\ &= \binom{n}{r} (k-1)^r + \dots + \binom{n}{1} (k-1)^1 + \binom{n}{0} (k-1)^0 \\ &< \binom{n}{r} (k-1)^r \left(1 + \frac{r}{(n-r+1)(k-1)} + \frac{r^2}{(n-r+1)^2(k-1)^2} + \dots \right) \\ &< \binom{n}{r} (k-1)^r \left(1 + \frac{r}{(n-r)(k-1)} + \frac{r^2}{(n-r)^2(k-1)^2} + \dots \right). \end{aligned}$$

При $r < (k-1)n/k$ справедливо неравенство $r/((n-r)(k-1)) < 1$, то есть в скобках стоит сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Она равна

$$\frac{1}{1-r/((n-r)(k-1))} = \frac{(k-1)(n-r)}{(k-1)n - kr}.$$

Пусть теперь $r = \lambda n \leq \delta n$ для некоторого действительного числа $\delta < (k-1)/k$. Тогда, используя лемму 1 и свойства функции $H_k(x)$, получаем, что

$$\begin{aligned} \binom{n}{r} (k-1)^r &= \binom{n}{\lambda n} (k-1)^{\lambda n} \\ &\leq \lambda^{-\lambda n} (1-\lambda)^{-(1-\lambda)n} (k-1)^{\lambda n} = k^{H_k(\lambda)n} \leq k^{H_k(\delta)n}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^r \binom{n}{i} (k-1)^i &\leq \frac{(k-1)(n-r)}{(k-1)n - kr} \binom{n}{r} (k-1)^r \\ &= \frac{1-\lambda}{1-k\lambda/(k-1)} \binom{n}{r} (k-1)^r \leq \frac{1}{1-k\delta/(k-1)} k^{H_k(\delta)n}. \end{aligned}$$

Докажем второе утверждение леммы. Пусть $r > (k-1)n/k$. Подсчитаем сумму $\sum_{i=r}^n \binom{n}{i} (k-1)^i$. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \sum_{i=r}^n \binom{n}{i} (k-1)^i &= \binom{n}{r} (k-1)^r + \binom{n}{r+1} (k-1)^{r+1} + \dots + \binom{n}{n} (k-1)^n \\ &< \binom{n}{r} (k-1)^r \left(1 + (k-1)^{\frac{n-r}{r+1}} + (k-1)^{2\frac{n-r}{r+1}} + \dots \right) \\ &< \binom{n}{r} (k-1)^r \left(1 + (k-1)^{\frac{n-r}{r}} + (k-1)^{2\frac{n-r}{r}} + \dots \right) \\ &< \binom{n}{r} (k-1)^r \frac{1}{1 - (k-1)(n-r)/r} = \binom{n}{r} (k-1)^r \frac{r}{kr - (k-1)n}. \end{aligned}$$

Здесь было учтено, что при $r > (k-1)n/k$ справедливо неравенство $(n-r)/r < 1$ и в скобках стоит сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Пусть теперь $r = (1-\lambda)n \geq (1-\delta)n$ для некоторого действительного числа $\delta < 1/k$. Тогда, используя лемму 1 и свойства функции $H_k(x)$, получаем, что

$$\begin{aligned} \binom{n}{r} (k-1)^r &= \binom{n}{\lambda n} (k-1)^{\lambda n} \\ &\leq \lambda^{-\lambda n} (1-\lambda)^{-(1-\lambda)n} (k-1)^{\lambda n} = k^{H_k(1-\lambda)n} \leq k^{H_k(1-\delta)n}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{i=r}^n \binom{n}{i} (k-1)^i &\leq \frac{r}{kr - (k-1)n} \binom{n}{r} (k-1)^r \\ &= \frac{1-\lambda}{1-k\lambda} \binom{n}{r} (k-1)^r \leq \frac{1}{1-k\delta} k^{H_k(1-\delta)n}. \end{aligned}$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть $k \geq 2$ и $r(n)$ — последовательность натуральных чисел,

$$\lambda_n = \frac{r(n)}{n} \leq \delta < \frac{k-1}{k},$$

где δ — действительная константа. Тогда существует такая действительная константа ε , $0 < \varepsilon < 1$, что

$$\sum_{i=0}^{r(n)} \binom{n}{i} (k-1)^i \leq k^{\varepsilon n}$$

для всех n , начиная с некоторого значения n_0 .

Доказательство. По лемме 2

$$\sum_{i=0}^{r(n)} \binom{n}{i} (k-1)^i = \sum_{i=0}^{\lambda_n n} \binom{n}{i} (k-1)^i \leq \frac{1}{1-k\delta/(k-1)} k^{H_k(\delta)n}.$$

Отсюда, учитывая, что $H_k(\delta) < H_k((k-1)/k) = 1$, получаем, что существует такая действительная константа ε , $0 < \varepsilon < 1$, что

$$\sum_{i=0}^{r(n)} \binom{n}{i} (k-1)^i \leq k^{\varepsilon n}$$

для всех n , начиная с некоторого значения n_0 . Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Пусть $k \geq 2$ и $r(n)$ — последовательность натуральных чисел,

$$\lambda_n = \frac{r(n)}{n} \leq \delta_n,$$

где δ_n — последовательность стремящихся к нулю положительных действительных чисел. Тогда для любой действительной константы $\varepsilon > 0$ существует такая действительная константа ε_1 , $0 < \varepsilon_1 < 1$, что для любой последовательности $l(n)$ положительных чисел такой, что $l(n) \leq ((k-1)/k - \varepsilon)n$,

$$\sum_{i=0}^{r(n)} \binom{n}{i} (k-1)^i \sum_{j=0}^{l(n)} \binom{n}{j} (k-1)^j \leq k^{(1-\varepsilon_1)n}$$

для всех n , начиная с некоторого значения n_0 .

Доказательство. При каждом n рассмотрим произведение

$$\sum_{i=0}^{r(n)} \binom{n}{i} (k-1)^i \sum_{j=0}^{l(n)} \binom{n}{j} (k-1)^j.$$

По лемме 2 выписанное произведение не больше

$$\frac{1}{1 - k\delta_n} / (k-1) k^{H_k(\delta_n)n} \frac{1}{1 - k((k-1)/k - \varepsilon)/(k-1)} k^{H_k((k-1)/k - \varepsilon)n}$$

для всех n , начиная с некоторого значения n'_0 .

Оценим $H_k(\delta_n) + H_k((k-1)/k - \varepsilon)$. Для этого рассмотрим функцию

$$H'_k(x) = H_k(x) + H_k((k-1)/k - \varepsilon)$$

на интервале $(0, (k-1)/k)$. Найдем ее свойства. Нетрудно видеть, что

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} H'_k(x) = H_k((k-1)/k - \varepsilon) < 1,$$

$$(2) \text{ функция } H'_k(x) \text{ непрерывна на промежутке } (0, (k-1)/k).$$

Следовательно, найдется такая окрестность I справа от нуля и такое действительное число ε_2 , $0 < \varepsilon_2 < 1$, что для всех x , $x \in I$, справедливо неравенство $H'_k(x) \leq 1 - \varepsilon_2$.

Если δ_n — последовательность положительных чисел и $\delta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то для всех n , начиная с некоторого значения n''_0 , справедливо включение $\delta_n \in I$, и значит, $H'_k(\delta_n) \leq 1 - \varepsilon_2$. Другими словами

$$\sum_{i=0}^{r(n)} \binom{n}{i} (k-1)^i \sum_{j=0}^{l(n)} \binom{n}{j} (k-1)^j \leq C k^{(1-\varepsilon_2)n} \leq k^{(1-\varepsilon_1)n}$$

для некоторой константы $C > 0$, некоторого действительного числа ε_1 , $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$, и всех n , начиная с некоторого значения n_0 . Лемма 4 доказана.

4. О свойствах полиномов функций k -значных логик

Пусть X^n — множество всех мономов вида $x_{i_1}^{m_1} \dots x_{i_r}^{m_r}$, где $1 \leq m_1, \dots, m_r \leq k-1$, $1 \leq r \leq n$, $1 \in X^n$.

Будем говорить, что моном $X = x_{i_1}^{m_1} \dots x_{i_r}^{m_r}$, $X \in X^n$, и набор $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$, $\alpha \in E_k^n$, в котором $a_{i_1} = m_1, \dots, a_{i_r} = m_r$, $a_j = 0$ в остальных случаях, соответствуют друг другу. Константе 1 соответствует нулевой набор $0 = (0, \dots, 0)$. Заметим, что такое соответствие множеств X^n и E_k^n является взаимно однозначным.

Для монома X из X^n определим его тип $t(X)$ как множество индексов входящих в него переменных.

Для набора $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$ из E_k^n назовем его типом $t(\alpha)$ множество индексов его ненулевых координат, его рангом $|\alpha|$ число его ненулевых координат.

Заметим, что типы соответствующих друг другу монома и набора совпадают.

Распространим понятие типа на полиномы и множества наборов. Пусть

$$p(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^l c_i X_i$$

— полином, множеством типов его слагаемых назовем множество

$$t(p) = \bigcup_{i=1}^l t(X_i).$$

По определению положим $t(0) = \emptyset$. Пусть $E \subseteq E_k^n$, множеством типов его элементов называется множество

$$t(E) = \bigcup_{\alpha \in E} t(\alpha).$$

Лемма 5. Пусть для некоторого типа t функция $f(x_1, \dots, x_n)$ из P_k^n равна нулю на всех таких наборах α , что $t(\alpha) \subseteq t$. Тогда полином $f(x_1, \dots, x_n)$ не содержит таких слагаемых X , что $t(X) \subseteq t$.

Доказательство. Пусть $t = \{i_1, \dots, i_r\}$. Предположим противное: пусть полином $f(x_1, \dots, x_n)$ содержит такое слагаемое X , что $t(X) \subseteq t$.

Для полинома $f(x_1, \dots, x_n)$ положим $x_j = 0$ для всех $j \neq i_1, \dots, i_r$, получим некоторый полином $g(x_{i_1}, \dots, x_{i_r})$. Заметим, что g — не пустой полином, так как по меньшей мере он содержит слагаемое X . Так как каждая функция k -значной логики при простом k задается полиномом однозначно и тождественно равную нулю функцию задает пустой полином (см. [2]), функция $g(x_{i_1}, \dots, x_{i_r})$ принимает ненулевое значение хотя бы на одном наборе значений переменных. Приходим к противоречию, так как по описанию функции $f(x_1, \dots, x_n)$ получающаяся из нее функция $g(x_{i_1}, \dots, x_{i_r})$ тождественно равна нулю. Следовательно, предположение неверно и полином $f(x_1, \dots, x_n)$ не содержит таких слагаемых X , что $t(X) \subseteq t$. Лемма 5 доказана.

Следствие 1. Если функция $f(x_1, \dots, x_n)$ из P_k^n равна нулю на всех наборах ранга, не большего r , то полином $f(x_1, \dots, x_n)$ не содержит слагаемых ранга, не превосходящего r .

Пусть $E \subseteq E_k^n$. Назовем множество E стабильным, если оно обладает следующим свойством: если E содержит набор типа t , то оно содержит также все возможные наборы типа t .

Лемма 6. Пусть $E \subseteq E_k^n$, и пусть множество E стабильно. Тогда для любой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ из P_k^n найдется совпадающий с функцией $f(x_1, \dots, x_n)$ на множестве E полином $g(x_1, \dots, x_n)$, для которого $t(g) \subseteq t(E)$.

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по числу различных типов в множестве E .

Найдем базис индукции. Пусть множество E содержит наборы только одного типа t . Пусть $t = \{i_1, \dots, i_r\}$. Рассмотрим функцию

$$f'(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} f(x_1, \dots, x_n) & \text{на } E, \\ 0 & \text{на } E_k^n \setminus E. \end{cases}$$

Положив в $f'(x_1, \dots, x_n)$ равными нулю все переменные x_j при $j \neq i_1, \dots, i_r$, получим функцию $g'(x_{i_1}, \dots, x_{i_r})$. По следствию 1 полином $g'(x_{i_1}, \dots, x_{i_r})$ может содержать только слагаемые ранга r . Следовательно, $t(g') \subseteq t(E)$.

По построению значения полинома $g(x_1, \dots, x_n) = g'(x_{i_1}, \dots, x_{i_r})$ совпадают с значениями функции $f(x_1, \dots, x_n)$ на множестве E и $t(g) \subseteq t(E)$, таким образом, $g(x_1, \dots, x_n)$ — искомый полином.

Проведем индуктивный переход. Пусть для каждого стабильного подмножества E_k^n с числом различных типов τ утверждение леммы 6 верно. Рассмотрим стабильное множество E , $E \subseteq E_k^n$, в котором $\tau + 1$ различных тип. Выделим в множестве E некоторый тип t , $t = \{i_1, \dots, i_r\}$, максимальный (в частичном упорядочении множества всех подмножеств из $\{1, \dots, n\}$ по включению) среди всех типов множества E (если максимальных типов несколько, можно взять любой из них).

Разобьем множество E на две части: стабильное подмножество E_1 , содержащее наборы всех типов, кроме типа t , и стабильное подмножество E_2 , $E_2 = E \setminus E_1$.

По предположению индукции найдется полином $g_1(x_1, \dots, x_n)$, совпадающий с функцией $f(x_1, \dots, x_n)$ на множестве E_1 и для которого $t(g_1) \subseteq t(E_1)$.

Рассмотрим функцию

$$f_2(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} f(x_1, \dots, x_n) - g_1(x_1, \dots, x_n) & \text{на } E_2, \\ 0 & \text{на } E_k^n \setminus E_2. \end{cases}$$

По следствию 1 полином $f_2(x_1, \dots, x_n)$ не содержит слагаемые ранга, меньшего r . Пусть $g_2(x_1, \dots, x_n)$ — полином, получающийся из полинома $f_2(x_1, \dots, x_n)$, если оставить в нем только слагаемые типа t . Заметим, что функция $g_2(x_1, \dots, x_n)$ равна нулю на всех наборах веса меньшего r и на наборах веса, равного r , но тип которых не есть t .

Рассмотрим полином $g(x_1, \dots, x_n) = g_1(x_1, \dots, x_n) + g_2(x_1, \dots, x_n)$. Ясно, что

$$\begin{aligned} g(x_1, \dots, x_n) &= \begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n) & \text{на } E_1, \\ g_1(x_1, \dots, x_n) + g_2(x_1, \dots, x_n) & \text{на } E_2, \end{cases} \\ &= \begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n) & \text{на } E_1, \\ g_1(x_1, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_n) - g_1(x_1, \dots, x_n) & \text{на } E_2, \end{cases} \\ &= \begin{cases} f(x_1, \dots, x_n) & \text{на } E_1, \\ f(x_1, \dots, x_n) & \text{на } E_2. \end{cases} \end{aligned}$$

По построению полинома $g(x_1, \dots, x_n)$ он состоит только из слагаемых типов элементов множества E . Лемма 6 доказана.

Следствие 2. Пусть $E \subseteq E_k^n$ и множество E стабильно. Тогда для любой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ из P_k^n найдется полином $g(x_1, \dots, x_n)$, совпадающий с $f(x_1, \dots, x_n)$ на множестве E , длина которого не больше $|E|$.

Следствие 3. При $0 \leq \delta \leq 1$ и $k \geq 2$

$$l_k^\delta(n) \leq (1 - \delta)k^n + (k - 1)^n.$$

Доказательство. Выберем стабильное множество E , $E \subseteq E_k^n$, по следующим правилам:

- (1) если мы добавили некоторый набор α к множеству, то мы добавим к нему все наборы типа $t(\alpha)$;
- (2) если в множестве меньше $\lceil (1 - \delta)k^n \rceil$ наборов, то продолжаем добавлять к нему наборы.

Таким образом строим стабильное множество E , содержащее l наборов. Заметим, что $\lceil (1 - \delta)k^n \rceil \leq l \leq \lceil (1 - \delta)k^n \rceil + (k - 1)^n - 1$. По лемме 6 найдется полином $g(x_1, \dots, x_n)$, совпадающий с функцией $f(x_1, \dots, x_n)$ на множестве E , то есть функции $f(x_1, \dots, x_n)$ и $g(x_1, \dots, x_n)$ различаются не более, чем в $k^n - \lceil (1 - \delta)k^n \rceil \leq k^n - (1 - \delta)k^n \leq \delta k^n$ точках, или функция $g(x_1, \dots, x_n)$ является приближением функции $f(x_1, \dots, x_n)$ с точностью δ .

Также по следствию 2 длина полинома $g(x_1, \dots, x_n)$ не больше l , то есть не больше $\lceil (1 - \delta)k^n \rceil + (k - 1)^n - 1 \leq (1 - \delta)k^n + (k - 1)^n$. Следствие 3 доказано.

5. Доказательство основных теорем

Теперь мы можем доказать сформулированные ранее теоремы.

Доказательство теоремы 1. Докажем первое утверждение. Если $\delta \geq (k - 1)/k$, то полином с требуемым приближением можно построить следующим образом. Найдём такое значение c , что число точек, в которых функция $f(x_1, \dots, x_n)$ принимает значение c , не меньше, чем $(1/k)k^n$. Такое значение c всегда существует. Тогда приблизим функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ полиномом $g(x_1, \dots, x_n) = c$. Видно, что функция $g(x_1, \dots, x_n)$ является δ -приближением функции $f(x_1, \dots, x_n)$. Ранг полинома $g(x_1, \dots, x_n)$ равен 0. Очевидно, что полиномом меньшего ранга при приближении функций не обойтись.

Следовательно, при $\delta \geq (k - 1)/k$ справедливо равенство $r_k^\delta(n) = 0$.

Докажем второе утверждение. Пусть $0 < \delta < (k - 1)/k$. Найдём верхнюю оценку. Пусть ε — положительная константа и $r(n)$ — такая последовательность целых чисел, что $r(n) \leq ((k - 1)/k + \varepsilon)n$. Отсечём в полиноме функции $f(x_1, \dots, x_n)$ все слагаемые ранга, большего $r(n)$. Получим некоторый полином, который мы обозначим $g(x_1, \dots, x_n)$. Заметим, что функции $f(x_1, \dots, x_n)$ и $g(x_1, \dots, x_n)$ совпадают на всех наборах значений переменных, в которых не менее $(n - r(n))$ нулей. На оставшихся наборах эти функции могут отличаться. Наборов, в которых они могут отличаться, не больше, чем $\sum_{i=r(n)}^n \binom{n}{i} (k - 1)^i$. По лемме 2

$$\sum_{i=r(n)}^n \binom{n}{i} (k - 1)^i \leq \frac{1}{k\varepsilon} k^{H_k((k-1)/k-\varepsilon)n}.$$

Так как $H_k((k - 1)/k - \varepsilon) < 1$, найдётся такое значение n_0 , что для всех $n \geq n_0$ выполняется неравенство $1/(k\varepsilon)k^{H_k((k-1)/k-\varepsilon)n} \leq \delta k^n$, то есть функция $g(x_1, \dots, x_n)$ является приближением функции $f(x_1, \dots, x_n)$ с точностью δ .

Найдем нижнюю оценку. Пусть ε – положительная константа и $r(n)$ – такая последовательность целых чисел, что $r(n) \leq ((k-1)/k - \varepsilon)n$. Подсчитаем при каждом n , сколько функций можно приблизить полиномами ранга, не большего $r(n)$.

Полиномов ранга, не большего $r(n)$, не более, чем $k^{\sum_{j=0}^{r(n)} \binom{n}{j}(k-1)^j}$. Каждый из них может являться δ -приближением не более $\sum_{i=0}^{[\delta k^n]} \binom{k^n}{i}(k-1)^i$ функций, где $[\delta k^n]$ обозначает целую часть числа δk^n . Поэтому полиномами ранга, не большего $r(n)$, можно приблизить не более $k^{\sum_{j=0}^{r(n)} \binom{n}{j}(k-1)^j} \sum_{i=0}^{[\delta k^n]} \binom{k^n}{i}(k-1)^i$ функций.

По лемме 3 найдутся такие действительные константы ε_1 и ε_2 , $0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 < 1$, что

$$\sum_{j=0}^{r(n)} \binom{n}{j} (k-1)^j \leq k^{\varepsilon_1 n}, \quad \sum_{i=0}^{[\delta k^n]} \binom{k^n}{i} (k-1)^i \leq k^{\varepsilon_2 k^n}$$

для всех n , начиная с некоторого значения n_0 . Следовательно, для всех n , начиная со значения n_0 , полиномов ранга, не большего $r(n)$, не хватает для приближения всех k^{k^n} функций, то есть для любого $\varepsilon > 0$ для всех n , начиная с некоторого значения $n_0 = n_0(\varepsilon)$,

$$r_k^\delta(n) \geq ((k-1)/k - \varepsilon)n.$$

Собирая вместе верхнюю и нижнюю оценки, получаем, что $r_k^\delta(n) \sim n(k-1)/k$ при $n \rightarrow \infty$.

Докажем третье утверждение. Пусть δ_n , $0 < \delta_n \leq 1$, – стремящаяся к нулю последовательность действительных чисел и $1/k^n = \bar{o}(\delta_n)$ при $n \rightarrow \infty$.

Верхняя оценка доказывается аналогично доказательству верхней оценки в утверждении 2 теоремы 1, так как оценка

$$\frac{1}{k\varepsilon} k^{H_k((k-1)/k - \varepsilon)n} \leq \delta_n k^n$$

будет выполняться для всех n , начиная с некоторого значения n_0 , при указанных ограничениях на последовательность δ_n .

Нижняя оценка следует из предложения 1 и утверждения 2 теоремы 1, так как

$$r_k^{\delta_n}(n) \geq r_k^\delta(n) \geq ((k-1)/k - \varepsilon)n$$

для любого $\varepsilon > 0$. Поэтому $r_k^{\delta_n} \sim n(k-1)/k$ при $n \rightarrow \infty$.

Докажем четвертое утверждение. Рассмотрим функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ из P_k^n при $k \geq 3$. По предложению 1 справедливо неравенство $r_k^{(q)}(n) \leq n$. Подсчитаем, сколько функций можно приблизить полиномами ранга, не большего $n-1$. Всего таких полиномов не более $k^{k^n - (k-1)^n}$. Каждый из них может приближать не более $\sum_{i=0}^q \binom{k^n}{i} \leq qk^{qn}$ функций. Следовательно, всего полиномами ранга, не большего $n-1$, можно приблизить не больше $k^{k^n - (k-1)^n} qk^{qn}$ функций. Последнее выражение меньше k^{k^n} при $k \geq 3$ для всех n , начиная с некоторого n_0 , то есть $r_k^{(q)}(n) \geq n$ для всех n , начиная с некоторого n_0 , при $k \geq 3$. Следовательно, $r_k^{(q)}(n) = n$ для всех n , начиная с некоторого значения n_0 , при $k \geq 3$.

Докажем пятое утверждение. Рассмотрим функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ из P_2^n . Пусть полином $g(x_1, \dots, x_n)$ получен из полинома $f(x_1, \dots, x_n)$ вычеркиванием монома ранга n (если он есть). Тогда значения функций $f(x_1, \dots, x_n)$ и $g(x_1, \dots, x_n)$ отличаются не более, чем в одной точке. Следовательно, $r_2^{(q)}(n) \leq r_2^{(1)}(n) \leq n-1$.

С другой стороны, подсчитаем, сколько функций можно приблизить полиномами ранга, не большего $n - 3$. Всего таких функций не более $2^{2^n - \binom{n}{2} - n - 1}$. Каждая из них может приближать не более $\sum_{i=0}^q \binom{2^n}{i} \leq q 2^{qn}$ функций. Следовательно, всего полиномами ранга, не большего $n - 3$, можно приблизить не более $2^{2^n - n(n-1)/2 - n - 1} q 2^{qn}$ функций. Последнее выражение меньше 2^{2^n} для всех n , начиная с некоторого значения n_0 , то есть $r_2^{(q)}(n) \geq n - 2$ при $q \geq 2$.

Если $q = 1$, то подсчитаем, сколько функций можно приблизить полиномами ранга $n - 2$. Получаем, что число таких функций равно $2^{2^n - n - 1} (2^n + 1)$, то есть их меньше 2^{2^n} . Отсюда следует, что $r_2^{(1)}(n) \geq n - 1$.

Получаем, что $n - 2 \leq r_2^{(q)}(n) \leq n - 1$ для всех n , начиная с некоторого значения n_0 при $q \geq 2$, и $r_2^{(1)}(n) = n - 1$.

Наконец, докажем шестое утверждение теоремы. Если $\delta = 0$, то требуется построить полином, который не отличается от функции $f(x_1, \dots, x_n)$ ни в одной точке, а значит, единственным подходящим полиномом будет полином, задающий функцию $f(x_1, \dots, x_n)$, и $r_k^\delta(n) = n$.

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Докажем первое утверждение. Если $\delta \geq (k - 1)/k$, то полином с требуемым приближением можно построить аналогично тому, как это делалось в доказательстве утверждения 1 теоремы 1. Его длина будет равна 1. Полиномами меньшей длины не обойтись.

Следовательно, при $\delta \geq (k - 1)/k$ справедливо равенство $l_k^\delta(n) = 1$.

Докажем второе утверждение. Пусть $0 < \delta < (k - 1)/k$.

Получим верхнюю оценку. Определим множество E , $E \subseteq E_k^n$, по правилам:

- (1) множество E содержит нулевой набор, наборы, содержащие ровно $n - 1$ нулей, наборы, содержащие ровно $n - 2$ нулей, и т. д.
- (2) каждый раз будем добавлять наборы одного типа, и только если наборы этого типа заканчиваются, будем переходить к другому типу;
- (3) так будем действовать до тех пор, пока не наберем ровно $\lceil (1 - \delta)k^n \rceil + (k - 1)^n$ наборов;
- (4) для выполнения условия леммы 6, может быть, будет нужно добавить еще не более $(k - 1)^n - 1$ наборов.

Пусть $|E| = l$. Заметим, что

$$\lceil (1 - \delta)k^n \rceil + (k - 1)^n \leq l \leq \lceil (1 - \delta)k^n \rceil + 2(k - 1)^n - 1.$$

Обозначим через X , $X \subseteq X^n$, множество всех мономов, соответствующих наборам из множества E .

Рассмотрим функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ из P_k^n . Согласно лемме 6, найдется полином $g'(x_1, \dots, x_n)$, в котором не более l слагаемых, и значения функции $g'(x_1, \dots, x_n)$ совпадают со значениями функции $f(x_1, \dots, x_n)$ на множестве E .

Пусть

$$h(x) = x^{k-1} + x^{k-2} + \dots + x + 1.$$

Поскольку $h(x) = (x^k - 1)/(x - 1)$ и $x^k = x \pmod k$ при простых k , получаем, что $h(x) = 1$ при $x \neq 1$. Несложно проверить, что $h(1) = 0$.

Пусть

$$h_n(x_1, \dots, x_n) = h(x_1) \dots h(x_n).$$

Функция $h_n(x_1, \dots, x_n)$ принимает значение 1 в $(k-1)^n$ точке и значение 0 в $k^n - (k-1)^n$ точках, ее полином имеет k^n слагаемых, все коэффициенты в полиноме равны единице.

Оставим в полиноме $h_n(x_1, \dots, x_n)$ только слагаемые, являющиеся мономы из множества X . Получим новый полином $h'_n(x_1, \dots, x_n)$ с l слагаемыми.

Рассмотрим два случая.

Если в полиноме $g'(x_1, \dots, x_n)$ не более, чем $(k-1)l/k$ слагаемых, положим $g(x_1, \dots, x_n) = g'(x_1, \dots, x_n)$. Различия между значениями функций $g(x_1, \dots, x_n)$ и $f(x_1, \dots, x_n)$ могут быть не более, чем в $k^n - \lceil (1-\delta)k^n \rceil - (k-1)^n \leq \delta k^n - (k-1)^n \leq \delta k^n$ точках.

В противном случае запишем полином $g'(x_1, \dots, x_n)$ в виде

$$1 \cdot g'_1(x_1, \dots, x_n) + 2 \cdot g'_2(x_1, \dots, x_n) + \dots + (k-1) \cdot g'_{k-1}(x_1, \dots, x_n),$$

где в полиномах $g'_s(x_1, \dots, x_n)$, $s = 1, \dots, k-1$, все коэффициенты равны единице.

Выберем такое значение s , $0 \leq s \leq k-1$, что длина полинома g'_s не меньше l/k . Такое s всегда существует.

Пусть

$$g(x_1, \dots, x_n) = g'(x_1, \dots, x_n) - s h'_n(x_1, \dots, x_n).$$

При этом значения функции $g(x_1, \dots, x_n)$ на множестве E изменятся не более, чем в $(k-1)^n$ точке, то есть у функции $g(x_1, \dots, x_n)$ различия с функцией $f(x_1, \dots, x_n)$ могут быть не более, чем в $k^n - \lceil (1-\delta)k^n \rceil \leq \delta k^n$ точках. Длина полинома $g(x_1, \dots, x_n)$ не больше $(k-1)l/k$.

В обоих случаях $g(x_1, \dots, x_n)$ есть δ -приближение функции $f(x_1, \dots, x_n)$.

Длина полинома $g(x_1, \dots, x_n)$ не больше $(k-1)(\lceil (1-\delta)k^n \rceil + 2(k-1)^n - 1)/k \leq (k-1)((1-\delta)k^n + 2(k-1)^n)/k$, то есть при $n \rightarrow \infty$

$$l_k^\delta(n) \lesssim \frac{k-1}{k}(1-\delta)k^n.$$

Получим верхнюю оценку. Рассмотрим функцию $h_n(x_1, \dots, x_n)$ из P_k^n , построенную в доказательстве второго утверждения теоремы 2. Она принимает значение 1 в $(k-1)^n$ точке и ее полином содержит k^n слагаемых.

Пусть дана функция $f(x_1, \dots, x_n)$ из P_k^n . Если полином $f(x_1, \dots, x_n)$ содержит не более $((k-1)/k)k^n$ слагаемых, положим полином $g(x_1, \dots, x_n)$ равным полиному $f(x_1, \dots, x_n)$.

В противном случае пусть полином $f(x_1, \dots, x_n)$ имеет вид

$$1 \cdot f_1(x_1, \dots, x_n) + 2 \cdot f_2(x_1, \dots, x_n) + \dots + (k-1) \cdot f_{k-1}(x_1, \dots, x_n),$$

где в каждом из полиномов $f_s(x_1, \dots, x_n)$, $s = 1, \dots, k-1$, все коэффициенты равны 1.

Выберем такое значение s , $1 \leq s \leq k-1$, что длина полинома $f_s(x_1, \dots, x_n)$ не меньше $(1/k)k^n$. Такое значение s всегда существует. Положим $g(x_1, \dots, x_n)$, равным полиному $f(x_1, \dots, x_n) - s h_n(x_1, \dots, x_n)$.

В обоих случаях функция $g(x_1, \dots, x_n)$ отличается от функции $f(x_1, \dots, x_n)$ не более, чем в $(k-1)^n$ точке, что не больше $\delta_n k^n$.

Полином $g(x_1, \dots, x_n)$ содержит не более $(k - 1/k)k^n$ слагаемых. Отсюда следует, что $l_k^{\delta n}(n) \leq (k - 1/k)k^n$. Получим нижнюю оценку. Пусть $\varepsilon > 0$, $l(n)$ — положительные целые числа и $l(n) \leq ((k - 1)/k - \varepsilon)k^n$.

Подсчитаем число функций, которые можно приблизить полиномами длины, не превосходящей $l(n)$. Общее число полиномов длины, не большей $l(n)$, не превосходит $\sum_{j=0}^{l(n)} \binom{k^n}{j} (k - 1)^j$.

Для каждого n приближающие полиномы могут отличаться от приближаемых функций не более, чем в $\delta_n k^n$ точках. Тогда каждый из полиномов может быть приближением не более $\sum_{i=0}^{[\delta_n k^n]} \binom{k^n}{i} (k - 1)^i$ функций, где $[\delta k^n]$ обозначает целую часть числа δk^n . Значит, полиномами длины $l(n)$ можно приблизить не более $\sum_{i=0}^{[\delta_n k^n]} \binom{k^n}{i} (k - 1)^i \sum_{j=0}^{l(n)} \binom{k^n}{j} (k - 1)^j$ функций.

По лемме 4 для всех n , начиная с некоторого значения n_0 , выписанное произведение не больше $k^{(1-\varepsilon_1)k^n}$, где ε_1 , $0 < \varepsilon_1 < 1$, — некоторая константа, то есть полиномов длины $l(n)$ не хватает для того, чтобы приблизить все k^{k^n} функций от n переменных при $n \geq n_0$. Отсюда получаем, что $l_k^{\delta n}(n) \geq ((k - 1)/k - \varepsilon)k^n$ для любого $\varepsilon > 0$ при всех n , начиная с некоторого значения $n_0 = n_0(\varepsilon)$. Следовательно, $l_k^{\delta n}(n) \sim ((k - 1)/k)k^n$ при $n \rightarrow \infty$.

Докажем четвертое утверждение. Пусть дана функция $f(x_1, \dots, x_n)$ из P_2^n . Построим функцию $g(x_1, \dots, x_n)$ из P_2^n так же, как в доказательстве утверждения 3 теоремы 2. Она может отличаться от $f(x_1, \dots, x_n)$ только на одном наборе $(0, \dots, 0)$. Ее полином содержит не более $(1/2)2^n$ слагаемых. Значит, $l_2^{(q)}(n) \leq (1/2)2^n$.

Из предложения 1 и части 3 теоремы 2 получаем, что $l_2^{(q)}(n) \geq l_2^{\delta n}(n) \geq (1/2 - \varepsilon)2^n$ для любого $\varepsilon > 0$. Следовательно, $l_2^{(q)}(n) \sim (1/2)2^n$ при $n \rightarrow \infty$.

Наконец, докажем пятое утверждение теоремы. Если $\delta = 0$, то каждую функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ можно приблизить только задающим ее полиномом, и $l_k^{\delta}(n) = k^n$.

Теорема 2 доказана.

Автор благодарит В. Б. Алексеева за обсуждение результатов и ценные советы и замечания, которые улучшили текст статьи.

Список литературы

1. Джавадов Р. М., О сложности приближенного задания функций алгебры логики. *Докл. АН СССР* (1982) **265**, №1, 24–27.
2. Яблонский С. В., *Введение в дискретную математику*. Наука, Москва, 1986.

Статья поступила 19.01.2007.