Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Осокин, О сложности расшифровки разбиения булева куба на подкубы, *Дискрет. матем.*, 2008, том 20, выпуск 2, 46–62

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1003>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 10:06:20

О сложности расшифровки разбиения булева куба на подкубы

© 2008 г. В. В. Осокин

Рассматривается известная задача расшифровки функций алгебры логики, то есть задача восстановления значений функции на всех наборах n -мерного булева куба по известным значениям на некоторых из этих наборов. В общем случае для определения функции нужно знать ее значения на всех 2^n наборах. Но если функция принадлежит некоторому более узкому классу, чем класс всех функций алгебры логики от n переменных, то для ее определения могут потребоваться лишь значения на некотором подмножестве n -мерного булева куба. В данной работе рассматриваются классы функций, производящих разбиение n -мерного булева куба на подкубы. Получены асимптотические оценки сложности расшифровки функций из таких классов.

1. Введение

В последние годы все более актуальной становится проблема организации эффективного доступа к информации, доступной через такие источники как Интернет. Широко известные и распространенные модели информационного поиска документов, такие, как булева, векторная и вероятностная [1], уже не удовлетворяют в полной мере требованиям, предъявляемым к качеству поиска. Вызвано это, в частности, тем, что указанные модели не используют связи (так называемые тематические связи) между словами и документами, которые можно получить за счет анализа имеющегося корпуса документов. Чтобы преодолеть этот недостаток активно разрабатываются новые методы информационного поиска документов (в основном, на базе упомянутых выше моделей). К таким методам можно, например, отнести LSI [2] и PLSI [3]. Эти методы позволяют разбить множество документов на подмножества, документы в которых тематически схожи. При этом анализ релевантности документа запросу пользователя производится уже не сравнением слов, встречающихся в документе и запросе, а сравнением тем, в которых лежат документ и запрос. Это позволяет расширить и улучшить результаты поиска, в которых при таком подходе могут появиться даже релевантные документы, тематически схожие с запросом, но не содержащие слов из запроса.

То, насколько хорош тот или иной метод тематического поиска документов, можно, например, оценивать по точности, с которой он разбивает корпус документов по темам. При этом такая оценка производится в большинстве случаев чисто экспериментально, так как про реальное разбиение корпуса по темам обычно ничего не известно. Широко распространены тестовые корпуса для подобного рода экспериментов [1], подготавливаемые вручную. Понятно, что такие корпуса не могут служить основой для точных теоретических оценок. С другой стороны, для целого ряда задач информационного поиска подобные

оценки имеются [4], что стимулирует дальнейшие теоретические исследования описанной задачи.

Существуют работы, в которых понятия корпуса документов и темы вводятся математически (например, [5]) с использованием вероятностных распределений. Но результаты в данном направлении далеки от окончательных.

В настоящей работе мы не фиксируем разбиение корпуса документов по темам, но в то же время накладываем на темы некоторые (достаточно существенные) ограничения, которые позволяют точно и однозначно определять разбиение корпуса документов по темам. Это позволяет построить алгоритм, производящий разбиение корпуса документов по темам, и показать его асимптотическую неулучшаемость.

Будем считать, что имеется упорядоченное множество из n слов. Полагаем, что документ — это булев вектор длины n , на i -м месте которого стоит 1, если i -е слово есть в документе, и 0 в противном случае. Таким образом, документы можно понимать как точки n -мерного булева куба. Полагаем также, что имеется множество тем и что каждый из рассматриваемых 2^n документов принадлежит некоторой (одной) теме из этого множества. Таким образом, существует некоторая функция, сопоставляющая каждому документу номер темы, в которой он лежит, назовем эту функцию темоопределяющей (ТОФ). Предполагаем, что каждая тема задается некоторой элементарной конъюнкцией на множестве слов. Например, в теме $(\text{Вася} \wedge \overline{\text{Вова}})$ лежат все документы, где есть слово Вася и нет слова Вова, и только они. Сама ТОФ неизвестна, и, что то же самое, неизвестны слова, образующие темы (тематические слова). Но при этом полагаются известными структура и количество тем, то есть мы знаем, что есть тема $(\text{слово}_1 \wedge \overline{\text{слово}_2})$, но не знаем, что слово_1 — это Вася, а слово_2 — это Вова. Требуется определить тематические слова, и следовательно, полностью определить ТОФ.

В данной работе мы сведем эту задачу к задаче расшифровки функций из заданного класса. В нашем случае это класс функций, задающих одинаковые по структуре разбиения куба. Будем, как и в [6], предполагать, что есть некоторый оператор A_f , действующий из множества документов во множество тем, который по заданному документу выдает значение ТОФ f на этом документе (то есть тему, в которой этот документ лежит). Любый алгоритм, решающий поставленную задачу, может запрашивать значения оператора A_f на любых наборах n -мерного булева куба. Очевидно, что запросив значения A_f на всех 2^n наборах, мы полностью определим ТОФ f и, значит, решим задачу. В данной работе строится алгоритм, решающий задачу, у которого число обращений к оператору A_f асимптотически равно $k \log_2 n$, где k — число существенных переменных функции f . Кроме того, получена нижняя оценка сложности определения ТОФ, доказывающая асимптотическую оптимальность данного алгоритма.

Автор благодарен Э. Э. Гасанову за постановку задачи и помощь в работе.

2. Постановка задачи и формулировка результатов

Напомним, что k -мерным булевым кубом называется множество наборов

$$B^k = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) : \alpha_i \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, k\}.$$

Подкубом k -мерного булева куба B^k называется каждое множество вида

$$B_{\sigma_1, \dots, \sigma_s}^{k, i_1, \dots, i_s} = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in B^k : \alpha_{i_1} = \sigma_1, \dots, \alpha_{i_s} = \sigma_s\}.$$

Множество $\{i_1, \dots, i_s\}$ называется направлением, число s — рангом, а число $k - s$ — размерностью подкуба $B_{\sigma_1, \dots, \sigma_s}^{k, i_1, \dots, i_s}$.

Через x_i^σ , $i = 1, \dots, k$, $\sigma \in \{0, 1\}$, обозначим булеву функцию, принимающую значения 1 в точности на всех таких наборах $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in B^k$, что $\alpha_i = \sigma$. Далее будем также использовать обозначения $x_i^1 = x_i$, $x_i^0 = \bar{x}_i$. Тогда понятно, что элементарная конъюнкция $x_{i_1}^{\sigma_1} \dots x_{i_s}^{\sigma_s}$ принимает значение 1 в точности на подкубе $B_{\sigma_1, \dots, \sigma_s}^{k, i_1, \dots, i_s}$. Таким образом, каждому подкубу поставлена в соответствие некоторая элементарная конъюнкция.

Тематическим разбиением R булева k -мерного куба назовем произвольное упорядоченное множество подкубов этого куба такое, что

- (а) пересечение любых двух элементов R пусто;
- (б) объединение всех элементов R дает B^k ; для любой переменной x_j , $j = 1, \dots, k$, существует такой элемент множества R , что переменная x_j входит в соответствующую этому элементу элементарную конъюнкцию.

Последнее условие состоит в том, что все k переменных существенны в разбиении.

Элементы тематического разбиения R будем называть темами; k -мерный булев куб с фиксированным тематическим разбиением R назовем тематическим R -кубом.

Тематический R -куб можно описывать с помощью ДНФ, являющейся дизъюнкцией элементарных конъюнкций, соответствующих темам из R . Понятно, что эта ДНФ реализует тождественную единицу. В дальнейшем, когда это удобно, будем подразумевать под тематическим разбиением куба именно эту ДНФ. Будем также предполагать, что порядковый номер конъюнкции в ДНФ задает номер темы, и для любой темы $t \in R$ через $\mathcal{N}(t)$ обозначать номер этой темы.

Рассмотрим в качестве примера тематическое разбиение R_0

$$\underbrace{x_2 x_3}_1 \vee \underbrace{x_1 \bar{x}_3}_2 \vee \underbrace{\bar{x}_1 \bar{x}_2}_3 \vee \underbrace{x_1 \bar{x}_2 x_3}_4 \vee \underbrace{\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3}_5 \quad (1)$$

куба B^3 . В данном случае имеется 5 тем. Соответствующие подкубы B^3 выделены жирным на рис. 1.

Пусть k, n — натуральные числа, $k \leq n$, R — тематическое разбиение k -мерного куба, $\{y_1, \dots, y_n\}$ — множество булевых переменных.

Функцию $f(y_1, \dots, y_n): B^n \rightarrow \{1, 2, \dots, |R|\}$ будем называть темоопределяющей (ТОФ) над разбиением R булева k -мерного куба, если существует упорядоченное множество индексов $q_1, \dots, q_k$ такое, что

- (а) $q_j \in \{1, 2, \dots, n\}$ и $q_{j_1} \neq q_{j_2}$, если $j_1 \neq j_2$, $j, j_1, j_2 \in \{1, \dots, k\}$;
- (б) для произвольной j -й темы, $j \in \{1, 2, \dots, |R|\}$, $x_{i_1}^{\sigma_1} \dots x_{i_{t_j}}^{\sigma_{t_j}}$ разбиения R из того, что $y_{q_{i_1}} = \sigma_1, \dots, y_{q_{i_{t_j}}} = \sigma_{t_j}$ следует, что $f(y_1, \dots, y_n) = j$.

При этом множество индексов $\{q_1, \dots, q_k\}$ будем называть основанием темоопределяющей функции f , а переменные $y_{q_1}, \dots, y_{q_k}$ — тематическими переменными функции f . Положим $y_{q_1} = \Psi(x_1), \dots, y_{q_k} = \Psi(x_k)$.

Приведем пример ТОФ для разбиения R_0 , изображенного на рис. 1. Положим $n = 30$.

Рис. 1. Тематическое разбиение куба B^3

Тогда функция

$$f(y_1, \dots, y_{30}) = \begin{cases} 1 & \text{при } y_8 = 1, y_{27} = 1; \\ 2 & \text{при } y_6 = 1, y_{27} = 0; \\ 3 & \text{при } y_6 = 0, y_8 = 0; \\ 4 & \text{при } y_6 = 1, y_8 = 0, y_{27} = 1; \\ 5 & \text{при } y_6 = 0, y_8 = 1, y_{27} = 0; \end{cases} \quad (2)$$

является примером темоопределяющей функции над R_0 (здесь $q_1 = 6$, $q_2 = 8$, $q_3 = 27$ и y_6, y_8, y_{27} — тематические переменные).

Понятно, что для любой ТОФ f множество ее существенных переменных совпадает с множеством ее тематических переменных.

Через Φ_R^n обозначим множество в точности всех ТОФ от n переменных над разбиением R . Поскольку при фиксации R ТОФ однозначно определяется ее основанием, справедливо равенство $|\Phi_R^n| = A_n^k$, где k — размерность тематического R -куба, A_n^k — число размещений из n по k .

Пусть теперь задано некоторое тематическое разбиение R и задан оператор A_f , вычисляющий для произвольного набора из B^n значение некоторой ТОФ $f \in \Phi_R^n$ на этом наборе. Задача данной работы — за минимальное число обращений к оператору A_f полностью восстановить таблицу значений функции $f(y_1, \dots, y_n)$. Эту задачу назовем задачей определения ТОФ f по разбиению R и оператору A_f .

Рассмотрим множество $\mathcal{F}$ алгоритмов, решающих указанную задачу для любого разбиения $R \in \mathcal{R}_k$ и для любой ТОФ $f \in \Phi_R^n$, где $\mathcal{R}_k$ — множество всех тематических

разбиений куба B^k . На вход любого алгоритма F из этого множества подаются разбиение $R \in \mathcal{R}_k$ и оператор $\mathcal{A}_f$. На выходе F выдает таблицу значений ТОФ f или, что то же самое, номера k искомым тематических переменных. Другими словами, при фиксированном тематическом разбиении R для произвольной ТОФ $f \in \Phi_R^n$ любой алгоритм $F \in \mathcal{F}$ с помощью оператора $\mathcal{A}_f$ полностью восстанавливает таблицу значений ТОФ f . Работа алгоритма F заключается в том, что он последовательно запрашивает значения оператора $\mathcal{A}_f$ на наборах из B^n . При этом алгоритм F предполагается условным, то есть при выборе очередного набора он может пользоваться знаниями о значениях функции на ранее поданных им наборах. Любой тройке, алгоритму F , тематическому разбиению $R \in \mathcal{R}_k$ и ТОФ $f \in \Phi_R^n$, можно сопоставить число $\varphi(F, R, n, f)$, равное числу обращений к оператору $\mathcal{A}_f$ в процессе восстановления таблицы значений функции f с помощью алгоритма F . Введем обозначения

$$\begin{aligned}\varphi(F, R, n) &= \max_{f \in \Phi_R^n} \varphi(F, R, n, f), \\ \varphi(F, k, n) &= \max_{R \in \mathcal{R}_k} \varphi(F, R, n), \\ \varphi(k, n) &= \min_{F \in \mathcal{F}} \varphi(F, k, n).\end{aligned}$$

Целью настоящей работы является описание асимптотического поведения функции $\varphi(k, n)$ при $n \rightarrow \infty$.

Очевидно, что для любого разбиения R и для любой $f \in \Phi_R^n$ алгоритм, запрашивающий значения оператора $\mathcal{A}_f$ на всех 2^n наборах, позволяет полностью определить f . Отсюда следует тривиальная верхняя оценка $\varphi(k, n) \leq 2^n$.

В работе доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Если $n \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$ так, что $k \leq cn$, где $c < 1$, то*

$$\varphi(k, n) \sim k \log_2 n.$$

3. Нижняя оценка

Докажем сначала нижнюю оценку для одномерного тематического куба. Здесь существует единственное возможное разбиение куба $x_1 \vee \bar{x}_1$. Для удобства изложения будем считать в одномерном случае, что тема $\bar{x}_1$ имеет номер 0, а тема x_1 имеет номер 1. Существует n возможных ТОФ, подходящих под это разбиение. Докажем, что для любого алгоритма найдется некоторая плохая функция f из этих n , для определения которой алгоритм запросит значения оператора $\mathcal{A}_f$ минимум на $\lceil \log_2 n \rceil$ наборах.

Итак, фиксируем произвольный алгоритм G_0 . Шагом алгоритма G_0 будем считать запрос значения оператора $\mathcal{A}_f$ на некотором наборе. Пусть a_i — набор, который сгенерирован алгоритмом G_0 на i -м шаге, a_i^j — j -я компонента этого набора, $i \in \{1, 2, \dots\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$. На каждом i -м шаге будем строить множество $T_i = \{y_{j_1}, \dots, y_{j_i}\}$, $j_i \in \{1, \dots, n\}$, переменных, которые все еще могут быть тематической переменной. Для любых $j \in \{1, \dots, n\}$, $i \in \{1, 2, \dots\}$, переменная y_j лежит в множестве T_i тогда и только тогда, когда, $\mathcal{A}_f(a_s) = a_s^j$ для всех $s \in \{1, \dots, i\}$. Положим $T_0 = \{y_1, \dots, y_n\}$. Очевидно, $T_0 \supseteq T_1 \supseteq T_2 \supseteq \dots$. Очевидно также, что алгоритм G_0 решает задачу нахождения тематической переменной на s -м шаге тогда и только тогда, когда $|T_s| = 1$. Для любого

$i \in \{1, 2, \dots\}$, если $T_{i-1} = \{y_{j_1}, \dots, y_{j_{i-1}}\}$, то положим $a'_i = (a_i^{j_1}, \dots, a_i^{j_{i-1}})$ и

$$z(a_i) = \begin{cases} 0, & \text{если в наборе } a'_i \text{ нулей больше, чем единиц,} \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Построим для алгоритма G_0 необходимую функцию f . Заметим, что до тех пор, пока мы не определили тематическую переменную, значение оператора на произвольном наборе мы можем выбирать произвольным образом. На каждом i -м шаге, $i \in \{1, 2, \dots\}$, полагаем $\mathcal{A}_f(a_i) = z(a_i)$. При указанном способе выбора значений оператора $\mathcal{A}_f$ множеству T_i , $i \in \{1, 2, \dots\}$, принадлежит не менее половины переменных множества T_{i-1} . Значит, потребуется минимум $s = \lceil \log_2 n \rceil$ наборов для того, чтобы мощность множества T_s была единицей. Это и завершает доказательство.

В качестве иллюстрации сказанного приведем следующий пример:

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	
a_1	1	1	1	0	1	1	1	$\mathcal{A}_f(a_1) = 1, \quad T_1 = \{y_1, y_2, y_3, y_5, y_6, y_7\},$
a_2	0	1	0	1	1	1	0	$\mathcal{A}_f(a_2) = 1, \quad T_2 = \{y_2, y_5, y_6\},$
a_3	1	0	1	0	1	0	1	$\mathcal{A}_f(a_3) = 0, \quad T_3 = \{y_2, y_6\}.$

Здесь $n = 7$, и после подачи $\lceil \log_2 n \rceil = 3$ наборов переменные y_2 и y_6 все еще могут быть тематической переменной.

Итак, $\varphi(1, n) \geq \lceil \log_2 n \rceil$. На самом деле, как мы покажем в следующем разделе, $\varphi(1, n) = \lceil \log_2 n \rceil$. Перейдем к k -мерному случаю. В нем разбиений уже много, как и ТОФ, удовлетворяющих этим разбиениям. Поэтому при выборе самой плохой ситуации у нас есть возможность варьировать и разбиение, и функцию.

Лемма 1. *Справедливо неравенство*

$$\varphi(k, n) \geq (k - \lceil \log_2 k \rceil) \lceil \log_2(n - k + 1) \rceil.$$

Доказательство. Построим разбиение, зависящее от переменных $x_1, \dots, x_k$. Положим $m = \lceil \log_2 k \rceil$. Пусть m -мерный булев куб B^m задается переменными $x_1, \dots, x_m$. Положим $R_j = B_{\sigma_1, \dots, \sigma_m}^{m, 1, \dots, m}$, где

$$\|(\sigma_1, \dots, \sigma_m)\| = \sum_{i=1}^m 2^{m-i} \sigma_i = j.$$

Для куба B^m рассмотрим тематическое разбиение $R' = \{R_j, j = 0, 1, \dots, 2^m - 1\}$, которое состоит из 2^m тем, причем каждая тема содержит только одну вершину m -мерного куба. Рассмотрим теперь разбиение R булева k -мерного куба B^k

$$R = \{R_0^0, R_0^1, \dots, R_{k-m-1}^0, R_{k-m-1}^1, R_{k-m}, \dots, R_{2^m-1}\},$$

где для каждого $j \in \{0, 1, \dots, k - m - 1\}$ подкубы R_j^0 и R_j^1 булева k -мерного куба определяются конъюнкциями $x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m} \bar{x}_{j+m+1}$ и $x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m} x_{j+m+1}$ соответственно, где $\|(\sigma_1, \dots, \sigma_m)\| = j$, а каждый подкуб R_j , как и раньше, определяется конъюнкцией $x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m}$, где $\|(\sigma_1, \dots, \sigma_m)\| = j$, $j \in \{k - m, \dots, 2^m - 1\}$. Очевидно, что построенное разбиение R является тематическим разбиением k -мерного куба, зависящим от переменных $x_1, \dots, x_k$.

Для произвольного алгоритма G_0 построим плохую темоопределяющую функцию, то есть функцию, которую G_0 не сможет определить, запросив значения оператора $\mathcal{A}_f$

на менее чем $(k - m)] \log_2(n - k + 1)[$ наборах. Пусть $g: B^n \rightarrow \{1, \dots, |R|\}$ — некоторая функция, $C \subseteq B^n$ — некоторое подмножество n -мерного куба. Тогда положим

$$\Phi_{g,C,R}^n = \{f \in \Phi_R^n: f|_C = g|_C\},$$

где через $f|_C$ обозначено сужение функции f на множество C . Пусть также для произвольного набора $a \in B^n$ и $m \in \{1, \dots, |R|\}$

$$\Phi_{g,C,R,a,m}^n = \{f \in \Phi_{g,C,R}^n: f(a) = m\}.$$

Шагом алгоритма G_0 , как и раньше, будем считать запрос значения оператора $\mathcal{A}_f$ на некотором наборе. Пусть a_i — набор, сгенерированный алгоритмом G_0 на i -м шаге, a_i^j — j -я компонента этого набора, $i \in \{1, 2, \dots\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$. По аналогии с одномерным случаем введем множество $T_{i,j} \in \{y_1, \dots, y_n\}$ переменных, которые могут быть переменной x_j после i -го шага алгоритма G_0 . Положим $T_{0,j} = \{y_1, \dots, y_n\}$. Очевидно, что алгоритм G_0 решает задачу нахождения тематических переменных на s -м шаге тогда и только тогда, когда $|T_{s,j}| = 1$ для любого $j \in \{1, \dots, k\}$. Для любых $i \in \{1, 2, \dots\}$, $j \in \{1, \dots, k\}$, если $T_{i-1,j} = \{y_{j_1}, \dots, y_{j_{i-1}}\}$, то положим $a'_{i,j} = (a_i^{j_1}, \dots, a_i^{j_{i-1}})$ и

$$z^j(a_i) = \begin{cases} 0, & \text{если в наборе } a'_{i,j} \text{ нулей больше, чем единиц,} \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть $C_{l-1} = \{a_1, \dots, a_{l-1}\}$ — упорядоченное множество наборов, поданных алгоритмом G_0 за первые $l - 1$ шагов. Предположим, что мы уже задали значения $\mathcal{A}_f$ на этих $l - 1$ наборах. Рассмотрим функцию $g: C_{l-1} \rightarrow \{1, \dots, |R|\}$ такую, что $g(a_i) = \mathcal{A}_f(a_i)$, $i = 1, \dots, l - 1$. Пусть a_l — набор, поданный алгоритмом G_0 на l -м шаге. Значение $\mathcal{A}_f(a_l)$ выберем следующим образом. Если существует такой номер $j \in \{k - m, \dots, 2^m - 1\}$, что $\Phi_{g,C,R,a_l,\mathcal{N}(R_j)}^n \neq \emptyset$, то полагаем $\mathcal{A}_f(a_l) = \mathcal{N}(R_j)$. В противном случае обязательно существует такой номер $j \in \{0, 1, \dots, k - m - 1\}$, что $\Phi_{g,C,R,a_l,\mathcal{N}(R_j^0)}^n \neq \emptyset$ (отсюда, очевидно, и $\Phi_{g,C,R,a_l,\mathcal{N}(R_j^1)}^n \neq \emptyset$). Тогда полагаем

$$\mathcal{A}_f(a_l) = \begin{cases} \mathcal{N}(R_j^0), & \text{если } z^{j+m+1}(a_l) = 0, \\ \mathcal{N}(R_j^1), & \text{если } z^{j+m+1}(a_l) = 1. \end{cases}$$

Рассмотрим на некотором l -м шаге алгоритма G_0 для фиксированного номера $j \in \{0, 1, \dots, k - m - 1\}$ все наборы $a_{i_1}, \dots, a_{i_s}$, $i_s \in \{1, \dots, l\}$, лежащие либо в теме R_j^0 , либо в теме R_j^1 (в том же порядке, в котором их генерировал алгоритм). Тогда при указанном выше способе выбора значений оператора $\mathcal{A}_f$ множеству $T_{i_r,j+m+1}$, $r \in \{1, \dots, s\}$, принадлежит не менее половины переменных множества $T_{i_{r-1},j+m+1}$. Значит, для определения переменной x_{j+m+1} алгоритм G_0 сгенерирует в худшем случае минимум $\lceil \log_2(n - k + 1) \rceil$ наборов, лежащих в одной из тем R_j^0 или R_j^1 (так как ни в одной другой теме переменная x_{j+m+1} не встречается). Отсюда, для определения всех переменных x_{j+m+1} , $j \in \{0, 1, \dots, k - m - 1\}$, потребуется не менее $(k - m)] \log_2(n - k + 1)[$ наборов, что и завершает доказательство в многомерном случае.

4. Верхняя оценка

Снова начнем с одномерного случая. Напомним, что в одномерном случае существует единственное возможное тематическое разбиение R одномерного булева куба $x_1 \vee \bar{x}_1$ и n

возможных ТОФ, подходящих под это разбиение (то есть $|\Phi_R^n| = n$). Построим алгоритм, определяющий любую из этих n функций за $\lceil \log_2 n \rceil$ запросов значений соответствующего оператора.

Упорядоченное множество наборов A из B^n назовем правильным, если в матрице, строками которой являются эти наборы, все n столбцов различны. Эту матрицу также будем обозначать A . Очевидно, существует правильное множество мощности $\lceil \log_2 n \rceil$, так как существует $2^{\lceil \log_2 n \rceil} \geq n$ различных столбцов длины $\lceil \log_2 n \rceil$. Через F_A обозначим алгоритм, который последовательно запрашивает значения оператора $\mathcal{A}_f$ на всех строках $\{a_1, \dots, a_{|A|}\}$ матрицы A .

Лемма 2. Если R — тематическое разбиение одномерного куба, то для любой функции $f \in \Phi_R^n$ и для любого правильного множества A мощности $\lceil \log_2 n \rceil$ справедливо неравенство

$$\varphi(F_A, R, n, f) \leq \lceil \log_2 n \rceil.$$

Доказательство. Пусть $c = (c_1, \dots, c_{\lceil \log_2 n \rceil})$, где

$$c_s = \begin{cases} 0, & \text{если } \mathcal{A}_f(a_s) = \mathcal{N}(\bar{x}_1), \\ 1, & \text{если } \mathcal{A}_f(a_s) = \mathcal{N}(x_1), \end{cases}$$

$s \in \{1, \dots, \lceil \log_2 n \rceil\}$. Так как искомая тематическая переменная существует, в матрице, образованной наборами множества A , найдется столбец $b_l = c$, $l \in \{1, \dots, n\}$. По определению правильного множества такой столбец единствен. Легко видеть, что переменная u_l и является искомой тематической.

Для 7 переменных правильное множество может выглядеть, например, следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В силу произвольности f из леммы 1 следует неравенство $\varphi(1, n) \leq \lceil \log_2 n \rceil$. Итак, для одномерного случая справедлива точная оценка $\varphi(1, n) = \lceil \log_2 n \rceil$.

Перейдем к k -мерному случаю. Напомним, что фиксирован некоторый k -мерный тематический R -куб, где элементы R — элементарные конъюнкции (темы) вида $x_{i_1}^{\sigma_1} \dots x_{i_{t_j}}^{\sigma_{t_j}}$, $t_j < k$, $j \in \{1, \dots, |R|\}$. Назовем тему тематического разбиения крайней, если все переменные входят в нее без отрицаний, либо все переменные входят в нее с отрицаниями. Очевидно, в любом тематическом разбиении существуют ровно 2 крайних темы.

Рассмотрим ДНФ, описывающую тематическое разбиение R булева k -мерного куба от переменных $x_1, \dots, x_k$. Положим $x_{i_1} = 0, \dots, x_{i_l} = 0$, $x_{j_1} = 1, \dots, x_{j_r} = 1$, $\{i_1, \dots, i_l\} \cap \{j_1, \dots, j_r\} = \emptyset$, $l, r \in \{1, \dots, k\}$, $l + r < k$. Упростим имеющуюся ДНФ, воспользовавшись тождествами $x \cdot 1 = x$, $x \cdot 0 = 0$. В результате получим ДНФ, описывающую некоторое новое тематическое разбиение R' куба, размерность которого не превышает $k - (l + r)$. Будем называть разбиение R' разбиением, полученным из R фиксацией переменных $x_{i_1}, \dots, x_{i_l}$ нулями и переменных $x_{j_1}, \dots, x_{j_r}$ единицами.

Далее для фиксированного разбиения R и ТОФ f под значением оператора $\mathcal{A}_f$ на некотором наборе будем понимать не номер элементарной конъюнкции, задающей тему, в которой этот набор лежит, а саму элементарную конъюнкцию. Пусть теперь вместо R мы имеем разбиение R' , полученное из R фиксацией переменных $x_{i_1}, \dots, x_{i_l}$ нулями

и переменных $x_{j_1}, \dots, x_{j_r}$ единицами. Тогда для произвольного набора a преобразуем конъюнкцию $\mathcal{A}_f(a)$, фиксируя $x_{i_1}, \dots, x_{i_l}$ нулями и $x_{j_1}, \dots, x_{j_r}$ единицами. Если из контекста ясно, о каком разбиении идет речь, то эту конъюнкцию будем также обозначать $\mathcal{A}_f(a)$.

Пусть $a = (a_1, \dots, a_n)$ — некоторый набор из B^n , M — некоторое множество номеров, не превосходящих n . Рассмотрим набор $b = (b_1, \dots, b_n) \in B^n$ такой, что

$$b_i = \begin{cases} a_i, & i \in M, \\ \bar{a}_i, & i \notin M, \end{cases}$$

$i \in \{1, \dots, n\}$. Будем обозначать набор b через $\neg^M(a)$.

Опишем алгоритм F_0 такой, что для любых $R \in \mathcal{R}_k$, $f \in \Phi_R^n$ справедливо неравенство

$$\varphi(F_0, R, n, f) \leq 2k \log_2 n + k.$$

Рассмотрим некоторую матрицу A . Считаем, что ее строки и столбцы можно помечать, пусть m_1 — массив номеров помеченных строк, m_2 — массив номеров помеченных столбцов. Через $\mathcal{J} = (\mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_k)$ обозначим вектор длины k такой, что

$$\mathcal{J}_j = \begin{cases} l, & \text{если } \Psi(x_j) = y_l, \\ *, & \text{если значение } \Psi(x_j) \text{ неизвестно,} \end{cases}$$

$j \in \{1, \dots, k\}$, $l \in \{1, \dots, n\}$. Вектор $\mathcal{J}$ назовем ответом. Будем называть переменную x_j , $j \in \{1, \dots, k\}$, найденной, если $\mathcal{J}_j \neq *$.

В основе алгоритма F_0 лежит рекурсивная процедура $\text{TSEARCH}(A, R, m_1, m_2)$. Опишем ее работу. Последовательно вычисляем значения оператора $\mathcal{A}_f$ на непомеченных строках матрицы A (пусть это строки $a_1, \dots, a_d$). Возможны 2 случая.

1. Мы находим строку a_i , $i \in \{a_1, \dots, a_d\}$: $\mathcal{A}_f(a_i)$ — некрайняя тема. Назовем a_i разделяющим набором, а $\mathcal{A}_f(a_i)$ — разделяющей темой, пусть эта тема задается конъюнкцией $x_{i_1} \dots x_{i_r} \bar{x}_{i_{r+1}} \dots \bar{x}_{i_t}$.

Рассмотрим все столбцы $b_{i_1}, \dots, b_{i_s}$ матрицы A , пересечения которых со строкой a_i — нули. Определим новую матрицу $A' = (b'_1, \dots, b'_n)$, где для $j \in \{1, \dots, n\}$

$$\begin{cases} b'_j = b_j, & \text{если } j \neq i_1, \dots, i_s, \\ b'_j \text{ — нулевой столбец} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пометим строку a'_i , положив $m'_1 = m_1 \cup \{i\}$, и столбцы $b'_{i_1}, \dots, b'_{i_s}$, положив $m'_2 = m_2 \cup \{i_1, \dots, i_s\}$. Рассмотрим разбиение R' , полученное из R фиксацией переменных $x_{i_{r+1}}, \dots, x_{i_t}$ нулями. Вызываем процедуру $\text{TSEARCH}(A', R', m'_1, m'_2)$.

Теперь рассмотрим все столбцы $b_{l_1}, \dots, b_{l_h}$, $h \in \{1, \dots, n\}$, матрицы A , пересечения которых со строкой a_i — единицы. Определим новую матрицу $A'' = (b''_1, \dots, b''_n)$, где для $j \in \{1, \dots, n\}$

$$\begin{cases} b''_j = b_j, & \text{если } j \neq l_1, \dots, l_h, \\ b''_j \text{ — единичный столбец} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пометим строку a''_i , положив $m''_1 = m_1 \cup \{i\}$, и столбцы $b''_{l_1}, \dots, b''_{l_h}$, положив $m''_2 = m_2 \cup \{l_1, \dots, l_h\}$. Рассмотрим разбиение R'' , полученное из разбиения R фиксацией переменных $x_{i_1}, \dots, x_{i_r}$ единицами. Полученное разбиение обозначим R'' . Вызываем процедуру $\text{TSEARCH}(A'', R'', m''_1, m''_2)$.

2. Для любого $i \in \{1, \dots, d\}$ тема $\mathcal{A}_f(a_i)$ — одна из двух крайних тем. Считаем, что среди непомеченных строк матрицы A есть и лежащие в отрицательной крайней теме, и в положительной. Иначе полагаем $a_1 = -^{m_2}(a_1)$, вычисляем $\mathcal{A}_f(a_1)$. При этом строка a_1 уже не обязана лежать в крайней теме. Берем первую переменную x_j , $j \in \{1, \dots, k\}$, которая входит во все темы $\mathcal{A}_f(a_i)$, $i \in \{1, \dots, d\}$. Если такой переменной не существует, то выдаем ошибку и заканчиваем работу. Пусть $c = (c_1, \dots, c_d)$, где

$$c_s = \begin{cases} 0, & \text{если в } \mathcal{A}_f(a_s) \text{ } x_j \text{ входит с отрицанием,} \\ 1, & \text{если в } \mathcal{A}_f(a_s) \text{ } x_j \text{ входит без отрицания,} \end{cases}$$

$s \in \{1, \dots, d\}$. Среди непомеченных столбцов матрицы, образованной строками $a_1, \dots, a_d$ находим столбец $b_l = c$, $l \in \{1, \dots, n\}$. Переменная y_l является тематической. Помещаем ее в ответ, полагая $\mathcal{J}_j = l$.

Собственно алгоритм F_0 выглядит следующим образом.

- (1) Устанавливаем $\mathcal{J} = (*, \dots, *)$, $R' = R$, $n' = n$. Пусть A — матрица $\lceil \log_2 n \rceil \times n$, соответствующая произвольному правильному множеству. Полагаем $A' = A$.
- (2) Вызываем процедуру $\text{TSEARCH}(A', R', \emptyset, \emptyset)$.
- (3) Если в векторе ответа $\mathcal{J}$ все компоненты не равны $*$, то есть определились, то алгоритм F_0 завершает работу.
- (4) Фиксируем найденные переменные таким образом, чтобы разбиение R' , полученное из R операцией фиксации этих переменных, зависело хотя бы от одной переменной. Такая фиксация обязательно существует.
- (5) Пусть $Q = \{q_{i_1}, \dots, q_{i_l}\}$, $l < k$, — множество номеров всех найденных тематических переменных. Положим $n' = n - l$. Фиксируем произвольное правильное множество с матрицей A' размера $\lceil \log_2 n' \rceil \times n'$. Нумеруем ее столбцы числами из множества $\{1, \dots, n\} \setminus Q$. Пусть матрица A'' получена из матрицы A' добавлением l столбцов, имеющих в матрице A'' номера $q_{i_1}, \dots, q_{i_l}$. При этом столбец матрицы A'' с номером q_{i_p} , $p \in \{1, \dots, l\}$, — единичный, если переменная x_{i_p} фиксирована единицей, и нулевой, если x_{i_p} фиксирована нулем. Под значением оператора $\mathcal{A}_f$ на некоторой строке матрицы A' будем понимать значение $\mathcal{A}_f$ на строке матрицы A'' с тем же номером.
- (6) Идем на шаг 2.

Итак, алгоритм F_0 есть, по сути, некоторое конечное число вызовов процедуры TSEARCH . Согласно приведенному выше описанию этой функции, при фиксированных n , $R \in \mathcal{R}_k^n$, $f \in \Phi_R^n$ и правильном множестве A работу процедуры $\text{TSEARCH}(A, R, \emptyset, \emptyset)$ можно описывать бинарным деревом $\mathcal{D}_{n,R,f,A}$. В каждой неконцевой вершине этого дерева запрашиваются значения оператора $\mathcal{A}_f$ на строках некоторой матрицы до тех пор, пока не найден разделяющий набор, лежащий в некрайней разделяющей теме. Затем в зависимости от фиксации переменных разделяющей темы нулями или единицами происходит переход по нулю к левому потомку рассматриваемой вершины и по единице к правому потомку соответственно. На нулевом уровне (в корне дерева $\mathcal{D}_{n,R,f,A}$) запрашивается исходная матрица A . Матрицу, запрошенную в некоторой вершине v i -го уровня дерева $\mathcal{D}_{n,R,f,A}$, обозначим через $A^{\sigma_1, \dots, \sigma_i}$, если для любого j , $j \in \{0, 1, \dots, i-1\}$, в вершине w j -го уровня, потомком которой является вершина v , происходит переход по σ_j к прямому

потомку w' , причем v является потомком w' . В дальнейшем вершину v будем обозначать $v^{\sigma_1, \dots, \sigma_i}$, тематическое разбиение, заданное в вершине v , будем обозначать $R^{\sigma_1, \dots, \sigma_i}$, а число переменных, от которых зависит $R^{\sigma_1, \dots, \sigma_i}$, равно $k^{\sigma_1, \dots, \sigma_i}$.

Перед тем, как перейти к проверке корректности работы алгоритма, приведем пример его работы на разбиении R_0 , изображенном на рис. 1 и задаваемом соотношением (1). Пусть $n = 30$, и пусть оператор $\mathcal{A}_f$ выдает по набору из B^{30} значение ТОФ, определяемой соотношением (2). При этом, естественно, ТОФ f алгоритм F_0 не знает. Задача алгоритма F_0 как раз и состоит в определении f по заданному тематическому разбиению R_0 и значениям оператора $\mathcal{A}_f$ на наборах из B^{30} .

Рассмотрим множество наборов, значения оператора $\mathcal{A}_f$ на которых запрашивает алгоритм F_0 для определения ТОФ $f(x_1, \dots, x_{30})$:

A Исходное разбиение $x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3$

2 2

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 $\in \bar{x}_1\bar{x}_2$

0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 $\in \bar{x}_1\bar{x}_2$

0 0 0 0 1 1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1 $\in x_1\bar{x}_3$

A^0 Фиксируем x_3 нулем, получаем разбиение $x_1 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_2$

0 0 0 0 2 2 2 2 0 0 0 0 2 2 2 2 0 0 0 0 2 2 2 2 0 0 0 0 2 2 2 2

0 1 1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1 $\in \bar{x}_1\bar{x}_2$

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 $\in \bar{x}_1\bar{x}_2$

0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 $\in \bar{x}_1x_2$

A^{00} Фиксируем x_1 нулем, получаем разбиение $\bar{x}_2 \vee x_2$

0 0 0 0 0 0 2 2 0 0 0 0 0 0 2 2 0 0 0 0 0 2 2 2 0 0 0 0 0 0 2 2

0 1 1 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 $\in \bar{x}_2$

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 $\in \bar{x}_2$

0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 $\in x_2$

Очевидно, подходит только 8-й столбец $\Rightarrow \Psi(x_2) = y_8$

A^{01} Фиксируем x_2 единицей, получаем разбиение $x_1 \vee \bar{x}_1$

0 0 0 0 2 2 1 1 0 0 0 0 2 2 1 0 0 0 0 2 2 1 1 0 0 0 0 2 2 1 1

0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1 $\in \bar{x}_1$

0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1 $\in \bar{x}_1$

0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 1 1 1 1 $\in x_1$

Очевидно, подходит только 6-й столбец $\Rightarrow \Psi(x_1) = y_6$

A^1 Фиксируем x_1 единицей, получаем разбиение $x_2x_3 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2x_3$ (переменная x_2 стала константой 1)

2 2 2 2 1 1 1 1 2 2 2 2 1 1 1 2 2 2 2 1 1 1 1 2 2 2 2 1 1 1

0 0 0 0 1 1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 $\in x_2x_3$

0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 $\in x_2x_3$

0 0 1 1 1 1 1 1 0 0 1 1 1 1 1 0 0 1 1 1 1 1 1 1 0 0 1 1 1 1 1 1 $\in x_2x_3$

0 1 0 1 1 1 1 1 0 1 0 1 1 1 1 0 1 0 1 1 1 1 1 1 0 1 0 1 1 1 1 1 $\in x_2x_3$

Очевидно, подходит только 27-й столбец $\Rightarrow \Psi(x_2) = y_{27}$, или $\Psi(x_3) = y_{27} \Rightarrow$ согласно алгоритму, обращаем первый набор, получаем новую матрицу A^1 :

2 2 2 2 1 1 1 1 2 2 2 2 1 1 1 2 2 2 2 1 1 1 1 2 2 2 2 1 1 1

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1 $\in \bar{x}_3$

A^1 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 $\in x_2x_3$

0 0 1 1 1 1 1 1 0 0 1 1 1 1 1 0 0 1 1 1 1 1 1 0 0 1 1 1 1 1 1 1 $\in x_2x_3$

0 1 0 1 1 1 1 1 0 1 0 1 1 1 1 0 1 0 1 1 1 1 1 1 0 1 0 1 1 1 1 1 $\in x_2x_3$

Рис. 2. Дерево $\mathcal{D}_{30, R_0, f, A}$

Теперь очевидно, что именно $\Psi(x_3) = y_{27}$.

Здесь каждому набору приписана тема, в которой он лежит (или, что то же, значение оператора $\mathcal{A}_f$ на этом наборе). Каждая таблица начинается с вспомогательного набора длины 30, элементы которого принимают значения из $\{0, 1, 2\}$: i -й элемент этого набора равен 0, если y_i фиксирована на данном этапе нулем, равен 1, если y_i фиксирована единицей и равен 2, если y_i пока не фиксирована (в терминах, использованных при описании алгоритма, столбцу соответствует цифра 2, если он не является помеченным). Остальные наборы каждой таблицы являются строками текущей матрицы A (в зависимости от шага алгоритма, они названы A , A^0 , A^1 , A^{00} , A^{01}). Для удобства восприятия из таблиц убраны все незначимые наборы матрицы A , а именно, помеченные наборы и наборы, идущие в матрице A после разделяющего набора. Бинарное дерево $\mathcal{D}_{30, R_0, f, A}$ изображено на рис. 2.

Из значений оператора $\mathcal{A}_f$ на наборах матриц A^{00} , A^{01} и A^1 очевидно получаем, что $q_2 = 8$, $q_1 = 6$, $q_3 = 27$, таким образом, алгоритм F_0 правильно определяет ТОФ f .

Для произвольной темы $x_{i_1} \dots x_{i_s} \bar{x}_{i_{s+1}} \dots \bar{x}_{i_{t_j}}$ определим ее отрицательную часть $\bar{x}_{i_{s+1}} \dots \bar{x}_{i_{t_j}}$ и положительную часть $x_{i_1} \dots x_{i_s}$.

Назовем тему допустимой, если она не противоречит текущей фиксации тематических переменных. Более формально: пусть $\Psi(x_1) = y_{q_1}, \dots, \Psi(x_k) = y_{q_k}$, то есть переменные $y_{q_1}, \dots, y_{q_k}$ являются тематическими. Рассмотрим номера $q_{i_1}, \dots, q_{i_s}$, $i_s \in \{1, \dots, k\}$, такие, что $\{q_{i_1}, \dots, q_{i_s}\}$ является подмножеством множества m_2 номеров всех помеченных на данном этапе столбцов. Это значит, что каждая из переменных $y_{q_{i_1}}, \dots, y_{q_{i_s}}$ фиксирована на этом этапе либо нулем, либо единицей, пусть $y_{q_{i_1}} = \sigma_1, \dots, y_{q_{i_s}} = \sigma_s$, $\sigma_j \in \{0, 1\}$, $j \in \{1, \dots, s\}$. Тогда допустимыми назовем те и только те темы текущего тематического разбиения, в конъюнкции которых не входят $x_{i_1}^{\sigma_1 \oplus 1}, \dots, x_{i_s}^{\sigma_s \oplus 1}$. В частности, в рассмотренном выше примере на этапе A^1 темы $x_2 x_3$ и $\bar{x}_3$ являются допустимыми, тема $\bar{x}_2 x_3$ не является допустимой, так как переменная $y_8 = \Psi(x_2)$ фиксирована единицей. Естественно, алгоритм F_0 не знает, какие темы текущего тематического разбиения являются допустимыми (так как не знает, какие переменные являются тематическими), но при этом никакой набор, сгенерированный алгоритмом, не может лежать в теме, не являющейся допустимой.

Если тематическое разбиение $R \in \mathcal{R}_{k'}$ зависит от переменной x_j , $j \in \{1, \dots, k'\}$ (переменная x_j входит в соответствующую ДНФ), но при этом столбец текущей матрицы с номером q_j , где $y_{q_j} = \Psi(x_j)$, является помеченным, то переменную x_j назовем фиктивной переменной разбиения R . В противном случае будем называть переменную x_j существенной. В частности, переменная x_2 разбиения $x_2 x_3 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 x_3$ из примера выше является фиктивной, так как $y_8 = \Psi(x_2)$, а столбец номер 8 является помеченным. При

этом переменная x_3 является существенной.

Покажем, что алгоритм F_0 работает корректно. В силу того, что алгоритм F_0 есть последовательность вызовов процедуры TSEARCH, мы остановимся на проверке корректности работы именно этой функции. Пусть фиксированы n , $R \in \mathcal{R}_{k'}$, $f \in \Phi_R^n$. Рассмотрим дерево $\mathcal{D}_{n,R,f,A}$.

Лемма 3. Для любой вершины $v^{\sigma_1, \dots, \sigma_i}$ дерева $\mathcal{D}_{n,R,f,A}$ матрица $A_e^{\sigma_1, \dots, \sigma_i}$, полученная из $A^{\sigma_1, \dots, \sigma_i}$ вычеркиванием помеченных строк и столбцов, образует правильное множество наборов.

Доказательство. Покажем это индукцией по номеру уровня дерева $\mathcal{D}_{n,R,f,A}$. На первом уровне существует единственная вершина v , приписанная ей матрица A по построению образует правильное множество наборов. Пусть $v^{\sigma_1, \dots, \sigma_i}$ — некоторая вершина i -го уровня. Пусть r — номер разделяющей строки матрицы $A^{\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}}$. Значит, в матрице $A^{\sigma_1, \dots, \sigma_i}$ строка с номером r является помеченной. Легко видеть, что непомеченные столбцы матрицы $A^{\sigma_1, \dots, \sigma_i}$ пересекают r -ю строку либо все по нулям, либо все по единицам. Значит, если в матрице $A_e^{\sigma_1, \dots, \sigma_i}$ есть 2 равных столбца, то столбцы с такими же номерами равны и в матрице $A_e^{\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}}$, что противоречит предположению индукции.

Лемма 4. Для любой допустимой темы разбиения $R^{\sigma_1, \dots, \sigma_i}$

- (а) среди переменных отрицательной части (если таковые имеются) существует по крайней мере одна существенная;
- (б) среди переменных положительной части (если таковые имеются) существует по крайней мере одна существенная.

Доказательство. Проведем доказательство от противного. Без ограничения общности считаем, что в разбиении $R^{\sigma_1, \dots, \sigma_i}$ имеется допустимая тема, отрицательная часть которой не содержит существенных переменных (хотя бы одну фиктивную переменную она при этом содержит). Предположим также, что ни одно из разбиений R , R^{σ_1} , R^{σ_1, σ_2} , $\dots$, $R^{\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}}$ таким свойством не обладает. Итак, имеется тема

$$x_1 \dots x_s c_1^l \dots c_{i_l}^l d_1^l \dots d_{j_l}^l \overline{c_1^r} \dots \overline{c_{i_r}^r} \overline{d_1^r} \dots \overline{d_{j_r}^r}, \quad (3)$$

где $x_1, \dots, x_s$ — существенные переменные разбиения $R^{\sigma_1, \dots, \sigma_i}$, $c_1^l, \dots, c_{i_l}^l, c_1^r, \dots, c_{i_r}^r$ — переменные, являющиеся существенными переменными разбиения $R^{\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}}$ и фиктивными переменными разбиения $R^{\sigma_1, \dots, \sigma_i}$, $d_1^l, \dots, d_{j_l}^l, d_1^r, \dots, d_{j_r}^r$ — фиктивные переменные разбиения $R^{\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}}$.

Рассмотрим 2 случая.

- (а) Пусть $\sigma_i = 0$. Тогда тема (3) на самом деле имеет вид

$$x_1 \dots x_s d_1^l \dots d_{j_l}^l \overline{c_1^r} \dots \overline{c_{i_r}^r} \overline{d_1^r} \dots \overline{d_{j_r}^r}. \quad (4)$$

Рассмотрим тему разбиения $R^{\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}}$, из которой получилась данная. Это, очевидно,

$$x_1 \dots x_s d_1^l \dots d_{j_l}^l \overline{y_1}, \dots, \overline{y_q} \overline{c_1^r} \dots \overline{c_{i_r}^r} \overline{d_1^r} \dots \overline{d_{j_r}^r}. \quad (5)$$

Как известно, эта тема должна содержать в себе отрицание некоторой переменной, входящей в разделяющую тему разбиения $R^{\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}}$, так как эта тема и разделяющая тема — две элементарные конъюнкции одной ДНФ.

Разберем следующие 4 случая.

- (1) Эта переменная — какая-то из $d_1^l, \dots, d_{j_l}^l, d_1^r, \dots, d_{j_r}^r$. Но это невозможно, так как эти переменные были константами и для разделяющей темы (теми же), и значит, не могут входить в 2 рассматриваемые темы по-разному.
- (2) Эта переменная — какая-то из $c_1^r, \dots, c_{i_r}^r$. Это тоже невозможно, так как эти переменные только что стали константами. А переменная может стать константой, только если она не входила в разделяющую тему.
- (3) Эта переменная — какая-то из $y_1, \dots, y_q$. Это невозможно, так как тема (4) получена из (5), и значит, все эти переменные абсолютно так же входят в разделяющую тему, как они входят в (5).
- (4) Эта переменная — какая-то из $x_1, \dots, x_s$. Пусть она входит в разделяющую тему с отрицанием. Но тогда она не может входить в тему (4), так как была фиксирована нулем.

Получили противоречие.

- (б) Пусть $\sigma_i = 1$. Значит, имеется тема $x_1 \dots x_s c_1^l \dots c_{i_l}^l d_1^l \dots d_{j_l}^l \overline{d_1^r} \dots \overline{d_{j_r}^r}$, которая получалась из темы $x_1 \dots x_s x_{s+1} \dots x_s c_1^l \dots c_{i_l}^l d_1^l \dots d_{j_l}^l \overline{d_1^r} \dots \overline{d_{j_r}^r}$. Последняя тема, очевидно, является допустимой темой разбиения $R^{\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}}$, что противоречит предположению.

Рассмотрим произвольную концевую вершину $v^{\sigma_1, \dots, \sigma_i}$ дерева $\mathcal{D}_{n, R, f, A}$ (пусть она принадлежит i -му уровню). Пусть $\{a_1, \dots, a_d\}$ — непомеченные наборы матрицы $A^{\sigma_1, \dots, \sigma_i}$. Здесь существует 3 варианта:

- (а) все темы $\mathcal{A}_f(a_1), \dots, \mathcal{A}_f(a_d)$ крайние, причем существует номер i_1 такой, что $\mathcal{A}_f(a_{i_1})$ — отрицательная крайняя тема, и номер i_2 такой, что $\mathcal{A}_f(a_{i_2})$ — положительная крайняя тема, $i_1, i_2 \in \{1, \dots, d\}$;
- (б) все темы $\mathcal{A}_f(a_2), \dots, \mathcal{A}_f(a_d)$ — одна и та же крайняя тема, а тема $\mathcal{A}_f(a_1)$ не является крайней;
- (в) все темы $\mathcal{A}_f(a_1), \dots, \mathcal{A}_f(a_d)$ — одна и та же крайняя тема.

В случае (в) тема $\mathcal{A}_f(a_1)$ допустимая, причем $\mathcal{A}_f(a_1) = \mathcal{A}_f(\neg^{m_2}(a_1))$. Таким образом, все переменные, входящие в тему $\mathcal{A}_f(a_1)$, являются фиктивными. Это противоречит утверждению леммы 4, и значит, случай (в) невозможен.

Лемма 5. Для любой концевой вершины $v^{\sigma_1, \dots, \sigma_i}$ дерева $\mathcal{D}_{n, R, f, A}$ существует единственная переменная x_j , $j \in \{1, \dots, k\}$, входящая во все конъюнкции $\mathcal{A}_f(a_1), \dots, \mathcal{A}_f(a_d)$, причем эта переменная является существенной переменной разбиения $R^{\sigma_1, \dots, \sigma_i}$.

Доказательство. Рассмотрим случай (а). Существование переменной x_j следует из того, что крайние темы — две конъюнкции одной ДНФ. Существенность этой переменной следует из того, что ни одна фиктивная переменная разбиения $R^{\sigma_1, \dots, \sigma_i}$ не может одновременно входить в обе крайние темы разбиения $R^{\sigma_1, \dots, \sigma_i}$, а единственность — из правильности множества $A_e^{\sigma_1, \dots, \sigma_i}$ (лемма 3).

Рассмотрим теперь случай (б). Строка a_1 получена, очевидно, заменой всех элементов некоторой строки a'_1 , соответствующих непомеченным столбцам матрицы $A^{\sigma_1, \dots, \sigma_i}$, их отрицаниями. При этом $\mathcal{A}_f(a'_1) \equiv \mathcal{A}_f(a_2) \equiv \dots \equiv \mathcal{A}_f(a_d)$ — крайняя тема. По лемме 4 существует по крайней мере одна существенная переменная x_j , $j \in \{1, \dots, k\}$, входящая в конъюнкцию $\mathcal{A}_f(a'_1)$. В силу правильности множества $A_e^{\sigma_1, \dots, \sigma_i}$ (лемма 3) такая переменная единственна. Кроме того, очевидно, переменная x_j входит и в конъюнкцию $\mathcal{A}_f(a_1)$ (опять же, из свойств ДНФ, представляющих тематические разбиения).

Следствие 1. В каждой концевой вершине дерева $\mathcal{D}_{n,R,f,A}$ определяется ровно одна тематическая переменная.

Доказательство. Действительно, в силу леммы 5 в каждой концевой вершине дерева $\mathcal{D}_{n,R,f,A}$ имеется правильное множество $A_e^{\sigma_1, \dots, \sigma_i}$ наборов, причем существует единственная переменная, входящая во все темы $\mathcal{A}_f(a_1), \dots, \mathcal{A}_f(a_d)$. Согласно алгоритму F_0 , именно эта тематическая переменная и определяется в данной вершине.

Лемма 6. Для любых $R \in \mathcal{R}_k$, $n > k$, $f \in \Phi_R^n$ справедливо неравенство

$$\varphi(F_0, R, n, f) \leq 2k \log_2 n + k.$$

Доказательство. Пусть алгоритм F_0 вызывает процедуру TSEARCH s раз, k_i — число тематических переменных, найденных во время i -го вызова процедуры TSEARCH, $i \in \{1, \dots, s\}$. Легко видеть, что $\sum_{i=1}^s k_i = k$. Пусть i -му вызову процедуры TSEARCH соответствует дерево $\mathcal{D}_{n,R,f,A}^i$. Согласно следствию 1 у этого бинарного дерева ровно k_i концевых вершин. В каждой из этих вершин алгоритм F_0 запрашивает не более $\lceil \log_2 n \rceil + 1$ значений ТОФ f . В каждой неконцевой вершине алгоритм F_0 запрашивает не более $\lceil \log_2 n \rceil$ значений ТОФ f . Учитывая, что в любом бинарном дереве число неконцевых вершин не превышает числа концевых, получаем, что в i -й вызов процедуры TSEARCH алгоритм F_0 запрашивает не более $2k_i \lceil \log_2 n \rceil + k_i$ значений ТОФ. Тогда всего может понадобиться не более $\sum_{i=1}^s (2k_i \lceil \log_2 n \rceil + k_i) = 2k \lceil \log_2 n \rceil + k$ значений ТОФ.

Преобразуем алгоритм F_0 в алгоритм F_1 так, чтобы было выполнено неравенство

$$\varphi(F_1, R, n, f) \leq k \log_2 n + 2k.$$

Заметим, что алгоритм F_0 обладает следующим свойством. Рассмотрим вершины $v^{\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}}$ и $v^{\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, 0}$ некоторого дерева $\mathcal{D}_{n,R,f,A}$, полученного в результате работы алгоритма F_0 на функции $f \in \Phi_R^n$. Тогда любая i -я строка матрицы $A^{\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, 0}$ меньше i -й строки матрицы $A^{\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}}$, причем если i -я строка матрицы $A^{\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}}$ лежит в крайней отрицательной теме разбиения $R^{\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}}$, то i -я строка матрицы $A^{\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, 0}$ лежит в крайней отрицательной теме разбиения $R^{\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, 0}$. Аналогичная матрица $A^{\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, 1}$ обладает теми же свойствами с той только разницей, что меньше заменяется на больше. В связи с этим свойством меняем алгоритм F_0 так, чтобы он не запрашивал значения оператора $\mathcal{A}_f$ на наборе, если до этого было запрошено значение оператора на меньшем (большем) наборе, лежащем в положительной (отрицательной) теме. Полученный алгоритм обозначим через F_1 .

Лемма 7. Для любых $n > k$ для тематического разбиения $R \in \mathcal{R}_k$ и ТОФ $f \in \Phi_R^n$ справедливо неравенство

$$\varphi(F_1, R, n, f) \leq k \log_2 n + 2k.$$

Доказательство. Рассмотрим некоторое дерево $\mathcal{D}_{n,R,f,A}$ с $k' \leq k$ концевыми вершинами, полученное в результате работы алгоритма F_1 на функции $f \in \Phi_R^n$. Найдем число φ' значений оператора $\mathcal{A}_f$, запрошенных алгоритмом F_1 в вершинах дерева $\mathcal{D}_{n,R,f,A}$. Рассмотрим в этом дереве два класса цепочек ребер, отрицательный L и положительный R (соответственно сплошные линии на рис. 3 и пунктирные). Пусть $\mu(v)$ — число значений

Рис. 3. Возможное решающее дерево

оператора $\mathcal{A}$, запрошенных в вершине v дерева $\mathcal{D}_{n,R,f,A}$. Тогда $\phi' = \sum_{v \in V} \mu(v)$, где V — множество вершин рассматриваемого дерева. Далее,

$$\phi' = \sum_{l \in L} \left(\sum_{v \in l} \mu^l(v) + \mu^r(v_l) \right) + \sum_{r \in R} \left(\sum_{v \in r} \mu^r(v) + \mu^l(v_r) \right) + \sum_{v \in V'} 1,$$

где $\mu^l(v)$ — число запрошенных алгоритмом F_1 наборов вершины v , лежащих в отрицательной крайней теме соответствующего этой вершине разбиения, $\mu^r(v)$ — число запрошенных алгоритмом наборов вершины v , лежащих в положительной крайней теме, V' — множество неконцевых вершин рассматриваемого дерева (жирные точки на рис. 3), v_l — концевая вершина ветви l , v_r — концевая вершина ветви r . Последнее слагаемое суммы подсчитывает число наборов, лежащих не в крайних темах.

Оценим $\sum_{v \in l} \mu^l(v) + \mu^r(v_l)$ для некоторой ветви $l \in L$. Фиксируем некоторое $i \in \{1, \dots, \lceil \log_2 n \rceil\}$. Рассмотрим первую вершину ветви l , значение оператора $\mathcal{A}_f$ на i -м наборе которой было запрошено алгоритмом и оказалось отрицательной крайней темой. Согласно описанному выше свойству алгоритма F_0 i -е наборы всех последующих вершин ветви l тоже лежат в отрицательных крайних темах соответствующих тематических разбиений, значения оператора $\mathcal{A}_f$ алгоритм F_1 на них не вычисляет (в отличие от F_0). Отсюда, очевидно,

$$\sum_{v \in l} \mu^l(v) + \mu^r(v_l) \leq \lceil \log_2 n \rceil + 1.$$

Аналогично,

$$\sum_{v \in r} \mu^r(v) + \mu^l(v_r) \leq \lceil \log_2 n \rceil + 1.$$

Легко видеть также, что

$$\sum_{v \in V'} 1 = |V'| \leq k'.$$

Итак,

$$\begin{aligned}\varphi' &\leq \sum_{l \in L} (\lfloor \log_2 n \rfloor + 1) + \sum_{r \in R} (\lfloor \log_2 n \rfloor + 1) + k' \\ &= (\lfloor \log_2 n \rfloor + 1)(|L| + |R|) + k' = k' \lfloor \log_2 n \rfloor + 2k'.\end{aligned}$$

Теперь, вспоминая, что $\sum k' = k$, где сумма берется по всем деревьям, возникшим в результате работы алгоритма F_1 на функции f , получаем требуемое.

Следствие 2. *Справедливо неравенство*

$$\varphi(k, n) \leq k \lfloor \log_2 n \rfloor + 2k.$$

Доказательство теоремы 1. Согласно лемме 1 и следствию 2, справедливы неравенства

$$(k - \lfloor \log_2 k \rfloor) \lfloor \log_2 (n - k + 1) \rfloor \leq \varphi(k, n) \leq k \lfloor \log_2 n \rfloor + 2k,$$

из чего следует утверждение теоремы.

Список литературы

1. Baeza-Yates R., Ribeiro-Neto B., *Modern information retrieval*. Addison–Wesley, Boston, 1999.
2. Deerwester S., Dumais S. T., Furnas G. W., Landauer T. K., Harshman R., Indexing by latent semantic analysis. *J. Amer. Soc. Information Sci.* (1990) **41**, №6, 391–407.
3. Hofmann T., Probabilistic latent semantic indexing. In: *Proc. SIGIR'99*, Berkeley, 1999, pp. 55–57.
4. Гасанов Э. Э., Кудрявцев В. Б., *Теория хранения и поиска информации*. Физматлит, Москва, 2002.
5. Papadimitriou C. H., Raghavan P., Tamaki H., Vempala S., Latent semantic indexing: A probabilistic analysis. *J. Comput. Syst. Sci.* (2000) **61**, №2, 217–235.
6. Коробков В. К., О монотонных функциях алгебры логики. *Проблемы кибернетики* (1965) **13**, 5–28.

Статья поступила 10.07.2006.