Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Зайцев, О сложности сборки полных и полных двудольных графов, *Дискрет. матем.*, 2008, том 20, выпуск 2, 82–99

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1005>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 11:06:28

О сложности сборки полных и полных двудольных графов

© 2008 г. Д. В. Зайцев

Изучается сложность схем построения полных и двудольных полных графов с использованием двух операций склейки вершин, которые представляют собой отождествление пары вершин с удалением петель и кратных ребер. Первая операция применяется к парам вершин одного графа, вторая — к парам вершин двух графов, не имеющих общих элементов, в качестве исходного берется простейший граф, состоящий из пары вершин, соединенных ребром. Под сложностью построения понимается число применений операций над графами. Ранее были получены верхние оценки сложности построения полного и полного двудольного графа. В этой работе получены нижние оценки, что позволило получить порядок асимптотики построения этих графов.

1. Введение

В этой работе изучается сложность схем построения графов при помощи двух операций склейки вершин, которые заключаются в отождествлении пары вершин с удалением петель и кратных ребер. Первая операция применяется к паре вершин одного графа, вторая — к паре вершин двух графов, не имеющих общих элементов. В качестве простейшего берется граф, состоящий из пары вершин, соединенных ребром. Любой промежуточный результат, то есть построенный на каком-то этапе граф, разрешено использовать неоднократно. Под сложностью схемы понимается число применений операций над графами. Схемный подход к заданию графов рассматривался ранее, например, в [1], но вопрос о сложности схемы построения графов не изучался и использовались другие операции. Эта работа является продолжением исследований, начатых в [2], где были получены оценки функции Шеннона сложности схем для некоторых классов графов, а также верхние оценки сложности схемного задания для полного и полного двудольного графов. В этой работе получены нижние оценки, что позволило получить порядки сложности сборки полного и полного двудольного графов.

2. Основные определения и результаты

Пусть $K_{p,p}$ — полный двудольный граф с p вершинами в каждой доле, K_n — полный граф с n вершинами. Пусть V — класс неориентированных связных графов без петель и кратных ребер и $G \in V$.

Определим две операции склейки графов. Двуместная операция склейки O_1 — отождествление двух заданных вершин пары графов, не имеющих общих элементов. Одноместная операция склейки O_2 — отождествление двух заданных вершин одного графа. Всегда производится удаление петель и кратных ребер.

Сборкой графа G назовем конечную последовательность графов $G_1, G_2, \dots, G_T$, удовлетворяющую следующим условиям. Во-первых, G_T изоморфен G , и G_1 состоит из пары вершин, соединенных ребром. Во-вторых, каждый граф G_s , $1 < s \leq T$, в последовательности получен в результате применения одной операции склейки следующим образом: одноместная операция применяется к графу изоморфному одному из $G_1, \dots, G_{s-1}$, двуместная операция склейки применяется к паре графов, каждый из которых изоморфен одному из $G_1, \dots, G_{s-1}$. Таким образом, каждый новый граф склеен из изоморфных предыдущим. В-третьих, требуется, чтобы каждый граф (кроме G_T) использовался, то есть участвовал в получении хотя бы одного графа с большим номером в данной последовательности.

Пусть длина последовательности сборки G — число операций склейки, затраченных для построения последовательности, то есть $T - 1$. Назовем последовательность сборки G минимальной, если данная последовательность имеет наименьшую длину среди последовательностей сборки графа G . Сложностью $L(G)$ сборки G назовем длину минимальной последовательности сборки G .

Теорема 1. При $p \rightarrow \infty$ справедливо соотношение $L(K_{p,p}) \asymp p$.

Теорема 2. При $p \rightarrow \infty$ справедливо соотношение $L(K_n) \asymp n$.

3. Доказательство теоремы 1

Пусть сеть сборки графа G , которую будем обозначать $\Sigma(G)$, — это ориентированный граф с двумя полюсами, в котором нет петель и разрешены кратные ребра. Каждой вершине сети взаимно однозначно соответствует некоторый граф из последовательности сборки. Если G_1 — первый граф в последовательности сборки, а G_T последний, то первому полюсу сети $\Sigma(G)$ соответствует G_1 , второму полюсу — G_T . Кроме того, каждой вершине сети, за исключением первого полюса, приписана одна операция из $\{O_1, O_2\}$ следующим образом. Пусть σ — некоторая вершина сети $\Sigma(G)$, отличная от первого полюса. Пусть вершине σ соответствует граф G_s , $1 < s \leq T$. Если G_s в последовательности сборки получен применением операции O_1 , то вершине σ приписывается операция O_1 , если применением O_2 , то приписывается O_2 . Вершины сети соединены ориентированными ребрами. Пусть ε — некоторое ребро, входящее в σ , пусть O_k , $k \in \{1, 2\}$, — операция, приписанная σ . Тогда началу ε соответствует граф G_i , $1 \leq i < s$, к копии которого (к изоморфному графу) применялась операция O_k при получении G_s . Таким образом, степень захода вершины σ равна двум, если ей приписана операция O_1 , и равна единице, если ей приписана операция O_2 . Степень исхода любой вершины сети, кроме второго полюса, должна быть больше нуля согласно третьему условию определения последовательности сборки. И, наконец, опишем последний пункт в определении $\Sigma(G)$. По определению последовательности сборки, каждый граф последовательности, кроме первого, получается в результате применения одной из операций склейки. Операции применяем так: выбираем (в зависимости от операции) один или пару графов последовательности, берем изоморфные им графы-копии, с этими копиями проводим склейку. Каждому ребру сети сопоставляем как раз копию графа, соответствующего началу данного ребра. Этот пункт определения имеет значение, когда в последовательности сборки рассматривается граф,

полученный применением O_1 к паре копий одного графа. В сети сборки в этом случае возникает пара кратных ребер, которые нельзя отличить, если сослаться на их концы. У этих ребер есть существенное отличие. Действительно, применяя операцию O_1 к копиям графа, соответствующего общему началу этих ребер, мы можем выбирать разные (не соответствующие друг другу при изоморфизме) вершины для склейки. Различать копии полезно, когда надо определить, какая вершина поглощается, а какая остается в результате склейки.

По определению для любой последовательности сборки графа G можно построить сеть сборки. Поэтому, если мы получим нижнюю оценку числа вершин сети, справедливую для любой сети сборки G , то из нее мы получим нижнюю оценку числа операций в любой последовательности сборки графа G . Эта оценка верна и для последовательности сборки минимальной длины, следовательно, она будет оценкой сложности сборки G .

Назовем выделенным путем в сети сборки ориентированный путь, началом которого является первый полюс, соответствующий G_1 , концом — второй полюс, соответствующий G_T . Заметим, что выделенный путь всегда является простой ориентированной цепью.

С этого момента будем ссылаться на графы, соответствующие вершинам выделенного пути, по их номеру в выделенном пути. Пусть τ — число вершин выделенного пути. Пусть $\tilde{G}_k$, $1 \leq k \leq \tau$, обозначает k -й по счету граф от начала выделенного пути. Началу выделенного пути в первом полюсе сети $\Sigma(G)$ соответствует $\tilde{G}_1 \cong G_1$, концу во втором полюсе — $\tilde{G}_\tau \cong G_T$. Графы последовательности сборки, соответствующие графам выделенного пути, образуют подпоследовательность в последовательности сборки.

Определим подмножества вершин A_k и B_k , $1 \leq k \leq \tau$, в графе $\tilde{G}_k$, принадлежащем некоторому выделенному пути в сборке графа $K_{p,p}$. Определяем их индукцией по направлению от конца к началу выделенного пути. Поскольку для произвольного выделенного пути в сборке $\Sigma(K_{p,p})$ граф $\tilde{G}_\tau \cong K_{p,p}$, основанием индукции является следующий факт: A_τ совпадает с одной долей $K_{p,p}$, B_τ совпадает с другой долей. Шаг индукции определяется так. Пусть $\tilde{G}_i$ и $\tilde{G}_{i+1}$ — два графа, которые принадлежат выделенному пути и соответствуют смежным вершинам сети, то есть, если применяется O_1 , то $\tilde{G}_{i+1}$ получен непосредственно из графа G' , изоморфного $\tilde{G}_i$ и из графа G'' , который изоморфен некоторому графу, уже полученному в последовательности сборки. Если оба графа G' и G'' брались как копии $\tilde{G}_i$, то считаем, что $\tilde{G}_{i+1}$ получен из той копии $\tilde{G}_i$, которой соответствует ребро выделенного пути. Если применяется O_2 , то $\tilde{G}_{i+1}$ получен непосредственно из графа G' , изоморфного $\tilde{G}_i$. Итак, по предположению индукции, уже определены подмножества A_{i+1} и B_{i+1} в множестве вершин графа $\tilde{G}_{i+1}$. Определим A_i и B_i в множестве вершин графа $\tilde{G}_i$. Рассмотрим произвольную вершину $v \in \tilde{G}_i$. Возможны следующие случаи.

1. Вершина v не участвует в операции склейки при переходе от $\tilde{G}_i$ к $\tilde{G}_{i+1}$, то есть вершина $v' \in G'$, соответствующая вершине v (при рассмотрении графа G' , изоморфного $\tilde{G}_i$), не склеивается. Тогда $v \in A_i$, если v' попадает в подмножество A_{i+1} в результате склейки, и $v \in B_i$, если v' попадает в подмножество B_{i+1} .
2. Вершина v участвует в склейке с операцией O_1 при получении $\tilde{G}_{i+1}$, то есть вершина v' , соответствующая вершине v при изоморфизме, склеилась с какой-то вершиной $v'' \in G''$, где G'' изоморфен некоторому уже полученному ранее графу. Напомним, что выделенный путь проходит через ребро G' . Тогда определяем, что $v \in A_i$, если v' после отождествления с v'' попадает в A_{i+1} , и $v \in B_i$, если v' после отождествления с v'' попадает в B_{i+1} .
3. Вершина v участвует в склейке с операцией O_2 при получении $\tilde{G}_{i+1}$, то есть вершина

$v' \in G'$, соответствующая вершине v при изоморфизме, склеилась с какой-то вершиной $w' \in G'$. Выделенный путь проходит через ребро, соответствующее G' . Тогда определяем, что $v \in A_i$, если v' после отождествления с w' попадает в A_{i+1} , и $v \in B_i$, если v' после отождествления с w' попадает в B_{i+1} . Отметим, что $w \in \tilde{G}_i$, соответствующая $w' \in G'$, принадлежит A_i , если $v \in A_i$, и принадлежит B_i , если $v \in B_i$.

Определение подмножеств вершин A_k и B_k закончено.

Рассмотрим пару простых следствий этой процедуры. Во-первых, множество вершин $\tilde{G}_k$ есть $A_k \cup B_k$, во-вторых, $A_k \cap B_k = \emptyset$. Это можно установить по индукции. В графе $\tilde{G}_\tau$ все вершины принадлежат или A_τ , или B_τ , и $A_\tau \cap B_\tau = \emptyset$, так как $\tilde{G}_\tau \cong K_{p,p}$. Допустим, что множество вершин $\tilde{G}_{i+1}$ есть $A_{i+1} \cup B_{i+1}$ и $A_{i+1} \cap B_{i+1} = \emptyset$. По определению при переходе от $\tilde{G}_{i+1}$ к $\tilde{G}_i$ каждую вершину $\tilde{G}_i$ можно отнести к A_i или B_i , но не к обоим одновременно. Таким образом, по индукции можно установить, что для любого k , $1 \leq k \leq \tau$, для определенных выше A_k и B_k все множество вершин $\tilde{G}_k$ есть $A_k \cup B_k$ и $A_k \cap B_k = \emptyset$.

Пусть $\tilde{G}_i$ и $\tilde{G}_j$, $i \leq j$, — два графа, принадлежащие выделенному пути. Пусть $v_i \in \tilde{G}_i$. Определим в графе $\tilde{G}_j$ вершину v_j , потомка вершины v_i для данного выделенного пути. Определять будем при помощи индукции, двигаясь по направлению от начала к концу выделенного пути. Будем считать, что v_i сама является своим потомком. Пусть по предположению индукции определена вершина $v_l \in \tilde{G}_l$, $i \leq l \leq j$ которая является потомком вершины v_i . Пусть $\tilde{G}_l \cong G'_l$, где G'_l приписан ребру выделенного пути. Вершина $v'_l \in G'_l$ соответствует v_l при изоморфизме. Тогда $v_{l+1} \in \tilde{G}_{l+1}$ — потомок v_i , если $\tilde{G}_{l+1}$ принадлежит выделенному пути и выполнено одно из следующих условий:

- (1) v_l не участвует в склейке при переходе от $\tilde{G}_l$ к $\tilde{G}_{l+1}$, v_{l+1} — вершина, в которую переходит v'_l после применения операции к G'_l .
- (2) v_l участвует в склейке, v_{l+1} получена в результате склейки v'_l с некоторой вершиной.

Определение потомка вершины v_i закончено.

Заметим, что $v_j \in A_j$, если $v_i \in A_i$, и $v_j \in B_j$, если $v_i \in B_i$. Это верно, так как в противном случае существует шаг l , на котором потомок вершины из A_l (из B_l) оказывается в B_{l+1} (в A_{l+1}), это противоречит определению A_l (B_l). Заметим также, что в графе $\tilde{G}_i$ может находиться несколько вершин помимо v_i , для которых $v_j \in \tilde{G}_j$ является потомком. Это возможно, когда для некоторого l , $i \leq l < j$, при переходе от $\tilde{G}_l$ к $\tilde{G}_{l+1}$ применялась операция O_2 . В этом случае две вершины из $\tilde{G}_l$ переходят в одну вершину из $\tilde{G}_{l+1}$ по ребру G'_l выделенного пути.

Для удобства, будем называть вершину v_i , для которой v_j является потомком, родителем v_j . Будем говорить, что вершина (ребро) графа $\tilde{G}_{l+1}$ из выделенного пути появляется на шаге $l+1$, если в предыдущем графе $\tilde{G}_l$ выделенного пути нет родителя данной вершины (нет родителя конца данного ребра, смежного с родителем второго конца).

Рассмотрим A_j . Множество потомков вершин из множества A_i образуют подмножество в A_j . Подмножество может совпадать со всем множеством. То же самое верно для B_i и B_j . Обозначим через A_j^i подмножество потомков вершин из A_i в множестве A_j и через B_j^i подмножество потомков вершин B_i в B_j .

Лемма 1. Для любой сети сборки $\Sigma(K_{p,p})$, для любого выделенного пути в сети сборки $\Sigma(K_{p,p})$, для любой пары графов из данного выделенного пути $\tilde{G}_i$ и $\tilde{G}_j$, где $1 \leq i < j \leq \tau$, для любой вершины ω_j такой, что $\omega_j \in A_j$ и $\omega_j \notin A_j^i$, справедливо следующее: если ω_j смежна со всеми вершинами из B_j^i , то $j - i \geq |B_i|$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную сеть сборки графа $K_{p,p}$. В данной сети $\Sigma(K_{p,p})$ рассмотрим произвольный выделенный путь. В этом выделенном пути рассмотрим пару графов $\tilde{G}_i$ и $\tilde{G}_j$. Для продолжения доказательства леммы докажем несколько предложений.

Предложение 1. *В графе $\tilde{G}_i$ не существует вершины-родителя ω_i , для которой ω_j является потомком.*

Доказательство. Поскольку по условию леммы $\omega_j \notin A_j^i$, в графе $\tilde{G}_i$ не существует вершины-родителя ω_i , для которой ω_j является потомком. Если бы такая вершина ω_i существовала в $\tilde{G}_i$, то она принадлежала бы или A_i , или B_i (см. следствия определения этих подмножеств). Если она принадлежит A_i , то получаем противоречие так: у любой вершины из A_i , в частности, у ω_i есть единственный потомок в $\tilde{G}_j$ (по определению вершины-потомка). Этот потомок принадлежит A_j^i (по определению A_j^i), но $\omega_j \notin A_j^i$ по условию леммы 1. Если ω_j является потомком вершины из B_i , то она должна принадлежать B_j (см. замечание к определению вершины-потомка), что также противоречит условию леммы 1. Предложение 1 доказано.

Следствие 1. *Существует минимальное l , $i < l \leq j$, такое, что в графе выделенного пути $\tilde{G}_l$ существует вершина ω_l такая, что $\omega_l \in A_l$, $\omega_l \notin A_l^i$, для которой ω_j является потомком.*

Для каждого $k, l \leq k \leq j$, определим подмножество R_k вершин графа $\tilde{G}_k$. Для каждой вершины из R_k вершина ω_j является потомком. Вершины R_k не являются потомками вершин из $\tilde{G}_{k-1}$. Заметим, что R_k может быть пусто, но по следствию 1 существует k такое, что R_k не пусто. Заметим также, что $R_k \subseteq A_k \setminus A_k^i$.

Предложение 2. *Для любого $k, l \leq k \leq j$, если подмножество R_k не пусто, то $\tilde{G}_k$ был получен в результате применения операции O_1 .*

Доказательство. Пусть $\omega_k \in R_k$. Если $\tilde{G}_k$ — результат применения операции O_2 , то все его вершины являются потомками вершин из $\tilde{G}_{k-1}$ и ω_k является потомком некоторой вершины $\omega_{k-1} \in \tilde{G}_{k-1}$, но это противоречит определению R_k . Предложение 2 доказано.

Будем говорить, что два непересекающихся подмножества вершин графа связаны ребром, если в графе существует хотя бы одно ребро, один конец которого принадлежит первому подмножеству, второй — второму подмножеству.

Рассмотрим графы $\tilde{G}_k$ и $\tilde{G}_{k+1}$, $i \leq k < j$. Пусть $\tilde{G}_k'$ соответствует ребру с концами $\tilde{G}_k$ и $\tilde{G}_{k+1}$, лежащему в выделенном пути сети $\Sigma(K_{p,p})$.

Предложение 3. *Для любого $k, l - 1 \leq k \leq j - 1$, справедливо следующее утверждение. Если R_{k+1} и B_{k+1}^i связаны ребром, то*

- (а) *при получении $\tilde{G}_{k+1}$ применялась O_1 ,*
- (б) *одна из двух вершин для склейки бралась из B_k^i ,*
- (в) *не более одной вершины из B_{k+1}^i связано ребром с подмножеством R_{k+1} .*

Рис. 1. Выделенный путь в $\Sigma(K_{p,p})$, рассматриваемые графы и подмножества их вершин

Доказательство. Утверждение (а) следует из предложения 2.

Докажем утверждение (б). Пусть $\hat{G}$ — граф, который был склеен операцией O_1 с $\tilde{G}'_k$ для получения $\tilde{G}_{k+1}$. Пусть $\hat{v} \in \hat{G}$ — вершина, выбранная в $\hat{G}$ для склейки. Рассмотрим следующие два факта. Во-первых, любая вершина в R_{k+1} перешла из $\hat{G}$ (без склейки), так как по определению в R_{k+1} нет потомков $\tilde{G}_k$. Во-вторых, B_{k+1}^i содержит только потомков вершин из B_i по определению. Из этих двух фактов следует, что склейка $\hat{v}$ с любой вершиной из $A_k \cup B_k \setminus B_k^i$ не может привести к связи ребром R_{k+1} и B_{k+1}^i . Первый факт говорит о том, что смежные с B_k^i вершины не могли перейти в R_{k+1} из $\tilde{G}_k$ при переходе к $\tilde{G}_{k+1}$ (ни путем склейки, ни без склейки). Второй факт говорит о том, что в B_{k+1}^i не могла попасть смежная с R_{k+1} вершина, перейдя из $\hat{G}$ без склейки с вершиной из B_k^i . Следовательно, существует вершина из B_k^i , которая клеится с вершиной из $\hat{G}$.

Докажем утверждение (в). Ребра, связывающие R_{k+1} с B_{k+1}^i , согласно пункту (б) могут появиться только в результате склейки некоторой вершины $\hat{v} \in \hat{G}$ с вершиной из B_k^i . За одну операцию можно склеить только одну вершину из B_k^i с вершиной $\hat{v}$. Предложение 3 доказано.

Пусть P_k — подмножество родителей ω_j в $\tilde{G}_k$. Заметим, что $P_k \subseteq A_k \setminus A_k^i$, $R_k \subseteq P_k$ и что вершины $P_k \setminus R_k$ могут иметь родителей в $\tilde{G}_{k-1}$. В графе $\tilde{G}_k$ (и соответственно в $\tilde{G}'_k$, изоморфном ему) выделим следующие пять подмножеств вершин: P_k , $(A_k \setminus A_k^i) \setminus P_k$, A_k^i , $B_k \setminus B_k^i$, B_k^i . Очевидно, что они не пересекаются, и их объединение равно множеству вершин $\tilde{G}_k$.

Определим функцию $\varphi(k)$ как число вершин в B_k^i , которые не смежны ни с одной вершиной из P_k .

Рассмотрим возможности применения операции O_1 к графу $\tilde{G}'_k$. Одна вершина из отождествляемой пары должна принадлежать одному из пяти перечисленных выше подмножеств P_k , $(A_k \setminus A_k^i) \setminus P_k$, A_k^i , $B_k \setminus B_k^i$, B_k^i . Следовательно, есть 5 возможностей выбора подмножества, путем указания вершины из $\tilde{G}'_k$ для склейки O_1 .

Предложение 4. Для любого k , $i \leq k < j$, если при получении $\tilde{G}_{k+1}$ в выделенном пути применяется операция O_1 , то $0 \leq \varphi(k) - \varphi(k+1) \leq 1$, причем равенство единице возможно только тогда, когда склеиваемая вершина из $\tilde{G}'_k$ принадлежит B_k^i .

Доказательство. Пусть $u_k \in \tilde{G}'_k$, $i \leq k < j$, и $\hat{v} \in \hat{G}$ — пара вершин, к которым применяется O_1 . Рассмотрим все возможности выбора пары вершин для склейки. Отметим, что при применении O_1 нас интересуют только возможности выбора вершины из $\tilde{G}'_k$. Второй граф $\hat{G}$, участвующий в склейке, не принадлежит выделенному пути, следовательно, $\hat{G}$ не имеет своих подмножеств, определяемых через выделенный путь. Поэтому в каждом рассматриваемом случае из $\hat{G}$ берется произвольная вершина. Возможны 5 случаев.

- (1) $u_k \in A_k^i$.
- (2) $u_k \in P_k$.
- (3) $u_k \in (A_k \setminus A_k^i) \setminus P_k$.
- (4) $u_k \in B_k \setminus B_k^i$.

Для склеек вида 1–4 верно равенство $\varphi(k) = \varphi(k+1)$. Действительно, в этих склейках не участвуют вершины из B_k^i , значит, не может измениться их смежность с другими

вершинами. Число вершин также не меняется (в частности, не увеличивается, так как все они — потомки B_i), то есть в этих случаях $|B_k^i| - |B_{k+1}^i| = 0$.

$$(5) u_k \in B_k^i.$$

Если в результате применения операции O_1 в графе $\tilde{G}_{k+1}$ содержатся вершины, у которых нет родителей в $\tilde{G}_k$, то эти вершины содержатся в $A_{k+1} \setminus A_{k+1}^i$ или в $B_{k+1} \setminus B_{k+1}^i$. Подмножество таких вершин, для которых ω_j является потомком, мы обозначили R_{k+1} . По предложению 3 не более одной вершины из B_{k+1}^i связано ребрами с $R_{k+1} \subset P_{k+1}$. Следовательно, $\varphi(k) - \varphi(k+1) \leq 1$. При операции O_1 справедливо равенство $|B_k^i| - |B_{k+1}^i| = 0$, и число вершин, смежных с P_k , не может уменьшиться, значит, $0 \leq \varphi(k) - \varphi(k+1)$. Если $R_{k+1} = \emptyset$ после применения операции O_1 , то не меняется смежность вершин из B_k^i , и также $|B_k^i| - |B_{k+1}^i| = 0$, значит, $\varphi(k) = \varphi(k+1)$.

Получаем, что только в случае 5 разность $\varphi(k) - \varphi(k+1)$ может быть равной 1. Предложение 4 доказано.

Рассмотрим возможности применения операции O_2 к графу $\tilde{G}'_k$ с точки зрения выбора пары вершин для склейки. Каждая вершина из отождествляемой пары может принадлежать одному из пяти перечисленных выше подмножеств. Пары отождествляемых вершин не упорядочены, обе вершины в паре могут принадлежать одному подмножеству. Следовательно, есть 15 возможностей выбора пары подмножеств указанием пары вершин для склейки O_2 .

Предложение 5. Для любого $k, i \leq k < j$, если при получении $\tilde{G}_{k+1}$ в выделенном пути применяется операция O_2 , то $0 \leq \varphi(k) - \varphi(k+1) \leq 1$, причем равенство единице возможно только тогда, когда обе склеиваемые вершины принадлежат B_k^i , или одна принадлежит B_k^i , вторая — $B_k \setminus B_k^i$.

Доказательство. Пусть u_k и v_k — пара вершин графа $\tilde{G}'_k, i \leq k < j$, к которым применяется O_2 .

Рассмотрим все возможности выбора пары вершин для склейки.

- (1) $u_k \in P_k, v_k \in B_k \setminus B_k^i$.
- (2) $u_k \in P_k, v_k \in B_k^i$.
- (3) $u_k \in (A_k \setminus A_k^i) \setminus P_k$ и $v_k \in B_k \setminus B_k^i$.
- (4) $u_k \in B_k^i$ и $v_k \in (A_k \setminus A_k^i) \setminus P_k$.
- (5) $u_k \in B_k \setminus B_k^i$ и $v_k \in A_k^i$.
- (6) $u_k \in B_k^i$ и $v_k \in A_k^i$.

Склеек вида 1–6 нет по определению A_k и B_k .

- (7) $u_k \in P_k, v_k \in A_k^i$.
- (8) $u_k \in P_k, v_k \in (A_k \setminus A_k^i) \setminus P_k$.

Склеек вида 7 и 8 нет. Действительно, $u_k \in P_k$ только тогда, когда результат склейки u_k и v_k является родителем ω_j в $\tilde{G}_{k+1}$. При выполнении этого условия вершина v_k также обязана принадлежать P_k , так как она благодаря данной склейке также является родителем ω_j . Однако последнее не выполняется в случаях 7 и 8.

$$(9) u_k \in A_k^i, v_k \in (A_k \setminus A_k^i) \setminus P_k.$$

$$(10) u_k \text{ и } v_k \text{ принадлежат } A_k^i.$$

$$(11) u_k \text{ и } v_k \text{ принадлежат } (A_k \setminus A_k^i) \setminus P_k.$$

$$(12) u_k \text{ и } v_k \text{ принадлежат } P_k.$$

Заметим, что в этом случае $|P_k| = |P_{k+1}| + 1$; степень потомка u_k и v_k может быть не больше суммы степеней u_k и v_k .

$$(13) u_k \text{ и } v_k \text{ принадлежат } B_k \setminus B_k^i.$$

Для склеек вида 9–13 справедливо равенство $\varphi(k) = \varphi(k+1)$. Это верно, так как в этих склейках не участвуют вершины из B_k^i , значит, не может измениться ни число вершин в B_k^i , ни их смежность с другими вершинами.

$$(14) u_k \in B_k^i \text{ и } v_k \in B_k \setminus B_k^i.$$

Для операции такого вида $0 \leq \varphi(k) - \varphi(k+1) \leq 1$. Равенство единице возможно, когда v_k смежна с одной или с несколькими вершинами из P_k . Больше единицы эта разность быть не может потому, что за одну операцию склейки только одна вершина $u_k \in B_k^i$ могла отождествиться с некоторой вершиной из $B_k \setminus B_k^i$.

$$(15) u_k \in B_k^i \text{ и } v_k \in B_k^i.$$

Для операции такого вида $0 \leq \varphi(k) - \varphi(k+1) \leq 1$. Равенство единице возможно, когда хотя бы одна вершина (u_k или v_k) не имеет смежной вершины из P_k . Больше единицы эта разность быть не может потому, что в результате отождествления пары вершин, исчезает не более одной вершины.

Таким образом, получаем, что только в случаях 14 и 15 $\varphi(k) - \varphi(k+1)$ может быть равной 1.

Предложение 5 доказано.

Итак, при рассмотрении пяти подмножеств вершин некоторого $\tilde{G}_k, i \leq k < j$, возникло 5 способов применения O_1 и 15 способов применения O_2 для получения графа $\tilde{G}_{k+1}$ в выделенном пути. Эти способы в совокупности покрывают все возможности применения O_1 и O_2 , так как отдельные применения операций отличаются только выбором пары вершин для отождествления, а все такие пары вошли в наше рассмотрение.

Мы также выявили три способа применения склейки, которые могут влиять на выполнение условия леммы о смежности ω_j и вершин из B_j^i . Было доказано, что для любого $k, i \leq k < j$, выполняются неравенства $0 \leq \varphi(k) - \varphi(k+1) \leq 1$.

Рассмотрим на участке выделенного пути от $\tilde{G}_i$ до $\tilde{G}_j$ три подмножества графов: подмножество Θ_1 , состоящее из графов, полученных в результате применения операции O_1 так, как указано в случае 5 в предложении 4, и справедливо равенство $\varphi(k) - \varphi(k+1) = 1$; подмножество Θ_2 , состоящее из графов, полученных в результате применения O_2 , как указано в случае 14 в предложении 5, и справедливо равенство $\varphi(k) - \varphi(k+1) = 1$; подмножество Θ_3 , состоящее из графов, полученных в результате применения O_2 , как указано в случае 15 в предложении 5, и справедливо равенство $\varphi(k) - \varphi(k+1) = 1$.

Для графа $\tilde{G}_i$ выполняется равенство $\varphi(i) = |B_i|$ (согласно предложению 1, в $\tilde{G}_i$ нет родителей ω_j). Для графа $\tilde{G}_j$ равенство $\varphi(j) = 0$ выполняется по условию леммы. Следовательно,

$$|B_i| = \varphi(i) - \varphi(j) = \sum_{i \leq k < j} (\varphi(k) - \varphi(k+1)).$$

Согласно предложениям 4 и 5 разность $\varphi(k) - \varphi(k+1)$ принимает значение 0 или 1, причем значение 1 только тогда, когда $\tilde{G}_{k+1} \in \Theta_1 \cup \Theta_2 \cup \Theta_3$, значит,

$$|B_i| = \sum_{\{k | \tilde{G}_{k+1} \in \Theta_1 \cup \Theta_2 \cup \Theta_3\}} (\varphi(k) - \varphi(k+1)) = |\Theta_1| + |\Theta_2| + |\Theta_3|.$$

По определению, Θ_1 , Θ_2 , Θ_3 — подмножества графов, соответствующих разным вершинам части выделенного пути длины $j - i$, поэтому справедливо неравенство $|\Theta_1| + |\Theta_2| + |\Theta_3| \leq j - i$. Получаем, что $|B_i| \leq j - i$. Лемма доказана.

Пусть $\pi(K_{p,p})$ — некоторая последовательность сборки графа $K_{p,p}$, $\Sigma_\pi(K_{p,p})$ — сеть сборки, соответствующая последовательности сборки $\pi(K_{p,p})$, как сказано в определении сети сборки. Пусть граф выделенного пути $\tilde{G}_k$, $1 \leq k \leq \tau$, из сети $\Sigma_\pi(K_{p,p})$ соответствует графу G_s из $\pi(K_{p,p})$. Обозначим через $|G|$ число вершин в графе G .

Лемма 2. Для любой последовательности $\pi(K_{p,p})$, $1 < p$, существует граф G_s , $1 \leq s \leq T$, такой, что $p < |G_s| < 2p$ и для любого выделенного пути сети сборки $\Sigma_\pi(K_{p,p})$, содержащего граф $\tilde{G}_k$, который соответствует G_s , если $|A_k| \leq |B_k|$, то $|B_k| > (1/2)p$ и $|A_k| < p$.

Доказательство. Пусть G_1 , G_2 и G_3 — графы некоторой последовательности сборки. Если G_3 — результат применения O_1 к паре вершин, одна из которых принадлежит G_1 , другая — G_2 , то

$$|G_3| = |G_1| + |G_2| - 1. \quad (1)$$

Если, допустим, G_2 — результат применения O_2 к паре вершин графа G_1 , то $|G_2| = |G_1| - 1$.

Для любой последовательности сборки $\pi(K_{p,p})$ существует такой минимальный номер i , $1 < i \leq T$, что для графа G_i из данной последовательности сборки справедливо неравенство $|G_i| \geq 2p$. В противном случае сборка графа $K_{p,p}$ не завершена, так как $|K_{p,p}| = 2p$.

В последовательности сборки первым, по определению, стоит граф, состоящий из одного ребра и двух вершин, и по условию леммы $p > 1$, поэтому необходимо применение некоторых операций для получения G_i . Поскольку первым в последовательности граф G_i имеет $2p$ или больше вершин, он получен в результате применения O_1 .

Теперь предположим противное, то есть предположим, что не существует графа G_s такого, что $p < |G_s| < 2p$. Следовательно, все графы с номером, меньшим i , имеют не больше p вершин, так как G_i — первый в последовательности имеет число вершин, большее или равное $2p$. При таком предположении граф G_i нельзя получить с помощью O_1 , даже если взять для склейки пару графов с максимально возможным числом вершин p . В результате применения операции O_1 получим граф с числом вершин $p + p - 1 < 2p$, см. (1). Следовательно предположение неверно, и граф G_s , удовлетворяющий условию леммы, существует.

Для доказательства второй части утверждения леммы рассмотрим произвольный выделенный путь в сети сборки $\Sigma_\pi(K_{p,p})$, содержащий граф $\tilde{G}_k$, который соответствует G_s . Для данного выделенного пути в графе $\tilde{G}_k$ определены подмножества A_k и B_k . Из справедливости неравенств $p < |G_s| < 2p$ следует, что $p < |G_s| = |\tilde{G}_k| = |A_k| + |B_k| < 2p$. По условию леммы $|A_k| \leq |B_k|$ (для определенности). Из системы неравенств $|A_k| \leq |B_k|$, $p < |A_k| + |B_k|$ получаем, что $|B_k| > (1/2)p$, и из неравенств $|A_k| \leq |B_k|$, $|A_k| + |B_k| < 2p$ получаем, что $|A_k| < p$. Лемма доказана.

Лемма 3. Для любого $p > 1$ верно неравенство $(1/2)p < L(K_{p,p})$.

Доказательство. Рассмотрим любую последовательность сборки $\pi(K_{p,p})$. Данная последовательность заканчивается графом $K_{p,p}$ по определению. Пусть $G_T \cong K_{p,p}$ — последний граф последовательности $\pi(K_{p,p})$. Рассмотрим произвольный выделенный путь в сети $\Sigma_\pi(K_{p,p})$. Пусть $\tilde{G}_\tau$ — последний граф данного выделенного пути, следовательно, $\tilde{G}_\tau \cong G_T \cong K_{p,p}$. Напомним, что A_τ и B_τ , по определению, совпадают с долями полного двудольного графа $\tilde{G}_\tau$.

По лемме 2 в выделенном пути существует граф $\tilde{G}_k$, для которого определены подмножества A_k и B_k , удовлетворяющие условиям $|A_k| < p$ и $|B_k| > (1/2)p$.

Как следует из определения вершины-потомка, число потомков вершин любого множества не возрастает при движении к концу выделенного пути. Так как $|A_\tau| = p$ и $|A_k| < p$, получаем, что $|A_\tau^k| < |A_\tau|$. Отсюда видно, что существует вершина ω_τ такая, что $\omega_\tau \in A_\tau$ и $\omega_\tau \notin A_\tau^k$. Поскольку $\tilde{G}_\tau \cong K_{p,p}$, вершина ω_τ смежна со всеми вершинами из B_τ^k . При этих условиях можно применить лемму 1.

По лемме 1 получаем, что $\tau - k \geq |B_k|$. Согласно лемме 2, как уже говорилось, $|B_k| > (1/2)p$. Число вершин в выделенном пути τ не превосходит, числа вершин в сети сборки T . Напомним, что графы выделенного пути нумеруются с единицы, то есть $k \geq 1$. В итоге получаем, что $T - 1 \geq \tau - 1 \geq \tau - k > (1/2)p$. Длина последовательности сборки $\pi(K_{p,p})$ равна числу затраченных в ней операций склейки, то есть $T - 1$. Сложность сборки $L(K_{p,p})$, по определению, равна длине минимальной последовательности сборки. Для любой последовательности сборки графа $K_{p,p}$ длина больше $(1/2)p$, поэтому $(1/2)p < L(K_{p,p})$.

Лемма доказана.

В теореме 1 из [2] были получены верхние оценки сложностей сборки полного двудольного графа и полного графа. Обозначим через $K_{p,q}$ полный двудольный граф с p и q вершинами в соответствующих долях. Данная теорема содержала утверждение о том, что при $q \geq p > 0$ для $K_{p,q}$ справедливо неравенство $L(K_{p,q}) \leq 3q + 5 \log_2 q$.

Согласно утверждениям леммы 3 и теоремы 1 статьи [2] для любого $p > 1$ выполняются неравенства $(1/2)p < L(K_{p,p}) \leq 3p + 5 \log_2 p$, следовательно, $L(K_{p,p}) \asymp p$ при $p \rightarrow \infty$.

Теорема 1 доказана.

4. Доказательство теоремы 2

Доказательство теоремы 2 во многом повторяет доказательство теоремы 1. Следует также отметить, что ситуация заметно упрощается при отсутствии двух долей в графе. Тем не менее, рассмотрим доказательство полностью.

Определения сети сборки и выделенного пути в сети сборки остаются без изменений такими, как в начале доказательства теоремы 1.

Определим по-новому множество вершин A_k , $1 \leq k \leq \tau$, в графе $\tilde{G}_k$, принадлежащем некоторому выделенному пути в сборке графа K_n . Теперь A_k по определению — просто множество вершин $\tilde{G}_k$.

Пусть $\tilde{G}_i$ и $\tilde{G}_j$, $i \leq j$, — некоторые графы, принадлежащие выделенному пути. Определение в графе $\tilde{G}_j$ вершины v_j , являющейся потомком вершины $v_i \in \tilde{G}_i$ для данного выделенного пути, остается без изменений таким, как в начале доказательства теоремы 1.

Обозначим через A_j^i подмножество потомков вершин из A_i в множестве A_j .

Лемма 4. Для любой сети сборки $\Sigma(K_n)$, для любого выделенного пути в сети сборки $\Sigma(K_n)$, для любой пары графов из данного выделенного пути $\tilde{G}_i$ и $\tilde{G}_j$, где $1 \leq i < j \leq \tau$, для любой вершины ω_j такой, что $\omega_j \in A_j$ и $\omega_j \notin A_j^i$, если ω_j смежна со всеми вершинами из A_j^i , то $j - i \geq |A_j^i|$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную сеть сборки графа K_n . В данной сети $\Sigma(K_n)$ рассмотрим произвольный выделенный путь. В этом выделенном пути рассмотрим пару графов $\tilde{G}_i$ и $\tilde{G}_j$.

Предложение 6. В графе $\tilde{G}_i$ не существует вершины-родителя ω_i , для которой ω_j является потомком.

Доказательство. Поскольку по условию леммы $\omega_j \notin A_j^i$, в графе $\tilde{G}_i$ не существует вершины-родителя ω_i , для которой ω_j является потомком. Если бы такая вершина ω_i существовала в $\tilde{G}_i$, то она принадлежала бы A_i . У любой вершины из A_i , в частности, у ω_i , есть единственный потомок в $\tilde{G}_j$ (по определению вершины-потомка). Этот потомок принадлежит A_j^i (по определению A_j^i), но $\omega_j \notin A_j^i$ по условию леммы 4. Полученное противоречие доказывает предложение 6.

Для предложения 6 также верно следствие 1 о существовании шага l , $i < l \leq j$, в выделенном пути, где в графе $\tilde{G}_l$ впервые встречается родитель ω_j при движении от начала к концу.

Определение R_k здесь такое же, как в теореме 1. Также остается в силе предложение 2.

Напомним, что два непересекающихся подмножества вершин графа связаны ребром, если в графе существует хотя бы одно ребро, первый конец которого принадлежит первому подмножеству, второй — второму подмножеству.

Рассмотрим графы $\tilde{G}_k$ и $\tilde{G}_{k+1}$, $i \leq k < j$. Пусть $\tilde{G}'_k$ соответствует ребру с концами $\tilde{G}_k$ и $\tilde{G}_{k+1}$, лежащему в выделенном пути сети $\Sigma(K_n)$.

Предложение 7. Для любого k , $l - 1 \leq k \leq j - 1$, справедливы следующие утверждения. Если R_{k+1} и A_{k+1}^i связаны ребром, то

- (а) при получении $\tilde{G}_{k+1}$ применялась O_1 ,
- (б) одна из двух вершин для склейки бралась из A_k^i ,
- (в) не более одной вершины из A_{k+1}^i связано ребром с R_{k+1} .

Доказательство. Утверждение (а) следует из предложения 2.

Докажем утверждение (б). Пусть $\hat{G}$ — граф, который был склеен операцией O_1 с $\tilde{G}'_k$ для получения $\tilde{G}_{k+1}$. Пусть $\hat{v} \in \hat{G}$ — вершина, выбранная в $\hat{G}$ для склейки. Рассмотрим следующие два факта. Во-первых, любая вершина в R_{k+1} перешла из $\hat{G}$, причем без склейки, так как по определению в R_{k+1} нет потомков $\tilde{G}_k$. Во-вторых, A_{k+1}^i содержит только потомков вершин из A_i по определению. Из этих двух фактов следует, что склейка $\hat{v}$ с любой вершиной из $A_k \setminus A_k^i$ не может привести к связи ребром R_{k+1} и A_{k+1}^i . Следовательно, существует вершина из A_k^i , которая склеивается с вершиной из $\hat{G}$.

Рис. 2. Выделенный путь в $\Sigma(K_n)$, рассматриваемые графы и подмножества их вершин

Докажем утверждение (в). Ребра, связывающие R_{k+1} с A_{k+1}^i , согласно пункту (б), могут появиться только в результате склейки некоторой вершины $\hat{v} \in \hat{G}$ с вершиной из A_k^i . За одну операцию можно склеить только одну вершину из A_k^i с вершиной $\hat{v}$. Предложение 7 доказано.

Пусть P_k — подмножество родителей ω_j в $\tilde{G}_k$. В графе $\tilde{G}_k$ (и соответственно в $\tilde{G}'_k$, изоморфном ему) выделим три подмножества вершин: P_k , $(A_k \setminus A_k^i) \setminus P_k$, A_k^i . Очевидно, что они не пересекаются, и их объединение равно множеству A_k вершин графа $\tilde{G}_k$.

Определим функцию $\varphi(k)$ здесь как число вершин в A_k^i , которые не смежны ни с одной вершиной из P_k .

Рассмотрим возможность применения операции O_1 к графу $\tilde{G}'_k$. Одна из двух вершин отождествляемой пары должна принадлежать подмножеству из трех перечисленных выше подмножеств P_k , $(A_k \setminus A_k^i) \setminus P_k$, A_k^i . Следовательно, есть 3 возможности выбора подмножества путем указания вершины из $\tilde{G}'_k$ для склейки O_1 .

Предложение 8. Для любого k , $i \leq k < j$, если при получении $\tilde{G}_{k+1}$ в выделенном пути применяется операция O_1 , то $0 \leq \varphi(k) - \varphi(k+1) \leq 1$, причем равенство единице возможно только тогда, когда склеиваемая вершина из $\tilde{G}'_k$ принадлежит A_k^i .

Доказательство. Пусть $u_k \in \tilde{G}'_k$, $i \leq k < j$, и $\hat{v} \in \hat{G}$ — пара вершин, к которым применяется O_1 . Рассмотрим все возможности выбора пары вершин для склейки. Отметим, что при применении O_1 нас интересуют только возможности выбора вершины из $\tilde{G}'_k$. Второй граф $\hat{G}$, участвующий в склейке, не принадлежит выделенному пути, следовательно, $\hat{G}$ не имеет своих подмножеств, определяемых через выделенный путь. Поэтому в каждом рассматриваемом случае из $\hat{G}$ берется произвольная вершина. Перечислим эти возможности.

(1) $u_k \in P_k$.

(2) $u_k \in (A_k \setminus A_k^i) \setminus P_k$.

Для склеек вида 1, 2 справедливо равенство $\varphi(k) = \varphi(k+1)$. Действительно, в этих склейках не участвуют вершины из A_k^i , значит, не может измениться их смежность с другими вершинами. Число вершин также не меняется (в частности, не увеличивается, так как все они потомки A_i).

(3) $u_k \in A_k^i$.

Если в результате применения операции O_1 в графе $\tilde{G}_{k+1}$ содержатся вершины, у которых нет родителей в $\tilde{G}_k$, то эти вершины содержатся в $A_{k+1} \setminus A_{k+1}^i$. Подмножество таких вершин, для которых ω_j является потомком, мы обозначили R_{k+1} . По предложению 7 не более одной вершины из A_{k+1}^i связано ребрами с R_{k+1} , следовательно, в A_{k+1}^i по сравнению с A_k^i добавилось не более одной вершины, смежной с P_{k+1} . Другими словами, $\varphi(k) - \varphi(k+1) \leq 1$. При операции O_1 $|A_k^i| - |A_{k+1}^i| = 0$, и число вершин, смежных с P_k , не может уменьшиться, значит, $0 \leq \varphi(k) - \varphi(k+1)$. Если после применения операции O_1 подмножество $R_{k+1} = \emptyset$, то не меняется смежность вершин из A_k^i , и также $|A_k^i| - |A_{k+1}^i| = 0$, значит, $\varphi(k) = \varphi(k+1)$.

Таким образом, только в случае 3 разность $\varphi(k) - \varphi(k+1)$ может быть равной 1. Предложение 8 доказано.

Рассмотрим возможности применения операции O_2 к графу $\tilde{G}'_k$ с точки зрения выбора пары вершин для склейки. Каждая вершина из отождествляемой пары может принадлежать одному из трех перечисленных выше подмножеств. Пары отождествляемых вершин не упорядочены, обе вершины в паре могут принадлежать одному подмножеству. Следовательно, есть 6 возможностей выбора пары подмножеств указанием пары вершин для склейки O_2 .

Предложение 9. Для любого $k, i \leq k < j$, если при получении $\tilde{G}_{k+1}$ в выделенном пути применяется операция O_2 , то $0 \leq \varphi(k) - \varphi(k+1) \leq 1$, причем равенство единице возможно только тогда, когда обе склеиваемые вершины принадлежат A_k^i , или одна принадлежит A_k^i , вторая — $A_k \setminus A_k^i$.

Доказательство. Пусть u_k и v_k — пара вершин графа $\tilde{G}'_k, i \leq k < j$, к которым применяется O_2 .

Рассмотрим все 6 возможностей выбора пары вершин для склейки.

$$(1) u_k \in P_k, v_k \in A_k^i.$$

$$(2) u_k \in P_k, v_k \in (A_k \setminus A_k^i) \setminus P_k.$$

Склеек вида 1 и 2 нет. Действительно, $u_k \in P_k$ только тогда, когда результат склейки u_k и v_k является родителем ω_j в $\tilde{G}_{k+1}$. При выполнении этого условия вершина v_k также обязана принадлежать P_k , так как она благодаря данной склейке также является родителем ω_j . Однако последнее не выполняется в случаях 1 и 2.

$$(3) u_k \text{ и } v_k \text{ принадлежат } (A_k \setminus A_k^i) \setminus P_k.$$

$$(4) u_k \text{ и } v_k \text{ принадлежат } P_k.$$

Для склеек вида 3, 4 справедливо равенство $\varphi(k) = \varphi(k+1)$. Это верно, так как в этих склейках не участвуют вершины из A_k^i , значит, не может измениться ни число вершин в A_k^i , ни их смежность с другими вершинами.

$$(5) u_k \in A_k^i \text{ и } v_k \in A_k \setminus A_k^i.$$

Для операции такого вида $0 \leq \varphi(k) - \varphi(k+1) \leq 1$. Равенство единице возможно, когда v_k смежна с одной или с несколькими вершинами из P_k . Больше единицы эта разность быть не может потому, что за одну операцию склейки только одна вершина $u_k \in A_k^i$ могла отождествиться с некоторой вершиной из $A_k \setminus A_k^i$.

$$(6) u_k \in A_k^i \text{ и } v_k \in A_k^i.$$

Для операции такого вида $0 \leq \varphi(k) - \varphi(k+1) \leq 1$. Равенство единице возможно, когда хотя бы одна вершина (u_k или v_k) не имеет смежной вершины из P_k . Больше единицы быть эта разность не может потому, что в результате отождествления пары вершин, исчезает не более одной вершины.

Таким образом, только в случаях 5 и 6 $\varphi(k) - \varphi(k+1)$ может быть равной 1. Предложение 9 доказано.

Итак, при рассмотрении трех подмножеств вершин некоторого $\tilde{G}_k, i \leq k < j$, возникло 3 способа применения O_1 и 6 способов применения O_2 для получения графа $\tilde{G}_{k+1}$

в выделенном пути. Эти способы в совокупности покрывают все возможности применения O_1 и O_2 , так как отдельные применения операций отличаются только выбором пары вершин для отождествления, а все такие пары вошли в наше рассмотрение.

Мы также выявили три способа применения склейки, которые могут влиять на выполнение условия леммы о смежности ω_j и вершин из A_j^i . Было доказано, что для любого k , $i \leq k < j$, выполняется неравенство $0 \leq \varphi(k) - \varphi(k+1) \leq 1$.

Рассмотрим на участке выделенного пути от $\tilde{G}_i$ до $\tilde{G}_j$ три подмножества графов: подмножество Θ_1 , состоящее из графов, полученных в результате применения операции O_1 так, как указано в случае 3 в предложении 8, и $\varphi(k) - \varphi(k+1) = 1$; подмножество Θ_2 , состоящее из графов, полученных в результате применения операции O_2 , как указано в случае 5 предложения 9, и $\varphi(k) - \varphi(k+1) = 1$; подмножество Θ_3 , состоящее из графов, полученных в результате O_2 , как указано в случае 6 предложения 9, и $\varphi(k) - \varphi(k+1) = 1$.

Для графа $\tilde{G}_i$ справедливо равенство $\varphi(i) = |A_i|$ (согласно предложению 6 в $\tilde{G}_i$ нет родителей ω_j). Для графа $\tilde{G}_j$ равенство $\varphi(j) = 0$ выполняется по условию леммы. Следовательно,

$$|A_i| = \varphi(i) - \varphi(j) = \sum_{i \leq k < j} (\varphi(k) - \varphi(k+1)).$$

Согласно предложениям 8 и 9 разность $\varphi(k) - \varphi(k+1)$ принимает значение 0 или 1, причем 1 только тогда, когда $\tilde{G}_{k+1} \in \Theta_1 \cup \Theta_2 \cup \Theta_3$, значит,

$$|A_i| = \sum_{\{k | \tilde{G}_{k+1} \in \Theta_1 \cup \Theta_2 \cup \Theta_3\}} (\varphi(k) - \varphi(k+1)) = |\Theta_1| + |\Theta_2| + |\Theta_3|.$$

По определению, Θ_1 , Θ_2 , Θ_3 — подмножества графов, соответствующих разным вершинам части выделенного пути длины $j - i$, поэтому $|\Theta_1| + |\Theta_2| + |\Theta_3| \leq j - i$. Получаем, что $|A_i| \leq j - i$. Лемма доказана.

Пусть $\pi(K_n)$ — некоторая последовательность сборки графа K_n , $\Sigma_\pi(K_n)$ — сеть сборки, соответствующая последовательности сборки $\pi(K_n)$ по определению сети сборки. Пусть граф выделенного пути $\tilde{G}_k$, $1 \leq k \leq \tau$, из сети $\Sigma_\pi(K_n)$ соответствует графу G_s из $\pi(K_n)$. Обозначим через $|G|$ число вершин в графе G .

Лемма 5. Для любой последовательности $\pi(K_n)$, $2 < n$, существует граф G_s , $1 \leq s \leq T$, такой, что $(1/2)n < |G_s| < n$ и для любого выделенного пути сети сборки $\Sigma_\pi(K_n)$, содержащего граф $\tilde{G}_k$, который соответствует G_s , справедливо неравенство $(1/2)n < |A_k| < n$.

Доказательство. Напомним следующий факт. Пусть G_1 , G_2 и G_3 — графы некоторой последовательности сборки. Если G_3 — результат применения O_1 к паре вершин, одна из которых принадлежит G_1 , другая — G_2 , то

$$|G_3| = |G_1| + |G_2| - 1. \quad (2)$$

Если, допустим, что G_2 — результат применения O_2 к паре вершин графа G_1 , то $|G_2| = |G_1| - 1$.

Для любой последовательности сборки $\pi(K_n)$ существует такой минимальный номер i , $1 < i \leq T$, что для графа G_i из данной последовательности сборки $|G_i| \geq n$. В противном случае сборка графа K_n не завершена, так как $|K_n| = n$.

В последовательности сборки первым, по определению, стоит граф, состоящий из одного ребра и двух вершин, и по условию леммы $n > 2$, поэтому необходимо применение операций для получения G_i . Граф G_i первым в последовательности имеет n или больше вершин, поэтому он получен в результате применения O_1 .

Теперь предположим противное утверждению леммы, то есть предположим, что не существует графа G_s такого, что $(1/2)n < |G_s| < n$. Следовательно, все графы с номером, меньшим i , имеют не больше $(1/2)n$ вершин, так как G_i первым в последовательности имеет число вершин, большее или равное n . При таком предположении граф G_i нельзя получить с помощью O_1 , даже если взять для склейки пару графов с максимально возможным числом вершин $(1/2)n$. В результате применения операции O_1 получим граф с $(1/2)n + (1/2)n - 1 < n$ вершинами (см. (2)). Следовательно, предположение неверно, и граф G_s , удовлетворяющий условию леммы, существует.

Для доказательства второй части утверждения леммы рассмотрим произвольный выделенный путь в сети сборки $\Sigma_\pi(K_n)$, содержащий граф $\tilde{G}_k$, который соответствует G_s . Напомним, что A_k — множество вершин $\tilde{G}_k$ по определению. С учетом неравенства $(1/2)n < |G_s| < n$ находим, что $(1/2)n < |G_s| = |\tilde{G}_k| = |A_k| < n$. Лемма доказана.

Лемма 6. Для любого $n > 2$ справедливо неравенство $(1/2)n < L(K_n)$.

Доказательство. Пусть $\pi(K_n)$ — произвольная последовательность сборки. Данная последовательность заканчивается графом K_n по определению. Пусть $G_T \cong K_n$ — последний граф последовательности $\pi(K_n)$. Рассмотрим произвольный выделенный путь в сети $\Sigma_\pi(K_n)$. Пусть $\tilde{G}_\tau$ — последний граф данного выделенного пути, следовательно, $\tilde{G}_\tau \cong G_T \cong K_n$. Напомним, что A_τ по определению — множество вершин графа $\tilde{G}_\tau$.

По лемме 5 в выделенном пути есть граф $\tilde{G}_k$, для которого $(1/2)n < |A_k| < n$.

Как следует из определения вершины-потомка, число потомков вершин любого множества не возрастает при движении к концу выделенного пути. Так как $|A_\tau| = n$ и $|A_k| < n$ (см. выше), получаем, что $|A_\tau^k| < |A_\tau|$. Отсюда видно, что существует вершина ω_τ такая, что $\omega_\tau \in A_\tau$ и $\omega_\tau \notin A_\tau^k$. Поскольку $\tilde{G}_\tau \cong K_n$, вершина ω_τ смежна со всеми вершинами из A_τ^k . При этих условиях можно применить лемму 4.

По лемме 4 получаем, что $\tau - k \geq |A_k|$. Согласно лемме 5, как уже говорилось, $|A_k| > (1/2)n$. Число вершин в выделенном пути τ не превосходит, числа вершин в сети сборки T . Напомним, что графы выделенного пути нумеруются с единицы, то есть $k \geq 1$. В итоге получаем, что $T - 1 \geq \tau - 1 \geq \tau - k > (1/2)n$. Длина последовательности сборки $\pi(K_n)$ равна числу затраченных в ней операций склейки, то есть $T - 1$. Сложность сборки $L(K_n)$, по определению, равна длине минимальной последовательности сборки. Поскольку длина любой последовательности сборки графа K_n больше $(1/2)n$, справедливо неравенство $(1/2)n < L(K_n)$. Лемма доказана.

В теореме 1 из статьи [2] доказано, что $L(K_n) < (7/2)n + 8 \log_2 n$ для K_n . Согласно утверждениям теоремы 1 из [2] и леммы 6 для любого $n > 2$ выполняются неравенства $(1/2)n < L(K_n) < (7/2)n + 8 \log_2 n$, следовательно, $L(K_n) \asymp n$ при $n \rightarrow \infty$. Теорема доказана.

Автор благодарен А. С. Подколзину, под руководством которого выполнена эта работа.

Список литературы

1. Яблонский С. В., *Введение в дискретную математику*. Высшая школа, Москва, 2002.
2. Зайцев Д. В., О сложности сборки графов. *Интеллектуальные системы* (2005) **9**, №1–4, 381–395.

Статья поступила 3.05.2007.