Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Л. Павлов, И. А. Чеплюкова, Случайные графы
Интернет-типа и обобщенная схема размещения, *Дискрет.
матем.*, 2008, том 20, выпуск 3, 3–18

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1008>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 08:39:21

Случайные графы Интернет-типа и обобщенная схема размещения

© 2008 г. Ю. Л. Павлов, И. А. Чеплюкова

Для моделирования сложных сетей телекоммуникаций, в частности, Интернета, часто используются случайные графы, содержащие N вершин, степени которых являются независимыми случайными величинами, распределенными по закону

$$\mathbf{P}\{\eta \geq k\} = k^{-\tau},$$

где η — степень вершины, $\tau > 0$, $k = 1, 2, \dots$, при этом графы с одинаковыми степенями всех вершин равновероятны. В статье рассматривается множество таких графов при условии, что сумма степеней равна n . Показано, что для исследования асимптотического поведения таких графов можно использовать обобщенную схему размещения частиц по ячейкам. При $N, n \rightarrow \infty$ так, что $1 < n/N < \zeta(\tau)$, где $\zeta(\tau)$ — значение дзета-функции Римана в точке τ , получены предельные распределения максимальной степени и числа вершин заданной степени.

Работа выполнена при поддержке программы Президента Российской Федерации поддержки ведущих научных школ Российской Федерации, грант НШ 4129.2006.1, и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 05-01-00007а.

В последнее время значительное внимание уделяется исследованию структуры и предельного поведения случайных графов, моделирующих различные сети телекоммуникаций (см., например, [1–5]). Мы рассмотрим одну из наиболее известных конструкций такого графа [2, 3], являющуюся, как показали исследования [1], подходящей моделью сети Интернет. В связи с этим такие модели иногда называют случайными графами Интернет-типа.

Пусть имеется N вершин, занумерованных числами от 1 до N . Мы будем считать, что степени вершин являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами $\eta_1, \dots, \eta_N$. Обозначим η случайную величину, равную степени вершины, и положим

$$\mathbf{P}\{\eta \geq k\} = k^{-\tau}, \quad \tau > 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Для удобства описания структуры графа мы будем использовать, следуя [2], понятие полуребра, то есть ребра, инцидентного конкретной вершине, но для которой смежная вершина еще не определена. Предполагается, что все полуребра графа являются различными (занумерованными). Для того чтобы построить граф, сначала определяются степени всех вершин в соответствии с распределением (1), а затем все выходящие из вершин полуребра соединяются между собой равновероятно, образуя ребра. Очевидно, что такая

конструкция допускает петли и кратные ребра. Кроме того, необходимо, чтобы суммарное число полуребер было четным, поэтому вводится вспомогательная вершина 0, степень которой равна 0 или 1 в зависимости от того, является число полуребер основных вершин четным или нет. Таким образом, общее число вершин в графе равно $N + 1$. Полученные в статье результаты относятся только к основным вершинам графа и, как будет ясно из дальнейшего, дополнительная вершина не влияет на приведенные доказательства.

Во многих работах (см., например, [2, 3, 5]) изучалось асимптотическое поведение различных характеристик случайных графов Интернет-типа при $N \rightarrow \infty$. В частности, в [5] доказана локальная предельная теорема для суммы степеней вершин $v_N = \eta_1 + \dots + \eta_N$ при $\tau \in (1, 2)$, поскольку такие значения параметра τ наиболее типичны для различных сетей [1]. Заметим также, что при $\tau \in (1, 2)$ распределение (1) имеет конечное математическое ожидание и бесконечную дисперсию. Понятно, что от v_N существенно зависит поведение многих других характеристик графа, поэтому основная трудность доказательств соответствующих теорем состоит в необходимости учета асимптотики случайной величины v_N . В такой ситуации представляется естественным предложить метод исследования, состоящий в предварительном получении предельных распределений для случайных графов с известным числом степеней вершин и последующим их усреднением по распределению v_N . Кроме того, графы Интернет-типа с заданной суммой степеней вершин представляют интерес еще и потому, что на практике иногда удается оценить число связей в реальных сетях телекоммуникаций. Для изучения случайных графов с известным числом степеней можно воспользоваться обобщенной схемой размещения частиц по ячейкам, введенной и исследованной В. Ф. Колчиным (см., например, [6, 7]).

Далее мы будем рассматривать множество случайных графов Интернет-типа при условии $v_N = n$. Из (1) ясно, что

$$p_k = \mathbf{P}\{\eta = k\} = k^{-\tau} - (k+1)^{-\tau}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Введем независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_N$, для которых

$$p_k(\lambda) = \mathbf{P}\{\xi_1 = k\} = \lambda^k p_k(1 - (1 - \lambda)\Phi(\lambda, \tau, 1))^{-1}, \quad (3)$$

где $k = 1, 2, \dots$; $0 < \lambda < 1$; $\tau > 0$; $\Phi(z, s, a)$ — трансцендентная функция Лерча, имеющая вид

$$\Phi(z, s, a) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{(j+a)^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1} e^{-at}}{1 - ze^{-t}} dt, \quad (4)$$

а $\Gamma(s)$ — значение гамма-функции в точке s .

Из (1)–(4) нетрудно получить, что для рассматриваемого множества графов справедливо равенство

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_N = k_N \mid \xi_1 + \dots + \xi_N = n\}. \quad (5)$$

Равенство (5) означает, что выполнены условия обобщенной схемы размещения (см. [6, 7]), и мы можем ее использовать для исследования графов Интернет-типа, число ребер которых для четных или нечетных n равно соответственно $n/2$ или $(n+1)/2$. Этот пример применения обобщенной схемы размещения к изучению случайных графов ранее был неизвестен.

Обозначим $\eta_{(N)}$ максимальную степень вершины и μ_r число вершин степени r . В настоящей статье исследуется предельное поведение $\eta_{(N)}$ и μ_r при $N, n \rightarrow \infty$ так, что $1 < n/N < \zeta(\tau)$, где $\zeta(\tau)$ — значение дзета-функции Римана в точке τ . Заметим, что если $\tau \leq 1$, то $\zeta(\tau) = \infty$. В других зонах изменения N и n асимптотика $\eta_{(N)}$ и μ_r будет рассмотрена в следующих работах авторов.

Используя (3) и (4), легко найти, что

$$m = \mathbf{E}\xi_1 = \frac{\lambda\Phi(\lambda, \tau, 1) - (1 - \lambda)\Phi(\lambda, \tau - 1, 1)}{1 - (1 - \lambda)\Phi(\lambda, \tau, 1)}, \quad (6)$$

$$\sigma^2 = \mathbf{D}\xi_1 = \frac{2\Phi(\lambda, \tau - 1, 1) - (1 - \lambda)\Phi(\lambda, \tau - 2, 1) - \Phi(\lambda, \tau, 1)}{1 - (1 - \lambda)\Phi(\lambda, \tau, 1)} - m^2. \quad (7)$$

Параметр λ распределения (3) будем выбирать так, чтобы выполнялось равенство

$$m = n/N. \quad (8)$$

В статье доказаны следующие теоремы 1–7 о предельном поведении $\eta_{(N)}$ и μ_r .

Теорема 1. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N \rightarrow 1$, $(n - N)^3/N^2 \rightarrow \infty$, а $r = r(N, n)$ выбрано так, что $N\lambda^r p_{r+1}/p_1 \rightarrow \gamma$, где γ — некоторая неотрицательная постоянная. Тогда

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} = r\} \rightarrow e^{-\gamma}, \quad \mathbf{P}\{\eta_{(N)} = r + 1\} \rightarrow 1 - e^{-\gamma}.$$

Теорема 2. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $1 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < \zeta(\tau)$, а $r = r(N, n)$ выбрано так, что

$$\frac{N\lambda^{r+1}\tau}{r^{\tau+1}(1 - (1 - \lambda)\Phi(\lambda, \tau, 1))} \rightarrow \gamma,$$

где γ — некоторая положительная постоянная. Тогда для любого фиксированного $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leq r + k\} = \exp\{-\gamma\lambda^k(1 - \lambda)^{-1}\}(1 + o(1)).$$

В случае $n/N \rightarrow \zeta(\tau)$ мы будем говорить, что значения параметров τ, N, n допустимы, если выполнено одно из условий:

- (1) $\tau > 3$;
- (2) $\tau = 3, (\ln(1 - \lambda))/\sqrt{N} \rightarrow 0$;
- (3) $2 < \tau < 3, \sqrt{N}(1 - \lambda)^{3-\tau} \rightarrow \infty$;
- (4) $\tau = 2, N(1 - \lambda)^2 |\ln(1 - \lambda)| \rightarrow \infty$;
- (5) $1 < \tau < 2, N(1 - \lambda)^{4-\tau} \rightarrow \infty$;
- (6) $\tau = 1, N(1 - \lambda)^3 |\ln(1 - \lambda)| \rightarrow \infty$;
- (7) $0 < \tau < 1, N(1 - \lambda)^{2+\tau} \rightarrow \infty$.

Причины, по которым такие значения параметров названы допустимыми, будут понятны из доказательств полученных результатов.

Теорема 3. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N \rightarrow \zeta(\tau)$ и значения параметров τ, N, n допустимы. Пусть $r = r(N, n)$ выбрано так, что

$$\frac{N\lambda^r\tau}{r^{\tau+1}(1-\lambda)} \rightarrow \gamma,$$

где γ — некоторая положительная постоянная. Тогда

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leq r\} \rightarrow e^{-\gamma}.$$

Теорема 4. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N \rightarrow 1, n - N \rightarrow \infty$. Тогда при $r \geq 3$ для целых неотрицательных k

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{1}{k!} (Np_r(\lambda))^k \exp\{-Np_r(\lambda)\} (1 + o(1))$$

равномерно относительно $(k - Np_r(\lambda))/\sqrt{Np_r(\lambda)}$ в любом фиксированном конечном интервале.

Введем обозначение

$$\sigma_{rr}^2 = p_r(\lambda)(1 - p_r(\lambda) - \frac{(m-r)^2}{\sigma^2} p_r(\lambda)). \quad (9)$$

Теорема 5. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $1 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < \zeta(\tau)$. Тогда для целых неотрицательных k равномерно относительно $u_r = (k - Np_r(\lambda))/(\sigma_{rr}\sqrt{N})$ в любом фиксированном конечном интервале

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = (\sigma_{rr}\sqrt{2\pi N})^{-1} e^{-u_r^2/2} (1 + o(1)).$$

Это утверждение сохраняет силу при $n/N \rightarrow 1$, если выполнено одно из следующих условий:

- (1) $r \geq 3, N\lambda^{r-1} \rightarrow \infty$;
- (2) $r = 2, (n - N)^3/N^2 \rightarrow \infty$;
- (3) $r = 1, (n - N)^2/N \rightarrow \infty$.

Теорема 6. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N \rightarrow \zeta(\tau)$ и значения параметров τ, N, n допустимы. Тогда справедливо утверждение теоремы 5.

Теорема 7. Если выполнены условия теорем 4–6 и $r \rightarrow \infty$, то справедливо утверждение теоремы 4.

Ниже будут приведены вспомогательные утверждения (леммы 1–12), а затем с их помощью будут доказаны теоремы 1–7. Во всех доказательствах символы $C_1, C_2, \dots$ означают некоторые положительные постоянные.

Введем вспомогательные независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_1^{(r)}, \dots, \xi_N^{(r)}$, для которых

$$\mathbf{P}\{\xi_1^{(r)} = k\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = k \mid \xi_1 \leq r\}. \quad (10)$$

Пусть также $\tilde{\xi}_1^{(r)}, \dots, \tilde{\xi}_N^{(r)}$ означают независимые одинаково распределенные случайные величины такие, что

$$\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_1^{(r)} = k\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = k \mid \xi_1 \neq r\}. \quad (11)$$

Введем обозначения $\zeta_N^{(r)} = \xi_1^{(r)} + \dots + \xi_N^{(r)}$, $\tilde{\zeta}_N^{(r)} = \tilde{\xi}_1^{(r)} + \dots + \tilde{\xi}_N^{(r)}$,

$$P_r = \mathbf{P}\{\xi_1 > r\} = \sum_{k>r} p_k(\lambda). \quad (12)$$

Доказательства теорем 1–7 опираются на следующие хорошо известные [6, 7] леммы 1 и 2, вытекающие из соотношения (5).

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leq r\} = (1 - P_r)^N \frac{\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = n\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}}.$$

Лемма 2. *Справедливо равенство*

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \binom{N}{k} p_r^k(\lambda) (1 - p_r(\lambda))^{N-k} \frac{\mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_{N-k}^{(r)} = n - kr\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}}.$$

Используя (2), (4), (6) и (8), нетрудно получить следующий результат.

Лемма 3. *Пусть $N, n \rightarrow \infty$. Справедливы следующие утверждения.*

1. Если $n/N \rightarrow 1$, то $\lambda = (n - N)p_1/(Np_2)(1 + o(1))$.
2. Если $1 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < \zeta(\tau)$, то $0 < C_3 \leq \lambda \leq C_4 < 1$.
3. Если $n/N \rightarrow \zeta(\tau)$, то $\lambda \rightarrow 1$.

Рассмотрим предельное поведение суммы ζ_N . Обозначим $\varphi_N(t)$ характеристическую функцию случайной величины $(\zeta_N - n)/(\sigma\sqrt{N})$.

Лемма 4. *При выполнении условий теорем 1–6 равномерно по t в любом фиксированном конечном интервале*

$$\varphi_N(t) \rightarrow e^{-t^2/2}.$$

Доказательство. Обозначим $\varphi(t)$ характеристическую функцию случайной величины ξ_1 . Из (3) нетрудно получить, что

$$\varphi(t) = 1 - \frac{(1 - \lambda e^{it})\Phi(\lambda e^{it}, \tau, 1) - (1 - \lambda)\Phi(\lambda, \tau, 1)}{1 - (1 - \lambda)\Phi(\lambda, \tau, 1)}. \quad (13)$$

При достаточно малых t справедливо разложение

$$\ln \varphi(t) = itm - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \frac{t^3}{6} Q(t), \quad (14)$$

где

$$|Q(t)| \leq 2 \max_{|u| < |t|} |(\ln \varphi(u))'''|_u. \quad (15)$$

Если $n/N \geq C_1$, то из (4), (6), (7) и леммы 3 нетрудно получить, что

$$\sigma^2 \geq C_3 > 0, \quad (16)$$

поэтому

$$\sigma\sqrt{N} \rightarrow \infty. \quad (17)$$

Если же $n/N \rightarrow 1$, то, используя (2), (4), (6) и (7), находим, что

$$\sigma^2 = p_2\lambda/p_1 + o(\lambda), \quad (18)$$

и из леммы 3 и условия $n - N \rightarrow \infty$ опять следует (17). Из (14), (15), (17) получаем, что

$$\ln \varphi_N(t) = -\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6\sigma^3\sqrt{N}} Q\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}\right). \quad (19)$$

Для доказательства леммы нам достаточно показать, что второе слагаемое в правой части равенства (19) стремится к нулю.

Из (4) и (13) находим, что

$$(\ln \varphi(t))'_t = i \left(\frac{f_4(t)}{f_1(t)} - 3 \frac{f_2(t)f_3(t)}{f_1^2(t)} - 2 \left(\frac{f_2(t)}{f_1(t)} \right)^3 \right), \quad (20)$$

где

$$f_1(t) = 1 - (1 - \lambda e^{it})\Phi(\lambda e^{it}, \tau, 1),$$

$$f_2(t) = \Phi(\lambda e^{it}, \tau, 1) - (1 - \lambda e^{it})\Phi(\lambda e^{it}, \tau - 1, 1),$$

$$f_3(t) = \Phi(\lambda e^{it}, \tau, 1) - 2\Phi(\lambda e^{it}, \tau - 1, 1) + (1 - \lambda e^{it})\Phi(\lambda e^{it}, \tau - 2, 1),$$

$$f_4(t) = (1 - \lambda e^{it})\Phi(\lambda e^{it}, \tau - 3, 1) - 3\Phi(\lambda e^{it}, \tau - 2, 1) + 3\Phi(\lambda e^{it}, \tau - 1, 1) - \Phi(\lambda e^{it}, \tau, 1).$$

Если $1 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < \infty$, то из (4), (15), (20) и леммы 3 следует, что $Q(t/(\sigma\sqrt{N})) \leq C_4$. Отсюда и из (16) получаем, что в этом случае

$$Q(t/(\sigma\sqrt{N})) / (\sigma^3\sqrt{N}) \rightarrow 0. \quad (21)$$

Пусть $n/N \rightarrow 1$. Опять используя (4), (15), (20) и лемму 3, находим, что

$$Q(t/(\sigma\sqrt{N})) = O(\lambda) \quad (22)$$

и с помощью (2), (18), леммы 3 и условия $n - N \rightarrow \infty$ приходим к (21).

Нам осталось рассмотреть случай $n/N \rightarrow \zeta(\tau)$. Этот случай характерен тем, что σ^2 и $(\ln \varphi(t))'_t$ ведут себя по-разному в разных условиях изменения параметров τ , N , n . Из (4) ясно, что $\Phi(z, s, a)$ сходится при $s > 1$, поэтому трудности возникают только при $s \leq 1$. Легко видеть, что

$$z\Phi(z, 1, 1) = -\ln(1 - z), \quad (1 - z)\Phi(z, 0, 1) = 1, \quad (23)$$

а при $s < 1$ и $z \rightarrow 1$ известна асимптотика функции Лерча:

$$\Phi(z, s, 1) = \Gamma(1 - s)(-\ln z)^{s-1}(1 + o(1)), \quad (24)$$

поэтому

$$(1 - z)\Phi(z, s, 1) = O((1 - z)^s). \quad (25)$$

Из (7) и (25) следует, что при $\tau > 2$ справедливо неравенство (16). Из (7) и (23) ясно, что при $\tau = 2$

$$\sigma^2 = |\ln(1 - \lambda)|(1 + o(1)), \quad (26)$$

а если $0 < \tau < 2$, то из (7), (23) и (25) получаем, что

$$\sigma^2 = \tau \Gamma(2 - \tau)(1 - \lambda)^{\tau-2}(1 + o(1)). \quad (27)$$

Теперь оценим $(\ln \varphi(t))_t'''$. Из (20), (23)–(25) и леммы 3 находим, что при достаточно малых t

$$(\ln \varphi(t))_t''' = \begin{cases} O(1), & \tau > 3; \\ O(\ln(1 - \lambda)), & \tau = 3; \\ O((1 - \lambda)^{\tau-3}), & 0 < \tau < 3. \end{cases} \quad (28)$$

Используя (26)–(28) при различных условиях изменения параметров τ , N , n , приходим к (21), поэтому из (19) следует утверждение леммы.

Лемма 4 показывает, что распределение суммы ζ_N слабо сходится к нормальному закону. Покажем, что на самом деле имеет место локальная сходимость. Как это часто бывает в обобщенной схеме размещения, рассматриваемые суммы вспомогательных случайных величин образуют схему серий [6]. К сожалению, известные достаточные условия локальной сходимости либо слишком сложны для проверки (см., например [9]), либо не охватывают все возможные зоны изменения параметров и носителей рассматриваемых распределений [10, 11]. Поэтому ниже будут приведены единообразные доказательства лемм 5, 7 и 9.

Лемма 5. Пусть выполнены условия теорем 1–6. Тогда для целых неотрицательных k равномерно относительно $z = (k - n)/(\sigma\sqrt{N})$ в любом фиксированном конечном интервале

$$\mathbf{P}\{\zeta_N = k\} = \frac{1 + o(1)}{\sigma\sqrt{2\pi N}} e^{-z^2/2}.$$

Доказательство. Представим вероятность $\mathbf{P}\{\zeta_N = k\}$ по формуле обращения в виде интеграла

$$\mathbf{P}\{\zeta_N = k\} = (2\pi\sigma\sqrt{N})^{-1} \int_{-\pi\sigma\sqrt{N}}^{\pi\sigma\sqrt{N}} e^{-izt} \varphi_N(t) dt. \quad (29)$$

Поскольку

$$(2\pi)^{-1/2} e^{-z^2/2} = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-izt - t^2/2\} dt, \quad (30)$$

разность

$$R_N = 2\pi(\sigma\sqrt{N}\mathbf{P}\{\zeta_N = k\} - (2\pi)^{-1/2} e^{-z^2/2}) \quad (31)$$

можно представить в виде суммы четырех интегралов:

$$R_N = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-A}^A e^{-izt} (\varphi_N(t) - e^{-t^2/2}) dt, & I_2 &= \int_{A < |t| < \varepsilon \sigma \sqrt{N}} e^{-izt} \varphi_N(t) dt, \\ I_3 &= \int_{\varepsilon \sigma \sqrt{N} \leq |t| \leq \pi \sigma \sqrt{N}} e^{-izt} \varphi_N(t) dt, & I_4 &= - \int_{A < |t|} \exp\{-izt - t^2/2\} dt, \end{aligned} \quad (32)$$

положительные постоянные A и ε будут выбраны позднее.

Лемма будет доказана, если мы покажем, что выбором достаточно больших N и n разность R_N можно сделать сколь угодно малой. Для этого оценим отдельно интегралы I_1 – I_4 .

Из леммы 4 следует, что $I_1 \rightarrow 0$. Далее,

$$|I_4| \leq \int_{A < |t|} e^{-t^2/2} dt, \quad (33)$$

следовательно, интеграл I_4 можно сделать сколь угодно малым выбором достаточно большого A .

Теперь нужно оценить I_2 и I_3 . Сначала мы рассмотрим эти интегралы в наиболее простом случае $1 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < \zeta(\tau)$, а затем укажем на особенности их оценки в других случаях.

Из (15), (16), (19) и (20) ясно, что при $t < \varepsilon \sigma \sqrt{N}$ и достаточно малом ε справедливо неравенство

$$|\varphi_N(t)| \leq e^{-C_5 t^2}, \quad (34)$$

поэтому

$$|I_2| \leq 2 \int_{A < |t|} e^{-C_5 t^2} dt \quad (35)$$

и последнее выражение, как и (33), можно сделать сколь угодно малым выбором A .

Оценим интеграл I_3 . При $\varepsilon \leq |t| \leq \pi$ справедливо неравенство

$$|\varphi(t)| \leq e^{-C_6}, \quad (36)$$

поскольку максимальный шаг распределения случайной величины ξ_1 равен единице, характеристическая функция $\varphi(t)$ непрерывно зависит от λ и, как следует из леммы 3, $0 < C_3 \leq \lambda \leq C_4 < 1$. Из (32) и (36) получаем, что

$$|I_3| \leq 2\pi\sigma\sqrt{N}e^{-C_6N}, \quad (37)$$

а последнее выражение, как видно из (7), стремится к нулю.

Таким образом, лемма доказана при $1 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < \zeta(\tau)$. Рассмотрим I_2 и I_3 в других случаях и, в соответствии с этим, разобьем дальнейшее доказательство на четыре пункта.

1. Оценка интеграла I_2 при $n/N \rightarrow 1$, $n - N \rightarrow \infty$. Из (18), (19), (22) и леммы 3 видно, что при $|t/(\sigma\sqrt{N})| < \varepsilon$ справедливо неравенство (34), следовательно, оценка (35) сохраняет силу.

2. Оценка интеграла I_3 при $n/N \rightarrow 1$, $n - N \rightarrow \infty$. Из (2), (3), (13) и леммы 3 следует, что

$$\varphi(t) = e^{it}(1 - (p_2/p_1)(1 - e^{it})\lambda + O(\lambda^2)), \quad (38)$$

откуда получаем, используя (2), лемму 3 и условие $\varepsilon \leq |t/(\sigma\sqrt{N})| \leq \pi$, что

$$\left| \varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}\right) \right| \leq \exp\left\{-C_7 \frac{n-N}{N}\right\}. \quad (39)$$

Поскольку

$$\varphi_N(t) = \exp\left\{-\frac{int}{\sigma\sqrt{N}}\right\} \varphi^N\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}\right), \quad (40)$$

из (18), (32) и леммы 3 вытекает, что

$$|I_3| \leq C_8 \sqrt{n-N} e^{-C_7(n-N)} \rightarrow 0. \quad (41)$$

3. Оценка интеграла I_2 при $n/N \rightarrow \zeta(\tau)$. Из (14)–(16), (19) и (28) находим, что если $\tau > 3$, то справедлива оценка (34) и, следовательно, неравенство (35). Если же $0 < \tau \leq 3$, то разобьем I_2 на сумму двух интегралов: $I_2 = I'_2 + I''_2$, где области интегрирования I'_2 и I''_2 соответственно равны

$$\{t: A < |t| \leq \varepsilon B(\lambda, \tau)\sigma\sqrt{N}\}, \quad \{t: \varepsilon B(\lambda, \tau)\sigma\sqrt{N} < |t| < \varepsilon\sigma\sqrt{N}\}, \quad (42)$$

а функция $B(\lambda, \tau)$ задается следующим образом:

$$B(\lambda, \tau) = \begin{cases} (-\ln(1-\lambda))^{-1}, & \tau = 3, \\ (1-\lambda)^{3-\tau}, & 2 < \tau < 3, \\ (\lambda-1)\ln(1-\lambda), & \tau = 2, \\ 1-\lambda, & 0 < \tau < 2. \end{cases} \quad (43)$$

Используя (14)–(16), (26)–(28) и (43), для интеграла I'_2 получаем неравенство типа (35).

Для оценки I''_2 мы можем рассмотреть функцию $(1-\lambda z)\Phi(\lambda z, \tau, 1)$ и разложить ее по формуле Тейлора в окрестности точки $z = 1$. Тогда из (4) и (13) находим, что

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= 1 + (1 - \cos t - i \sin t) \\ &\times \frac{(1-\lambda)\Phi(\lambda, \tau-1, 1) - (1-\lambda+\lambda^2)\Phi(\lambda, \tau, 1)}{\lambda(1 - (1-\lambda)\Phi(\lambda, \tau, 1))} (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (44)$$

Отсюда получаем, учитывая (23), что

$$|\varphi(t/(\sigma\sqrt{N}))|^N < \exp\{-C_9 N(1 - \cos(t/(\sigma\sqrt{N})))\}. \quad (45)$$

Поскольку при $|t| < \varepsilon\sigma\sqrt{N}$

$$1 - \cos(t/(\sigma\sqrt{N})) \geq C_{10} t^2 / (\sigma^2 N),$$

из (40) и (45) следует, что

$$|I_2''| \leq \int_{\varepsilon B(\lambda, \tau) \sigma \sqrt{N}}^{\infty} e^{-C_{10} t^2 / \sigma^2} dt. \quad (46)$$

Используя (7), (26), (27), (43) и учитывая область допустимых значений τ , N , n , из (46) несложно вывести, что $I_2'' \rightarrow 0$.

4. *Оценка интеграла I_3 при $n/N \rightarrow \zeta(\tau)$.* Очевидно, что если $\varepsilon \leq |t| \leq \pi$, то (36) и (37) сохраняют силу. Если $\tau > 2$, то, учитывая (37) и соотношение $\sigma^2 = O(1)$ (см. (7)), получаем, что $I_3 \rightarrow 0$. Если $\tau = 2$, то из (26) и (37) находим, что

$$|I_3| < C_{11} \sqrt{N |\ln(1 - \lambda)|} e^{-C_6 N}.$$

Последнее выражение стремится к нулю, поскольку если бы это было не так, то, как легко видеть, параметры τ , N , n вышли бы за пределы области допустимых значений. Аналогично соотношение $I_3 \rightarrow 0$ доказывается и для случая $0 < \tau < 2$. Лемма 5 доказана.

Далее рассмотрим асимптотическое поведение $\zeta_N^{(r)}$. Обозначим $\varphi_N^{(r)}(t)$ характеристическую функцию случайной величины $(\zeta_N^{(r)} - n)/(\sigma \sqrt{N})$.

Лемма 6. Пусть $N, n \rightarrow \infty$, а $r = r(N, n)$ выбрано так, что $NP_r \rightarrow \gamma$, где γ — некоторая положительная постоянная. Тогда равномерно по t в любом фиксированном конечном интервале справедливы следующие утверждения.

1. Если $1 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < \zeta(\tau)$, то

$$\varphi_N^{(r)}(t) \rightarrow e^{-t^2/2}. \quad (47)$$

2. Если $n/N \rightarrow \zeta(\tau)$ и значения параметров τ , N , n допустимы, то (47) сохраняет силу.

3. Если $n/N \rightarrow 1$, $(n - N)^3/N^2 \rightarrow \infty$, $NP_{r-1} \rightarrow \infty$, $\gamma \geq 0$, то при $s = 0, \pm 1$

$$\varphi_N^{(r+s)}(t) \rightarrow e^{-t^2/2}. \quad (48)$$

Доказательство. Из (10), (12) и (13) находим, что

$$\begin{aligned} \varphi_N^{(r)}(t) &= \exp\{-int/(\sigma \sqrt{N})\} (1 - P_r)^{-N} \\ &\times \left(\varphi(t/(\sigma \sqrt{N})) - \sum_{j=1}^{\infty} p_{r+j}(\lambda) \exp\{it(r+j)/(\sigma \sqrt{N})\} \right)^N. \end{aligned} \quad (49)$$

Отсюда и из леммы 4 получаем, что

$$\begin{aligned} \varphi_N^{(r)}(t) &= (1 + o(1)) e^{-t^2/2} (1 - P_r)^{-N} \\ &\times \left(1 - (1 + o(1)) \sum_{j=1}^{\infty} p_{r+j}(\lambda) \exp\{it(r+j)/(\sigma \sqrt{N})\} \right)^N. \end{aligned} \quad (50)$$

Поскольку

$$\sum_{j=1}^{\infty} p_{r+j}(\lambda) \exp\{it(r+j)/(\sigma\sqrt{N})\} = P_r + R(t), \quad (51)$$

где

$$|R(t)| \leq |t/(\sigma\sqrt{N})| \sum_{j=1}^{\infty} (r+j) p_{r+j}(\lambda),$$

из (50) и (51) ясно, что для доказательства (47) и (48) при $s = 0$ достаточно установить, что

$$(\sigma\sqrt{N})^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} (r+j) p_{r+j}(\lambda) = o(N^{-1}). \quad (52)$$

Очевидно, что если $n/N \geq C_1 > 1$, то из условия $NP_r \rightarrow \gamma$ следует, что $r \rightarrow \infty$. Тогда, используя (2) и (3), нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} (r+j) p_{r+j}(\lambda) &= (r+1) p_{r+1}(\lambda) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(r+j) p_{r+j}(\lambda)}{(r+1) p_{r+1}(\lambda)} \\ &= \frac{(r+1) p_{r+1}(\lambda)}{1-\lambda} (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (53)$$

Легко видеть также, что соотношение (53) справедливо и при $n/N \rightarrow 1$.

Пусть $1 < C_1 \leq n/N < \zeta(\tau)$. Из (3) и условия $NP_r \rightarrow \gamma$ получаем, что

$$NP_r = N p_{r+1}(\lambda) \sum_{j=0}^{\infty} p_{r+j+1}(\lambda) / p_{r+1}(\lambda) = \frac{N \lambda^{r+1} \tau (1 + o(1))}{(1 - (1 - \lambda) \Phi(\lambda, \tau, 1)) r^{\tau+1} (1 - \lambda)} \rightarrow \gamma. \quad (54)$$

Отсюда, из леммы 3, (2) и (4) находим, что

$$p_{r+1}(\lambda) = O((1 - \lambda)/N). \quad (55)$$

Из (54) видно, что $r = o(\sqrt{N}/(1 - \lambda))$, поэтому из (53), (55), леммы 3 и (16) получаем (52).

Пусть $n/N \rightarrow 1$. Из (2)–(4), (53), леммы 3 и условия $NP_r \rightarrow \gamma$ следует, что

$$NP_r = N p_{r+1}(\lambda) (1 + o(1)) = N \lambda^r p_{r+1} / p_1 (1 + o(1)) \rightarrow \gamma. \quad (56)$$

Нетрудно видеть, что (52) вытекает из (17), (53), (56) для фиксированных r . Если $r \rightarrow \infty$, то $r = o(\sqrt{n - N})$, ибо в противном случае условие $NP_{r-1} \rightarrow \infty$ было бы невозможным. Отсюда и из (18), (53) опять следует (52).

Заметим, что при $s = 1$ соотношение (48) очевидным образом следует из (50), поскольку $NP_{r+1} \rightarrow 0$ в силу (56) и леммы 3. Пусть $s = -1$. В этом случае после замены r на $r - 1$ соотношения (53) и (48) получаем из (56) и условий $NP_{r-1} \rightarrow \infty$, $(n - N)^3 / N^2 \rightarrow \infty$. Лемма доказана.

Лемма 7. Пусть выполнены условия леммы 6. Тогда

$$\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = k\} = \frac{1 + o(1)}{\sigma\sqrt{2\pi N}} \exp\left\{-\frac{(k-n)^2}{2\sigma^2 N}\right\}$$

равномерно относительно целых неотрицательных k таких, что $(k-n)/(\sigma\sqrt{N})$ лежит в любом фиксированном конечном интервале. Если $n/N \rightarrow 1$, то в этом утверждении можно заменить r на $r+1$ и на $r-1$.

Доказательство. Лемма 7 доказывается аналогично лемме 5. Для этого достаточно в (29), (31) заменить ζ_N на $\zeta_N^{(r)}$ и в (29), (32) заменить $\varphi_N(t)$ на $\varphi_N^{(r)}(t)$ и убедиться, используя (30), что разность (31) стремится к нулю. Очевидно, что $I_1 \rightarrow 0$ в силу леммы 6, а для I_4 справедлива оценка (33).

Оценим I_2 и I_3 . Из (49), (50) ясно, что условие $NP_r \rightarrow \gamma$ приводит к неравенству $|\varphi_N^{(r)}(t)| \leq C_3 |\varphi_N(t)|$. Отсюда получаем, что для I_2 справедливы соотношения типа (34) и (35), а для оценки I_3 в случае $n/N \geq C_1 > 1$ мы можем использовать (36) и (37). Если же $n/N \rightarrow 1$, то, применяя (39) для I_3 , получаем оценку вида (41). Очевидно также, что равенства (49), (50) и (52) позволяют сохранить эти рассуждения и при замене r на $r+1$ или $r-1$. Лемма 7 доказана.

Введем обозначения $m_r = \mathbf{E}\tilde{\xi}_1^{(r)}$, $\sigma_r^2 = \mathbf{D}\tilde{\xi}_1^{(r)}$. С помощью (3), (6), (7), (11) нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} m_r &= (m - rp_r(\lambda))/(1 - p_r(\lambda)), \\ \sigma_r^2 &= \frac{\sigma^2}{(1 - p_r(\lambda))^2} \left(1 - p_r(\lambda) - \frac{(m-r)^2}{\sigma^2} p_r(\lambda)\right). \end{aligned} \quad (57)$$

Пусть $\tilde{\varphi}_S^{(r)}(t)$ есть характеристическая функция случайной величины $(\tilde{\xi}_S^{(r)} - Sm_r)/(\sigma_r\sqrt{S})$.

Лемма 8. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ и выполнено одно из следующих условий:

- (1) $1 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < \zeta(\tau)$;
- (2) $n/N \rightarrow \zeta(\tau)$ и значения параметров τ , N , n допустимы;
- (3) $r \geq 3$, $n/N \rightarrow 1$, $n - N \rightarrow \infty$;
- (4) $r = 2$, $n/N \rightarrow 1$, $(n - N)^3/N^2 \rightarrow \infty$;
- (5) $r = 1$, $n/N \rightarrow 1$, $(n - N)^2/N \rightarrow \infty$.

Тогда при $S = N(1 - p_r(\lambda))(1 + o(1))$ равномерно по t в любом фиксированном конечном интервале

$$\tilde{\varphi}_S^{(r)}(t) \rightarrow e^{-t^2/2}. \quad (58)$$

Кроме того, это утверждение остается верным при выполнении одного из условий 1–3 и $r \rightarrow \infty$.

Доказательство. Мы будем следовать схеме доказательства леммы 4. Используя (3), (4), (7), (8), (16), (18), (26), (27) и лемму 3, нетрудно показать, что

$$\sigma_r\sqrt{S} \rightarrow \infty. \quad (59)$$

Отсюда получаем, по аналогии с (19), что

$$\ln \tilde{\varphi}_S^{(r)}(t) = -\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6\sigma_r^3\sqrt{S}} Q_r\left(\frac{t}{\sigma_r\sqrt{S}}\right), \quad (60)$$

где

$$|Q_r(t)| \leq 2 \max_{|u| \leq |t|} |(\ln \tilde{\varphi}_r(u))'''|, \quad \tilde{\varphi}_r(t) = \mathbf{E} e^{it\tilde{\xi}_1^{(r)}} = \frac{\varphi(t) - p_r(\lambda)e^{itr}}{1 - p_r(\lambda)}. \quad (61)$$

Из (60) видно, что для доказательства (58) достаточно показать, что при выполнении условий леммы $Q_r(t/(\sigma_r\sqrt{S})) / (\sigma_r^3\sqrt{S}) \rightarrow 0$. Это можно сделать аналогично тому, как было получено соотношение (21), найдя явный вид $(\ln \tilde{\varphi}_r(t))'''$ и используя (3), (4), (7), (8), (16), (18), (26), (27), (57), (59) и лемму 3.

Лемма 9. Пусть выполнены условия леммы 8. Тогда для целых неотрицательных k равномерно относительно $z = (k - S m_r) / (\sigma_r\sqrt{S})$ в любом фиксированном конечном интервале

$$\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_S^{(r)} = k\} = \frac{1 + o(1)}{\sigma_r\sqrt{2\pi S}} e^{-z^2/2}.$$

Это утверждение остается справедливым при выполнении условий 1–3 леммы 8 и $r \rightarrow \infty$.

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 5, рассмотрим разность

$$R_S = 2\pi(\sigma_r\sqrt{S}\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_N^{(r)} = k\} - (2\pi)^{-1/2}e^{-z^2/2})$$

и представим ее в виде суммы $R_S = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$, где

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-A}^A e^{-izt} (\tilde{\varphi}_S^{(r)}(t) - e^{-t^2/2}) dt, & I_2 &= \int_{A < |t| < \varepsilon\sigma_r\sqrt{S}} e^{-izt} \tilde{\varphi}_S^{(r)}(t) dt, \\ I_3 &= \int_{\varepsilon\sigma_r\sqrt{S} \leq |t| \leq \pi\sigma_r\sqrt{S}} e^{-izt} \tilde{\varphi}_S^{(r)}(t) dt, & I_4 &= - \int_{A < |t|} \exp\{-izt - t^2/2\} dt, \end{aligned}$$

положительные постоянные A и ε определяются ниже.

Нам достаточно показать, что интегралы I_1 – I_4 стремятся к нулю. Из леммы 8 получаем, что $I_1 \rightarrow 0$, а для I_4 справедлива оценка (33). Осталось оценить I_2 и I_3 . В простейшем случае, когда $1 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < \zeta(\tau)$, эти интегралы оцениваются так же, как и в лемме 5, в том числе и при $r \rightarrow \infty$. Пусть $n/N \rightarrow 1, n - N \rightarrow \infty$. Разлагая $\tilde{\varphi}_r(t)$ в ряд Тейлора, нетрудно получить, что при достаточно малых t

$$|\tilde{\varphi}_r(t)| \leq \exp\{-C_3 t^2 \sigma_r^2\}, \quad (62)$$

поэтому в области интегрирования I_2

$$|\tilde{\varphi}_S^{(r)}(t)| \leq e^{-C_4 t^2},$$

откуда следует оценка I_2 , подобная (35).

Рассмотрим I_3 . Если $r \geq 3$, то из (3), (4), (13), (61) и леммы 3 легко найти, что

$$|\tilde{\varphi}_r(t)| = |\varphi(t)|(1 + O(\lambda^2)).$$

Отсюда и из (3), (4), (8), (18), (39), (57), леммы 3 и условия $S = N(1 - p_r(\lambda))(1 + o(1))$, получаем оценку I_3 , аналогичную (41). Пусть $r = 2$. Используя (3), (4), (13), (61), лемму 3 и раскладывая $\varphi(t)$ в ряд по степеням λ подобно (38), получаем, что

$$|\tilde{\varphi}_r(t)| \leq \exp\{-C_5\lambda^2(\cos 2t - 1) + C_6\lambda^3(\cos 3t - 1) + O(\lambda^4)\}. \quad (63)$$

Представим I_3 в виде суммы двух частей:

$$I_3 = I'_3 + I''_3, \quad (64)$$

где области интегрирования I'_3 и I''_3 соответственно равны

$$\{t: \varepsilon\sigma_2\sqrt{S} < |t| \leq (\pi - \varepsilon)\sigma_2\sqrt{S}\}, \quad \{t: (\pi - \varepsilon)\sigma_2\sqrt{S} < |t| \leq \pi\sigma_2\sqrt{S}\}.$$

Из (63) ясно, что в области интегрирования I'_3

$$|\tilde{\varphi}_2(t/(\sigma_2\sqrt{S}))| \leq \exp\{-C_7\lambda^2\},$$

поэтому из (3), (4), (7), (57) и леммы 3 находим, что

$$|I'_3| \leq C_8\sigma_2\sqrt{S} \exp\{-C_7\lambda^2 S\} \leq C_9\lambda\sqrt{N} \exp\{-C_{10}\lambda^2 N\} \rightarrow 0. \quad (65)$$

Разлагая $1 - \cos 2t$ в ряд в окрестности точки $t = \pi$, получаем, что при $t \rightarrow \pi$

$$1 - \cos 2t = 2(t - \pi)^2 + O((t - \pi)^4),$$

поэтому из (63) следует, что при $|t - \pi| < \varepsilon$ и достаточно малом ε

$$|\tilde{\varphi}_2(t)| \leq \exp\{-C_{11}\lambda^3 - C_{12}\lambda^2(t - \pi)^2\}.$$

Отсюда и из (18), (57) и леммы 3 получаем, что

$$\begin{aligned} |I''_3| &\leq C_{13}\sigma_2\sqrt{S} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |\tilde{\varphi}_2(y + \pi)|^S dy \leq C_{14}\lambda\sqrt{N} \exp\{-C_{15}\lambda^3 N\} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \exp\{-C_{16}\lambda^2 y^2 N\} dy \\ &= C_{14} \exp\{-C_{15}\lambda^3 N\} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-C_{16}y^2} dy, \end{aligned}$$

а последнее выражение стремится к нулю в силу условия $(n - N)^3/N^2 \rightarrow \infty$ и леммы 3. Отсюда и из (64), (65) находим, что $I_3 \rightarrow 0$.

Пусть $r = 1$. Опять используя (3), (4), (7), (13), (57), (61) и лемму 3, получаем, что в области интегрирования I_3

$$|\tilde{\varphi}_1(t/(\sigma_1\sqrt{S}))|^S \leq \exp\{-C_{17}\lambda(\cos(t/(\sigma_1\sqrt{S})) - 1)\}$$

и, поскольку $S = \lambda N(1 + o(1))$ и $(n - N)^2/N \rightarrow \infty$,

$$|I_3| \leq C_{18}\sqrt{\lambda S} \exp\{-C_{19}\lambda S\} \rightarrow 0.$$

Нам осталось рассмотреть случай $n/N \rightarrow \zeta(\tau)$. Применяя (3), (4), (13), (60), (61) и лемму 3, нетрудно вывести, что при $\tau > 3$ в области интегрирования I_2

$$|\tilde{\varphi}_S^{(r)}(t)| \leq e^{-C_{20}t^2},$$

поэтому для I_2 справедлива оценка, аналогичная (35). Если $0 < \tau \leq 3$, то I_2 разбивается на сумму $I_2 = I'_2 + I''_2$, где области интегрирования I'_2 и I''_2 определяются условиями (42), (43) с очевидной заменой σ на σ_r . Легко проверить, что интеграл I'_2 оценивается так же, как и I_2 в случае $\tau > 3$. Из (44) нетрудно получить, что в области интегрирования I''_2

$$|\varphi(t/(\sigma_r\sqrt{S}))| \leq \exp\{-C_{21}(1 - \cos(t/(\sigma_r\sqrt{S})))\}.$$

Используя это неравенство и (61), можно показать, что

$$|\tilde{\varphi}_S^{(r)}(t)|^S < e^{-C_{22}t^2},$$

следовательно, для I''_2 справедлива оценка вида (46) и, как и в лемме 5, $I''_2 \rightarrow 0$.

Для того чтобы оценить I_3 , достаточно заметить, что если $\varepsilon \leq |t| \leq \pi$, то

$$|\tilde{\varphi}_r(t)| \leq e^{-C_{23}}$$

и из (3), (4), (7), (26), (27), (57) и леммы 3 получаем оценку, аналогичную (37). Повторяя рассуждения, приведенные в доказательстве леммы 5, отсюда находим, что $I_3 \rightarrow 0$. Лемма 9 доказана.

Рассмотрим предельное поведение NP_r . Следующее утверждение является прямым следствием (56) и леммы 3.

Лемма 10. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда

$$NP_r \rightarrow \gamma, \quad NP_{r+1} \rightarrow 0, \quad NP_{r-1} \rightarrow \infty.$$

Лемма 11. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда при любом фиксированном целом k

$$NP_{r+k} = \gamma\lambda^k(1-\lambda)^{-1}(1+o(1)).$$

Доказательство. По аналогии с (54) получаем, что

$$\begin{aligned} NP_{r+k} &= Np_{r+1}(\lambda) \sum_{j=0}^{\infty} p_{r+j+k+1}(\lambda)/p_{r+1}(\lambda) \\ &= \frac{N\lambda^{r+k+1}\tau(1+o(1))}{(1-(1-\lambda)\Phi(\lambda, \tau, 1))r^{\tau+1}(1-\lambda)} = \gamma\lambda^k(1-\lambda)^{-1}(1+o(1)). \end{aligned}$$

Из (54) и леммы 3 очевидным образом вытекает следующее утверждение.

Лемма 12. Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда $NP_r \rightarrow \gamma$.

Теперь мы можем доказать теоремы 1–7. Используя леммы 5 и 7, получаем, что в условиях теорем 1–3

$$\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = n\}/\mathbf{P}\{\zeta_N = n\} \rightarrow 1. \quad (66)$$

Пусть выполнены условия теоремы 1. Из (66) и лемм 1, 10 находим, что

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leq r-1\} \rightarrow 0, \quad \mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leq r\} \rightarrow e^{-\gamma}, \quad \mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leq r+1\} \rightarrow 1,$$

что и приводит к утверждению теоремы 1. Теорема 2 легко следует из лемм 1, 11 и (66), а теорема 3 — из лемм 1, 12 и (66).

Для доказательства теоремы 4 заметим, что в силу (3) и леммы 3 верно соотношение $p_r(\lambda) \rightarrow 0$ и, согласно пуассоновскому приближению биномиального распределения, справедливому равномерно относительно целых k , для которых $(k - Np_r(\lambda))/\sqrt{Np_r(\lambda)}$ лежит в любом конечном интервале,

$$\binom{N}{k} p_r^k(\lambda) (1 - p_r(\lambda))^{N-k} = \frac{(Np_r(\lambda))^k}{k!} \exp\{-Np_r(\lambda)\} (1 + o(1)). \quad (67)$$

Используя леммы 5, 9 и (57) получаем, что

$$\mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_{N-k}^{(k)} = n - kr\} / \mathbf{P}\{\zeta_N = n\} \rightarrow 1, \quad (68)$$

поэтому теорема 4 следует из леммы 2 и (67).

Получить теоремы 5 и 6 нетрудно, воспользовавшись нормальным приближением биномиального распределения при $Np_r(\lambda)(1 - p_r(\lambda)) \rightarrow \infty$, справедливым для всех k таких, что $(k - Np_r(\lambda))/\sqrt{Np_r(\lambda)(1 - p_r(\lambda))}$ лежит в любом конечном интервале:

$$\binom{N}{k} p_r^k(\lambda) (1 - p_r(\lambda))^{N-k} = \frac{1 + o(1)}{\sqrt{2\pi Np_r(\lambda)(1 - p_r(\lambda))}} \exp\left\{-\frac{(k - Np_r(\lambda))^2}{2Np_r(\lambda)(1 - p_r(\lambda))}\right\},$$

а также соотношениями (3), (9) и леммами 2, 3, 5, 9. Для доказательства теоремы 7 заметим, что при $r \rightarrow \infty$ соотношение (68) сохраняет силу и нам остается применить лемму 2 и (67).

Список литературы

1. Faloutsos C., Faloutsos P., Faloutsos M., On power-law relationships of the internet topology. *Computer Communications Rev.* (1999) **29**, 251–252.
2. Reittu H., Norros I., On the power-law random graph model of massive data networks. *Performance Evaluation* (2004) **55**, 3–23.
3. Newman M. E. J., Strogatz S. H., Watts D. J., Random graphs with arbitrary degree distribution and their applications. *Phys. Rev. E* (2001) **64**, 026118.
4. Janson S., Luczak T., Ruciński A., *Random graphs*. Wiley, New York, 2000.
5. Павлов Ю. Л., Предельное распределение объема гигантской компоненты в случайном графе Интернет-типа. *Дискретная математика* (2007) **19**, №3, 22–34.
6. Колчин В. Ф., *Случайные отображения*. Наука, Москва, 1984.
7. Колчин В. Ф., *Случайные графы*. Физматлит, Москва, 2000.
8. Wood D., *Techn. Rep. 15-20*, Univ. Kent, 1992.
9. Мухин А. Б., Локальные предельные теоремы для решетчатых случайных величин. *Теория вероятностей и ее применения* (1991) **36**, №4, 660–674.
10. Колчин А. В., Предельные теоремы для обобщенной схемы размещения. *Дискретная математика* (2003) **15**, №4, 148–157.
11. Колчин А. В., Колчин В. Ф., О переходе распределений сумм независимых одинаково распределенных случайных величин с одной решетки на другую в обобщенной схеме размещения. *Дискретная математика* (2006) **18**, №4, 113–127.

Статья поступила 10.07.2007.