Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Н. Панков, Верхняя граница для числа функций, удовлетворяющих строгому лавинному критерию, *Дискрет. матем.*, 2005, том 17, выпуск 2, 95–101

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm101>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 16:54:12

Верхняя граница для числа функций, удовлетворяющих строгому лавинному критерию

© 2005 г. К. Н. Панков

Строгий лавинный критерий был предложен при изучении критериев построения некоторых криптографических функций. Двоичная функция $f(x)$, $x \in V_n$, удовлетворяет этому критерию, если при замене любой координаты вектора x ее дополнением значение $f(x)$ изменяется ровно в половине случаев. В данной работе представлена верхняя граница для числа таких функций при достаточно больших n .

Пусть V_n — множество двоичных векторов размерности n . Двоичная функция $f(x)$, $x \in V_n$, удовлетворяет строгому лавинному критерию, если при замене любой координаты вектора x дополнением значение $f(x)$ изменяется ровно в половине случаев. Это эквивалентно тому, что для любого $i = 1, 2, \dots$

$$\|f(x) \oplus f(x \oplus e_i)\| = \sum_{\beta \in V_n} (f(\beta) \oplus f(\beta \oplus e_i)) = 2^{n-1},$$

где $e_i \in V_n$ — вектор веса 1 с единицей на i -м месте.

Данный критерий был введен в [1]. Как и для любого другого критерия, для строгого лавинного критерия представляет интерес подсчет числа удовлетворяющих ему функций от n переменных для произвольного n . Данное число обозначим через S^n . К настоящему времени получены лишь оценки этого числа. Нижние оценки, представленные в [2, 3, 4] определяются путем построения классов функций, удовлетворяющих изучаемому критерию, и вычисления мощностей этих классов. В [5] с помощью представления элементов V_n как вершин n -мерного гиперкуба доказана самая сильная на нынешний момент нижняя оценка для S^n , справедливая для достаточно больших n :

$$S^n \geq \frac{\exp_2(2^n - n^2/2 + n)}{\pi^{n/2}},$$

где $\exp_2(x) = 2^x$.

Нетривиальная верхняя граница для S^n была построена в [6].

Пусть на множестве V_n задано равномерное распределение вероятностей, тогда $f(x)$ можно рассматривать как случайную величину. Будем говорить, что двоичная функция $f(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in V_n$, зависит на 50% от входа x_i , если вероятность того, что она принимает разные значения на векторах, различающихся только i -й координатой, равна $1/2$.

Обозначим через $S(n, k)$ число функций от n переменных, зависящих на 50% от переменных $x_1, \dots, x_k$. Функция $f(x)$ зависит на 50% от переменных $x_1, \dots, x_k$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{\beta \in V_n} \begin{pmatrix} f(\beta) \oplus f(\beta \oplus e_1) \\ \dots \\ f(\beta) \oplus f(\beta \oplus e_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n-1} \\ \dots \\ 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

При этом $S^n = S(n, n)$.

В [6] найдены точные значения для $S(n, 1)$ и $S(n, 2)$:

$$S(n, 1) = \binom{2^{n-1}}{2^{n-2}} 2^{n-1},$$

$$S(n, 2) = \sum_{i=0}^{2^{n-3}} \binom{2^{n-2}}{2i} 8^{2^{n-2}-2i} 2^{2i} \sum_{j=0}^i \binom{2i}{2j} \binom{2j}{j} \binom{2i-2j}{i-j}.$$

Очевидно, что $S^n \leq S(n, k)$ для любого $k \leq n$, однако вычисление точных значений $S(n, k)$ при $k \geq 2$ представляет значительную сложность.

Обозначим через A_i событие, заключающееся в том, что случайная двоичная функция не является зависимой на 50% от переменной x_i . Тогда

$$\mathbf{P}(A_i) = 1 - \frac{S(n, 1)}{\exp_2(2^n)} < 1,$$

$$\mathbf{P}(A_i \cap A_j) = 1 - \frac{S(n, 2)}{\exp_2(2^n)} < 1, \quad i \neq j.$$

В [6] предложена следующая верхняя оценка для числа функций, удовлетворяющих строгому лавинному критерию:

$$S^n \leq 2^{2^n} - \frac{2^{2^n} n^2 (\mathbf{P}(A_1))^2}{n \mathbf{P}(A_1) + n(n-1) \mathbf{P}(A_1 \cap A_2)}. \quad (1)$$

В данной работе доказывается асимптотическая формула для $S(n, k) / \exp_2(2^n)$ в случае произвольного натурального фиксированного k и из нее в качестве следствия выводится верхняя оценка S^n , улучшающая оценку (1).

Теорема 1. Пусть $n \rightarrow \infty$, k — фиксированное натуральное число. Тогда

$$\frac{S(n, k)}{\exp_2(2^n)} = 2^{2k-1} \pi^{-k/2} 2^{-nk/2} + o(2^{-n(k+1)/2}). \quad (2)$$

Доказательство. Рассмотрим сумму

$$\Sigma_n = \sum_{\beta \in V_n} \begin{pmatrix} f(\beta) \oplus f(\beta \oplus e_1) \\ \dots \\ f(\beta) \oplus f(\beta \oplus e_k) \end{pmatrix}$$

и разобьем область суммирования на 2^{n-k} областей, соответствующих векторам β с оди-

наковыми последними $n - k$ координатами, набор которых будем обозначать α . Тогда

$$\begin{aligned}\Sigma_n &= \sum_{\alpha \in V_{n-k}} \left(\sum_{\gamma \in V_k} \begin{pmatrix} f(\gamma\alpha) \oplus f(\gamma\alpha \oplus e_1) \\ \dots \\ f(\gamma\alpha) \oplus f(\gamma\alpha \oplus e_k) \end{pmatrix} \right) \\ &= \sum_{\alpha \in V_{n-k}} 2 \begin{pmatrix} \sum_{t \in V_{k-1}} (f(1t\alpha) \oplus f(0t\alpha)) \\ \dots \\ \sum_{t \in V_{k-1}} (f(t_1 \dots t_{i-1} 1 t_i \dots t_k \alpha) \oplus f(t_1 \dots t_{i-1} 0 t_i \dots t_k \alpha)) \\ \dots \\ \sum_{t \in V_{k-1}} (f(t 1 \alpha) \oplus f(t 0 \alpha)) \end{pmatrix},\end{aligned}$$

здесь $t = (t_1, \dots, t_{k-1}) \in V_{k-1}$, $(1t\alpha)$ означает конкатенацию векторов 1 , t и α , $\sum$ означает сложение в поле действительных чисел, а $\oplus$ — сложение по модулю 2.

Пусть функция f выбирается случайно и равновероятно из множества B_n всех двоичных функций от n переменных. Это эквивалентно независимому равновероятному выбору значений $f(\beta)$ из $\{0, 1\}$ для всех β из множества V_n . Очевидно, что

$$\mathbf{P} \left(\sum_{\beta \in V_n} \begin{pmatrix} f(\beta) \oplus f(\beta \oplus e_1) \\ \dots \\ f(\beta) \oplus f(\beta \oplus e_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n-1} \\ \dots \\ 2^{n-1} \end{pmatrix} \right) = \frac{S(n, k)}{2^{2^n}}.$$

Введем случайный вектор

$$\eta_\alpha = \begin{pmatrix} \eta_\alpha^1 \\ \dots \\ \eta_\alpha^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{t \in V_{k-1}} (f(1t\alpha) \oplus f(0t\alpha)) \\ \dots \\ \sum_{t \in V_{k-1}} (f(t 1 \alpha) \oplus f(t 0 \alpha)) \end{pmatrix}.$$

Слагаемые в каждой компоненте вектора η_α независимы и принимают значения 0 и 1 с вероятностью $1/2$. Поэтому каждая компонента вектора η_α имеет биномиальное распределение с параметрами $(2^{k-1}, 1/2)$.

Очевидно, что все случайные векторы η_α независимы, одинаково распределены и

$$\mathbf{M}\eta_\alpha = \begin{pmatrix} 2^{k-2} \\ \dots \\ 2^{k-2} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P} \left(\sum_{\beta \in V_n} \begin{pmatrix} f(\beta) \oplus f(\beta \oplus e_1) \\ \dots \\ f(\beta) \oplus f(\beta \oplus e_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n-1} \\ \dots \\ 2^{n-1} \end{pmatrix} \right) = \mathbf{P} \left(\sum_{\alpha \in V_{n-k}} \eta_\alpha = \begin{pmatrix} 2^{n-2} \\ \dots \\ 2^{n-2} \end{pmatrix} \right).$$

Лемма 1. Справедливо равенство

$$\mathbf{M}\eta_\alpha^i \eta_\alpha^j = 2^{2(k-2)} + 2^{k-3} I\{i = j\}, \quad 1 \leq i, j \leq k. \quad (3)$$

Доказательство. Справедливо равенство

$$\eta_\alpha^i = \frac{1}{2} \sum_{t \in V_k} (f(t\alpha) \oplus f(t\alpha \oplus e_i)).$$

Если $i = j$, то $\mathbf{M}(\eta_\alpha^i)^2$ — второй момент случайной величины с биномиальным распределением с параметрами $(2^{k-1}, 1/2)$ (суммы 2^{k-1} независимых равновероятных индикаторов).

Если $i \neq j$, то

$$\mathbf{M}\eta_{\alpha}^i \eta_{\alpha}^j = \frac{1}{4} \mathbf{M} \sum_{t_1, t_2 \in V_k} (f(t_1 \alpha) \oplus f(t_1 \alpha \oplus e_i))(f(t_2 \alpha) \oplus f(t_2 \alpha \oplus e_j)).$$

Значения f в разных точках независимы и равномерно распределены на $V = \{0, 1\}$. При любых t_1, t_2 и $i \neq j$, каждый сомножитель содержит слагаемое, не зависящее от второго, следовательно, сомножители независимы.

Лемма 1 доказана.

Продолжим доказательство теоремы. Из равенств (3) следует, что $\mathbf{D}\eta_{\alpha}^i = 2^{k-3}$ и $\text{cov } \eta_{\alpha}^i \eta_{\alpha}^j = 0$ при $i \neq j$.

Следовательно, ковариационная матрица случайного вектора η_{α} имеет вид $\text{Cov } \eta_{\alpha} = 2^{k-3} I$, где I — единица в кольце квадратных матриц размера k .

Рассмотрим решетку Z_k всех целочисленных векторов размерности k — дискретную подгруппу в множестве всех вещественных векторов размерности k . Ясно, что

$$\mathbf{P}(\eta_{\alpha} \in Z_k) = 1.$$

Следовательно, η_{α} — решетчатый случайный вектор.

Согласно [7] решетка M называется минимальной для случайного вектора X , если она удовлетворяет следующим двум условиям:

- (1) $\mathbf{P}(X \in x + M) = 1$ для любого x такого, что $\mathbf{P}(X = x) > 0$,
- (2) если существует подгруппа C множества всех вещественных векторов размерности k такая, что $\mathbf{P}(X \in y + C) = 1$ при некотором y , то $M \subseteq C$.

Пусть

$$\bar{e} = \sum_{j=1}^k e_j, \quad e_i \in V_k, \quad i = 1, \dots, k.$$

Рассмотрим множество L такое, что

$$L = 2Z_k \cup \{2Z_k + \bar{e}\}.$$

Лемма 2. Множество L является минимальной решеткой для случайного вектора η_{α} .

Доказательство. Очевидно, что L является решеткой.

Рассмотрим распределение случайного вектора η_{α} . Многочлен Жегалкина функции f можно единственным образом представить в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigoplus_{v \in V_k} x^v f_v(x_{k+1}, \dots, x_n),$$

где $x = (x_1, \dots, x_k)$, $v = (v_1, \dots, v_k)$, $x^v = x_1^{v_1} \dots x_k^{v_k}$, а знак $\bigoplus$ означает сложение по модулю 2.

Случайному и равновероятному выбору f из множества B_n соответствует случайный, независимый и равновероятный выбор из множества B_{n-k} набора из 2^k функций f_v , $v \in V_k$, значения которых можно рассматривать как независимые случайные величины, равномерно распределенные на V .

Несложно убедиться, что случайную величину η_α^i можно представить в виде

$$\eta_\alpha^i = \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{J \subset \{1, \dots, k\} \setminus \{i\}} \bigoplus_{\mu \in V_m} f_{e_i \oplus \mu_1 e_{j_1}} \oplus \dots \oplus \mu_m e_{j_m}(\alpha),$$

где $|J| = m$, $J = \{j_1, \dots, j_m\}$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$.

Если в представлении η_α^i перейти от суммирования по модулю 2 к обычному суммированию в поле действительных чисел, используя то, что

$$f_1(\alpha) \oplus f_2(\alpha) = (f_1(\alpha) - f_2(\alpha))^2 = f_1(\alpha) + f_2(\alpha) - 2f_1(\alpha)f_2(\alpha)$$

нетрудно увидеть, что

$$\eta_\alpha = \begin{pmatrix} 2G_1(f_{(11)}(\alpha), t \in V_{k-1}, t \neq \bar{e}) + f_{(11\dots 11)}(\alpha) \\ \dots \\ 2G_1(f_{(t_1\dots t_{i-1}1 \ t_i\dots t_{k-1})}(\alpha), t = (t_1 \dots t_{k-1}) \in V_{k-1}, t \neq \bar{e}) + f_{(11\dots 11)}(\alpha) \\ \dots \\ 2G_k(f_{(t_1)}(\alpha), t \in V_{k-1}, t \neq \bar{e}) + f_{(11\dots 11)}(\alpha) \end{pmatrix}$$

где $G_1(x_i, i \in \{1, 2^{k-1} - 1\}), \dots, G_k(x_i, i \in \{1, 2^{k-1} - 1\})$ — некоторые многочлены от $2^{k-1} - 1$ переменных. Следовательно, случайный вектор η_α принимает значения либо из множества $\{2Z_k\}$, либо из множества $\{2Z_k + \bar{e}\}$. Получаем, что $\mathbf{P}(\eta_\alpha \in L) = 1$.

Нетрудно убедиться, что базисом L является набор векторов вида

$$\{2e_1, 2e_2, \dots, 2e_{k-1}, \bar{e}\}.$$

Если случайная величина $f_{\bar{e} \oplus e_i}(\alpha)$ принимает значение 1, а f_v принимает значение 0 для прочих $v \in V_k$, то нетрудно убедиться, что η_α принимает значение $2\bar{e} - 2e_i$.

Аналогично, если $f_{\bar{e}}(\alpha) = 1$, а $f_v = 0$ для прочих $v \in V_k$, то η_α принимает значение $\bar{e}$. Для любого i , $0 < i < k$, справедливо равенство $2e_i = 2\bar{e} - (2\bar{e} - 2e_i)$, следовательно, можно сделать вывод, что если $\mathbf{P}(\eta_\alpha \in M) = 1$, где M — некоторая подгруппа множества всех вещественных векторов размерности k , то $L \subseteq M$. Следовательно, L — минимальная решетка для η_α .

Лемма 2 доказана.

Вернемся к доказательству теоремы и рассмотрим случайный вектор $X_\alpha = T\eta_\alpha$, где $T = 2^{-(k-3)/2}I$.

Очевидно, что

$$\mathbf{M}X_\alpha = 2^{(k-1)/2}\bar{e}, \quad \text{Cov } X_\alpha = I.$$

Нетрудно убедиться, что $\mathbf{M}\|X_\alpha - \mathbf{M}X_\alpha\|^3 < \infty$.

Повторив доказательство леммы 2 с точностью до умножения на матрицу T , можно заметить, что минимальная решетка L' для случайного вектора X_α имеет базис

$$\{2^{(5-k)/2}e_1, \dots, 2^{(5-k)/2}e_{k-1}, 2^{(3-k)/2}\bar{e}\},$$

и следовательно, модуль определителя матрицы, составленной из базисных векторов (определитель решетки, не зависящий от выбора базиса), равен

$$\det L' = 2^{-(k^2-5k+2)/2},$$

и

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(\sum_{\alpha \in V_{n-k}} \eta_{\alpha} = \begin{pmatrix} 2^{n-2} \\ \dots \\ 2^{n-2} \end{pmatrix} \right) &= \mathbf{P} \left(\sum_{\alpha \in V_{n-k}} X_{\alpha} = T \begin{pmatrix} 2^{n-1} \\ \dots \\ 2^{n-1} \end{pmatrix} \right) \\ &= \mathbf{P} \left(\sum_{\alpha \in V_{n-k}} X_{\alpha} = \begin{pmatrix} 2^{(2n-k-1)/2} \\ \dots \\ 2^{(2n-k-1)/2} \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, при $n \rightarrow \infty$ для суммы 2^{n-k} независимых одинаково распределенных случайных векторов X_{α} выполнены условия локальной предельной теоремы из [7] для сумм независимых одинаково распределенных случайных векторов и, следовательно,

$$\begin{aligned} (1 + \|y_{\theta, 2^{n-k}}\|^3) \mathbf{P} \left(\sum_{\alpha \in V_{n-k}} X_{\alpha} = \theta \right) &= \frac{1}{2^{(n-k)k/2} (2\pi)^{-k/2}} \det L' \exp \left(-\frac{1}{2} \|y_{\theta, 2^{n-k}}\|^2 \right) \\ &+ \frac{1}{2^{(n-k)(k+1)/2} (2\pi)^{-k/2}} \det L' \exp \left(-\frac{1}{2} \|y_{\theta, 2^{n-k}}\|^2 \right) \\ &\times \left\{ -\frac{1}{6} (\chi_{(3,0,\dots,0)}(-y_1^3 + 3y_1) + \dots + \chi_{(0,0,\dots,3)}(-y_k^3 + 3y_k)) \right. \\ &- \frac{1}{2} (\chi_{(2,1,\dots,0)}(-y_1^2 y_2 + y_2) + \dots + \chi_{(0,\dots,1,2)}(-y_k^2 y_{k-1} + y_{k-1})) \\ &\left. - \chi_{(1,1,1,0,\dots,0)}(-y_1 y_2 y_3) + \chi_{(0,\dots,1,1,1)}(-y_{k-2} y_{k-1} y_k) \right\} + o(2^{-n(k+1)/2}), \end{aligned}$$

где $y_{\theta, 2^{n-k}} = (y_1, \dots, y_k) = 2^{-(n-k)/2} (\theta - 2^{n-k} \mathbf{M} X_{\alpha})$, а $\chi_{(y_1, \dots, y_k)} = \chi_{\gamma}$ — семиинвариант случайного вектора X_{α} порядка γ .

В нашем случае

$$\theta = 2^{(2n-k-1)/2} \bar{e}, \quad y_{\theta, 2^{n-k}} = 2^{-(n-k)/2} (2^{(2n-k-1)/2} \bar{e} - 2^{n-k} 2^{(k-1)/2} \bar{e}) = \bar{0},$$

где $\bar{0} \in V_k$ — вектор веса 0, следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(\sum_{\alpha \in V_{n-k}} X_{\alpha} = \begin{pmatrix} 2^{(2n-k-1)/2} \\ \dots \\ 2^{(2n-k-1)/2} \end{pmatrix} \right) \\ = 2^{-(k^2-5k+2)/2} 2^{-(n-k)k/2} (2\pi)^{-k/2} + o(2^{-n(k+1)/2}), \\ \frac{1}{2^{2n}} S(n, k) = \mathbf{P} \left(\sum_{\beta \in V_n} \begin{pmatrix} f(\beta) \oplus f(\beta \oplus e_1) \\ \dots \\ f(\beta) \oplus f(\beta \oplus e_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n-1} \\ \dots \\ 2^{n-1} \end{pmatrix} \right) \\ = \mathbf{P} \left(\sum_{\alpha \in V_{n-k}} \eta_{\alpha} = \begin{pmatrix} 2^{n-2} \\ \dots \\ 2^{n-2} \end{pmatrix} \right) = \mathbf{P} \left(\sum_{\alpha \in V_{n-k}} X_{\alpha} = \begin{pmatrix} 2^{(2n-k-1)/2} \\ \dots \\ 2^{(2n-k-1)/2} \end{pmatrix} \right) \\ = 2^{2k-1} \pi^{-k/2} 2^{-nk/2} + o(2^{-n(k+1)/2}). \end{aligned}$$

Теорема 1 доказана.

Данная теорема при $k = 1$ предлагает асимптотическую формулу для $S(n, 1)$, совпадающую с формулой, доказанной в [2].

Следствие 1. Пусть k — некоторое натуральное число, ε — положительное вещественное число. Тогда существует натуральное число N такое, что для любых $n > N$

$$S^n < (1 + \varepsilon)\pi^{-k/2}2^{2^n - nk/2 + 2k - 1}.$$

Доказательство. Воспользуемся неравенством $S^n < S(n, k)$. Согласно теореме 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(n, k)/2^{2^n}2^{2k-1}\pi^{-k/2}2^{-nk/2} = 1.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется N такое, что для всех $n > N$

$$S(n, k) < (1 + \varepsilon)2^{2k-1}\pi^{-k/2}2^{2^n - nk/2}.$$

Следствие 1 доказано.

Теперь, используя результаты данной работы и работы [5], можно выписать следующую двустороннюю оценку для S^n при произвольном положительном ε и фиксированном k при всех достаточно больших n :

$$\frac{\exp_2(2^n - n^2/2 + n)}{\pi^{n/2}} \leq S^n < \frac{(1 + \varepsilon)2^{2k-1} \exp(2^n - nk/2)}{\pi^{k/2}}.$$

Список литературы

1. Webster A. F., Tavares S. E., On the design of S -boxes. *Lecture Notes Comput. Sci.* (1986) **218**, 523–534.
2. Cusick T. W., Bounds on the number of functions satisfying the strict avalanche criterion. *Inform. Processing Lett.* (1996) **57**, 261–263.
3. Cusick T. W., Stanica P., Bounds on the number of functions satisfying the strict avalanche criterion. *Inform. Processing Lett.* (1996) **60**, 215–219.
4. Youssef A. M., Tavares S. E., Comment on bounds on the number of functions satisfying the strict avalanche criterion. *Inform. Processing Lett.* (1996) **60**, 271–275.
5. Bliss D. K., A lower bound on the number of functions satisfying the strict avalanche criterion. *Discrete Math.* (1998) **185**, 29–39.
6. O'Connor L., An upper bound on the number of functions satisfying the strict avalanche criterion. *Inform. Processing Lett.* (1994) **52**, 325–327.
7. Бхаттачария Р. Н., Ранга РАО Р., *Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения*. Наука, Москва, 1982.

Статья поступила 05.10.2004.