Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Шаповалов, Совместность и алгоритм распознавания несовместности реализаций случайных систем дискретных уравнений с двузначными неизвестными, *Дискрет. матем.*, 2008, том 20, выпуск 3, 28–39

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1010>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 17:50:55

Совместность и алгоритм распознавания несовместности реализаций случайных систем дискретных уравнений с двузначными неизвестными

© 2008 г. А. В. Шаповалов

Рассматривается случайная система дискретных уравнений относительно n двузначных неизвестных, состоящая из $M = M(n)$ уравнений. Функции в уравнениях выбираются случайно из конечного множества функций и могут зависеть не более чем от m переменных. Обоснован критерий наличия у случайной системы уравнений пороговой функции совместности, определяемой как функция $Q(n)$, для которой вероятность совместности случайной системы уравнений стремится к единице и к нулю при $n \rightarrow \infty$, $M(n)/Q(n) \rightarrow 0$ и $M(n)/Q(n) \rightarrow \infty$. Показано, что пороговые функции совместности могут иметь только вид n и $n^{1-1/r}$, $2 \leq r \leq m+1$; построены критерии наличия у случайной системы уравнений таких пороговых функций. Для случайных систем уравнений с пороговыми функциями вида $n^{1-1/r}$, $2 \leq r \leq m+1$, оценена вероятность совместности при $M \sim cn^{1-1/r}$, $n \rightarrow \infty$ (она убывает от единицы до нуля, принимая все промежуточные значения, с ростом c от нуля до ∞) и построен алгоритм распознавания несовместности реализаций случайных систем уравнений. Этот алгоритм имеет такую же предельную вероятность определения несовместности систем уравнений, как и алгоритм полного перебора решений, но низкую трудоемкость — порядка $n^{1-1/r}$.

1. Основные определения и результаты

Пусть $\Phi_i = \{f_{i,1}, f_{i,2}, \dots, f_{i,m_i}\}$ — упорядоченное множество функций, заданных на множестве i -мерных векторов, координаты которых выбираются из множества $B = \{0, 1\}$, $m_i = |\Phi_i|$, $i = 0, 1, \dots, m$. Каждая функция из Φ_i существенно зависит ровно от i переменных и принимает значения в конечном множестве $A = \{a_0, \dots, a_{q-1}\}$, $q > 1$. Декартово произведение трех множеств $\{0, 1, \dots, m\}$, $\{1, \dots, \max_{i=0,1,\dots,m} m_i\}$ и A обозначим через E . Пусть $\bar{c} = \{c_{i,j,a}, (i, j, a) \in E\}$ — набор неотрицательных констант, сумма которых равна единице, и $c_{i,j,a} = 0$, если $j > m_i$ или a не принадлежит множеству значений функции $f_{i,j}$. Через $\bar{b}$ будем обозначать второй элемент из B .

Случайная система уравнений $S = S_{n,M,\bar{c}}$ относительно n неизвестных $x_1, \dots, x_n$ состоит из M уравнений, которые выбираются последовательно, случайно и независимо, вероятность появления уравнения вида

$$f_{i,j}(x_{s_1}, x_{s_2}, \dots, x_{s_i}) = a \quad (1)$$

равна $c_{i,j,a}$ для каждого набора $(i, j, a) \in E$, а выбор упорядоченного набора индексов $s_1, \dots, s_i$ из множества $\{1, \dots, n\}$ осуществляется независимо, случайно и равновероятно из всех $n(n-1) \dots (n-i+1)$ возможных упорядоченных наборов по i штук (выборка без возвращения). Индексы i и j в (1) означают, что функция в левой части уравнения является j -м элементом множества Φ_i .

В работе исследуется асимптотическое поведение вероятности совместности случайной системы уравнений S при $n \rightarrow \infty$, когда число ее уравнений $M = M(n)$ зависит от n . Все асимптотические формулы приводятся при условии, что $n \rightarrow \infty$, используются обозначения $(k)_i = k(k-1) \dots (k-i+1)$, $[x]$ — целая часть числа x .

Основные используемые определения приводятся ниже, остальные можно найти в [4, 12–15]. Под свойством $Q = Q_n$ случайного элемента (случайного гиперграфа или случайной системы уравнений) понимается некоторое подмножество его множества реализаций. Под вероятностью свойства Q случайного элемента понимается сумма вероятностей реализаций этого случайного элемента, входящих в Q . Вероятность совместности $P_c(S)$ случайной системы уравнений S равна сумме вероятностей совместных реализаций этой случайной системы уравнений. При заданном соотношении параметров n и $M(n)$ почти все реализации случайного элемента обладают свойством Q , если вероятность этого свойства стремится к единице при $n \rightarrow \infty$. Если существует функция $Q(n)$, возрастающая при $n \rightarrow \infty$ и такая, что $P_c(S)$ стремится к единице (нулю) при $M(n)/Q(n) \rightarrow 0$ ($M(n)/Q(n) \rightarrow \infty$), то она называется пороговой функцией совместности случайной системы уравнений S . Минимальной несовместной подсистемой системы уравнений будем называть несовместную подсистему, которая становится совместной при исключении из нее любого уравнения, допустимой подсистемой — подсистему, состоящую из уравнений вида (1), для которых $c_{i,j,a} > 0$. Концевым ребром гиперграфа называется ребро, все вершины которого, кроме, может быть, одной, инцидентны только этому ребру. Связный гиперграф без циклов называется гипердеревом.

Для каждого набора $(i, j, a) \in E$ обозначим через $t_{i,j,a}^{(0)}$ и $t_{i,j,a}^{(1)}$ числа однозначно определяющихся из уравнения (1) переменных, равных 0 и 1. Под подфункцией $g_{s_1, \dots, s_t}^{b_1, \dots, b_t}(y_1, \dots, y_i)$ функции $g(y_1, \dots, y_i)$ обычно понимается функция $i - t$ переменных, получаемая из функции $g(y_1, \dots, y_i)$ в результате фиксации переменных с номерами $s_1, \dots, s_t$ значениями $b_1, \dots, b_t$. Скажем, что множество $W = \{s_1, \dots, s_t\} \subseteq \{1, \dots, i\}$ является несовместной фиксацией (t -фиксацией) значением b переменных уравнения (1), где $1 \leq t \leq i$, $b \in B$, если при $g = f_{i,j}$ уравнение $g_{s_1, \dots, s_t}^{b_1, \dots, b_t}(y_1, \dots, y_i) = a$ несовместно. Для каждого набора $(i, j, a) \in E$ обозначим через $k_{i,j,a}^{(b,t)}$ число несовместных t -фиксаций значением b переменных уравнения (1).

Среднее значение $c^{(b)}$ чисел, однозначно определяющихся из уравнения случайной системы уравнений S переменных, равных b , и среднее значение $c^{(b,t)}$ числа несовместных t -фиксаций значением b уравнения этой системы удовлетворяют формулам

$$c^{(b)} = \sum_{(i,j,a) \in E} c_{i,j,a} t_{i,j,a}^{(b)}, \quad c^{(b,t)} = \sum_{(i,j,a) \in E, t \leq i \leq m} c_{i,j,a} k_{i,j,a}^{(b,t)}, \quad b \in \{0, 1\}.$$

Рангом несовместных фиксаций значением b переменных уравнения (1) назовем минимальное значение t , при котором существует хотя бы одна несовместная фиксация значением b переменных такого уравнения. Если $f_{i,j}(b, \dots, b) = a$, то этот ранг равен нулю. Обозначим через $R^{(b)}$ ранг несовместных фиксаций значением b переменных уравнения случайной системы S , равный минимальному значению r , при котором $c^{(b,r)} > 0$. Если $c^{(b,r)} = 0$ для каждого r из множества $\{1, \dots, m\}$, то $R^{(b)} = 0$.

Рассмотрим алгоритм А1 распознавания несовместности реализаций случайной системы уравнений S с пороговой функцией совместности $n^{1-1/r}$, $r = 2, \dots, m+1$.

Алгоритм имеет два шага.

1. Из уравнений с однозначно определяющимися переменными выявляются все равные b неизвестные системы уравнений.
2. Перебираются уравнения с несовместными $(r-1)$ -фиксациями значением b . Если найдется такое уравнение с фиксацией $\{s_1, \dots, s_t\}$, что в нем на местах $s_1, \dots, s_t$ стоят неизвестные, значения которых на первом шаге были определены (и равны b), то система уравнений несовместна; в противном случае не делается никакого вывода о ее совместности.

Через $\pi = \pi(\text{А1})$ обозначим надежность алгоритма А1, определяемую как сумму вероятностей реализаций случайной системы уравнений S , несовместность которых этот алгоритм распознает.

Теорема 1. *Случайная система уравнений S имеет пороговую функцию совместности $n^{1-1/r}$, $r = 2, \dots, m+1$, тогда и только тогда, когда для некоторого $b \in B$ выполняются соотношения $c^{(b)} > 0$, $R^{(b)} = r-1$, в этом случае при*

$$M \sim cn^{1-1/r}, \quad (2)$$

где c — положительная постоянная, справедливы оценки

$$P_c(S) \sim e^{-\lambda}, \quad \pi \sim 1 - e^{-\lambda}, \quad \lambda = c^r c^{(b, r-1)} (c^{(b)})^{r-1}.$$

Теорема 2. *Случайная система уравнений S имеет пороговую функцию совместности n тогда и только тогда, когда $c^{(0)} + c^{(1)} = 0$, $R^{(0)} R^{(1)} > 0$.*

Теорема 3. *Случайная система уравнений S имеет пороговую функцию совместности тогда и только тогда, когда $R^{(0)} R^{(1)} > 0$. Пороговая функция совместности случайной системы уравнений S равна n или $n^{1-1/r}$, $r = 2, \dots, m+1$.*

В условиях теоремы 1 надежность алгоритма А1 эквивалентна определяемой аналогично надежности алгоритма полного перебора решений, но алгоритм А1 при условии (2) имеет трудоемкость порядка $n^{1-1/r}$, а трудоемкость алгоритма перебора — экспоненциального порядка. При $R^{(0)} = 0$ и/или $R^{(1)} = 0$ случайная система уравнений S имеет решение $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ и/или $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$ и не имеет других решений. Условие $R^{(0)} R^{(1)} > 0$ эквивалентно существованию двух наборов (i_0, j_0, a_0) , (i_1, j_1, a_1) , удовлетворяющих условиям

$$f_{i_0, j_0}(0, \dots, 0) \neq a_0, \quad f_{i_1, j_1}(1, \dots, 1) \neq a_1, \quad c_{i_0, j_0, a_0} c_{i_1, j_1, a_1} > 0. \quad (3)$$

Случайная система уравнений S является частным случаем изучавшейся в [13] случайной системы уравнений, для которой $|B| \geq 2$. Теорема 1, в отличие от близких по форме теоремы 4.1 работы [13] и формулы (2.5) статьи [2], конструктивна, то есть дает конкретный вид оценок вероятностей совместности случайных систем уравнений. В теореме 3 показано, что при $|B| = 2$ параметр r у пороговой функции совместности $n^{1-1/r}$ не превосходит $m+1$ и доказан критерий наличия пороговой функции совместности. Понятие пороговой функции совместности случайной системы уравнений введено в [12], где показана ее связь с пороговой функцией свойства случайных графов и гиперграфов,

закключающегося в наличии подграфов заданного вида (см. также [13–15]). Алгоритмы распознавания несовместности реализаций случайных систем уравнений с пороговыми функциями $\sqrt{n}$, $n^{2/3}$ и одной функцией в левых частях уравнений исследовались Г. В. Балакиным и В. А. Копытцевым. Результаты и обзоры по данной тематике можно найти в [1–3, 5–13].

2. Геометрические свойства случайной системы уравнений

Для изучения геометрических свойств реализаций случайной системы уравнений ей сопоставляется случайный гиперграф (см. [5, 7, 12, 13]). Каждой реализации случайной системы уравнений S сопоставляется гиперграф. При этом переменной x_j соответствует вершина v_j , $j = 1, \dots, n$, а каждое уравнение системы однозначно определяет соответствующее ребро сопоставляемого системе гиперграфа: ребро состоит из упорядоченных вершин, соответствующих существенным переменным функции в уравнении. Порядок на множестве вершин определяется порядком на множестве неизвестных соответствующего уравнения. Каждое ребро имеет метку, выбираемую из множества E . Метка ребра гиперграфа равна (i, j, a) тогда и только тогда, когда в левой части соответствующего ему уравнения стоит функция $f_{i,j}$, а в правой части этого уравнения стоит элемент a . Случайной системе уравнений S сопоставляется случайный гиперграф $MG(S)$, реализациями которого являются все гиперграфы с множеством вершин $\{v_1, \dots, v_n\}$ и M упорядоченными ребрами. Вершины в ребрах упорядочены, ребра имеют метки из множества E . Вероятности реализаций случайного гиперграфа $MG(S)$ равны вероятностям соответствующих им реализаций случайной системы уравнений S . Случайная система уравнений S и соответствующий ей случайный гиперграф однозначно определяют друг друга.

Справедливы следующие эквивалентные определения случайной системы уравнений S и случайного гиперграфа $MG(S)$. Последовательно, независимо друг от друга, с вероятностью $c_i = \sum_{(j,a)} c_{i,j,a}$, для указанных случайных элементов выбирается число i существенных переменных в уравнении (вершин в ребре), $i = 0, 1, \dots, m$, $c_0 + \dots + c_m = 1$. Для каждого уравнения, зависящего от i переменных (ребра из i вершин), случайно, равновероятно и независимо от других уравнений (ребер) выбираются i неупорядоченных неизвестных (вершин), $i = 0, 1, \dots, m$, затем они случайно и равновероятно упорядочиваются одним из $i!$ возможных вариантов. После этого для каждого уравнения, зависящего от i переменных (ребра из i вершин), независимо от других уравнений (ребер) с вероятностью $c_{i,j,a}/c_i$ для всех пар (j, a) выбирается функция $f_{i,j}$ из Φ_i и правая часть a из множества A (вторая и третья компоненты метки ребра).

Такие определения случайных элементов позволяют сделать вывод, что для первоначального изучения их геометрической структуры необязательно знать весь набор $\bar{c}$ и порядок на множествах вершин в ребрах. Знание величин $c_0, \dots, c_m$ уже позволяет исследовать эту структуру (наличие гипердеревьев и циклов, их вид и др.) без детализации, учитывающей конкретный вид функций и правые части уравнений. Если в последнем из приведенных определений случайного гиперграфа $MG(S)$ остановиться после выбора неупорядоченных вершин для ребер его реализаций, то получится случайный гиперграф $MG_{n,\bar{c}}$, свойства которого изучались в [12, 13]. Следовательно, эти результаты описывают основные черты докритического этапа эволюции и случайного гиперграфа $MG(S)$, в частности, почти все реализации случайного гиперграфа при $M = o(n)$ не имеют циклов, а при $M = o(n^{1-1/r})$ — гипердеревьев из r и более ребер.

Докажем две леммы.

Лемма 1. Пусть $\Phi = \{\Phi_0 \cup \dots \cup \Phi_m\}$ и U — некоторое множество совместных уравнений с функциями из множества Φ . Тогда

(а) если U содержит уравнение с однозначно определяющейся переменной, равной b , $b \in B$, и минимальное значение ранга несовместных фиксаций значением b переменных уравнений из множества U равно $t - 1$, $2 \leq t \leq m + 1$, то из элементов U можно построить несовместные подсистемы уравнений, соответствующие гипердеревьям, причем минимальное значение числа уравнений в таких подсистемах равно t , и любая минимальная несовместная подсистема из t уравнений имеет следующий вид:

- (1) функция в левой части t -го уравнения имеет несовместную $(t - 1)$ -фиксацию $W = \{s_1, \dots, s_{t-1}\}$ значением b переменных этого уравнения,
- (2) первые $t - 1$ уравнений попарно не имеют общих переменных, но каждое из них имеет ровно одну общую переменную с t -м уравнением, которая в k -м уравнении однозначно определяется и равна b , а в t -м уравнении имеет номер s_k , $s_k \in W$, $k = 1, \dots, t - 1$;

(б) если в U нет уравнений с несовместной фиксацией элементом $b \in B$ их переменных, то любая система уравнений, состоящая из элементов U , совместна и имеет решение $\mathbf{b} = (b, \dots, b)$.

Доказательство. Отсутствие несовместных фиксаций значением b переменных уравнения означает, что при фиксации всех его переменных значением b оно остается совместным и имеет решение $\mathbf{b}$. Таким свойством обладают все уравнения в U . Из этого следует утверждение (б) леммы.

Перейдем к утверждению (а) леммы. Пусть минимальное значение ранга t несовместных фиксаций значением b переменных уравнений из множества U равно единице. Это равносильно существованию уравнения с однозначно определяющейся переменной, равной $\bar{b}$. Тогда из элементов U можно построить описанную в условиях 1, 2 подсистему из двух уравнений, соответствующую гипердереву. Она состоит из двух уравнений с одной общей переменной, которая однозначно определяется из каждого уравнения, причем ее значения равны b и $\bar{b}$ соответственно. Минимальность такой подсистемы обеспечивается совместностью входящих в нее уравнений, выбираемых из U .

Пусть теперь минимальное значение t ранга несовместных фиксаций значением b переменных уравнений из множества U больше единицы. Это означает отсутствие в U уравнений с однозначно определяющимися переменными, равными $\bar{b}$. Подсистема уравнений, определяемая условиями 1, 2, несовместна, соответствует гипердереву и состоит из уравнений, принадлежащих множеству U . Покажем, что каждая такая подсистема из t уравнений минимальна, и что любая минимальная несовместная подсистема из t элементов U имеет такой же вид.

Пусть несовместная подсистема $S(H)$ минимальна, соответствует гипердереву H и состоит из минимально возможного числа k уравнений. Очевидно, что $2 \leq k \leq t$. Любое гипердерево из двух или более ребер имеет концевое ребро. Пусть уравнение u_1 подсистемы $S(H)$ в гипердереве H соответствует концевому ребру. Уравнение u_1 имеет ровно одну общую переменную с остальными уравнениями подсистемы, которая из уравнения u_1 однозначно определяется и равна b . Последнее следует из минимальности подсистемы уравнений, так как в противном случае (переменная не определяется однозначно)

исключение уравнения u из подсистемы дает несовместную подсистему с меньшим, чем t , числом уравнений. Обозначим через u_0 уравнение подсистемы $S(H)$, которое имеет общую переменную с уравнением u_1 и которому в гиперграфе H соответствует ребро, не являющееся концевым. Хотя бы одно такое уравнение существует, так как в противном случае подсистема $S(H)$ состояла бы из k уравнений, имеющих одну общую переменную, и была бы совместной ввиду отсутствия в U уравнений с однозначно определяющимися переменными, равными $\bar{b}$.

Через $S(H^{(0)})$ обозначим подсистему, составленную из уравнения u_0 и всех уравнений подсистемы $S(H)$, которые имеют общие неизвестные с этим уравнением и в гиперграфе H соответствуют концевым ребрам. Подсистема $S(H^{(0)})$, вообще говоря, может иметь общие неизвестные с остальными уравнениями подсистемы $S(H)$. Не теряя общности, обозначим одно такое неизвестное x_1 . Через $S(H^{(1)})$ обозначим соответствующую гипердереву подсистему, составленную из всех уравнений подсистемы $S(H)$, которые не входят в $S(H^{(0)})$ и одно из которых содержит неизвестное x_1 . Подсистема $S(H^{(1)})$ либо пуста, либо содержит не менее двух уравнений, так как в противном случае единственное ее уравнение соответствует висящему ребру в гиперграфе H и должно принадлежать подсистеме $S(H^{(0)})$. В первом случае выполняется утверждение леммы. Методом от противного покажем, что второй случай невозможен. Из способа образования подсистемы $S(H^{(1)})$ следует, что она имеет с остальными уравнениями подсистемы $S(H)$ только одно общее неизвестное x_1 . В подсистеме $S(H^{(1)})$ неизвестное x_1 может: быть однозначно определено и равно b ; быть однозначно определено и равно $\bar{b}$; не иметь ограничений. Во всех этих случаях на основе подсистемы $S(H)$ можно получить несовместную подсистему, соответствующую гипердереву и имеющую меньше k уравнений: в первом случае — заменив в $S(H)$ подсистему $S(H^{(1)})$ на одно уравнение с однозначно определяющейся переменной x_1 ; во втором случае — заменив в $S(H)$ подсистему $S(H^{(0)})$ на одно уравнение с однозначно определяющейся переменной x_1 ; в третьем случае — удалив подсистему $S(H^{(1)})$ из $S(H)$. Это противоречит минимальности несовместной подсистемы $S(H)$, соответствующей гипердереву. Следовательно, подсистема $S(H^{(1)})$ пуста, а подсистема $S(H)$ состоит из k , $2 \leq k \leq t$, уравнений, причем каждое из первых $k - 1$ уравнений имеет ровно одну общую переменную с k -м уравнением.

Осталось уточнить характеристики общих переменных уравнений подсистемы $S(H)$ и ее геометрический вид. Выше показано, что s -е уравнение подсистемы $S(H)$ в гипердереве H соответствует концевому ребру, и его общая с k -м уравнением переменная однозначно определяется из s -го уравнения и равна b , $s = 1, \dots, k - 1$. Подсистема $S(H)$ соответствует гипердереву, поэтому любые два из этих первых $k - 1$ уравнений могут иметь общую переменную только из числа принадлежащих k -му уравнению. Однако это противоречит минимальности подсистемы $S(H)$, так как если среди этих уравнений найдется пара с общей переменной, то одно из них можно удалить из подсистемы $S(H)$ с сохранением ее несовместности. Следовательно, первые $k - 1$ уравнений попарно не имеют общих переменных. Для несовместности подсистемы $S(H)$ необходимо и достаточно, чтобы множество номеров переменных k -го уравнения, которые являются общими с переменными первого, второго, $\dots$, $(k - 1)$ -го уравнений подсистемы, образовывало несовместную фиксацию этого уравнения. Минимальное значение ранга несовместных фиксаций значением b переменных уравнений из множества U равно $t - 1$, поэтому $k = t$ и подсистема $S(H)$ удовлетворяет условиям 1, 2 леммы.

Лемма 2. Пусть H — совместная система уравнений с функциями из множества $\Phi \subseteq \{\Phi_0 \cup \dots \cup \Phi_m\}$; каждое из уравнений $U_1, \dots, U_k$ совместно, имеет функцию из Φ и не имеет однозначно определяющихся переменных; U_i имеет ровно одну общую пере-

менную с $H \cup U_1 \cup \dots \cup U_{i-1}$, $i = 1, \dots, k$. Тогда система уравнений $H \cup U_1 \cup \dots \cup U_k$ совместна.

Доказательство. Выберем произвольное решение системы H относительно входящих в нее переменных. Ввиду совместности H это всегда возможно. Первое добавляемое уравнение U_1 имеет общую переменную x_j с подсистемой H , которая в выбранном решении системы H относительно входящих в нее переменных принимает некоторое значение b . Так как уравнение U_1 не имеет однозначно определяющихся переменных, оно имеет не менее одного решения, в котором переменная x_j равна b . Следовательно, система уравнений $H_1 = H \cup U_1$ совместна. Аналогично убеждаемся, что при поочередном добавлении остальных $k - 1$ уравнений, имеющих с расширяемой системой ровно по одной общей переменной, получаем совместную систему.

3. Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 1. Из условий $c^{(b)} > 0$, $R(b) = r - 1$ доказываемой теоремы следует, что множество допустимых реализаций случайной системы уравнений S удовлетворяет требованиям к множеству уравнений U в условиях п. (а) леммы 1, причем $t = r$. Достаточность условий наличия пороговой функции совместности следует из утверждения (а) леммы 1 и теоремы 3.1 статьи [13], в соответствии с которой случайная система уравнений S имеет равную $n^{1-1/r}$, $r \geq 2$, пороговую функцию совместности тогда и только тогда, когда в ее реализациях допустимы несовместные подсистемы, соответствующие гипердеревьям, причем минимальное число уравнений в таких подсистемах равно r .

Перейдем к обоснованию необходимости условий наличия пороговой функции совместности рассматриваемого вида у случайной системы уравнений S . Пусть S имеет пороговую функцию совместности $n^{1-1/r}$, где $r \in \{2, \dots, m + 1\}$. Тогда должно быть выполнено условие $c^{(0)} + c^{(1)} > 0$. Действительно, почти все реализации случайного гиперграфа $MG(S)$ при условии $M = o(n)$ состоят из гипердеревьев. Из леммы 2 следует, что при условии $c^{(0)} + c^{(1)} = 0$ подсистемы, соответствующие гипердеревьям, совместны. Поэтому при $M = o(n)$ и $c^{(0)} + c^{(1)} = 0$ почти все реализации случайной системы уравнений S совместны, что противоречит наличию у нее пороговой функции совместности, равной $n^{1-1/r}$, $r \geq 2$. В случае $c^{(0)}c^{(1)} > 0$, в соответствии с теоремой 4.1 статьи [13], случайная система уравнений S имеет пороговую функцию совместности $\sqrt{n}$, а условие $c^{(0)}c^{(1)} > 0$ эквивалентно условиям $r = 2$, $c^{(b)} > 0$, $R(b) = 1$ утверждения доказываемой теоремы. В оставшемся случае $c^{(0)} + c^{(1)} > 0$, $c^{(0)}c^{(1)} > 0$ для некоторого $b \in B$ справедливы соотношения $c^{(b)} > 0$, $c^{(\bar{b})} = 0$. Тогда ранг $R^{(b)}$ несовместных фиксаций значением b переменных уравнения реализации случайной системы S принадлежит множеству $\{1, \dots, m\}$, так как в противном случае $R^{(b)} = 0$, откуда, в соответствии с п. (б) леммы 1, случайная система уравнений S является заведомо совместной и не может иметь пороговую функцию совместности. Следовательно, выполнены условия п. (а) леммы 1, и минимальные несовместные подсистемы реализаций случайной системы уравнений S с минимальным числом уравнений, соответствующие гипердеревьям, состоят из t уравнений вида, определяемого условиями 1, 2 п. (а) леммы 1. Отсюда и из теоремы 3.1 статьи [13] следует равенство $r = t$ и необходимость приведенных в утверждении теоремы 1 условий наличия пороговой функции совместности $n^{1-1/r}$, $3 \leq r \leq m + 1$.

Осталось получить оценку вероятности совместности случайной системы уравнений S при условии (2). В теореме 3.1 статьи [13] для случайной системы уравнений S ,

имеющей пороговую функцию совместности $n^{1-1/r}$, при условии (2) получена оценка $P_c(S) \sim e^{-\lambda}$, где $\lambda = \lambda(c, r)$ — предельное значение среднего числа гипердеревьев, соответствующих несовместным подсистемам из r уравнений в реализациях случайного гиперграфа $MG(S)$. Вид таких несовместных подсистем приведен в утверждении (а) леммы 1. Оценим величину λ . В левой части r -го уравнения таких подсистем стоит функция f_{i_k, j_k} , в правой — элемент a_k , $k = 1, \dots, r$, причем $c_{i_k, j_k, a_k} t_{i_k, j_k, a_k}^{(b)} > 0$ для первых $r - 1$ уравнений и $c_{i_r, j_r, a_r} k_{i_r, j_r, a_r}^{(b, r)} > 0$ для последнего уравнения. Первые $r - 1$ уравнений попарно не имеют общих переменных, но каждое из них имеет ровно одну общую переменную с r -ым уравнением. В каждом из этих $r - 1$ уравнений общие с r -м уравнением переменные однозначно определяются и равны b , а номера совпадающих с ними переменных r -го уравнения образуют несовместную t -фиксацию значением b уравнения (1) при $f_{i, j} = f_{i_k, j_k}$ и $a = a_k$. Из условий $c^{(b, r-1)} > 0$ (так как $R(b) = r - 1$) и $c^{(b)} > 0$ следует, что множество подсистем такого вида не пусто. Несовместность таких подсистем показана в п. (а) леммы 1. Из условия $c_{i_r, j_r, a_r} \prod_{k=1}^{r-1} c_{i_k, j_k, a_k} > 0$ следует, что они допустимы в реализациях рассматриваемой случайной системы уравнений.

Число таких гипердеревьев с учетом фиксированного порядка первых ребер равно $k_{i_r, j_r, a_r}^{(b, r)} \prod_{k=1}^{r-1} t_{i_k, j_k, a_k}^{(b)}$, а порядок группы автоморфизмов каждого такого гипердерева равен 1, так как вершины во всех ребрах упорядочены. В соответствии с теоремой 2.1 работы [13] предел среднего значения числа таких гипердеревьев в реализациях $MG(S)$ определяется формулой, в которой ведется суммирование по всем упорядоченным наборам (i_k, j_k, a_k) , $k = 1, \dots, r$:

$$\begin{aligned} c_r \sum_{(i_r, j_r, a_r)} c_{i_r, j_r, a_r} k_{i_r, j_r, a_r}^{(b, r-1)} \sum_{(i_1, j_1, a_1), \dots, (i_{r-1}, j_{r-1}, a_{r-1})} (c_{i_1, j_1, a_1} t_{i_1, j_1, a_1}^{(b)} \cdots c_{i_{r-1}, j_{r-1}, a_{r-1}} t_{i_{r-1}, j_{r-1}, a_{r-1}}^{(b)}) \\ = c_r \sum_{(i_r, j_r, a_r)} c_{i_r, j_r, a_r} k_{i_r, j_r, a_r}^{(b, r-1)} \left(\sum_{(i, j, a) \in E} c_{i, j, a} t_{i, j, a}^{(b)} \right)^{r-1} = c^r c^{(b, r-1)} (c^{(b)})^{r-1} > 0. \end{aligned}$$

Эта формула дает приведенные в утверждении теоремы 1 оценки для λ и для вероятности совместности случайной системы уравнений.

Перейдем к оценке надежности алгоритма А1. При условии (2) почти все реализации случайного гиперграфа $MG(S)$ состоят из гипердеревьев, имеющих не более r ребер, а вид минимальных несовместных подсистем, соответствующих гипердеревьям, приведен в утверждении п. (а) леммы 1. Из описания алгоритма А1 следует, что он ищет именно такие несовместные подсистемы. Из предыдущего доказательства теоремы 1 следует, что сумма вероятностей реализаций случайной системы уравнений S , содержащих несовместные подсистемы, соответствующие гипердеревьям, приведенным в утверждении п. (а) леммы 1, эквивалентна предельному значению вероятности $1 - P_c(S)$ несовместности случайной системы уравнений S . Следовательно, предельная надежность алгоритма А1 тоже эквивалентна этой величине. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть выполнены условия $R^{(0)} R^{(1)} > 0$ и $c^{(0)} + c^{(1)} > 0$. Почти все реализации случайного гиперграфа $MG(S)$ при условии $M = o(n)$ состоят из гипердеревьев. Из леммы 2 следует, что при условии $c^{(0)} + c^{(1)} = 0$ подсистемы, соответствующие гипердеревьям, совместны. Поэтому при $M = o(n)$ и $c^{(0)} + c^{(1)} = 0$ почти все реализации случайной системы уравнений S совместны при всех значениях величины $R^{(0)} R^{(1)}$. В соответствии с леммой 3 при $M/n \rightarrow \infty$, $R^{(0)} R^{(1)} > 0$ справедлива оценка $\mathbf{E} \zeta_n = o(1)$, из которой с учетом неравенства $\mathbf{P}(\zeta_n \geq 1) \leq \mathbf{E} \zeta_n$ следует, что почти все

реализации случайной системы уравнений S несовместны независимо от значения величины $c^{(0)} + c^{(1)}$. Таким образом, выполнения условия $\{R^{(0)}R^{(1)} > 0\} \cap \{c^{(0)} + c^{(1)} = 0\}$ достаточно для наличия у случайной системы уравнений S пороговой функции совместности n .

Необходимость этого условия следует из того, что при его отрицании, имеющем вид $\{R^{(0)}R^{(1)} = 0\} \cup \{\{R^{(0)}R^{(1)} > 0\} \cap \{c^{(0)} + c^{(1)} > 0\}\}$, случайная система уравнений S не имеет пороговой функции совместности, равной n . В первом случае $R^{(0)}R^{(1)} = 0$ для некоторого $b \in B$ справедливо равенство $R^{(b)} = 0$, откуда, в соответствии с п. (б) леммы 1, все реализации случайной системы уравнений S имеют решение $\mathbf{b}$, и случайная система уравнений S не имеет никакой пороговой функции совместности. Если же $R^{(0)}R^{(1)} > 0$, $c^{(0)} + c^{(1)} > 0$, то в соответствии с теоремой 1 случайная система уравнений S имеет пороговую функцию совместности, которая не равна n . Теорема 2 доказана.

Обозначим через ζ_n число решений случайной системы уравнений S .

Лемма 3. При условии $R^{(0)}R^{(1)} > 0$ существует константа $\beta > 0$ такая, что при $M - n\beta \rightarrow \infty$ справедлива оценка $\mathbf{E}\zeta_n = o(1)$.

Доказательство. Случайную систему уравнений S можно рассматривать как вектор из M случайных уравнений, имеющих одинаковое распределение. Поэтому вероятность того, что вектор $(b_1, \dots, b_n)$ с компонентами из B является решением для одного такого случайного уравнения, одинакова для каждого из этих M уравнений. Эта вероятность одинакова для всех векторов с одинаковым числом n_1 равных 1 компонент, обозначим ее через $P(n_1)$. Число таких векторов равно $\binom{n}{n_1}$, поэтому

$$\mathbf{E}\zeta_n = \sum_{n_1 \leq n/2} \binom{n}{n_1} (P(n_1))^M + \sum_{n_1 > n/2} \binom{n}{n_1} (P(n_1))^M.$$

Из условия $R^{(0)}R^{(1)} > 0$ следует существование наборов (i_0, j_0, a_0) , (i_1, j_1, a_1) , удовлетворяющих условию (3). Тогда при $n_1 \leq n/2$

$$P(n_1) \leq 1 - c_{i_0, j_0, a_0} (n - n_1)_{i_0} / (n)_{i_0} \leq 1 - c_{i_0, j_0, a_0} / 2^{i_0} = \delta_0 < 1,$$

где c_{i_0, j_0, a_0} — вероятность появления в реализациях случайной системы S уравнения вида (1) при $(i, j, a) = (i_0, j_0, a_0)$, а $(n - n_1)_{i_0} / (n)_{i_0}$ — нижняя оценка вероятности несовместности такого уравнения при $n_1 \leq n/2$. Аналогично при $n_1 > n/2$ получаем оценку

$$P(n_1) \leq 1 - c_{i_1, j_1, a_1} (n_1)_{i_1} / (n)_{i_1} \leq 1 - c_{i_1, j_1, a_1} / 2^{i_1} = \delta_1 < 1,$$

из которой следует, что

$$P(n_1) \leq \delta < 1, \quad \delta = \max\{\delta_0, \delta_1\},$$

и

$$\mathbf{E}\zeta_n \leq \sum_{0 \leq n_1 \leq n} \binom{n}{n_1} \delta^M \leq 2^n \delta^M.$$

Поэтому $\mathbf{E}\zeta_n = o(1)$ при условии $M - n\beta \rightarrow \infty$, $\beta = \log_{1/\delta} 2$. Отсюда следует утверждение леммы 3.

Более точные оценки β при более строгих условиях на вектор вероятностей $\bar{c}$ получены в работах Г. В. Балакина, В. Ф. Колчина, В. А. Копытцева, В. И. Хохлова, исследовавших пороговый эффект для среднего числа решений случайных систем уравнений с независимыми левыми и правыми частями.

Доказательство теоремы 3. Каждая из величин $R^{(0)}R^{(1)}$ и $c^{(0)} + c^{(1)}$ может быть либо положительна, либо равна нулю. При $R^{(0)}R^{(1)} = 0$ случайная система уравнений S имеет решение $\mathbf{0}$ и/или $\mathbf{1}$ и, следовательно, не имеет пороговой функции совместности. Рассмотрим случай $R^{(0)}R^{(1)} > 0$. Если $c^{(0)} + c^{(1)} = 0$, то в соответствии с теоремой 2 случайная система уравнений S имеет пороговую функцию совместности n . Если же $c^{(0)} + c^{(1)} > 0$, то найдется $b \in B$ такое, что выполняются соотношения $c^{(b)} > 0$, $1 \leq R^{(b)} \leq m$, и в соответствии с теоремой 1 случайная система уравнений S имеет пороговую функцию совместности $n^{1-1/r}$, $2 \leq r = R^{(b)} + 1 \leq m + 1$.

Рассмотрены все варианты значений величин $R^{(0)}R^{(1)}$ и $c^{(0)} + c^{(1)}$: при $R^{(0)}R^{(1)} = 0$ случайная система уравнений S не имеет пороговую функцию совместности, а при $R^{(0)}R^{(1)} > 0$ она имеет пороговую функцию совместности указанного в утверждении теоремы 3 вида. Теорема 3 доказана.

4. Примеры

Далее под значениями 0 и 1 неизвестных систем уравнений понимаются элементы конечного поля из двух элементов, $\oplus$ — операция сложения в этом поле. В первых пяти примерах уравнения (1) случайной системы S имеют вид

$$f_{td,j}(x_{s_1}, x_{s_2}, \dots, x_{s_{dk}}) = \sum_{k=1}^t f_{d,j}(x_{s_{d(k-1)+1}}, x_{s_{d(k-1)+2}}, \dots, x_{s_{d(k-1)+d}}) = a, \quad (4)$$

$t = 1, \dots, h$, где $h = \lfloor m/d \rfloor$, $f_{td,j}$ — функция, равная сумме в поле действительных чисел t булевых функций $f_{d,j}$ из Φ_d , $d \geq 1$, правая часть a уравнения вида (4) принимает целые значения $0, 1, \dots, t$. Уравнение (4) при $1 \leq a \leq t-1$ не имеет однозначно определяющихся переменных, а при $a = 0$ и $a = t$ равносильно системе из t уравнений

$$f_{d,j}(x_{s_{d(k-1)+1}}, x_{s_{d(k-1)+2}}, \dots, x_{s_{d(k-1)+d}}) = b, \quad k = 1, 2, \dots, t, \quad (5)$$

где $b = 0$ и $b = 1$ соответственно.

Пример 1. Функции в (4) имеют вид $f_{1,1}(y_1) = y_1$, $d = 1$. В этом случае $c^{(0)} = \sum_{k=1}^m (kc_{k,1,0})$, $c^{(1)} = \sum_{k=1}^m (kc_{k,1,k})$; $R^{(0)} = 0$ при $\sum_{k=1}^m c_{k,1,0} = 1$, $R^{(1)} = 0$ при $\sum_{k=1}^m c_{k,1,k} = 1$. Пороговая функция совместности равна $\sqrt{n}$ при $c^{(0)}c^{(1)} > 0$; равна $n^{1-1/r}$, $r = 3, \dots, m + 1$ при $c^{(0)} > 0$, $\sum_{k=1}^m (c_{k,1,k-r+3} + \dots + c_{k,1,k}) = 0$, $\sum_{k=1}^m c_{k,1,k-r+2} > 0$ или при $c^{(1)} > 0$, $\sum_{k=1}^m (c_{k,1,0} + c_{k,1,1} + \dots + c_{k,1,r-3}) = 0$, $\sum_{k=1}^m c_{k,1,r-2} > 0$; равна n при $c^{(0)} + c^{(1)} = 0$. Совместность близкой случайной системы уравнений с пороговой функцией $\sqrt{n}$ оценивалась В. А. Копытцевым, случай $|B| \geq 2$ рассмотрен в примере 4.1 статьи [13], при $c_m = 1$, $m = o(\sqrt{n})$ в [2].

Пример 2. Функции в (4) имеют вид $f_{d,2}(y_1, \dots, y_d) = y_1(y_2 \oplus \dots \oplus y_d)$, $d \geq 3$. В этом случае $c^{(0)} = 0$, $c^{(1)} = \sum_{k=1}^h (kc_{kd,2,k})$; $R^{(0)} = 0$ при четных d и $\sum_{k=1}^h c_{kd,2,0} = 1$; $R^{(0)} = R^{(1)} = 0$ при нечетных d и $\sum_{k=1}^h c_{kd,2,k} = 1$ или $\sum_{k=1}^h c_{kd,2,0} = 1$. Если d четно и $c^{(1)} > 0$, $c^{(1,d)} = \sum_{k=1}^h (kc_{kd,2,0}) > 0$, то $R^{(1)} = d$ и пороговая функция

совместности равна $n^{1-1/(d+1)}$. Если d нечетно и $c^{(1)} > 0$, $c^{(1,d-1)} = \sum_{k=1}^h (kc_{kd,2,0}) > 0$, то $R^{(1)} = d - 1$ и пороговая функция совместности равна $n^{1-1/d}$. Пороговая функция совместности также может иметь вид $n^{1-1/(1+kd)}$ и $n^{1-1/(1+k(d-1))}$, $k = 2, \dots, h$.

Пример 3. Функции в (4) имеют вид $f_{d,3}(y_1, \dots, y_d) = \bar{y}_1(y_2 \oplus \dots \oplus y_d)$, $d \geq 3$. Здесь $c^{(1)} = 0$, $c^{(0)} = \sum_{k=1}^h (kc_{kd,3,k})$; $R^{(0)} = R^{(1)} = 0$ при $\sum_{k=1}^h c_{kd,3,0} = 1$. Пороговая функция совместности равна $n^{1-1/d}$ тогда и только тогда, когда $c^{(0)} > 0$, при этом $R^{(0)} = d - 1$, $r = d$, $c^{(0,d-1)} = c^{(0)}$.

Пример 4. Функции в (4) имеют вид $f_{d,4}(y_1, \dots, y_d) = y_1 \vee \dots \vee y_d$, $d \geq 2$. Здесь $c^{(1)} = 0$, $c^{(0)} = d \sum_{k=1}^h (kc_{kd,4,0})$; $R^{(0)} = 0$ при $\sum_{k=1}^h c_{kd,4,0} = 1$; $R^{(1)} = 0$ при $\sum_{k=1}^h c_{kd,4,k} = 1$. Если $c^{(0,d)} = \sum_{k=1}^h (kc_{kd,4,k}) > 0$, $c^{(0)} > 0$, то пороговая функция совместности равна $n^{1-1/(d+1)}$. Вероятность совместности такой случайной системы уравнений с пороговой функцией $n^{2/3}$ при $c_2 = 1$, $m = d = 2$ оценивалась Г. В. Балакиным в [1], при $d = 2$, $m = 2h$, $c_m = 1 - В. А. Копытцевым$.

Примеры 2–4 рассмотрены в [12] при $m = d$, $c_m = 1$.

Пример 5. Функция $f_{d,j}$ в (4) не имеет однозначно определяющих переменных. При $R^{(0)}R^{(1)} > 0$ пороговая функция совместности равна n .

Пример 6. В случайной системе булевых уравнений S вероятность появления линейного уравнения с функцией $y_1 \oplus y_2 \oplus \dots \oplus y_i$ равна $c_{i,5}$, $i = 2, \dots, m$, причем $c_{2,5} + \dots + c_{m,5} = 1$. Здесь $c^{(0)} = c^{(1)} = 0$; $R^{(1)} = 0$ при $\sum_{k=1}^{(m-1)/2} c_{2k+1,5,1} = 1$ или $\sum_{k=1}^{m/2} c_{2k,5,0} = 1$; $R^{(0)} = 0$ при $\sum_{i=2}^m c_{i,5,0} = 1$. В остальных случаях пороговая функция совместности равна n .

Пример 7. Функции в уравнениях случайной системы S булевы и имеют вид элементарных симметрических многочленов $\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m} y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_k}$, где $2 \leq k \leq m - 1$, $m \geq 3$. Если правые части всех уравнений равны 0, то $R^{(0)} = 0$. Пороговая функция совместности равна n тогда и только тогда, когда $R^{(0)}R^{(1)} > 0$.

Список литературы

1. Балакин Г. В., Графы систем двучленных уравнений с булевыми неизвестными. *Теория вероятностей и ее применения* (1995) **40**, №2, 241–259.
2. Балакин Г. В., Системы случайных уравнений над конечным полем. *Труды по дискретной математике* (1998) **2**, 21–37.
3. Балакин Г. В., Колчин В. Ф., Хохлов В. И., Гиперциклы в случайном гиперграфе. *Дискретная математика* (1991) **3**, №3, 102–108.
4. Зыков А. А., Гиперграфы. *Успехи матем. наук* (1974) **29**, №6, 89–154.
5. Колчин В. Ф., *Системы случайных уравнений*. МИЭМ, Москва, 1988.
6. Колчин В. Ф., Вероятность совместности одной системы случайных уравнений специального вида. *Труды по дискретной математике* (2000) **3**, 139–146.
7. Колчин В. Ф., *Случайные графы*. Физматлит, Москва, 2004.
8. Колчин В. Ф., Хохлов В. И., О числе циклов в случайном неравновероятном графе. *Дискретная математика* (1990) **2**, №3, 137–145.
9. Колчин В. Ф., Хохлов В. И., Пороговый эффект для систем случайных уравнений специального вида. *Дискретная математика* (1995) **7**, №4, 29–39.

10. Копытцев В. А., О некоторых результатах, связанных с анализом систем случайных уравнений. *Вестник ИКСИ, Сер. К, Спец. вып.* (2003) 71–75.
11. Сачков В. Н., Случайные неравновероятные покрытия и функциональные уравнения. *Труды по дискретной математике* (2002) **5**, 205–218.
12. Шаповалов А. В., Вероятность совместности случайных систем булевых уравнений. *Дискретная математика* (1995) **7**, №3, 146–159.
13. Шаповалов А. В., Пороговые функции совместности случайных систем уравнений. *Труды по дискретной математике* (2006) **9**, 377–400.
14. Bollobás B., *Random graphs*. Academic Press, London, 1985.
15. Erdős P., Rényi A., On the evolution of random graphs.. *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci., Ser. A* (1960) **5**, 17–61.

Статья поступила 10.07.2008.