Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Тихомирова, Предельные распределения числа непо-
явившихся цепочек одинаковых исходов, *Дискрет. матем.*,
2008, том 20, выпуск 3, 40–46

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1011>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразу-
мевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 03:16:55

Предельные распределения числа непоявившихся цепочек одинаковых исходов

© 2008 г. М. И. Тихомирова

Доказана асимптотическая нормальность числа непоявившихся s -цепочек одинаковых исходов в равновероятной полиномиальной схеме при условии, что число испытаний n и число исходов N стремятся к бесконечности так, что $\alpha_N = n/N^s \rightarrow \alpha$, $0 \leq \alpha < \infty$, $N\alpha_N^2 \rightarrow \infty$.

1. Введение

Для выявления зависимостей, проявляющихся на длинных отрезках исследуемой последовательности

$$x_1, x_2, \dots, x_t, \dots, \quad x_t \in \mathcal{N} = \{1, 2, \dots, N\}, \quad (1)$$

вместо статистик, зависящих от частот s -цепочек всего множества возможных значений s -цепочек, из-за сложности обработки реализаций последовательности (1) при больших s используются только s -цепочки из некоторого подмножества $\mathcal{B}$ множества всех значений s -цепочек. В качестве подмножества $\mathcal{B}$ во многих работах (см., например, [1–5]) выбираются подмножества вида

$$\mathcal{B} = \{(i_1, i_2, \dots, i_s) : i_1 = i_2 = \dots = i_s, 1 \leq i_1 \leq N\}. \quad (2)$$

В работах [1, 2] исследовались предельные распределения статистик типа χ^2 , построенных по частотам s -цепочек множества (2). В работе [3] изучались статистики, связанные со сложными рекуррентными событиями, которые определялись моментами появления цепочек из множества $\mathcal{B}$. Статистики, равные числу непоявившихся s -цепочек из множества $\mathcal{B}$, изучались в [4].

Статистики типа числа пустых ящиков (см. [4, 6]) можно представить в виде суммы зависимых величин. Методы исследования сходимости распределений сумм зависимых величин, предложенные С. Н. Бернштейном (см. [7]), были успешно применены для различных типов зависимостей, которые удобно описывать, используя разности номеров случайных величин, входящих в исследуемую сумму. Другие виды зависимостей оказалось удобнее описывать при помощи специально подобранных графов (см., например, [8, 9]). В работе [4] для доказательства асимптотической нормальности числа непоявившихся s -цепочек использовались результаты работы [9]. Для числа $\mu_0(\mathcal{B})$ непоявившихся s -цепочек из множества $\mathcal{B}$ в [4] были получены только асимптотические формулы для $\mathbf{E}\mu_0(\mathcal{B})$ и $\mathbf{D}\mu_0(\mathcal{B})$; условия теорем работы [9] в этом случае не выполняются.

В данной работе будем предполагать, что случайные величины последовательности (1) независимы и равномерно распределены на множестве $\mathcal{N}$. Для доказательства асимптотической нормальности $\mu_0(\mathcal{B})$ используется подход, обобщающий один из трех подходов Реньи, примененных им к доказательству асимптотической нормальности числа пустых ящиков (см. [10, 6]).

2. Производящие функции

Обозначим через τ_0 время до появления первой s -цепочки из множества $\mathcal{B}$, а через τ_l время, прошедшее между появлением l -й и $(l + 1)$ -й s -цепочек, $1 \leq l \leq N - 1$. Эти величины, очевидно, независимы.

Случайная величина

$$\nu_k(N) = \tau_0 + \tau_1 + \dots + \tau_{k-1} \quad (3)$$

есть время, прошедшее до первого появления k -й s -цепочки из множества $\mathcal{B}$.

Производящая функция $g_0(z)$ величины τ_0 получена в работе [3]:

$$g_0(z) = \frac{P_0(z)}{Q_0(z)}, \quad P_0(z) = Nz^s - z^{s+1}, \quad Q_0(z) = (N - 1)z^s - N^s(z - 1).$$

Теорема 1. Производящую функцию $g_l(z) = \mathbf{E}z^{\tau_l}$ можно представить в виде

$$g_l(z) = \frac{P_l(z)}{Q_l(z)}, \quad 0 \leq l \leq N - 1,$$

где

$$\begin{aligned} P_l(z) &= (N - l)(Nz^s - z^{s+1}), \\ Q_l(z) &= z^{s+1}l + z^s N(N - l - 1) + N^{s+1}(1 - z). \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}_l$ — некоторое подмножество множества $\mathcal{B}$ и $|\mathcal{B}_l| = N - l$, $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}$. Определим цепь Маркова $\xi_u^{(l)}$ следующим образом: $\xi_u^{(l)} = k$, $0 \leq k \leq s$, если $x_u = x_{u-1} = \dots = x_{u-k+1} \neq x_{u-k}$, $x_u \in \mathcal{B}_0 \setminus \mathcal{B}_l$. Состояние s будем считать поглощающим. Нулевым моментом времени считаем момент появления предыдущей s -цепочки, следовательно, $\xi_0^{(l)} = 0$. Вероятности переходов $p_{i,j}^{(l)} = \mathbf{P}\{\xi_{i+1}^{(l)} = j \mid \xi_i^{(l)} = i\}$ этой цепи Маркова определяются равенствами

$$\begin{aligned} p_{k,k+1}^{(l)} &= \frac{1}{N}, \quad p_{k,0} = \frac{l}{N}, \quad p_{k,1} = 1 - \frac{l+1}{N}, \quad 1 \leq k \leq s-1, \\ p_{0,1}^{(l)} &= 1 - \frac{l}{N}, \quad p_{0,0}^{(l)} = \frac{l}{N}, \quad p_{s,s}^{(l)} = 1. \end{aligned}$$

Время до попадания в поглощающее состояние совпадает с τ_l . Введем обозначение

$$g_k(l, z) = \mathbf{E}(z^{\tau_l} \mid \xi_0^{(l)} = k).$$

По формуле полного математического ожидания

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z^{\tau_l} \mid \xi_0^{(l)} = k) &= \frac{1}{N} \mathbf{E}(z^{\tau_l} \mid \xi_0 = k, \xi_1 = k + 1) \\ &+ \frac{l}{N} \mathbf{E}(z^{\tau_l} \mid \xi_0 = k, \xi_1 = 0) + \left(1 - \frac{l+1}{N}\right) \mathbf{E}(z^{\tau_l} \mid \xi_0 = k, \xi_1 = 1). \end{aligned}$$

Отсюда

$$g_k(l, z) = z \left(\frac{1}{N} g_{k+1}(l, z) + \frac{l}{N} g_0(l, z) + \left(1 + \frac{l+1}{N} \right) g_1(l, z) \right), \quad 1 \leq k \leq s-1,$$

$$g_0(l, z) = z \left(\left(1 - \frac{l}{N} \right) g_1(l, z) + \frac{l}{N} g_0(l, z) \right), \quad g_s(l, z) = 1.$$

Вычитая из первого равенства это же равенство с заменой k на $k-1$, находим, что

$$g_{k+1}(l, z) - g_k(l, z) = \frac{N}{z} (g_k(l, z) - g_{k-1}(l, z)), \quad 1 \leq k \leq s-1,$$

$$g_1(l, z) - g_0(l, z) = \frac{N}{z} \frac{1-z}{N-l} g_0(l, z).$$

Отсюда нетрудно получить, что

$$g_0(l, z) = \left(1 + \frac{1-z}{N-l} \frac{N}{z} \left(1 + \frac{N}{z} + \dots + \left(\frac{N}{z} \right)^{s-1} \right) \right)^{-1}.$$

Из этого равенства следует утверждение теоремы.

3. Моменты времени до появления заданного числа цепочек

Найдем сначала моменты величин τ_l , определяющих величину $\nu_k(N)$ (см. (3)). Для моментов величин τ_l введем обозначения

$$M_k^{(l)} = \mathbf{E} \tau_l^k, \quad \widehat{M}_k^{(l)} = \mathbf{E} \tau_l^{[k]},$$

где $a^{[k]} = a(a-1) \dots (a-k+1)$. Известно, что

$$\widehat{M}_k^{(l)} = \left. \frac{d^k g_l(z)}{dz^k} \right|_{z=1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Дифференцируя четыре раза равенство $Q_l(z)g_l(z) = P_l(z)$ в точке $z = 1$, получаем равенства

$$\begin{aligned} Q_l^{(1)} + Q_l^{(0)} g_l^{(1)} &= P_l^{(1)}, \\ Q_l^{(2)} + 2Q_l^{(1)} g_l^{(1)} + Q_l^{(0)} g_l^{(2)} &= P_l^{(2)}, \\ Q_l^{(3)} + 3Q_l^{(2)} g_l^{(1)} + 3Q_l^{(1)} g_l^{(2)} + Q_l^{(0)} g_l^{(3)} &= P_l^{(3)}, \\ Q_l^{(4)} + 4Q_l^{(3)} g_l^{(1)} + 6Q_l^{(2)} g_l^{(2)} + 4Q_l^{(1)} g_l^{(3)} + Q_l^{(0)} g_l^{(4)} &= P_l^{(4)}, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} P_l^{(0)} &= Q_l^{(0)} = (N-l)(N-1), \\ P_l^{(m)} &= (N-l)(s^{[m]}N - (s+1)^{[m]}), \quad m \geq 1, \\ Q_l^{(1)} &= s((N-l)(N-1) - l) - N^{s+1} + l(s+1), \\ Q_l^{(m)} &= l(s+1)^{[m]} + ((N-l)(N-1) - l)s^{[m]}, \quad 2 \leq m \leq s. \end{aligned} \quad (5)$$

Используя эти формулы, находим выражение для первого момента

$$\mathbf{E}\tau_l = \widehat{M}_l^{(1)} = \frac{N}{N-l} \frac{N^s - 1}{N - 1}, \quad 0 \leq l \leq N - 1. \quad (6)$$

Для моментов более высоких порядков получаются более сложные выражения. Приведем асимптотические формулы для моментов нужного нам порядка.

Лемма 1. При $N \rightarrow \infty$ равномерно по l , $0 \leq l \leq N - 1$, и $s \geq 2$

$$\widehat{M}_m^{(l)} = \frac{a_m N^{ms}}{(N-l)^m} \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right) \right), \quad m = 1, \dots, 4,$$

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 6, \quad a_4 = 24.$$

Утверждение этой леммы нетрудно проверить, если воспользоваться равенствами (4) и (5).

Используя эту лемму и выражения центральных моментов τ_l через факториальные моменты, получим следующее утверждение.

Лемма 2. При $N \rightarrow \infty$ равномерно по l , $0 \leq l \leq N - 1$, и $s \geq 2$

$$\mathbf{D}\tau_l = \frac{N^{2s}}{(N-l)^2} \left(1 + O\left(\frac{s}{N^{s-1}}\right) \right), \quad \mathbf{E}(\tau_l - \mathbf{E}\tau_l)^4 = O\left(\frac{N^{4s}}{(N-l)^4}\right).$$

Полученные выражения для моментов величины τ_l позволяют получить моменты и предельное распределение величины $\nu_k(N)$, определенной равенством (3).

4. Моменты и предельное распределение величины $\nu_k(N)$

Из определения (3) случайной величины $\nu_k(N)$ и равенства (6) следует, что

$$\mathbf{E}\nu_k(N) = N \frac{N^s - 1}{N - 1} \sum_{l=N-k+1}^N \frac{1}{l}. \quad (7)$$

Теорема 2. Если при $N \rightarrow \infty$ параметры k и s меняются так, что

$$\gamma_N = k/N \rightarrow \gamma, \quad 0 \leq \gamma < 1, \quad k^2/N \rightarrow \infty,$$

то равномерно по $s \geq 2$

$$\mathbf{E}\nu_k(N) = N^s \ln \frac{1}{1 - \gamma_N} + O(N^{s-1}), \quad \mathbf{D}\nu_k(N) = N^{2s-1} \frac{\gamma_N}{1 - \gamma_N} (1 + O(1/k)).$$

Доказательство. Первое равенство следует из равенства (6) и неравенства

$$\ln N - \ln(N - k + 1) \leq \sum_{l=N-k+1}^N \frac{1}{l} \leq \ln(N - 1) - \ln(N - k),$$

получающегося интегрированием неравенства $x^{-1} \leq [x]^{-1} \leq (x - 1)^{-1}$ в пределах от $N - k + 1$ до $N + 1$. Второе равенство получается из равенства

$$\mathbf{D}\nu_k(N) = \sum_{l=0}^{k-1} \mathbf{D}\tau_l,$$

леммы 2 и неравенства

$$\frac{k-1}{(N+1)(N-k+1)} \leq \sum_{l=N-k+1}^N \frac{1}{l^2} \leq \frac{k}{N(N-k)},$$

которое доказывается интегрированием неравенства $x^{-2} \leq [x]^{-2} \leq (x-1)^{-2}$ в пределах от $N-k+1$ до $N+1$.

Теорема 3. Если при $N \rightarrow \infty$ параметры k и s , $s \geq 2$, меняются так, что

$$\gamma_N = k/N \rightarrow \gamma, \quad 0 \leq \gamma < 1, \quad k^2/N \rightarrow \infty,$$

то равномерно по x , $-\infty < x < \infty$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{v_k(N) + N^s \ln(1 - \gamma_N)}{\sqrt{N^{2s-1} \gamma_N / (1 - \gamma_N)}} < x \right\} = \Phi(x),$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp \left\{ -\frac{u^2}{2} \right\} du.$$

Доказательство. Условие Ляпунова для суммы (3) можно записать в виде

$$L(k, N) = \frac{\sum_{l=0}^{k-1} \mathbf{E}(\tau_l - \mathbf{E}\tau_l)^4}{(\mathbf{D}v_k(N))^2} \rightarrow 0 \quad (8)$$

при $N \rightarrow \infty$. Из леммы 2 следует, что

$$\sum_{l=0}^{k-1} \mathbf{E}(\tau_l - \mathbf{E}\tau_l)^4 \leq C N^{4s} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{(N-l)^4}. \quad (9)$$

В условиях теоремы

$$\sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{(N-l)^4} = \sum_{l=N-k+1}^N \frac{1}{l^2} \leq C \left(\frac{1}{(N-k+1)^3} - \frac{1}{N^3} \right) = C \frac{1}{N^3} \left(\frac{1}{1-\gamma_N} - 1 \right).$$

Отсюда, из (9) и неравенства

$$(\mathbf{D}v_k(N))^2 > c_0 N^{4s-2} \left(\frac{\gamma_N}{1-\gamma_N} \right)^2, \quad c_0 > 0,$$

которое следует из теоремы 2, получаем, что

$$L(k, N) < C \frac{N^{4s-3}}{N^{4s-2}} = C/N \rightarrow 0$$

при $\gamma_N \rightarrow \gamma > 0$.

Если $\gamma = 0$, то

$$(\mathbf{D}v_k(N))^2 \geq c_0 N^{4s-2} \left(\frac{k}{N} \right)^2$$

и при $N \rightarrow \infty$

$$L(k, N) < C/k \rightarrow 0.$$

Таким образом, условие (8) выполнено. Теорема доказана.

5. Предельная теорема для числа неоявившихся цепочек

Число $\mu_0(n, N)$ неоявившихся s -цепочек из множества $\mathcal{B}$ в $n + s - 1$ первых членах последовательности (1) можно представить в виде

$$\mu_0(n, N) = \sum_{i=1}^N \chi((x_t, \dots, x_{t+s-1}) \neq (i, \dots, i), t = 1, \dots, n).$$

Если $n, N \rightarrow \infty$ так, что $n/N^s = \alpha_N \rightarrow \alpha$, $0 < \alpha < \infty$, то (см. [4, 5]) при любом $\delta > 0$

$$\mathbf{E}\mu_0(n, N) = N \exp\{-\alpha_N\} + \alpha_N \exp\{-\alpha_N\} + O\left(\frac{1}{N^{1-\delta}}\right),$$

$$\mathbf{D}\mu_0(n, N) = N \exp\{-\alpha_N\}(1 - \exp\{-\alpha_N\}) + O(N^\delta).$$

Теорема 4. Если $n, N, s, s \geq 2$, при $N \rightarrow \infty$ изменяются так, что

$$\alpha_N = n/N^s \rightarrow \alpha, \quad 0 \leq \alpha < \infty, \quad N\alpha_N^2 \rightarrow \infty,$$

то

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left\{ \frac{\mu_0(n, N) - N \exp\{-\alpha_N\}}{\sqrt{N \exp\{-\alpha_N\}(1 - \exp\{-\alpha_N\})}} < x \right\} = \Phi(x).$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой 3 и равенством

$$\mathbf{P}\{v_k(N) \leq n\} = \mathbf{P}\{\mu_0(n, N) \leq N - k\}. \quad (10)$$

Выберем k так, чтобы при $N \rightarrow \infty$ выполнялось равенство

$$N - k - N \exp\{-\alpha_N\} = x_N \sqrt{N \exp\{-\alpha_N\}(1 - \exp\{-\alpha_N\})}, \quad (11)$$

где $x_N \rightarrow x$. Отсюда

$$k = N(1 - z_N) - x_N \sqrt{N z_N (1 - z_N)}, \quad z_N = \exp\{-\alpha_N\}, \quad 0 < z_N < 1. \quad (12)$$

Следовательно,

$$z_N = F(z_N), \quad (13)$$

где

$$F(z) = 1 - \gamma_N - \frac{x_N}{N} \sqrt{z(1-z)}, \quad \gamma_N = k/N,$$

и при $N \rightarrow \infty$

$$\gamma_N = \frac{k}{N} \rightarrow \gamma = 1 - \exp\{-\alpha\}. \quad (14)$$

Из равенства $z_N = F(F(z_N))$ получаем, что

$$z_N = 1 - \gamma_N - \frac{x_N}{\sqrt{N}} \sqrt{(1 - \gamma_N - \frac{x_N}{\sqrt{N}} \sqrt{z_N(1-z_N)})(\gamma_N + \frac{x_N}{\sqrt{N}} \sqrt{z_N(1-z_N)})}.$$

Отсюда

$$z_N = 1 - \gamma_N - \frac{x_N}{\sqrt{N}} \sqrt{\gamma_N(1 - \gamma_N)} + O\left(\frac{1}{N}\right),$$

$$\alpha_N = -\ln(1 - \gamma_N) + \frac{x_N}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\gamma_N}{1 - \gamma_N}} + O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Таким образом,

$$n = -N^s \left(\ln(1 - \gamma_N) - x_N \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\gamma_N}{1 - \gamma_N}} + O\left(\frac{1}{N}\right) \right).$$

Подставляя это выражение для n в левую часть равенства (10), по теореме 3 получаем, что при $N \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{v_k(N) \leq n\} = \mathbf{P}\left\{ \frac{v_k(N) + N^s \ln(1 - \gamma_N)}{N^s \sqrt{\gamma_N / ((1 - \gamma_N) \sqrt{N})}} < x_N + O\left(\frac{1}{N}\right) \right\} \rightarrow \Phi(x),$$

так как выполнены условия (14). Отсюда и из (10) и (11) следует утверждение теоремы.

Список литературы

1. Башарин Г. П., Об использовании критерия согласия χ^2 в качестве критерия независимых испытаний. *Теория вероятностей и ее применения* (1957) **2**, №1, 141–142.
2. Тихомирова М. И., Предельные распределения статистик χ^2 для частот цепочек одинаковых исходов полиномиальной схемы. *Труды по дискретной математике* (2003) **7**, 191–200.
3. Тихомирова М. И., Чистяков В. П., Предельные распределения некоторых статистик, связанных с рекуррентными событиями. *Труды по дискретной математике* (2003) **7**, 201–212.
4. Тихомирова М. И., *Предельные теоремы для числа неоявившихся s-цепочек*, Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. МИЭМ, Москва, 1998..
5. Тихомирова М. И., Чистяков В. П., Об асимптотике моментов числа неоявившихся s-цепочек. *Дискретная математика* (1997) **9**, №1, 12–29.
6. Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П., *Случайные размещения*. Наука, Москва, 1976.
7. Бернштейн С. Н., *Собрание сочинений*, **6**. Наука, Москва, 1964.
8. Janson S., Normal convergence by higher semiinvariants with application to sums of dependent random variables and random graphs. *Ann. Probab.* (1988) **16**, №1, 305–312.
9. Михайлов В. Г., Асимптотическая нормальность разделимых статистик от частот m -цепочек. *Дискретная математика* (1989) **1**, №4, 92–103.

Статья поступила 14.09.2006.

Переработанный вариант поступил 2.03.2007.