Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Воблый, Простая верхняя оценка для числа остовных деревьев регулярных графов, *Дискрет. матем.*, 2008, том 20, выпуск 3, 47–50

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1012>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 05:09:01

Простая верхняя оценка для числа остовных деревьев регулярных графов

© 2008 г. В. А. Воблый

Получена верхняя оценка для числа остовных деревьев регулярных графов степени k , которая является в определенном смысле асимптотически точной при $k \rightarrow \infty$.

Число остовных деревьев графа является важной характеристикой его надежности как сети для передачи информации [1]. В химии число остовных деревьев молекулярного графа связано с физическими свойствами соответствующего сложного соединения [2].

Пусть G — регулярный граф степени k с n вершинами, а $T(G)$ — число его остовных деревьев. Для числа остовных деревьев графа G известна простая верхняя оценка Кельманса–Бигса [3]

$$T(G) \leq \frac{1}{n} \left(\frac{nk}{n-1} \right)^{n-1}.$$

Заметим, что, так как

$$\left(\frac{nk}{n-1} \right)^{n-1} = k^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^{n-1} < ek^{n-1},$$

справедлива оценка

$$T(G) < \frac{e}{n} k^{n-1}.$$

Известна также точная оценка Маккея [4-6]

$$T(G) \leq \frac{A \log n}{nk \log k} (c_k)^n, \quad c_k = \frac{(k-1)^{k-1}}{(k^2 - 2k)^{k/2-1}}, \quad (1)$$

где A — постоянная.

Получим простую верхнюю оценку для числа остовных деревьев в регулярном графе, которая является в определенном смысле асимптотически точной. Докажем сначала лемму.

Лемма 1. Для всех чисел x таких, что $-\infty < x < 1$ верно неравенство

$$\ln(1-x) \leq -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}.$$

Доказательство. Введем функцию

$$f(x) = \ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}.$$

Тогда $f(0) = 0$, $f'(x) = x^5/(x-1)$. Так как $f'(x) > 0$ при $x < 0$ и $f'(x) < 0$ при $x > 0$, то $x = 0$ — единственная точка максимума. Следовательно, $f(x) \leq 0$ на всем рассматриваемом интервале. Доказательство закончено.

Теорема 1. Для числа остовных деревьев $T(G)$ регулярного графа G степени k с n вершинами верна оценка сверху

$$T(G) \leq \frac{c}{n} k^{n-1} \exp\left(-\frac{2k^2 + 2k - 1}{4k^3} n\right), \quad c = e^{127/60}. \quad (2)$$

Доказательство. Обозначим через $A = (a_{ij})$ матрицу смежности графа G , а через λ_i — ее собственные числа (собственные числа графа G). Для связного регулярного графа эти числа удовлетворяют соотношениям [3, 7]

$$-k \leq \lambda_n \leq \lambda_{n-1} \leq \dots \leq \lambda_2 < \lambda_1 = k, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = kn.$$

Пусть $A^p = (a_{ij}^{(p)})$. Известно [8], что элемент $a_{ii}^{(p)}$ равен числу замкнутых ориентированных маршрутов длины p с корнем в i -й вершине. Следовательно,

$$\text{tr}(A^p) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^p = \sum_{i=1}^n a_{ii}^{(p)} \geq 0.$$

Обозначим через $C_q(G)$ число простых циклов длины q в графе G с e ребрами. В [8] доказано, что

$$C_4(G) = \frac{1}{8} \left(\text{tr}(A^4) - 2e - 2 \sum_{i \neq j} a_{ij}^{(2)} \right).$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq j} a_{ij}^{(2)} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(2)} - \sum_{i=1}^n a_{ii}^{(2)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^n a_{is} a_{sj} - \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n a_{is} a_{si} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n a_{is} \sum_{j=1}^n a_{sj} - \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n a_{is}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n k a_{is} - \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n a_{is} = k^2 n - kn. \end{aligned}$$

Так как $C_4(G) \geq 0$, получаем, что

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^4 \geq kn + 2k^2 n - 2kn = kn(2k - 1).$$

Пусть $\lambda_i = kx_i$, тогда $-1 \leq x_i < 1$, $1 \leq i \leq n$,

$$\sum_{i=2}^n x_i = -1, \quad \sum_{i=2}^n x_i^2 = \frac{n}{k} - 1, \quad \sum_{i=2}^n x_i^3 \geq -1, \quad \sum_{i=2}^n x_i^4 \geq \frac{n(2k-1)}{k^3} - 1, \quad \sum_{i=2}^n x_i^5 \geq -1.$$

Для числа остовных деревьев графа известна формула

$$T(G) = \frac{1}{n} \prod_{i=2}^n (k - \lambda_i).$$

С учетом леммы 1 для $T(G)$ получим оценку сверху

$$\begin{aligned} T(G) &= \frac{1}{n} k^{n-1} \prod_{i=2}^n (1 - x_i) \leq \frac{1}{n} k^{n-1} \prod_{i=2}^n \exp \left(-x_i - \frac{x_i^2}{2} - \frac{x_i^3}{3} - \frac{x_i^4}{4} - \frac{x_i^5}{5} \right) \\ &= \frac{1}{n} k^{n-1} \exp \left(- \sum_{i=2}^n x_i - \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n x_i^2 - \frac{1}{3} \sum_{i=2}^n x_i^3 - \frac{1}{4} \sum_{i=2}^n x_i^4 - \frac{1}{5} \sum_{i=2}^n x_i^5 \right) \\ &\leq \frac{1}{n} k^{n-1} \exp \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{n}{k} - 1 \right) + \frac{1}{3} - \frac{n(2k-1)}{4k^3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right), \end{aligned}$$

которая совпадает с оценкой (2).

Покажем, что оценка (2) является в некотором смысле асимптотически точной для бесконечной последовательности регулярных графов.

Пусть G — полный s -дольный граф, у которого каждая доля имеет p вершин. Всего такой граф имеет sp вершин, он регулярный степени $(s-1)p$ и для него известна формула для числа остовных деревьев [3]

$$T(G) = (sp)^{s-2} ((s-1)p)^{s(p-1)} = n^{s-2} k^{n-s}.$$

Если $n, k, p \rightarrow \infty$ и s фиксировано, то

$$\sqrt[n]{T(G)} = \frac{k}{\sqrt[n]{n^2}} \left(\frac{s}{s-1} \right)^{1/p} = k(1 + o(1)),$$

что асимптотически совпадает с правой частью (2).

Обозначим правые части неравенств (1), (2) через $M_1(k, n)$, $M_2(k, n)$, соответственно, и сравним оценки (1) и (2). С помощью известного разложения

$$\ln(1+z) = z - z^2/2 + z^3/3 + o(z^3)$$

при $k \rightarrow \infty$ получаем, что

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{(k-1)^{k-1}}{(k^2-2k)^{k/2-1}} = k \exp \left((k-1) \ln \left(1 - \frac{1}{k} \right) - \left(\frac{k}{2} - 1 \right) \ln \left(1 - \frac{2}{k} \right) \right) \\ &= k \exp \left((k-1) \left(-\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} - \frac{1}{3k^3} \right) - \left(\frac{k}{2} - 1 \right) \left(-\frac{2}{k} - \frac{2}{k^2} - \frac{8}{3k^3} \right) + o \left(\frac{1}{k^2} \right) \right) \\ &= k \exp \left(-\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k^2} + o \left(\frac{1}{k^2} \right) \right). \end{aligned}$$

Следовательно, если $n \rightarrow \infty$, $k \equiv an^\alpha$, где $a > 0$, $0 < \alpha < \beta < 1$, $\alpha < \gamma < 1 -$ постоянные, то

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{M_1(k, n)} &= \sqrt[n]{\frac{A \log n}{nk \log k}} c_k = \exp \left(\frac{1}{n} \ln \left(\frac{A \log n}{nk \log k} \right) \right) k \exp \left(-\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k^2} + o \left(\frac{1}{k^2} \right) \right) \\ &= (1 + o(n^{-\beta})) \left(k - \frac{1}{2} - \frac{3}{8k} + o \left(\frac{1}{k} \right) \right) = k - \frac{1}{2} - \frac{3}{8k} + o \left(\frac{1}{k} \right) + o \left(\frac{k}{n^\beta} \right) \\ &= k - \frac{1}{2} + o(1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{M_2(k, n)} &= \sqrt[n]{\frac{c}{kn}} k \exp\left(-\frac{2k^2 + 2k - 1}{4k^3}\right) = (1 + o(n^{-\gamma})) \left(k - \frac{1}{2} - \frac{3}{8k} + o\left(\frac{1}{k}\right)\right) \\ &= k - \frac{1}{2} - \frac{3}{8k} + o\left(\frac{k}{n^\gamma}\right) = k - \frac{1}{2} + o(1).\end{aligned}$$

Таким образом, в этом случае два члена асимптотических разложений оценок (1) и (2) совпадают.

Автор благодарит рецензента за важные замечания.

Список литературы

1. Myrvold W., Reliable network synthesis: some recent developments. In: *Proc. 8th Intern. Conf. on Graph Theory, Combinatorics, Algorithms and Applications*, **2**, 1999, pp. 650–660.
2. Brown T. J. N., Mallion R. B., Pollak P., Roth A., Some methods for counting in labelled molecular graphs, examined in relation to certain fullerenes. *Discrete Appl. Math.* (1996) **67**, 51–66.
3. Biggs N., *Algebraic graph theory*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1974.
4. McKay B. D., Spanning trees in regular graphs. *Europ. J. Combin.* (1983) **4**, 149–160.
5. Fan Chung, Yau S.-T., Coverings, heat kernels and spanning trees. *Electronic J. Combin.* (1999) **6**, R12.
6. Lyons R., Asymptotic enumeration of spanning trees. *Combinatorics, Probability, Computing* (2005) **14**, 491–552.
7. Цветкович Д., Дуб М., Захс Х., *Спектры графов. Теория и применение*. Наукова думка, Киев, 1984.
8. Harary F., Manvel B., On the number of cycles in graph. *Matematický Časopis* (1971) **21**, 55–63.

Статья поступила 10.06.2008.