Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Л. Буряков, Асимптотические оценки уровня аффинности для почти всех булевых функций, *Дискрет. матем.*, 2008, том 20, выпуск 3, 73–79

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1014>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 14:06:31

Асимптотические оценки уровня аффинности для почти всех булевых функций

© 2008 г. М. Л. Буряков

Рассматривается асимптотическое поведение параметра булевых функций — уровня аффинности. Показано, что почти все булевы функции от n переменных имеют обобщенный уровень аффинности, превосходящий $n - \alpha \log_2 n$, $\alpha > 1$, получена асимптотическая верхняя оценка частичного уровня аффинности, рассмотрено асимптотическое поведение уровня аффинности для квадратичных булевых функций.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект 07-01-00154.

1. Введение

Одним из приемов, используемых при исследовании свойств дискретных отображений является изучение их ограничений, в результате чего исходная задача может быть сведена к менее сложной. Примером этого подхода является метод, предложенный в работах [1, 2] и использующий параметр булевой функции, называемый уровнем аффинности и характеризующий сложность метода. Исследования свойств уровня аффинности [3, 4] показывают его тесную связь с другими параметрами булевых функций. Кроме того, определенный интерес представляет изучение поведения уровня аффинности асимптотически, подобно поведению некоторых других характеристик (неразложимости почти всех булевых функций [6], тривиальности группы инерции для почти всех булевых функций в полной аффинной группе [7]). Этой проблеме посвящена, в частности, работа [5].

В настоящей работе проводится исследование поведения обобщенного уровня аффинности в целом и получена нижняя оценка обобщенного уровня аффинности для почти всех булевых функций.

2. Основные понятия и определения

Будем обозначать $\mathbb{F}_2$ поле из двух элементов, $V_n = \mathbb{F}_2^n$ — линейное пространство вектор-столбцов размерности n над полем $\mathbb{F}_2$. Вес Хемминга двоичного вектора $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ определяется как $\text{wt}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i$. Пусть L — некоторое подпространство V_n , $\dim L = r$, и $\mathbf{v} \in V_n$. Смежный класс $\pi = L \oplus \mathbf{v}$ будем называть плоскостью размерности r пространства V_n и писать $\dim \pi = r$. Будем считать, что $\dim \pi = -1$, если $\pi = \emptyset$, и $\dim \pi = 0$, если $\pi = \{\mathbf{u}\}$, $\mathbf{u} \in V_n$. Множество всех плоскостей пространства V_n (включая пустую плоскость) обозначим через $P(V_n)$.

Пусть $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ — канонический базис V_n , $\mathbf{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^\top$, где 1 стоит в i -й позиции, $i = 1, 2, \dots, n$.

Для любого вектора $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top \in V_n$ справедливо равенство

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 \oplus \dots \oplus x_n \mathbf{e}_n,$$

где $\oplus$ обозначает сложение в $\mathbb{F}_2$ и покомпонентное сложение векторов в V_n .

Пусть n, m — натуральные числа. Обозначим через $\mathcal{F}_{n,m}$ множество всех отображений из V_n в V_m . В случае, когда $m = 1$, множество $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n,1}$ есть множество всех отображений из V_n в $\mathbb{F}_2$, то есть множество всех булевых функций от n переменных.

Для булевой функции f из $\mathcal{F}_n$ ее значение на векторе $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 \oplus \dots \oplus x_n \mathbf{e}_n$ будем обозначать

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1 \mathbf{e}_1 \oplus \dots \oplus x_n \mathbf{e}_n) = f(x_1, \dots, x_n).$$

Любая функция из $\mathcal{F}_n$ может быть представлена в виде полинома

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigoplus_{\mathbf{u} \in V_n} \lambda_{\mathbf{u}} \left(\prod_{i=1}^n x_i^{u_i} \right), \quad \lambda_{\mathbf{u}} \in \mathbb{F}_2,$$

называемого алгебраической нормальной формой (АНФ) этой функции.

Алгебраической степенью функции f , обозначаемой $\deg(f)$, является максимальное значение $\text{wt}(\mathbf{u})$ по тем $\mathbf{u}$, для которых $\lambda_{\mathbf{u}} \neq 0$. Через $\deg(f, x_i)$ обозначается максимальное значение $\text{wt}(\mathbf{u})$ по тем $\mathbf{u}$, для которых $\lambda(\mathbf{u}) \neq 0$ и i -я компонента вектора $\mathbf{u}$ равна 1 (то есть максимальная степень монома, в котором содержится переменная x_i).

Обозначим через $\mathcal{A}_{n,m}$ подмножество аффинных отображений множества $\mathcal{F}_{n,m}$. При этом $\mathcal{A}_{n,1} = \mathcal{A}_n$ — множество аффинных булевых функций от n переменных, то есть функций $f \in \mathcal{F}_n$, для которых $\deg(f) \leq 1$.

Пусть $f \in \mathcal{F}_n$. Для наборов $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_k)^\top \in V_k$ при $k \leq n$ обозначим через $f_{i_1, \dots, i_k}^{b_1, \dots, b_k}$ булеву функцию из $\mathcal{F}_{n-k}$, полученную из f фиксацией переменных $x_{i_1} = b_1, \dots, x_{i_k} = b_k$ и называемую подфункцией функции f .

Булева функция f из $\mathcal{F}_n$ называется k -аффинной, $0 \leq k \leq n-1$, если существуют наборы $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_k)^\top \in V_k$ такие, что $f_{i_1, \dots, i_k}^{b_1, \dots, b_k}$ является аффинной, то есть $\deg(f_{i_1, \dots, i_k}^{b_1, \dots, b_k}) \leq 1$.

Уровнем аффинности $\text{la}(f)$ булевой функции f из $\mathcal{F}_n$ называется минимальное число k , для которого f является k -аффинной.

Частичным уровнем аффинности $\text{la}^0(f)$ булевой функции f из $\mathcal{F}_n$ называют минимальное число k , для которого существует набор переменных $i_1, \dots, i_k$ такой, что $f_{i_1, \dots, i_k}^{0, \dots, 0}$ является аффинной.

Понятие k -аффинности и уровня аффинности было введено в [2]. В [5] было показано, что асимптотически при $n \rightarrow \infty$ для почти всех булевых функций $\text{la}(f) \geq \lceil n/2 \rceil$.

Пусть $\Phi \in \mathcal{F}_{n,m}$ и M — произвольное подмножество пространства V_n . Ограничением $\Phi|_M$ отображения Φ на множество M будем называть отображение $\Phi': M \rightarrow V_m$ такое, что $\Phi'(\mathbf{x}) = \Phi|_M(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x})$ для всех $\mathbf{x} \in M$.

Пусть $\Phi \in \mathcal{F}_{n,m}$. Плоскость $\pi \in P(V_n) \setminus \emptyset$ называется локальной аффинностью булева отображения Φ , если существует аффинное отображение $\Psi \in \mathcal{A}_{n,m}$ такое, что $\Phi|_\pi = \Psi|_\pi$.

Обозначим

$$\tilde{P}_\Phi(V_n) = \{\pi \in P(V_n) \setminus \emptyset \mid \exists \Psi \in \mathcal{A}_{n,m}: \Phi|_\pi = \Psi|_\pi\}$$

совокупность локальных аффинностей отображения Φ .

Обобщенным уровнем аффинности отображения $\Phi \in \mathcal{F}_{n,m}$ называется неотрицательное целое число

$$\mathcal{L}\alpha(\Phi) = n - \max_{\pi \in \tilde{\mathcal{P}}_{\Phi}(V_n)} \dim \pi.$$

Замечание 1. Значение обобщенного уровня аффинности, в отличие от обычного уровня аффинности, является аффинным инвариантом, то есть инвариантом относительно действия на функцию полной аффинной группы (см. [6]).

Замечание 2. Очевидно, что

$$\mathcal{L}\alpha(f) \leq \text{la}(f) \leq \text{la}^0(f)$$

для произвольной булевой функции f .

3. Основные результаты

Вначале докажем асимптотическую верхнюю оценку для обобщенного уровня аффинности булевых функций.

Теорема 1. Пусть $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha > 1$, — произвольная фиксированная константа. Тогда асимптотически при $n \rightarrow \infty$ для почти всех функции из $\mathcal{F}_n$

$$\mathcal{L}\alpha(f) \geq n - \alpha \log_2 n.$$

Доказательство. Известно (см. [8]), что число r -мерных плоскостей пространства V_n равно $2^{n-r} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$, где

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \frac{(2^n - 1)(2^n - 2) \dots (2^n - 2^{r-1})}{(2^r - 1)(2^r - 2) \dots (2^r - 2^{r-1})}, \quad 1 \leq r \leq n, \quad \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 1. \quad (1)$$

Рассмотрим какую-либо r -мерную плоскость L пространства V_n . Пусть a_L — число булевых функций из $\mathcal{F}_n$, ограничение которых на L есть аффинная функция. Нетрудно понять, что это число не зависит от выбора L , а зависит только от числа r . Тогда число булевых функций $f \in \mathcal{F}_n$, для которых $\mathcal{L}\alpha(f) \leq n - r$, будет не больше, чем $2^{n-r} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} a_L$.

Рассмотрим теперь конкретную r -мерную плоскость вида $\mathbb{F}_2^r \times \{(0, \dots, 0)\}$. Ограничение функции f на эту плоскость является аффинным тогда и только тогда, когда f не содержит мономы длины $2, 3, \dots, r$, состоящие только из переменных $x_1, \dots, x_r$. Число функций, обладающих таким свойством, равно

$$2^{2^n - \sum_{i=2}^r \binom{n}{i}} = 2^{2^n - 2^r + r + 1}. \quad (2)$$

Значит, $a_L = 2^{2^n - 2^r + r + 1}$. Таким образом, с учетом (1) получаем, что число функций, имеющих аффинное ограничение на r -мерных плоскостях, не больше, чем

$$2^{n-r} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} 2^{2^n - 2^r + r + 1}, \quad (3)$$

а их доля относительно всех функций из $\mathcal{F}_n$ равна

$$2^{n-r} \binom{n}{r} 2^{-2^r+r+1}. \quad (4)$$

Далее, поскольку каждый множитель в числителе дроби, определяющей $\binom{n}{r}$, меньше 2^n , а каждый множитель в знаменателе больше или равен 2^{r-1} , справедливо неравенство

$$\binom{n}{r} < 2^{n(r-1)-(r-1)^2} = 2^{n(r-1)-r^2+2r-1}. \quad (5)$$

Отсюда следует, что доля функций, имеющих аффинное ограничение на r -мерных плоскостях, меньше, чем

$$2^{n(r-1)-r^2+2r-1-2^r+r+1} = 2^{n(r-1)-r^2+3r-2^r}. \quad (6)$$

Положим теперь

$$r = \alpha \log_2 n, \quad \alpha \in \mathbf{R}, \quad \alpha > 1,$$

и устремим $n \rightarrow \infty$. Получим, что доля функций, имеющих аффинное ограничение на плоскостях размерности, большей $\alpha \log_2 n$, стремится к 0. Иными словами, почти все булевы функции от n переменных имеют аффинное ограничение на плоскостях размерности, меньшей $\alpha \log_2 n$. Очевидно, что если функция аффинна на плоскости размерности $r > 0$, то она также аффинна на некоторой плоскости размерности $r - 1$. Отсюда непосредственно следует утверждение теоремы.

Так как $\mathcal{L}\alpha(f) \leq \text{la}(f)$, из теоремы 1, как следствие, можно получить следующий результат.

Следствие 1. *Асимптотически при $n \rightarrow \infty$ почти все булевы функции из $\mathcal{F}_n$ имеют уровень аффинности, превосходящий $n - \alpha \log_2 n$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha > 1$.*

Заметим, что аналогичное утверждение верно и для частичного уровня аффинности la^0 .

Теорема 2. *Пусть ξ_n — случайная величина, распределенная равномерно на множестве $\mathcal{F}_n$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha > 1$ и*

$$P_n = \mathbf{P}\{\mathcal{L}\alpha(\xi_n) > n - \alpha \log_2 n\}.$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 1.$$

Эта теорема вытекает из теоремы 1.

Рассмотрим теперь вопрос о верхней границе уровня аффинности. Пусть $f \in \mathcal{F}_n$. Обозначим $\text{len}^*(f)$ число нелинейных мономов в АНФ функции f , n^* — число переменных x_i , для которых $\deg(f, x_i) > 1$, $i = 1, \dots, n$.

Пусть также

$$\mathcal{F}_n^{\psi(n)} = \left\{ f \in \mathcal{F}_n : \text{len}^*(f) < \frac{2^n}{\psi(n)} \right\},$$

где $\psi(n)$ — некоторая функция, $\psi(n) \neq 0$.

Теорема 3. Пусть $\varphi(n)$ — произвольная монотонная неограниченная функция, $\varphi(n) > 0$ для любого n ; $\beta \in \mathbf{R}$, $\beta > 1$ — некоторая фиксированная константа. Тогда асимптотически при $n \rightarrow \infty$ для почти всех функций из $\mathcal{F}_n^{\varphi^\beta(n)}$

$$\text{la}^0(f) \leq n - \log_2 \varphi(n).$$

Доказательство. Для произвольной булевой функции $f \in \mathcal{F}_n$ составим двоичную матрицу $M_f = \|M_f \langle i, j \rangle\|$ из $\text{len}^*(f) = s$ строк и $n^* = p$ столбцов, полагая $M_f \langle i, j \rangle = 1$, если в i -м мономе функции f содержится переменная x_j , и $M_f \langle i, j \rangle = 0$ в противном случае (здесь мы считаем, что мономы каким-либо образом упорядочены, например, в лексикографическом порядке).

Понятно, что различным функциям из $\mathcal{F}_n$ соответствуют различные матрицы M_f , если рассматривать эти функции с точностью до аффинных частей.

Будем говорить, что подмножество P столбцов матрицы M_f является аннулирующим, если для любой i -й строки, $i = 1, \dots, s$, этой матрицы существует k -й столбец, принадлежащий множеству P , такой, что $M_f \langle i, k \rangle = 1$.

Легко понять, что $\text{la}^0(f)$ равен минимальной мощности аннулирующего множества для матрицы M_f .

Рассмотрим теперь случай, когда первые t столбцов матрицы M_f образуют аннулирующее множество. Очевидно, что число матриц, обладающих таким свойством, равно $(2^t - 1)^s 2^{(p-t)s}$, а их доля по отношению ко всем двоичным матрицам размера $s \times p$ равна

$$(2^t - 1)^s 2^{(p-t)s} / 2^{ps} = \left(1 - \frac{1}{2^t}\right)^s.$$

Положим $t = n - \log_2 \varphi(n)$, $s = 2^n / \varphi^\beta(n)$, где $\varphi(n)$ и β удовлетворяют условиям теоремы.

При таком выборе параметров t и s можно считать, что рассматриваются только функции из множества $\mathcal{F}_n^{\varphi^\beta(n)}$. Кроме этого получаем, что доля функций, для которых частичный уровень аффинности меньше либо равен $t = n - \log_2 \varphi(n)$, больше или равна

$$\left(1 - \frac{1}{2^{n - \log_2 \varphi(n)}}\right)^{2^n / \varphi^\beta(n)} = \left(\left(1 - \frac{\varphi(n)}{2^n}\right)^{-2^n / \varphi(n)}\right)^{-1 / \varphi^{\beta-1}(n)},$$

то есть стремится к 1 при $n \rightarrow \infty$. Отсюда следует утверждение теоремы.

Поскольку

$$\mathcal{L}\alpha(f) \leq \text{la}(f) \leq \text{la}^0(f),$$

из теоремы 3 непосредственно получаем следующее утверждение.

Следствие 2. Если $\varphi(n)$ и β удовлетворяют условию теоремы 3, то асимптотически при $n \rightarrow \infty$ почти все булевы функции из $\mathcal{F}_n^{\varphi^\beta(n)}$ имеют уровень аффинности, не превосходящий $n - \log_2 \varphi(n)$. Аналогичное утверждение верно и для обобщенного уровня аффинности.

Если рассматривать класс функций с ограничением на их степень, то из теоремы 3 получаем следующее утверждение.

Следствие 3. Пусть $\beta \in \mathbf{R}$, $\beta > 1$, — произвольная фиксированная константа. Тогда асимптотически при $n \rightarrow \infty$ для почти всех функций $f \in \mathcal{F}_n$ таких, что $\deg(f) \leq d$, где d фиксировано,

$$\text{la}^0(f) \leq \frac{\beta - 1}{\beta} n + \frac{1}{\beta} \log_2 D_d^n,$$

где

$$D_d^n = \sum_{i=0}^d \binom{n}{i}.$$

Доказательство. Если $f \in \mathcal{F}_n$ и $\deg(f) \leq d$, то в АНФ функции f содержатся мономы степени не выше d , и их число $\text{len}(f) \leq D_d^n$. Тогда в теореме 3 можно положить $\varphi(n) = (2^n / D_d^n)^{1/\beta}$, откуда

$$\text{la}^0(f) \leq n - \frac{1}{\beta} \log_2 \left(\frac{2^n}{D_d^n} \right) = \frac{\beta - 1}{\beta} n + \frac{1}{\beta} \log_2 D_d^n$$

для почти всех f при $n \rightarrow \infty$.

Замечание 3. Нетрудно видеть, что нижняя и верхняя асимптотические границы уровня аффинности очень похожи, поэтому представляет определенный интерес вопрос получения асимптотического равенства или по крайней мере сужения разницы между верхними и нижними оценками.

В заключение рассмотрим вопрос о распределении уровня аффинности для квадратичных булевых функций. Эти функции интересны, в частности, тем, что именно на них достигается максимальное значение уровня аффинности (см. [3]). Заметим также, что для любой квадратичной булевой функции f , очевидно, $\text{la}(f) = \text{la}^0(f)$.

Каждой квадратичной булевой функции f можно поставить в соответствие неориентированный граф $G_f(V, E)$, где множество V совпадает с множеством переменных функции f , а ребро (x_i, x_j) содержится в множестве E тогда и только тогда, когда АНФ функции f содержит моном $x_i x_j$. Если в АНФ функции f содержится моном x_k , то можно считать, что в графе G_f есть петля $x_k x_k$. Заметим, однако, что наличие и вид аффинной части у булевой функции не влияет на ход дальнейших рассуждений.

Очевидно, что если граф G_f имеет клику (то есть полный подграф) мощности d , то $\text{la}(f) \geq d - 1$ (см. [2]). Если $d_{\max}(G_f)$ — мощность максимальной клики для графа G_f , то $\text{la}(f) = d_{\max}(G_f) - 1$.

В [9] показано, что вероятность того, что для случайного графа мощность максимальной клики $d_{\max}(G)$ удовлетворяет неравенствам

$$\lfloor M(n) \rfloor \leq d_{\max}(G) \leq \lceil M(n) \rceil,$$

стремится к 1 при $n \rightarrow \infty$. Здесь

$$M(n) = 2 \left(\log_2 n - \log_2 \log_2 n + \log_2 \frac{e}{2} \right) + 1.$$

С учетом этого результата и предыдущих рассуждений можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 4. Вероятность того, что для случайной булевой функции $f \in \mathbb{F}_n$, $\deg(f) \leq 2$, справедливы неравенства

$$\lfloor M(n) \rfloor \leq \text{la}(f) \leq \lceil M(n) \rceil,$$

где

$$M(n) = 2 \left(\log_2 n - \log_2 \log_2 n + \log_2 \frac{e}{2} \right),$$

стремится к 1 при $n \rightarrow \infty$.

Список литературы

1. Логачев О. А., Сальников А. А., Ященко В. В., Корреляционная иммунность и реальная секретность. В сб.: *Математика и безопасность информационных технологий*. МЦНМО, Москва, 2004, с. 165–170.
2. Логачев О. А., Сальников А. А., Ященко В. В., Комбинирующие k -аффинные функции. В сб.: *Математика и безопасность информационных технологий*. МЦНМО, Москва, 2004, с. 176–178.
3. Буряков М. Л., Логачев О. А., Об уровне аффинности булевых функций. *Дискретная математика* (2005) **17**, №4, 98–107.
4. Буряков М. Л., О связи уровня аффинности с криптографическими параметрами булевых функций. *Дискретная математика* (2008) **20**, №2, 3–14.
5. Буряков М. Л., Логачев О. А., О распределении уровня аффинности на множестве булевых функций. В сб.: *Математика и безопасность информационных технологий*. МЦНМО, Москва, 2005, с. 141–146.
6. Логачев О. А., Сальников А. А., Ященко В. В., *Булевы функции в теории кодирования и криптологии*. МЦНМО, Москва, 2004.
7. Шеннон К., Синтез двухполюсных переключаемых схем. В сб.: *Работы по теории информации и кибернетике*. ИЛ, Москва, 1963, с. 59–105.
8. Мак-Вильямс Ф. Дж., Слоэн Н. Дж. А., *Теория кодов, исправляющих ошибки*. Связь, Москва, 1979.
9. Matula D. W., *The largest clique size in random graph*, Techn. Rep. CS 7608. Dept. Comput. Sci., Southern Methodist Univ., 1976.

Статья поступила 10.06.2008.