Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Марченков, Оператор замыкания с разветвлением по предикату равенства на множестве частичных булевых функций, *Дискрет. матем.*, 2008, том 20, выпуск 3, 80–88

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1015>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 17:59:22

Оператор замыкания с разветвлением по предикату равенства на множестве частичных булевых функций

© 2008 г. С. С. Марченков

На множестве P_2^* частичных булевых функций рассматривается оператор замыкания с разветвлением по предикату равенства. Доказывается, что по отношению к этому оператору каждый замкнутый класс из P_2^* порождается множеством всех своих функций, зависящих не более чем от двух переменных. Определяются все максимальные и субмаксимальные классы в P_2^* . Перечисляются все замкнутые классы, порождаемые одной одноместной или двуместной функцией.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 06-01-00438.

1. Введение

Частичные булевы функции довольно широко изучаются в дискретной математике и математической кибернетике. С функциональной точки зрения частичные булевы функции расположены ближе к функциям трехзначной логики, нежели к обычным булевым функциям. Так, если рассматривать замкнутые (относительно операции суперпозиции) классы частичных булевых функций, то здесь существуют как замкнутые классы, не имеющие базиса [6, 7], так и замкнутые классы со счетным базисом [1]. Из последнего факта следует, что число замкнутых классов частичных булевых функций континуально. Это в известной степени затрудняет изучение порождающих возможностей частичных булевых функций.

Вместе с тем в теории функций многозначной логики известно немало операторов замыкания, которые существенно сильнее оператора суперпозиции и которые при любом $k \geq 2$ приводят к конечным классификациям множества функций k -значной логики. К таким операторам прежде всего относятся операторы замыкания программного типа [2, 5]. Спектр этих операторов весьма широк, и далеко не все классификации, отвечающие этим операторам, подробно изучены. Исключение составляет оператор замыкания с разветвлением по предикату равенства [4]. Соответствующие этому оператору замкнутые классы в [4] названы E -замкнутыми классами. В [4] показано, что при любом $k \geq 2$ имеется лишь конечное число E -замкнутых классов k -значной логики, содержащих тождественную функцию. Все эти классы допускают альтернативное описание в терминах однородных функций и операции суперпозиции.

В настоящей статье мы исследуем действие оператора замыкания с разветвлением по предикату равенства (E -оператора) на множестве P_2^* частичных булевых функций. До-

казывается, что каждый из E -замкнутых классов в P_2^* E -порождается множеством всех своих функций, зависящих не более чем от двух переменных (теорема 1). В терминах E -предполных классов устанавливается критерий E -полноты в классе P_2^* (теорема 2), а также аналогичные критерии в каждом из E -предполных классов. В заключительном параграфе перечисляются все E -замкнутые классы, которые E -порождаются одной одно-местной или двуместной функцией.

2. Основные понятия

Пусть $E_2 = \{0, 1\}$, P_2 — множество всех функций на E_2 (множество булевых функций), P_2^* — множество всех частичных функций на E_2 (множество частичных булевых функций). Если $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2^*$, $(a_1, \dots, a_n) \in E_2^n$ и функция f не определена на наборе $(a_1, \dots, a_n)$, то этот факт будем записывать в виде $f(a_1, \dots, a_n) = *$. Символом $*$ обозначаем также нигде не определенную функцию (от любого числа переменных). Одноместную функцию f из P_2^* будем иногда записывать в виде вектора $(f(0)f(1))$. Например, вектором $(0*)$ обозначаем такую функцию $f(x)$, что $f(0) = 0$ и $f(1) = *$. Некоторые двуместные функции $f(x, y)$ будем задавать в виде 2×2 матрицы, у которой в i -й строке и j -м столбце стоит значение $f(i-1, j-1)$, $1 \leq i, j \leq 2$.

Произвольную функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ рассматриваем также как функцию от любого большего числа переменных $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$, считая переменные $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$ несущественными для функции f . Так же, как для множества булевых функций [8], с использованием понятия формулы (терма) над множеством функций определяем на множестве P_2^* операцию суперпозиции. При этом дополнительно, если

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(g_1(x_1^1, \dots, x_{k_1}^1), \dots, g_m(x_1^m, \dots, x_{k_m}^m)), \quad (1)$$

где $\{x_1^1, \dots, x_{k_1}^1, \dots, x_1^m, \dots, x_{k_m}^m\} \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ и значение хотя бы одной из функций $g_1, \dots, g_m$ на наборе $\tilde{a} = (a_1, \dots, a_n)$ не определено, либо не определено значение функции g на наборе $(g_1(\tilde{a}), \dots, g_m(\tilde{a}))$, то и значение $f(\tilde{a})$ не определено. Отметим еще, что в суперпозиции (1) некоторые из функций $g_1, \dots, g_m$ могут являться тождественными функциями, то есть быть равными значениям какой-либо из своих переменных. В этом случае в суперпозиции (1) оставляем лишь соответствующую переменную.

Пусть $Q \subseteq P_2^*$. Замыканием Q называется множество всех функций из P_2^* , которые можно получить из функций множества Q с помощью операций введения несущественных переменных и суперпозиции, замыкание множества Q обозначаем $[Q]$. Множество Q называется замкнутым, если $Q = [Q]$. Замкнутые множества называем также замкнутыми классами.

Пусть T_0, T_1, S, C_0, C_1 обозначают замкнутые классы функций из P_2 , которые соответственно сохраняют 0, сохраняют 1, самодвойственны, равны константе 0, равны константе 1 (см. [9, 3]). Положим далее $T_{01} = T_0 \cap T_1$, $S_{01} = S \cap T_0$.

Пусть $g_1, g_2 \in P_2^*$. Говорим, что функция $f(x_1, \dots, x_n)$ получается из функций $g_1(x_1, \dots, x_n), g_2(x_1, \dots, x_n)$ с помощью операции разветвления по предикату равенства, если для некоторых $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ выполняется соотношение

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n), & \text{если } x_i = x_j, \\ g_2(x_1, \dots, x_n) & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (2)$$

E -замыкание множества $Q \subseteq P_2^*$ определяем как множество всех функций из P_2^* , которые можно получить из функций множества Q с помощью операций введения несущественных переменных, суперпозиции и разветвления по предикату равенства.

E -замыкание множества Q обозначаем $[Q]_E$. Множество функций, которое совпадает со своим E -замыканием, называем E -замкнутым классом. Говорим, что множество $R \subseteq Q$ E -порождает E -замкнутый класс Q (или E -полно в классе Q), если $[R]_E = Q$.

Обозначим через T_0^* множество всех функций из P_2^* , которые на нулевом наборе принимают значение 0 или *. Аналогично определяем множество T_1^* . Пусть S^* есть множество всех функций из P_2^* , которые на любой паре противоположных наборов принимают значения, отличные от (0, 0) и (1, 1). Обозначим через I^* множество всех функций из P_2^* , которые переводят нулевой и единичный наборы в одну из пар (0, 1), (0, *), (1, *), (*, 0), (*, 1), (*, *).

Нетрудно убедиться в том, что классы P_2 , T_0^* , T_1^* , S^* , I^* являются E -замкнутыми. При этом при рассмотрении операции (2) разветвления по предикату равенства следует обратить внимание на то, что нулевой и единичный наборы попадают в первую часть схемы (2), а пары противоположных наборов одновременно входят либо в первую, либо во вторую части схемы (2). Отметим также E -замкнутость классов T_0 , T_1 , S , T_{01} , S_{01} , которая установлена в [4], и очевидную E -замкнутость классов C_0 и C_1 .

3. Предварительные результаты

В [4] доказано, что для любого множества $Q \subseteq P_2$, содержащего тождественную функцию x , E -замыкание множества Q совпадает с $[Q \cup S_{01}]$. Отсюда и из известных фактов о строении решетки замкнутых классов булевых функций [9, 3] следует, что система функций $\{0, 1\}$ E -полна в классе P_2 , система $\{0, x\}$ E -полна в классе T_0 , система $\{1, x\}$ E -полна в классе T_1 , функция $\bar{x}$ образует E -полную систему в классе S , функция xu (а также функция $x \vee y$) образует E -полную систему в классе T_{01} , функция x образует E -полную систему в классе S_{01} .

Очевидно также, что классы C_0 , C_1 E -порождаются соответственно константами 0 и 1. Поскольку C_0 , C_1 являются единственными замкнутыми классами в P_2 , которые не содержат ни функции x , ни одновременно двух констант [9, 3], приходим к выводу, что в классе P_2 помимо самого класса P_2 имеется только 7 E -замкнутых классов: T_0 , T_1 , S , T_{01} , S_{01} , C_0 , C_1 .

Используем отмеченные выше результаты о E -порождающих системах в классах P_2 , T_0 , T_1 , S , T_{01} для построения E -полных систем в классах P_2^* , T_0^* , T_1^* , S^* , I^* .

Лемма 1. Система $\{0, 1, *\}$ E -полна в классе P_2^* .

Доказательство. Используя тождественную функцию из класса $P_2 = \{[0, 1]\}_E$, определяем с помощью операции разветвления по предикату равенства функцию g , полагая

$$g(x, y, z) = \begin{cases} z, & \text{если } x = y, \\ * & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть $f(\tilde{x})$ — произвольная функция из P_2^* , $f'(\tilde{x})$ — ее доопределения в классе P_2 , $f_1(\tilde{x})$, $f_2(\tilde{x})$ — такие функции из P_2 , что

$$(f_1(\tilde{x}) = f_2(\tilde{x})) \equiv (f(\tilde{x}) \text{ определено}). \quad (3)$$

Тогда $f(\tilde{x}) = g(f_1(\tilde{x}), f_2(\tilde{x}), f'(\tilde{x}))$. Лемма доказана.

Лемма 2. Система $\{0, x, *\}$ E -полна в классе T_0^* , система $\{1, x, *\}$ E -полна в классе T_1^* .

Доказательство. Рассмотрим только класс T_0^* . Так же, как и в лемме 1, из тождественной функции и функции $*$ получаем функцию g . Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in T_0^*$, $f'(\tilde{x})$ — доопределение функции f в классе T_0 , $f(\tilde{x})$, $f_2(\tilde{x})$ — такие функции из класса T_0 , что на множестве $E_2^n \setminus \{\tilde{0}\}$ справедлива эквивалентность (3). Положим

$$f_3(\tilde{x}) = g(f_1(\tilde{x}), f(2(\tilde{x})), f'(\tilde{x})).$$

Тогда $f_3(\tilde{0}) = 0$ и на множестве $E_2^n \setminus \{\tilde{0}\}$ функция f_3 совпадает с функцией f . Если f_3 отлична от функции f , то должно выполняться равенство $f(\tilde{x}) = *$. В этом случае по аналогии с функцией f_3 определим функцию f_4 , которая равна 0 на наборе $\tilde{0}$ и отлична от функции f_3 на любом наборе из $E_2^n \setminus \{\tilde{0}\}$, на котором функция f_3 определена. Положим

$$g_1(x, y) = \begin{cases} *, & \text{если } x = y, \\ x & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда $f(\tilde{x}) = g_1(f_3(\tilde{x}), f_4(\tilde{x}))$. Лемма доказана.

Лемма 3. Система $\{\tilde{x}, (0 *)\}$ E -полна в классе S^* .

Доказательство. Понятно, что суперпозициями функций $\tilde{x}, (0 *)$ можно получить любую одноместную функцию из класса S^* .

Пусть $f(\tilde{x})$ — произвольная функция из класса S^* , $f'(\tilde{x})$ — ее доопределение в классе S . Если функция f отлична от функции f' (напомним, что функция $\tilde{x}$ образует E -базис класса S), то пусть, например, функция f не определена на наборе $\tilde{a}$. Выберем в классе S такие функции $f_1(\tilde{x})$, $f_2(\tilde{x})$, что неравенство $f_1(\tilde{x}) \neq f_2(\tilde{x})$ выполняется только для набора $\tilde{a}$ и противоположного ему набора $\tilde{a}'$. Пусть далее $g(x)$ — такая функция из S^* , что $g(f_1(\tilde{a})) = f(\tilde{a})$, $g(f_1(\tilde{a}')) = f(\tilde{a}')$. Положим

$$g_1(x, y, z) = \begin{cases} z, & \text{если } x = y, \\ g(x) & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$f_3(\tilde{x}) = g_1(f_1(\tilde{x}), f_2(\tilde{x}), f'(\tilde{x})).$$

Тогда функция f_3 будет совпадать с функцией f на наборах $\tilde{a}$, $\tilde{a}'$ и всех наборах $\tilde{x}$, на которых значение f определено.

Пусть теперь $f_3^1(\tilde{x}), \dots, f_3^t(\tilde{x})$ — все функции типа $f_3(\tilde{x})$, построенные для всех указанных выше наборов $\tilde{a}$, $h(x_1, \dots, x_t)$ — функция из S , сохраняющая 0. Тогда $f(\tilde{x}) = h(f_3^1(\tilde{x}), \dots, f_3^t(\tilde{x}))$. Лемма доказана.

Лемма 4. Система $\{xy, (1 *), (* 0)\}$ E -полна в классе I^* .

Доказательство. Суперпозициями функций $(1 *), (* 0)$ получаем еще три не всюду определенные функции класса I^* , а именно, $(0 *)$, $(* 1)$, $*$.

Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — произвольная функция из класса I^* . Выберем в классе T_{01} , который E -порождается функцией xy , такие функции $f'(\tilde{x})$, $f_1(\tilde{x})$, $f_2(\tilde{x})$, что на множестве $E_2^n \setminus \{\tilde{0}, \tilde{1}\}$ функция f' является доопределением функции f , а функции f_1 , f_2 на этом множестве удовлетворяют эквивалентности (3). Положим

$$f_3(\tilde{x}) = g(f_1(\tilde{x}), f_2(\tilde{x}), f'(\tilde{x})),$$

где g — функция из доказательства леммы 1. Тогда $f_3(\tilde{0}) = 0$, $f_3(\tilde{1}) = 1$ и на множестве $E_2^n \setminus \{\tilde{0}, \tilde{1}\}$ функция f_3 совпадает с функцией f . Если функция f_3 не равна функции f , то

подобно функции f_3 определяем функцию $f_4(\tilde{x})$, которая отличается от функции $f_3(\tilde{x})$ на каждом наборе $\tilde{x}$ из множества $E_2^n \setminus \{\bar{0}, \tilde{x}\}$, на котором функция f_3 определена. Пусть $h(x)$ — такая функция из класса I^* , что $h(0) = f(\bar{0})$, $h(1) = f(\bar{1})$. Положим

$$g_1(x, y) = \begin{cases} h(x), & \text{если } x = y, \\ x & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда $f(\tilde{x}) = g_1(f_3(\tilde{x}), f_4(\tilde{x}))$. Лемма доказана.

Следующая теорема показывает, в частности, что число E -замкнутых классов в P_2^* конечно.

Теорема 1. *Любой E -замкнутый класс функций из P_2^* порождается множеством всех своих функций, зависящих не более чем от двух переменных.*

Доказательство. Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2^*$ и $n \geq 3$. Покажем, что функцию f можно получить из функций

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_3, \dots, x_n) &= f(x_1, x_1, x_3, \dots, x_n), \\ f_2(x_1, x_2, x_4, \dots, x_n) &= f(x_1, x_2, x_1, x_4, \dots, x_n), \\ f_3(x_1, x_2, x_4, \dots, x_n) &= f(x_1, x_2, x_2, x_4, \dots, x_n) \end{aligned}$$

с помощью операции разветвления по предикату равенства. Поскольку функции f_1, f_2, f_3 зависят от $n - 1$ переменных, отсюда следует утверждение теоремы. В самом деле, положим

$$f'(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} f_2(x_1, x_2, x_4, \dots, v_n), & \text{если } x_1 = x_3, \\ f_3(x_1, x_2, x_4, \dots, x_n) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Заметим, что функция f' совпадает с функцией f на любом наборе $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, где $a_1 \neq a_2$. Поэтому функция f определяется соотношениями

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} f_1(x_1, x_3, \dots, x_n), & \text{если } x_1 = x_2, \\ f'(x_1, \dots, x_n) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Теорема доказана.

4. Максимальные и субмаксимальные классы

Пусть Q, R — E -замкнутые классы и $R \subset Q$. Класс R называется E -максимальным (E -предполным) в классе Q , если не существует такого E -замкнутого класса V , что $R \subseteq V \subseteq Q$ и V отличен от классов R, Q .

Следующая теорема показывает, что классы $P_2, T_0^*, T_1^*, S^*, I^*$ (которые, как нетрудно видеть, целиком не содержатся друг в друге) являются единственными E -предполными в P_2^* классами.

Теорема 2 (критерий E -полноты в классе P_2^*). *Система функций из P_2^* E -полна в классе P_2^* тогда и только тогда, когда она целиком не содержится ни в одном из классов $P_2, T_0^*, T_1^*, S^*, I^*$.*

Доказательство. Необходимость условия теоремы следует из того, что классы $P_2, T_0^*, T_1^*, S^*, I^*$ E -замкнуты и отличны от класса P_2^* .

Установим достаточность условия теоремы. Пусть $f_2, \dots, f_5$ — функции, которые не входят соответственно в классы $P_2, T_0^*, T_1^*, S^*, I^*$. Покажем, что система $\{f_2, \dots, f_5\}$ E -полна в классе P_2^* .

Из определения классов $P_2, T_0^*, T_1^*, S^*, I^*$ следует, что отождествлением переменных из функций $f_2, \dots, f_5$ можно получить такие функции $g_1(x, y), g_2(x), g_3(x), g_4(x, y), g_5(x)$, что

$$g_1(0, 1) = *, \quad g_2(0) = 1, \quad g_3(1) = 0, \quad g_4(0, 1) = g_4(1, 0) \neq *, \quad g_5(x) \in \{0, 1, \bar{x}\}.$$

Если g_5 — константа, то другую константу получаем подстановкой функции g_5 в функции g_2 или g_3 . Если $g_5(x) = \bar{x}$, то константой является функция $g_4(x, g_5(x))$. Имея обе константы, получаем из функции g_1 функцию $*$. Далее применяем лемму 1. Теорема доказана.

Наша дальнейшая цель — найти все субмаксимальные классы в P_2^* , то есть все E -замкнутые классы, которые являются максимальными хотя бы в одном из классов $P_2, T_0^*, T_1^*, S^*, I^*$. Для класса P_2 мы фактически сделали это выше, перечислив все E -замкнутые классы из P_2 : все E -замкнутые классы в P_2 суть T_0, T_1, S . Для остальных классов T_0^*, T_1^*, S^*, I^* это будет сделано в теоремах 3–5.

Пусть $T_{0,0}^*$ — множество всех функций из P_2^* , сохраняющих константу 0, $T_{1,1}^*$ — множество всех функций из P_2^* , сохраняющих константу 1. Обозначим через $T_{0,1}^*$ множество всех функций из класса T_0^* , которые не принимают значение 1. Двойственным образом определим класс $T_{1,0}^*$. Нетрудно установить E -замкнутость классов $T_{0,0}^*, T_{1,1}^*, T_{0,1}^*, T_{1,0}^*$.

Теорема 3 (критерий E -полноты в классе T_0^*). Система функций из T_0^* E -полна в классе T_0^* тогда и только тогда, когда она целиком не содержится ни в одном из классов $T_{0,0}^*, T_{0,1}^*, T_0^* \cap I^*$.

Доказательство. Необходимость условия теоремы следует из E -замкнутости классов $T_{0,0}^*, T_{0,1}^*, T_0^* \cap I^*$ и несовпадения их с классом T_0^* .

Докажем достаточность условия теоремы. Пусть f_1, f_2, f_3 — функции класса T_0^* , которые не принадлежат соответственно классам $T_{0,0}^*, T_{0,1}^*, T_0^* \cap I^*$. Из определения этих классов следует, что отождествлением переменных из функций f_1, f_2, f_3 можно получить такие функции $g_1(x), g_2(x, y), g_3(x)$, что $g_1(0) = *, g_2(0, 1) = 1, g_3(x) = 0$. Подстановка функции g_3 в функцию g_1 дает $*$, а суперпозиция $g_2(g_3(x), x)$ — одну из функций $x, (*1)$. В случае функции x в силу леммы 2 получаем E -полную в классе T_0^* систему $\{0, x, *\}$. Если же имеется функция $(*1)$, то далее полагаем

$$g_4(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y, \\ (*1)(x) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Теперь получаем функцию $g_4(x, 0) = x$. Теорема доказана.

Аналогично теореме 3 устанавливается критерий E -полноты в классе T_1^* .

Пусть S^{**} — множество всех функций из P_2^* , которые на любой паре противоположных наборов принимают лишь значения $(0, 1), (1, 0)$ или $(*, *)$. Легко видеть, что S^{**} — E -замкнутый класс, целиком лежащий в S^* .

Теорема 4 (критерий полноты в классе S^*). Система функций из S^* E -полна в классе S^* тогда и только тогда, когда она целиком не содержится ни в одном из классов $S^* \cap I^*$, S^{**} .

Доказательство. Докажем лишь достаточность условий. Пусть $f_1 \in S^* \setminus I^*$, $f_2 \in S^* \setminus S^{**}$. Используя определения классов S^* , I^* , S^{**} , заключаем, что из функций f_1, f_2 отождествлением переменных можно получить такие функции $g_1(x), g_2(x)$, что $g_1(x) = \bar{x}$, $g_2(x) \in \{(a *), (* a)\}$, где $a \neq *$. Суперпозициями функции $\bar{x}$ и любой из функций $(a *)$, $(* a)$ можно определить функцию $(0 *)$. Далее применяем лемму 3. Теорема доказана.

Пусть I_{01}^* — множество всех таких функций из P_2^* , которые не определены на нулевом или единичном наборах. Нетрудно убедиться, в том, что I_{01}^* — E -замкнутый класс, целиком лежащий в классе I^* .

Теорема 5 (критерий E -полноты в классе I^*). Система функций из I^* E -полна в классе I^* тогда и только тогда, когда она целиком не содержится ни в одном из классов $T_0^* \cap I^*$, $T_1^* \cap I^*$, $S^* \cap I^*$, I_{01}^* .

Доказательство. Докажем лишь достаточность условий теоремы. Пусть f_1, f_2, f_3, f_4 — функции из класса I^* , которые не принадлежат соответственно классам $T_0^*, T_1^*, S^*, I_{01}^*$. Используя определения классов I^* , T_0^* , T_1^* , S , $I_{0,1}^*$, заключаем, что отождествлением переменных из функций f_1, f_2, f_3, f_4 можно получить такие функции $g_1(x), g_2(x), g_3(x, y), g_4(x)$, что $g_1(x) = (1*)$, $g_2(x) = (*0)$, $g_3(0, 1) = g_3(1, 0) = a \neq *$, $g_4(x) = x$. Поскольку мы имеем функцию $(*0)$, можно считать, что $a = 0$. Далее получаем, что

$$xy = \begin{cases} x, & \text{если } x = y, \\ g_3(x, y) & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

и применяем лемму 4. Теорема доказана.

С использованием теоремы 1 несложно показать, что

- система $\{0, x, (0 *)\}$ E -полна в классе $T_{0,0}^*$,
- система $\{0, (0 *), (* 0)\}$ E -полна в классе $T_{0,1}^*$,
- система $\{xy, (0 *), (* 0), (* 1)\}$ E -полна в классе $T_0^* \cap I^*$,
- система $\{1, x, (* 1)\}$ E -полна в классе $T_{1,1}^*$,
- система $\{1, (1 *), (* 1)\}$ E -полна в классе $T_{1,0}^*$,
- система $\{xy, (0 *), (1 *), (* 1)\}$ E -полна в классе $T_1^* \cap I^*$,
- система $\{x, (1 *), (* 0)\}$ E -полна в классе $S^* \cap I^*$,
- система $\{\bar{x}, *\}$ E -полна в классе S^{**} ,
- система $\left\{ \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & * \end{pmatrix} \right\}$ E -полна в классе $I_{0,1}^*$.

5. E -замкнутые классы, E -порождаемые одной двуместной функцией

В этом параграфе мы исследуем нижнюю часть решетки E -замкнутых классов из P_2^* . Именно, будут перечислены все E -замкнутые классы, которые E -порождаются одной одноместной или двуместной функцией. В некоторых случаях мы полностью охарактеризуем E -замкнутый класс, E -порождаемый функцией, в других случаях, имея в виду теорему 1, перечислим лишь все одноместные и двуместные функции из этого класса.

Начнем с одноместных функций. Как отмечалось выше, функции $0, 1, x, \bar{x}$ E -порождают соответственно классы C_0, C_1, S_{01}, S . Функция $*$, очевидно, E -порождает класс, который состоит только из нигде не определенных функций. Двойственные друг другу функции $(0 *)$ и $(* 1)$ E -порождают классы, которые с точностью до несущественных переменных состоят соответственно из функций $(0 *)$ и $(* 1)$. Функция $(1 *)$ E -порождает класс, все одноместные и двуместные функции которого суть $(1 *)$, $*$, $\begin{pmatrix} * & 1 \\ * & * \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} * & 1 \\ * & * \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} * & * \\ 1 & * \end{pmatrix}$. Аналогично для двойственной функции $(* 0)$ это функции $(* 0)$, $*$, $\begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$.

Очевидно, что все (непустые) минимальные классы в решетке E -замкнутых классов из P_2^* E -порождаются одноместными функциями. Анализ перечисленных выше E -замкнутых классов показывает, что в P_2^* имеется ровно 6 минимальных E -замкнутых классов, которые E -порождаются функциями $0, 1, x, *, (0 *), (* 1)$.

Перейдем собственно к двуместным функциям. Как отмечалось выше, любая двуместная функция из P_2 , существенно зависящая от обоих переменных, E -порождает один из классов P_2, T_0, T_1, T_{01} . Например, каждая из функций $x \oplus y, x \bar{y}$ E -порождает класс T_0 .

Рассмотрим далее двуместные не всюду определенные функции. Чтобы уменьшить перебор, подобные функции будем рассматривать с точностью до двойственности и перестановки переменных. Примем следующее соглашение: ниже в строках, состоящих из одноместных и двуместных функций, первой будет стоять исходная функция от двух переменных, затем все остальные одноместные и двуместные функции, которые она E -порождает. Несущественные переменные в функциях опускаем.

Вначале приведем две функции, которые определены только на одном наборе (остальные функции этого типа либо двойственны данным функциям, либо получаются из них перестановкой переменных, либо E -порождают классы, уже рассмотренные выше):

$$\begin{pmatrix} 0 & * \\ * & * \end{pmatrix}, (0 *),$$

$$\begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix}, *, \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

Далее рассмотрим функции, которые не определены ровно на двух наборах:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ * & * \end{pmatrix}, (0 *), \begin{pmatrix} 0 & * \\ 1 & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & * \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix}, 0, (0 *), \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & * \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 1 \end{pmatrix}, (0 1),$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & * \end{pmatrix}, (0 *), (1 *), *, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ * & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & * \\ 1 & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & * \\ * & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & 1 \\ * & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & * \\ 1 & * \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & * \\ * & 0 \end{pmatrix}, (0 1), (1 0), \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}, *,$$

$$\begin{pmatrix} * & 0 \\ 1 & * \end{pmatrix}, *, \begin{pmatrix} * & 1 \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

В заключение рассмотрим функции, которые не определены только на одном наборе:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}, (0 \ *), \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & * \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & * \end{pmatrix}, (0 \ *), \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & * \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & * \end{pmatrix}, (0 \ *), \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & * \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}, \text{ все функции } f(x, y), \text{ которые удовлетворяют условию } f(1, 1) = *,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & * \end{pmatrix}, \text{ все функции } f(x, y), \text{ которые удовлетворяют условиям } f(1, 1) = * \text{ и } (f(0, 1), f(1, 0)) \notin \{(0, 0), (1, 1)\},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & * \end{pmatrix}, (1 \ *), *, \begin{pmatrix} 1 & * \\ * & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & 1 \\ 1 & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & 1 \\ * & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & * \\ 1 & * \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix}, 0, (0 \ *), \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & * \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}, (0 \ 1), \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ * & 1 \end{pmatrix}, \text{ все функции } f(x, y), \text{ которые сохраняют } 0 \text{ (} E\text{-базис класса } T_{0,0}^* \text{)}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ * & 1 \end{pmatrix}, (0 \ 1), \begin{pmatrix} 0 & * \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix}, \text{ все функции } f(x, y) \text{ из класса } S^* \text{ (} E\text{-базис класса } S^* \text{)}.$$

Список литературы

1. Алексеев В. Б., Вороненко А. А., О некоторых замкнутых классах в частичной двузначной логике. *Дискретная математика* (1994) **6**, №4, 58–79.
2. Голунков Ю. В., Критерий полноты системы операций в операторных алгоритмах, реализующих функции k -значной логики. *Вероятностные методы и кибернетика* (1980) **17**, 23–34.
3. Марченков С. С., *Замкнутые классы булевых функций*. Физматлит, Москва, 2000.
4. Марченков С. С., Операторы замыкания с разветвлением по предикату. *Вестник МГУ, Сер. 1: Математика и механика* (2003) №6, 37–39.
5. Тайманов В. А., О функциональных системах k -значной логики с операциями замыкания программного типа. *Докл. АН СССР* (1983) **268**, №6, 1307–1310.
6. Фрейвалд Р. В., Критерий полноты для частичных функций алгебры логики и многозначных логик. *Докл. АН СССР* (1966) **167**, №6, 1249–1250.
7. Фрейвалд Р. В., Функциональная полнота для не всюду определенных функций алгебры логики. *Дискретный анализ* (1966) **8**, 55–68.
8. Яблонский С. В., *Введение в дискретную математику*. Наука, Москва, 1986.
9. Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б., *Функции алгебры логики и классы Поста*. Наука, Москва, 1966.

Статья поступила 3.01.2006.