Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Безверхний, И. В. Добрынина, Решение проблемы степенной сопряженности слов в группах Кокстера экстрабольшого типа, *Дискрет. матем.*, 2008, том 20, выпуск 3, 101–110

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1017>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 15:35:39

Решение проблемы степенной сопряженности слов в группах Кокстера экстрабольшого типа

© 2008 г. В. Н. Безверхний, И. В. Добрынина

Для групп Кокстера экстрабольшого типа решены проблема степенной сопряженности слов и проблема пересечения циклических подгрупп, то есть предложен алгоритм, который по двум элементам находит порождающий элемент пересечения их циклических подгрупп.

Группа G , заданная системой образующих $a_i, i \in J, |J| < \infty$, и системой определяющих соотношений $a_i^2 = 1$ для всех $i \in J$, $(a_i a_j)^{m_{ij}} = 1, i \neq j, i, j \in J$, m_{ij} — элемент матрицы Кокстера $(m_{ij}), i, j \in J$, соответствующей данной группе [1], причем $m_{ij} \geq 3$ для $i \neq j$, называется группой Кокстера большого типа. В случае $m_{ij} > 3$ эту группу называют группой Кокстера экстрабольшого типа.

Проблемы равенства и сопряженности слов в группах Кокстера экстрабольшого и большого типов решены в [1] и [2].

Целью работы является решение проблемы степенной сопряженности слов в группах Кокстера экстрабольшого типа. Кроме этого, для данного класса групп будет решена проблема пересечения циклических подгрупп.

Пусть $F_i = \langle a_i; a_i^2 \rangle$, $F = \prod_{i=1}^n * F_i$ — свободное произведение циклических групп порядка 2. Отождествим каждый образующий a_i группы F с его обратным a_i^{-1} . Слово $w = a_{i_1} \dots a_{i_n}$ группы F называется приведенным, если индексы рядом стоящих букв a_{i_j} и $a_{i_{j+1}}$ записи w различны; длина w равна n . Пусть $m_{ij} < \infty$ и $r_{ij} = (a_i a_j)^{m_{ij}}$, тогда в F существуют в точности две различные перестановки $r_{ij}: r_{ij} = (a_i a_j)^{m_{ij}}$ и $r_{ji} = (a_j a_i)^{m_{ij}}, i \neq j$. Обозначим через F_{ij} группу $F_{ij} = F_i * F_j$, через G_{ij} группу Кокстера экстрабольшого типа $G_{ij} = \langle a_i, a_j; a_i^2, a_j^2, r_{ij}, r_{ji} \rangle$.

Обозначим через R_{ij} множество всех нетривиальных слов, циклически приведенных в свободном произведении F_{ij} и равных 1 в группе G_{ij} , $R_{ij} = \{r_{ij}^l, r_{ji}^m\}, l, m \in \mathbb{N}$ (см. [2]). Элемент $r \in R_{ij}$ будем называть соотношением типа (i, j) .

В дальнейшем под R будем понимать симметризованное подмножество

$$R = \bigcup_{i, j \in J} R_{ij}$$

свободного произведения F . Тогда группа Кокстера может быть задана представлением $G = \langle a_i; a_i^2, R, i = 1, \dots, n \rangle$. Пусть w — нетривиальное циклически приведенное в F слово, равное единице в группе G Кокстера экстрабольшого типа, то есть $w \in \langle R \rangle^F$, где $\langle R \rangle^F$ — нормальное замыкание симметризованного множества R в свободном произведении F . Учитывая, что $a_i = a_i^{-1}$ в F можно строить R -диаграммы над F в точности так

же, как над свободной группой [3], областями этих диаграмм являются R_{ij} -диаграммы с метками типа (i, j) .

Подвергнем R -диаграмму M следующему преобразованию. Если две области D_1, D_2 являются одновременно R_{ij} -диаграммами и пересекаются по ребру с меткой $\varphi(\partial D_1 \cap \partial D_2)$, то, стирая это ребро, объединим D_1, D_2 в одну область D . При этом возможно, что метка границы полученной области равна единице в свободном произведении F . Тогда, удалив эту область, склеиваем ее границу. Таким образом, через конечное число шагов мы получим приведенную (в F) связную односвязную R -диаграмму M , инвариантную относительно рассмотренного преобразования с граничной меткой, равной w , причем если две области D', D'' из M пересекаются по ребру, то длина метки этого ребра равна единице. Каждая приведенная связная односвязная R -диаграмма M группы Кокстера экстрабольшого типа удовлетворяет условию $C(8)$.

Обозначим через ∂M граничный цикл M . Область $D \subset M$ назовем граничной, если $\partial M \cap \partial D \neq \emptyset$. Символом $i(D)$ будем обозначать число внутренних ребер в граничном цикле D , символом $d(D)$ — число всех ребер в граничном цикле D , символом $d(v)$ — степень вершины v , а $|w|$ — длину слова w .

Будем говорить, что $\partial D \cap \partial M$ есть правильная часть M , если $\partial D \cap \partial M$ есть объединение последовательности $l_1, \dots, l_n$ замкнутых ребер, где $l_1, \dots, l_n$ встречаются в данном порядке в некотором граничном цикле для D и в некотором граничном цикле для M .

Граничную область D R -диаграммы M назовем простой, если $\partial D \cap \partial M$ есть правильная часть. Простая область D диаграммы M называется деновской, если $i(D) < d(D)/2$.

Связная односвязная диаграмма M называется диском, если ее граничный цикл ∂M — простая замкнутая кривая.

Определение 1. Пусть M_1 — приведенная связная, односвязная поддиаграмма R -диаграммы M группы Кокстера экстрабольшого типа с границей $\partial M_1 = e_1 \gamma e_2 \delta$, где e_1 — ребро AB , γ — путь BC , e_2 — ребро CD , δ — путь DA . Тогда последовательность областей $D_1, D_2, \dots, D_n$ из M_1 , $e_1 \in D_1, e_2 \in D_n$, $n \geq 2$, образует полосу в M , если

- (1) $\partial D_i \cap \gamma, \partial D_i \cap \delta$ — правильная часть M_1 для всех i , $1 \leq i \leq n$;
- (2) для всех i , $1 \leq i < n$, границы областей D_i и D_{i+1} пересекаются по ребру;
- (3) $|\partial D_1 \cap \gamma| = |\partial D_1 \cap \delta| + 2$, $|\partial D_n \cap \gamma| = |\partial D_n \cap \delta| + 2$ и $|\partial D_j \cap \gamma| = |\partial D_j \cap \delta|$, $2 \leq j < n$.

Удаление деновской области диаграммы M , то есть удаление ее граничного пути, называется деновским сокращением диаграммы M или R -сокращением. Будем говорить, что M является R -приведенной, если она не содержит деновских областей.

Пусть Π — полоса диаграммы M . Замену диаграммы M на диаграмму M_1 , полученную из M удалением полосы Π , назовем специальным R -сокращением или $\bar{R}$ -сокращением. Если M не содержит полос, то назовем M специально R -приведенной или $\bar{R}$ -приведенной. Слово $w \in G$ назовем R -приведенным, если w является граничной меткой приведенной (в F) диаграммы, не содержащей деновских областей. Назовем w циклически R -приведенным, если все его циклические перестановки являются R -приведенными словами.

Циклически R -приведенное слово w группы G Кокстера экстрабольшого типа назовем $\bar{R}$ -приведенным, если w является граничной меткой приведенной диаграммы, не содержащей полос. Если w' получено из w R - или $\bar{R}$ -приведением, то $|w'| < |w|$.

Теорема 1 ([2]). Существует алгоритм, позволяющий для любого циклически приведенного слова w группы Кокстера экстрабольшого типа выяснить, является ли w R - или $\bar{R}$ -приведенным.

Рассмотрим теперь кольцевые диаграммы. Назовем связную карту M на плоскости E^2 кольцевой картой, если дополнение ее состоит в точности из двух компонент. Через K обозначим неограниченную, а через H — ограниченную компоненты множества M . Назовем $\partial M \cap \partial K$ внешней, а $\partial M \cap \partial H$ — внутренней границей карты M . Цикл минимальной длины, содержащий все ребра внешней границы карты M , есть внешний граничный цикл карты M , обозначим его σ . Аналогично определяется внутренний граничный цикл карты M . Обозначим его τ .

Пусть F — свободное произведение, R — симметризованное подмножество его элементов, $N = \langle R \rangle^F$ — нормальное замыкание R в F . Пусть u и z — два циклически приведенных слова из F , не лежащих в N и не сопряженных в F . Если u и z представляют собой некоторые сопряженные элементы группы $G = F/N$, то существует приведенная кольцевая R -диаграмма M , содержащая не менее одной области, такая, что если σ и τ — соответственно внутренний и внешний граничные циклы карты M , причем $\varphi(\sigma) = u$, а $\varphi(\tau) = z^{-1}$ (см. [3]). Пусть u, z — два циклически приведенных слова, $u, z \notin \langle R \rangle^G$, и не сопряжены в F и сопряжены в G . Тогда существует связная приведенная кольцевая R -диаграмма M с внешней граничной меткой u и внутренней граничной меткой z^{-1} , граничными метками областей D которой являются соотношения из R . Подвергнем кольцевую R -диаграмму следующему преобразованию. Если две области D_1, D_2 пересекаются по ребру e , причем общей граничной меткой является либо соотношение из некоторого симметризованного множества R_{ij} , либо слово, равное 1 в F_{ij} , то стерев ребро e , объединяем D_1 и D_2 в одну область, причем в случае равенства единице в F_{ij} , данную область вырезаем, а ее границу склеиваем. В результате получаем кольцевую R -диаграмму M' с теми же граничными метками u и z^{-1} . В дальнейшем будем рассматривать кольцевые связные приведенные R -диаграммы M , инвариантные относительно указанных выше преобразований. Будем предполагать также, что u и z^{-1} являются циклически R -приведенными и $\bar{R}$ -приведенными словами. Заметим, что меткой каждого ребра будет буква a_j .

Кольцевую связную приведенную R -диаграмму M сопряженности слов $\varphi(\sigma), \varphi(\tau) \in G$, где σ, τ — соответственно внешний и внутренний граничные циклы M , назовем минимальной, если не существует кольцевой R -диаграммы M_0 с теми же граничными метками $\varphi(\sigma), \varphi(\tau)$, имеющей меньшее число областей.

Кольцевую связную приведенную однослойную R -диаграмму M с граничными циклами σ, τ группы Кокстера большого типа, метки которой $\varphi(\sigma), \varphi(\tau)$ приведены в F , циклически R - и $\bar{R}$ -приведены, назовем особо специальной R -диаграммой, если в M существует одна область D такая, что

$$|\varphi(\partial D \setminus (\partial D \cap \sigma))| = |\varphi(\partial D \cap \sigma)|,$$

а для остальных областей D'

$$|\varphi(\partial D' \setminus (\partial D' \cap \sigma))| = |\varphi(\partial D' \cap \sigma)| + 2.$$

Замену слова $\varphi(\sigma)$ словом $\varphi(\tau)$ назовем специальным кольцевым R -сокращением.

Определение 2. Будем говорить, что циклически несократимое слово w группы Кокстера экстрабольшого типа обладает свойством s , если w циклически R - или $\bar{R}$ -несократимо и к нему неприменимо кольцевое специальное R -сокращение.

Согласно [2], существует алгоритм, позволяющий для любого циклически R - или $\bar{R}$ -приведенного слова w из группы Кокстера большого типа установить, применимо ли к нему специальное кольцевое R -сокращение.

Область D с граничным циклом $\partial D = e\gamma e^{-1}\delta$, расположенная по обе стороны от носителя ребра e , в которой склеенные ребра e и e^{-1} пересекают граничный цикл D , называется $(s - i)$ -областью.

Лемма 1 ([2]). *Если M — приведенная связная односвязная R -диаграмма над группой Кокстера экстрабольшого типа, то она не содержит $(s - i)$ -областей.*

Лемма 2. *Пусть M — приведенная связная односвязная R -диаграмма над группой Кокстера экстрабольшого типа, σ — граничный цикл M , слово $\varphi(\sigma)$ является R - и $\bar{R}$ -несократимым. Тогда M является однослойной.*

Доказательство. По лемме 1 диаграмма M не содержит $(s - i)$ -областей. Допустим, что M не является однослойной. Пусть M содержит внутреннюю область D' , причем $i(D') \geq 8$.

Группы Кокстера экстрабольшого типа являются частным случаем групп Кокстера большого типа, причем каждая приведенная связная односвязная R -диаграмма M группы Кокстера большого типа удовлетворяет условию $C(6)$ (см. [1]).

Известно [3], что $[p, q]$ -картой ((p, q) -картой) называется карта, все внутренние вершины которой имеют степень не менее p , а все (внутренние) области имеют степень не менее q . Карты $C(6)$ есть карты с условием $(3, 6)$. Пусть M — кольцевая карта с условием $(3, 6)$, тогда M^* , дуальная к ней карта, будет картой с условием $[6, 3]$, для которой справедливо [3] соотношение

$$6(Q_{M^*} - h_{M^*}) \leq \sum_{M^*}^{\bullet} (4 - d(v)) + \sum_{M^*}^{\circ} (6 - d(v)) + 2 \sum_{M^*} (3 - d(D)) + 2(V_{M^*}^{\bullet} - E_{M^*}^{\bullet}),$$

где в $\sum_{M^*}^{\bullet} (4 - d(v))$ суммирование проводится по граничным вершинам v карты M^* , в $\sum_{M^*}^{\circ} (4 - d(v))$ — по внутренним вершинам v карты M^* , в $\sum_{M^*} (3 - d(D))$ — по областям D карты M^* , $V_{M^*}^{\bullet}$ — число граничных вершин карты M^* , $E_{M^*}^{\bullet}$ — число граничных ребер карты M^* , Q_{M^*} — число компонент карты M^* , h_{M^*} — число дырок карты M^* . Так как M^* имеет не более одной дырки, $6(Q_{M^*} - h_{M^*}) \geq 0$. Каждая область карты M имеет внутренние ребра, M^* не имеет изолированных вершин, поэтому $V_{M^*}^{\bullet} - E_{M^*}^{\bullet} \leq 0$. Таким образом,

$$\sum_{M^*}^{\bullet} (4 - d(v)) + \sum_{M^*}^{\circ} (6 - d(v)) + 2 \sum_{M^*} (3 - d(D)) \geq 0.$$

Рассматривая M^* без граничных вершин степеней 1 и 2, получаем, что

$$\sum_{M^*}^{\circ} (4 - d(v)) \leq 0, \quad \sum_{M^*}^{\circ} (6 - d(v)) < 0, \quad \sum_{M^*} (3 - d(D)) \leq 0,$$

что невозможно. Используя соответствие между картой и дуальной картой, для карты M получаем противоречивость формулы

$$\sum_M^{\bullet} (4 - i(D)) + \sum_M^{\circ} (6 - d(D)) + 2 \sum_M (3 - d(v)) \geq 0.$$

Таким образом, M не содержит внутренних областей.

Покажем, что M не является двуслойной. Как замечено ранее, смежные области пересекаются по ребру, меткой которого является буква. Граница каждой области имеет меткой слово на двух образующих. Рассмотрим последовательные области D_1, D_2 и D_3, D_4, D_5 , причем D_1, D_2 расположены в одном слое, а D_3, D_4, D_5 в другом и

$$\partial D_1 \cap \partial D_2 = e_1, \quad \partial D_1 \cap \partial D_4 = e_2, \quad \partial D_2 \cap \partial D_4 = e_3.$$

Области D_1, D_2 не образуют полосу, поэтому либо область D_3 , соседняя с D_4 , пересекается минимум по двум ребрам с D_1 , либо область D_5 , соседняя с D_4 , пересекается минимум по двум ребрам с D_2 , что невозможно. Лемма доказана.

Аналогично получаем следующее утверждение.

Лемма 3. Пусть M — приведенная связная кольцевая диаграмма сопряженности слов $\varphi(\sigma), \varphi(\tau) \in G$ над группой Кокстера экстрабольшого типа, не содержащая $(s-i)$ -областей, σ, τ — соответственно внешний и внутренний граничный циклы M , слова $\varphi(\sigma), \varphi(\tau)$ циклически R - и $\bar{R}$ -несократимы. Тогда M является однослойной.

Лемма 4 ([2]). Пусть M — кольцевая связная приведенная минимальная R -диаграмма группы G Кокстера экстрабольшого типа с граничными циклами σ и τ ; $\varphi(\sigma), \varphi(\tau)$ удовлетворяют условию s . Тогда если M содержит $(s-i)$ -область, то все области M являются $(s-i)$ -областями и $\varphi(\sigma) = x, \varphi(\tau) = y, x, y \in \{a_1, \dots, a_n\}$, где $\{a_i\}, i = 1, \dots, n$, — множества образующих группы G .

Лемма 5 ([4]). Пусть G — группа Кокстера экстрабольшого типа с множеством образующих A . Если $v_0 \in G, v_0 \neq 1$ в G и v_0 — R -, $\bar{R}$ -приведенное слово, равное слову из подгруппы G_j с образующими $A_j, A_j \subset A$, то v_0 — слово на образующих A_j .

Лемма 6 ([4]). Пусть $u, v \in G, G$ — группа Кокстера экстрабольшого типа, A — множество образующих G , и u и v обладают свойством s и существует $z \in G$ такое, что $z^{-1}uz = v$. Тогда, если слово u есть слово на образующих $A_j, A_j \subset A$, и не является образующим из A_j , то $v \in G_j$ и существует $z' \in G_j, z' = z$ в G такое, что $z'^{-1}uz' = v$.

Лемма 7 ([5]). Слово w группы Кокстера экстрабольшого типа G имеет конечный порядок тогда и только тогда, когда оно сопряжено с некоторым словом $w' \in G_{ab} = \langle a, b; (ab)^{m_{ab}} = 1, a^2 = b^2 = 1 \rangle$.

Лемма 8 ([6]). Пусть слово $w \in G$ обладает свойством s и имеет бесконечный порядок. Тогда существует слово, сопряженное w или w^2 в группе G , любая степень которого циклически R - и $\bar{R}$ -несократима.

Определение 3. Будем говорить, что в группе G разрешима проблема слабой степенной сопряженности слов, если существует алгоритм, позволяющий для любых слов $w, v \in G$ таких, что $w \notin \langle v \rangle$, установить, существует ли целое число n такое, что слова w^n, v сопряжены в группе G .

Теорема 2 ([7]). В группе Кокстера экстрабольшого типа разрешима проблема слабой степенной сопряженности слов.

Определение 4. Будем говорить, что в группе G разрешима проблема степенной сопряженности слов, если существует алгоритм, позволяющий для любых слов $w, v \in G$ установить, существуют ли ненулевые целые числа n, m такие, что слова w^n, v^m сопряжены в группе G .

Теорема 3. В группе Кокстера экстрабольшого типа разрешима проблема степенной сопряженности слов.

Доказательство. Если $w = x$, $x \in \{a_i\}_{i=1}^n$, то из леммы 4 следует, что $v = y$, $y \in \{a_i\}_{i=1}^n$, диаграмма сопряженности этих слов состоит из $(s-i)$ -областей, и доказательство теоремы сводится к решению проблемы сопряженности [2].

Если одно из слов w , v имеет конечный порядок, то решение проблемы степенной сопряженности для этих слов следует из лемм 6, 7.

Пусть слова w , v имеют бесконечный порядок. Если необходимо, перейдем от слов w , v к сопряженным с ними или их квадратами словам w_0 , v_0 , любая степень которых циклически R - и $\bar{R}$ -несократима (на основании леммы 8). Рассмотрим приведенную диаграмму M сопряженности слов w_0^n , v_0^m с границей $\partial M = \sigma \cup \tau$, причем $\varphi(\sigma) = w_0^n$, $\varphi(\tau) = v_0^m$. Будем считать, что m, n — минимальные числа, то есть из M нельзя вырезать поддиаграмму, замкнув которую в кольцо, получим диаграмму степенной сопряженности слов w_0 , v_0 . Покажем, что числа m, n можно ограничить. Для доказательства достаточно рассмотреть случай, когда $|w_0| = |v_0|$. Общий случай сводится к данному при рассмотрении соответствующих минимальных степеней w_0 , v_0 , для которых выполняется условие равенства длин.

Рассмотрим случай кольцевой диаграммы. Она является однослойной по лемме 3. Заметим, что любая область D содержит ребра как на σ , так и на τ , причем между любыми двумя областями, имеющими на σ (τ) на два ребра меньше, чем на τ (σ), содержится область, имеющая на σ (τ) на два ребра больше, чем на τ (σ), так как в противном случае в M содержится полоса. Кроме того, в диаграмме не может быть только одна область, имеющая на σ (τ) на два ребра больше, чем на τ (σ), ибо, склеив два экземпляра диаграммы M , получим $\bar{R}$ -сократимость квадрата граничной метки M , что невозможно.

Допустим, что существует область D_1 такая, что

$$|\varphi(\partial D_1 \cap \sigma)| = |\varphi(\partial D_1 \cap \tau)| + 2.$$

Пусть w_0^* — циклическая перестановка слова w_0 , причем $\varphi(\partial D_1 \cap \sigma)$ — начало слова w_0^* . Рассмотрим поддиаграмму $L = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_r$ с минимальным r такую, что w_0^* является подсловом слова $u \equiv \varphi(\partial L \cap \sigma)$. Возможны следующие случаи.

1. $|w_0| = |u|$. Наклеим область D_1 по границе σ на область D_{r+1} . Тогда слова $\varphi(D_1)$ и $\varphi(D_{r+1})$ взаимно обратны. Следовательно,

$$\begin{aligned}\varphi(\partial D_1 \cap \sigma) &\equiv \varphi(\partial D_{r+1} \cap \sigma), \\ \varphi(\partial D_1) &\equiv \varphi(\partial D_{r+1}).\end{aligned}$$

Обозначим через D_0 область, предшествующую D_1 . Справедливо равенство

$$\varphi(\partial D_0 \cap \partial D_1) \equiv \varphi(\partial D_r \cap \partial D_{r+1}).$$

Склеим ребра $\partial D_0 \cap \partial D_1$, $\partial D_r \cap \partial D_{r+1}$ поддиаграммы L . Получим сопряженность w_0^* , v_0^* и, следовательно, сопряженность w_0 , v_0 .

2. $|w_0| < |u|$. Наклеим область D_1 по границе σ на пару областей D_r , D_{r+1} . В данном случае либо метка $\varphi(D_0)$ области D_0 , предшествующей D_1 , либо метка $\varphi(D_{r+1})$ области D_{r+1} сократимы в F , что невозможно.

Если для любой области D справедливо равенство

$$|\varphi(\partial D \cap \sigma)| = |\varphi(\partial D \cap \tau)|,$$

то в силу того, что метка каждого ребра есть буква и области пересекаются по одному ребру, получаем, что

$$\varphi(\partial D \cap \sigma) \equiv \varphi(\partial D \cap \tau).$$

Таким образом, $w_0 \equiv v_0$ и, следовательно, $w_0 \sim v_0$.

Рассмотрим теперь простые кольцевые диаграммы сопряженности слов w_0^n, v_0^m .

Лемма 9. Пусть

$$M = \left(\bigcup_{i=1}^p N_i \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^p \gamma_j \right)$$

— простая кольцевая диаграмма сопряженности циклически R -, $\bar{R}$ -несократимых слов w_0^n, v_0^m , где m, n — наименьшие числа с таким свойством, N_i — поддиаграммы (диски) в M с границами $\partial N_i = \sigma_i \cup \tau_i$, $\sigma_i \cap \tau_i = \{A_i, B_i\}$ — вершины, $i = 1, \dots, p$, γ_i — простые пути с концами B_{i-1}, A_i , $i = 2, \dots, p$, простой путь γ_1 имеет начало B_p и конец A_1 . Тогда $|\gamma_i| < |w_0|$, $p \leq |w_0|^2$.

Доказательство. Предположение, что $|\gamma_i| \geq |w_0|$ при $i = 1, \dots, p$ приводит к тому, что циклические перестановки слов w_0, v_0 совпадают и, следовательно, слова w_0, v_0 сопряжены, что противоречит минимальности чисел m, n .

Покажем, что $p \leq |w_0|^2$. Пронумеровывая буквы в словах w_0, v_0 , получаем $w_0 = x_1 x_2 \dots x_{|w_0|}$, $v_0 = y_1 y_2 \dots y_{|v_0|}$. Среди этих букв могут встречаться одинаковые, но мы будем рассматривать вхождения этих букв, поэтому буквы, стоящие на разных местах будем считать разными.

Рассмотрим метки ребер $e_{i1} \in \sigma_i$ и $e_{i2} \in \tau_i$ диаграмм N_i , прилегающих к вершинам B_i . Метками e_{i1} являются буквы x_{i1} . Существует не более $|w_0|$ различных букв x_{i1} . Если $p > |w_0|$, то хотя бы одна из этих букв повторяется. Но повторяться каждая буква может не более, чем $|v_0|$ раз, так как иначе повторится соответствующая метка x_{i2} ребра e_{i2} и из M можно вырезать поддиаграмму так, что, замкнув оставшуюся часть в кольцо, получим диаграмму, удовлетворяющую условию леммы, а это невозможно в силу минимальности чисел m, n . Итак, $p \leq |w_0||v_0|$, и так как $|w_0| = |v_0|$, справедливо неравенство $p \leq |w_0|^2$.

Лемма доказана.

Будем говорить, что диск N_i с границей $\partial N_i = \sigma_i \cup \tau_i$, $\sigma_i \cap \tau_i = \{A_i, B_i\}$, является длинным, если он имеет метку $\varphi(\sigma_i)$ такую, что $|\varphi(\sigma_i)| \geq 4|w_0|$, и коротким в противном случае. На основании леммы 9 в случае, когда все диски диаграммы M короткие, числа m, n можно ограничить. Рассмотрим длинный диск N_i . Допустим, что в N_i существует область D_1 такая, что

$$|\varphi(\partial D_1 \cap \sigma_i)| = |\varphi(\partial D_1 \cap \tau_i)| + 2.$$

Начиная с данной области повторим рассуждения, проведенные для кольцевой диаграммы. Получим противоречие с минимальностью чисел m, n . Если в N_i для любой области D , за исключением областей, содержащих вершины A_i, B_i , справедливо равенство

$$|\varphi(\partial D \cap \sigma)| = |\varphi(\partial D \cap \tau)|,$$

то из приведенных выше рассуждений также получим противоречие с минимальностью чисел m, n . Таким образом, случай, когда в диаграмме M существуют длинные диски, невозможен. Теорема доказана.

Определение 5. Будем говорить, что в группе G разрешима проблема пересечения циклических подгрупп, если существует алгоритм, позволяющий для любых слов $w, v \in G$ установить, пусто или нет пересечение циклических подгрупп, порожденных в G данными словами.

Теорема 4. В группе Кокстера экстрабольшого типа разрешима проблема пересечения циклических подгрупп. Существует алгоритм, выписывающий образующие данного пересечения.

Доказательство. Рассмотрим пересечение циклических подгрупп $\langle w \rangle$ и $\langle v \rangle$. Если одно из слов w, v имеет конечный порядок, то решение проблемы пересечения циклических подгрупп следует из лемм 4–7.

Пусть слова w, v имеют бесконечный порядок и в группе Кокстера экстрабольшого типа G существует такое нетривиальное t , что $t = w^n = v^m$ для некоторых m, n . Будем считать, что m, n — минимальные числа с таким свойством. Покажем, что m, n можно ограничить. Заменим w, v на сопряженные с ними слова w', v' , обладающие свойством s . Перейдем от слов w', v' к сопряженным с ними или их квадратами словам w_0, v_0 , любая степень которых циклически R - и $\bar{R}$ -несократима (на основании леммы 8). Получим $w_0^n = z^{-1}v_0^m z$. Считаем z минимальным в классе $\langle w_0 \rangle z \langle v_0 \rangle$. Для доказательства достаточно рассмотреть случай, когда $|w_0| = |v_0|$. Общий случай сводится к данному при рассмотрении соответствующих минимальных степеней w_0, v_0 , для которых выполняется условие равенства длин.

Возможны два случая, $|z| \neq 0$ и $|z| = 0$.

Рассмотрим первый случай. Пусть M — приведенная диаграмма сопряженности слов w_0^n, v_0^m словом z с границей $\partial M = \sigma \cup \tau$, причем $\varphi(\sigma) = w_0^n, \varphi(\tau) = v_0^m$. Доказательство данного случая аналогично доказательству теоремы 3. Действительно, рассмотрим случай кольцевой диаграммы. Она является однослойной по лемме 3.

Допустим, что существует область D_1 такая, что

$$|\varphi(\partial D_1 \cap \sigma)| = |\varphi(\partial D_1 \cap \tau)| + 2.$$

Пусть w_0^* — циклическая перестановка слова w_0 , причем $\varphi(\partial D_1 \cap \sigma)$ — начало слова w_0^* . Рассмотрим поддиаграмму $L = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_r$ с минимальным r такую, что w_0^* является подсловом слова $u \equiv \varphi(\partial L \cap \sigma)$. Возможны следующие подслучаи.

1. $|w_0| = |u|$. Наклеим область D_1 по границе σ на область D_{r+1} . Тогда слова $\varphi(D_1)$ и $\varphi(D_{r+1})$ взаимно обратны. Следовательно,

$$\begin{aligned} \varphi(\partial D_1 \cap \sigma) &\equiv \varphi(\partial D_{r+1} \cap \sigma), \\ \varphi(\partial D_1) &\equiv \varphi(\partial D_{r+1}). \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\varphi(\partial D_2) \equiv \varphi(\partial D_{r+2}), \dots, \varphi(\partial D_r) \equiv \varphi(\partial D_{2r}),$$

и так далее, то есть области поддиаграммы L образуют период. Обозначим через D_0 область, предшествующую D_1 . Справедливо соотношение

$$\varphi(\partial D_0 \cap \partial D_1) \equiv \varphi(\partial D_r \cap \partial D_{r+1}).$$

Вырежем поддиаграмму L и в диаграмме $M_1 = M \setminus L$ склеим ребра $\partial D_0 \cap \partial D_1$ и $\partial D_r \cap \partial D_{r+1}$. Получим приведенную диаграмму степенной сопряженности слов w_0, v_0 словом z , то есть числа m, n можно уменьшить, что невозможно в силу их минимальности. Поэтому в данном случае $w_0 = z^{-1}v_0z$.

2. $|w_0| < |u|$. Наклеим область D_1 по границе σ на пару областей D_r, D_{r+1} . Но тогда либо метка $\varphi(D_0)$ области D_0 , предшествующей D_1 , либо метка $\varphi(D_{r+1})$ области D_{r+1} сократимы в F , что невозможно.

Если для любой области D справедливо равенство

$$|\varphi(\partial D \cap \sigma)| = |\varphi(\partial D \cap \tau)|,$$

то в силу того, что метка каждого ребра есть буква и области пересекаются по одному ребру, получаем, что

$$\varphi(\partial D \cap \sigma) \equiv \varphi(\partial D \cap \tau).$$

Таким образом, $w_0 \equiv v_0$ и, следовательно, как и в п. 1, числа m, n можно уменьшить. Таким образом, $w_0 = z^{-1}v_0z$.

Рассмотрим теперь простую кольцевую диаграмму сопряженности слов w_0^n, v_0^m словом z . Число дисков и простых путей можно ограничить согласно лемме 9. В случае, когда все диски диаграммы M короткие, числа m, n , очевидно, можно ограничить. Рассмотрим длинный диск N_i . Допустим, что в N_i существует область D_1 такая, что

$$|\varphi(\partial D_1 \cap \sigma_i)| = |\varphi(\partial D_1 \cap \tau_i)| + 2.$$

Начиная с данной области, повторим рассуждения, проведенные для кольцевой диаграммы. В результате получим, что диск N_i может быть только коротким. Если в N_i для любой области D , за исключением областей, содержащих вершины A_i, B_i , справедливо равенство

$$|\varphi(\partial D \cap \sigma)| = |\varphi(\partial D \cap \tau)|,$$

то также получим, что диск N_i может быть только коротким.

Рассмотрим второй случай. Рассмотрим приведенную связную односвязную R -диаграмму M с граничным циклом $\gamma \cup \delta$ такую, что

$$\varphi(\partial M) = \varphi(\gamma)\varphi(\delta) = w_0^n v_0^{-m},$$

где γ, δ гомеоморфны отрезку.

Рассмотрим случай, когда M является диском, тогда $\partial M = \gamma \cup \delta, \gamma \cap \delta = \{A, B\}$. По лемме 2 эта диаграмма однослойна. Для диаграммы M повторим все рассуждения, проведенные для диаграммы N_i из первого случая. Получим, что диск N_i может быть только коротким.

Случай, когда M представляет собой объединение дисков и простых путей, аналогичен подслучаю простых кольцевых диаграмм из первого случая.

Рассмотренные случаи показывают, что $n|w_0| < |w_0|^3 + 4|w_0|^3$ или $n < 5|w_0|^2$. Теорема доказана.

Список литературы

1. Appel K., One Artin groups and Coxeter groups of large type. *Contemp. Math.* (1984) **33**, 50–78.
2. Безверхний В. Н., Добрынина И. В., Решение проблемы сопряженности слов в группах Кокстера большого типа. *Чебышевский сб.* (2003) **4**, №1(5), 10–33.
3. Линдон Р., Шупп П., *Комбинаторная теория групп*. Наука, Москва, 1980.
4. Безверхний В. Н., Добрынина И. В., Решение проблемы обобщенной сопряженности слов в группах Кокстера большого типа. *Дискретная математика* (2005) **17**, №3, 123–145.
5. Безверхний В. Н., Добрынина И. В., Об элементах конечного порядка в группах Кокстера большого типа. *Изв. Тульского гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика* (2003) **9**, №1, 13–22.
6. Безверхний В. Н., Добрынина И. В., Решение проблемы вхождения в циклическую подгруппу в группах Кокстера большого типа. *Изв. Тульского гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика* (2004) **10**, №1, 23–37.
7. Безверхний В. Н., Добрынина И. В., Решение проблемы слабой степенной сопряженности слов в группах Кокстера большого типа. *Изв. Тульского гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика* (2004) **10**, №1, 38–46.

Статья поступила 5.10.2007.