Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Г. Гераськина, О стартовых состояниях автоматной модели легких в чистой среде, *Дискрет. матем.*, 2008, том 20, выпуск 3, 119–135

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1019>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 16:46:26

О стартовых состояниях автоматной модели легких в чистой среде

© 2008 г. Ю. Г. Гераськина

В работе продолжается изучение функционирования легких человека. Ранее была построена автоматная модель самоочищения запыленных легких в чистой среде. В предлагаемой работе проводится изучение диаграммы Мура соответствующего автомата. В качестве характерных состояний диаграммы выбраны состояния, у которых нет предшественников, такие состояния называются стартовыми. В работе изучаются стартовые состояния диаграммы Мура.

1. Введение

В предлагаемой работе продолжается изучение функционирования легких человека, начатое в [2, 3, 4]. В качестве главной функции легких рассматривается свойство их самоочищения как от внутреннего секрета, так и от поступающего извне вещества в легкие. В [2] установлено, что процесс самоочищения легких можно моделировать с помощью автоматов. Здесь мы изучаем свойства таких автоматов.

Легкие образуют древовидную структуру бронхов, в которых имеются реснички, играющие роль эскалаторного механизма вывода вещества во внешнюю среду. Бронхи имеют разные пропускные способности и разную эффективность ресничек. Чем выше от самых мелких бронхов, тем мощнее механизм передачи вещества изнутри вовне.

Предполагается, что в момент t распределено некоторое количество вещества по ресничкам легких. Тогда в момент $t + 1$ по определенным правилам происходит перемещение вещества в легких с помощью ресничек по направлению к трахее. Этот процесс продолжается до полного освобождения легких от этого вещества.

Возникает задача построения модели легочного механизма самоочищения как в условиях чистой среды, так и в условиях возможного запыления легких из среды в процессе дыхания, а также задача изучения свойств этой модели.

Ранее автором была построена такая модель процесса самоочищения запыленных легких в предположении, что они функционируют в чистой среде [3]. Как отмечено выше, автором было показано, что такая модель является автоматной, и потому разные свойства процесса самоочищения могут быть исследованы с помощью изучения соответствующих автоматов. Основной характеристикой автоматов, как известно [1], является его диаграмма Мура, построение и изучение свойств которой для модели легких означало бы установление свойств процесса их самоочищения. В предлагаемой работе проводится изучение этой диаграммы Мура. В качестве характерных состояний диаграммы выбраны те состояния, у которых нет предшественников. Такие состояния называются стартовыми.

Основными результатами предлагаемой работы являются критериальное описание стартовых состояний и нахождение их числа, а также нахождение числа всех состояний указанной диаграммы.

2. Основные понятия, постановка задач и результаты

Представим легкие полным дихотомическим ориентированным к корню деревом, которое будем называть I -деревом и обозначать D^{-1} , со следующими параметрами.

Пусть $\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbf{N}_0 = \{0\} \cup \mathbf{N}$ и $l, l \in \mathbf{N}$, будем обозначать глубину этого I -дерева. Полагаем, что ребро I -дерева D^{-1} , инцидентное корню, имеет глубину 1.

Каждое ребро D^{-1} разделено на $n, n \in \mathbf{N}$, равных частей, называемых ресничками, и занумерованных числами $i, i = 1, 2, \dots, n$, возрастающими в направлении, обратном ориентации ребра.

Припишем каждому ребру глубины $j, j = 1, 2, \dots, l$, два числа $2^{l-j}b$ и $2^{l-j}r$, где $b, r \in \mathbf{N}$ и $r \leq b$, называемых максимальной нагрузкой и мерой переброса ресничек ребер глубины j , соответственно.

Такое I -дерево D^{-1} с параметрами b, r, n и l обозначим $D^{-1}(b, r, n, l)$. Свяжем с ним некоторый процесс, который назовем процессом дыхания. Он обусловлен рядом допущений. Считаем, что в $D^{-1}(b, r, n, l)$ заданы распределения значений нагрузок по всем ресничкам, учитывая, что нагрузка может быть нулевой. Пусть V' — суммарная нагрузка по всем ресничкам, а V — максимально возможная суммарная нагрузка по всем ресничкам. Нагрузку V назовем объемом I -дерева (легких), а V' — исходным объемом загруженности I -дерева. I -дерево $D^{-1}(b, r, n, l)$ с исходным объемом загруженности V' обозначим $D^{-1}(b, r, n, l; V')$.

Каждая ресничка осуществляет прием вещества извне и переброс своей нагрузки на следующую ресничку с меньшим номером внутри ребра. Прием ресничкой вещества, имеющего массу $d, d \in \mathbf{N}_0, d \leq V - V'$, из внешней среды внутри ребра осуществляется по следующему правилу (для этого правила ориентация считается обратной к заданной).

- (А₁) Если ресничка имеет максимальную нагрузку, то прием вещества не осуществляется.
- (Б₁) При не максимальной нагрузке d_1 первой такой реснички она осуществляет прием вещества максимально возможной массы d_2 такой, что $d_1 + d_2 \leq \min(b, d)$, где b — максимальная нагрузка этой реснички.
- (В₁) Следующая за ресничкой из (Б₁) принимает массу d_3 , как и в (Б₁), с заменой там d на $d - d_2$.
- (Г₁) Оставшаяся масса вещества опускается до следующей реснички с большим номером в ребре, для которой не выполняется условие (А₁). Она осуществляет прием вещества по правилу (В₁) или (Б₁).
- (Д₁) Если ресничка в рассматриваемом ребре является последней, не удовлетворяющей условию (А₁), то оставшаяся масса вещества делится пополам (если число нечетное, то одна из частей на единицу больше другой), и каждая из частей вещества воспринимается соответствующими ребрами, как описано выше.
- (Е₁) Процесс, описываемый позициями (А₁)–(Д₁), начинается с ребра, которое инцидентно корню.

Переброс ресничкой вещества осуществляется на следующую ресничку с меньшим номером внутри ребра по такому правилу.

- (A₂) Если следующая ресничка имеет ненулевую нагрузку, то переброс с реснички не осуществляется.
- (Б₂) Если нагрузка реснички не превосходит r , где r — ее мера переброса, и не выполнено условие (A₂), то перебрасывается на следующую вся нагрузка реснички и считается, что ее нагрузка становится равной нулю.
- (B₂) Если на ресничке нагрузка m и $m > r$, то она перебрасывает на следующую ресничку нагрузку r и оставляет у себя нагрузку $m - r$. Если ресничка в ребре последняя, то переброс нагрузки осуществляется по правилам (A₂), (Б₂), (B₂).
- (Г₂) Если ребро инцидентно корню, то переброс с наименьшей по номеру реснички осуществляется в среду по правилам (Б₂) и (B₂) в предположении, что среда играет роль реснички с нулевой нагрузкой.
- (Д₂) Если ребро не инцидентно корню, то есть его вершина инцидентна следующему ребру, то нагрузка с наименьшей по номеру реснички этого ребра передается наибольшей по номеру ресничке другого ребра по правилам (A₂), (Б₂), (B₂).

Считаем, что процесс дыхания осуществляется в дискретные моменты времени $t = 1, 2, \dots$. В первый момент I -дерево $D^{-1}(b, r, n, l; V')$ имеет заданное распределение нагрузок по его ресничкам. Ко второму моменту осуществляется прием вещества массой $d(1)$ по правилам (A₁)–(E₁), и затем осуществляется переброс нагрузок с реснички на ресничку во всем I -дереве или выброс в среду в соответствии с правилами (A₂)–(Д₂). Если в легкие подается масса d , не превосходящая объема легких, то та ее часть, которая не осела на ресничках, выбрасывается в среду.

Другими словами, за один момент (шаг) происходит вдох и выдох.

Если в каждый момент $t = 1, 2, \dots$ все реснички I -дерева $D^{-1}(b, r, n, l; V')$ осуществляют прием вещества нулевой массы, то такой процесс называется процессом самоочищения этого I -дерева. Процесс самоочищения заканчивается в такой момент t , в котором нагрузки всех ресничек I -дерева $D^{-1}(b, r, n, l; V')$ впервые стали равными нулю.

Под распределением нагрузки V' I -дерева $D^{-1}(b, r, n, l; V')$ будем понимать любое из возможных распределений нагрузок всех его ресничек такое, что суммарный объем их нагрузок равен V' . Ясно, что $V' \leq V$, где V — объем I -дерева $D^{-1}(b, r, n, l; V')$ и $V = 2^{l-1}bnl$. Такие распределения будем называть конфигурациями нагрузки V' по ресничкам I -дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$.

Занумеруем все реснички I -дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ таким образом, что ресничка с номером ijk является k -й ресничкой j -го ребра глубины i , где $1 \leq i < l$, $1 \leq j \leq 2^{i-1}$, $1 \leq k \leq n$, а нумерация ребер одной глубины идет слева направо. Тогда в каждый момент t конфигурацию нагрузки $V'(t)$ в I -дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ можно задать набором

$$q(t) = (q_{111}(t), q_{112}(t), \dots, q_{ijk}(t), \dots, q_{l2^{l-1}n}(t)),$$

в котором каждая координата $q_{ijk}(t)$ равна нагрузке реснички с номером ijk в момент t , причем

$$0 \leq q_{ijk}(t) \leq 2^{l-i}b, \quad \sum_{111}^{l2^{l-1}n} q_{ijk}(t) = V'(t).$$

Пусть в процессе самоочищения конфигурации нагрузки $V'(t)$ в каждый момент t изменяются по правилам (A₂)–(Д₂). Тогда процесс самоочищения можно представить некоторым конечным автономным автоматом $A(b, r, n, l)$ с одним финальным состоянием, что было сделано автором ранее в [2]. Состояниями построенного автомата являются конфигурации нагрузок $V'(t)$ в I -дереве $D^{-1}(b, r, n, l)$, которые называем также состояниями этого I -дерева, а законы перехода из одного состояния в другое считаем указанными выше. Отметим, что понятие состояния I -дерева не зависит от параметра r , а полностью определяется параметрами b, n, l и распределением вещества по этому I -дереву.

Учитывая отмеченную независимость понятия состояния I -дерева от r , обозначим через $Q(b, n, l)$ множество состояний I -дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$, а его мощность через $|Q(b, n, l)|$, полагая далее, что $n > 1$.

Возникает задача нахождения величины $|Q(b, n, l)|$, решение которой содержит следующее утверждение.

Теорема 1. *Справедливо равенство*

$$|Q(b, n, l)| = \prod_{i=1}^l (2^{l-i}b + 1)^{2^{i-1}n}.$$

Следствие 1. *Справедливы оценки*

$$b^{(2^l-1)n} 2^{(2^l-1-1)n} < |Q(b, n, l)| \leq (b+1)^{(2^l-1)n} 2^{(2^l-1-1)n}.$$

Доказательство. Ясно, что

$$\prod_{i=1}^l (2^{l-i}b + 1)^{2^{i-1}n} = \prod_{i=1}^l (2^{l-i}(b + 1/2^{l-i}))^{2^{i-1}n}.$$

Далее, при $i = 1, 2, \dots, l$ выполняются неравенства $0 < 1/2^{l-i} \leq 1$. Следовательно, с учетом теоремы 1

$$\begin{aligned} |Q(b, n, l)| &> \prod_{i=1}^l (2^{l-i}b)^{2^{i-1}n} = 2^{n \sum_{i=1}^l (l-i)2^{i-1}} b^{n \sum_{i=1}^l 2^{i-1}} = 2^{(2^l-1-1)n} b^{(2^l-1)n}, \\ |Q(b, n, l)| &\leq \prod_{i=1}^l (2^{l-i}(b+1))^{2^{i-1}n} = 2^{n \sum_{i=1}^l (l-i)2^{i-1}} (b+1)^{n \sum_{i=1}^l 2^{i-1}} \\ &= 2^{(2^l-1-1)n} (b+1)^{(2^l-1)n}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$b^{(2^l-1)n} 2^{(2^l-1-1)n} < |Q(b, n, l)| \leq (b+1)^{(2^l-1)n} 2^{(2^l-1-1)n}.$$

Следствие доказано.

Следствие 2. *При $l \rightarrow \infty$*

$$\log_2 |Q(b, n, l)| \asymp 2^l.$$

Справедливость следствия устанавливается логарифмированием левой и правой частей неравенств из следствия 1.

Заметим, что диаграмма Мура для автомата $A(b, r, n, l)$ образует частичный порядок по отношению к переходу от одного состояния в другое и допущением того, что финальное состояние никуда не переходит. Тогда последнее является наименьшим элементом этого порядка, в нем есть максимальные элементы и нет наибольшего элемента. Максимальный элемент этого частичного порядка называем стартовым состоянием. Оно характеризуется тем, что оно переходит в какое-то состояние, а в него не переходит ни одно состояние, то есть оно не имеет предшественников.

Нашими задачами будут выяснение того, какие состояния q из $Q(b, n, l)$ являются стартовыми и нахождение числа этих состояний. Отметим, что свойство состояния из $Q(b, n, l)$ быть стартовым зависит от параметра r , а потому для множества всех стартовых состояний из $Q(b, n, l)$ вводим обозначение $St(b, r, n, l)$, а для их числа — обозначение $|St(b, r, n, l)|$.

Для решения этих задач выделим некоторые свойства состояний, эти свойства назовем s_v -свойствами при $b = r$ и m_u -свойствами при $b > r$, где $v \in \{1, 2, 3\}$ и $u \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Будем говорить, что q из $Q(b, n, l)$ обладает

s_1 -свойством, если при данном q выполнены неравенства $q_{111} > 0$ и $q_{112} > 0$,

s_2 -свойством, если при данном q существует ресничка с номером ijk , где $i \in \{1, \dots, l\}$, $j \in \{1, \dots, 2^{i-1}\}$, $k \in \{1, \dots, n\}$, причем $k > 1$ при $i = 1$ и $k < n$ при $i = l$, такая, что $q_{ijk} = 0$ и либо $q_{ij(k-1)} = 0$ при $k > 1$, либо $q_{(i-1)j'n} = 0$ при $k = 1$ и $i > 1$, где ребро j' уровня $i - 1$ инцидентно ребру j уровня i , и при этом имеет место хотя бы одно из следующих условий (ребра j'' и j''' уровня $i + 1$ инцидентны ребру j уровня i):

- (а) при $k < n - 1$ выполнены неравенства $q_{ij(k+1)} > 0$ и $q_{ij(k+2)} > 0$,
- (б) при $k = n - 1$ и $i = l$ выполнено неравенство $q_{ljn} > 0$,
- (в) при $k = n - 1$ и $i < l$, если $0 < q_{ijn} \leq 2^{l-(i+1)}r$, то $q_{(i+1)j''1} > 0$ и либо $q_{(i+1)j''2} > 0$, либо $q_{(i+1)j'''1} > 0$; если $2^{l-(i+1)}r < q_{ijn} \leq 2^{l-i}r$, то $q_{(i+1)j''1} > 0$,
- (г) при $k = n$ и $i < l$ выполнены неравенства $q_{(i+1)j''1} > 0$ и $q_{(i+1)j''2} > 0$;

s_3 -свойством, если $l > 1$ и при данном q существует ресничка с номером ij_11 , где $i \in \{2, 3, \dots, l\}$, $j_1 \in \{1, \dots, 2^{i-1}\}$, такая, что $q_{ij_11} = 0$, при этом $q_{ij_12} > 0$, а также имеет место хотя бы одно из следующих условий (ребро j_1 уровня i инцидентно ребру j уровня $i - 1$ и ребру j_2 уровня i):

- (а) если $q_{(i-1)jn} = 1$, $q_{ij_21} = 0$, $q_{ij_22} > 0$ и при этом при $n > 2$ выполнены неравенства $q_{ij_13} > 0$ и $q_{ij_23} > 0$, и при $n = 2$ и $i < l$ для каждого p из $\{1, 2\}$ (ребро j_p уровня i инцидентно ребрам j'_p и j''_p уровня $i + 1$), если $0 < q_{ij_p2} \leq 2^{l-(i+1)}r$, то либо $q_{(i+1)j'_p1} > 0$ и $q_{(i+1)j'_p2} > 0$, либо $q_{(i+1)j'_p1} > 0$ и $q_{(i+1)j''_p1} > 0$, и если $2^{l-(i+1)}r < q_{ij_p2} \leq 2^{l-i}r$, то $q_{(i+1)j'_p1} > 0$,
- (б) если $0 < q_{(i-1)jn} \leq 2^{l-i}r$, $q_{ij_21} > 0$, $q_{ij_22} > 0$ и при этом при $n > 2$ выполнено неравенство $q_{ij_13} > 0$, а при $n = 2$ и $i < l$ (ребро j_1 уровня i инцидентно ребрам j'_1 и j''_1 уровня $i + 1$), если $0 < q_{ij_12} \leq 2^{l-(i+1)}r$, то либо $q_{(i+1)j'_11} > 0$ и $q_{(i+1)j'_12} > 0$, либо $q_{(i+1)j'_11} > 0$ и $q_{(i+1)j''_11} > 0$, и если $2^{l-(i+1)}r < q_{ij_12} \leq 2^{l-i}r$, то $q_{(i+1)j'_11} > 0$,

- (в) если $2^{l-i}r < q_{(i-1)jn} \leq 2^{l-(i-1)}r$, $q_{ij_21} > 0$ и при этом при $n > 2$ выполнено неравенство $q_{ij_13} > 0$, а при $n = 2$ и $i < l$ (ребро j_1 уровня i инцидентно ребрам j'_1 и j''_1 уровня $i + 1$), если $0 < q_{ij_12} \leq 2^{l-(i+1)}r$, то либо $q_{(i+1)j'_11} > 0$ и $q_{(i+1)j'_12} > 0$, либо $q_{(i+1)j'_11} > 0$ и $q_{(i+1)j''_11} > 0$, а если $2^{l-(i+1)}r < q_{ij_12} \leq 2^{l-i}r$, то $q_{(i+1)j'_11} > 0$.

Чтобы описать m_v -свойства, $v \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, состояния q введем следующее определение.

Три соседние реснички ребра j уровня i I -дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ с номерами k , $(k + 1)$ и $(k + 2)$, где $i \in \{1, \dots, l\}$, $j \in \{1, \dots, 2^{l-i}\}$, $k \in \{1, \dots, n - 2\}$, имеющие в состоянии q нагрузки q_{ijk} , $q_{ij(k+1)}$ и $q_{ij(k+2)}$ такие, что

$$q_{ijk} = 2^{l-i}r, \quad 0 < q_{ij(k+1)} \leq \min(2^{l-i}r; 2^{l-i}(b - r)), \quad q_{ij(k+2)} = 0,$$

будем называть μ -тройками.

Распространим это определение на соседние реснички двух инцидентных ребер j и j' уровней i и $i + 1$, соответственно, где $i \in \{1, \dots, l - 1\}$, $j \in \{1, \dots, 2^{l-i}\}$ и $j' \in \{1, \dots, 2^{l-(i+1)}\}$, следующим образом. Будем называть μ -тройками также реснички с номерами $ij(n - 1)$, ijn , $(i + 1)j'1$ или ijn , $(i + 1)j'1$, $(i + 1)j'2$, если для состояния q I -дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ выполнены соотношения

$$q_{ij(n-1)} = 2^{l-i}r, \quad 0 < q_{ijn} \leq \min(2^{l-i}r, \quad 2^{l-i}(b - r)), \quad q_{(i+1)j'1} = 0$$

или соответственно

$$q_{ijn} = 2^{l-i}r, \quad 0 < q_{(i+1)j'n} \leq \min(2^{l-(i+1)}r, \quad 2^{l-(i+1)}(b - r)), \quad q_{(i+1)j'2} = 0.$$

Будем говорить, что q из $\mathcal{Q}(b, n, l)$ обладает

m_1 -свойством, если выполнено неравенство $q_{111} > 2^{l-1}(b - r)$ при данном q в случае $b \geq 2r$, а в случае $r < b < 2r$ выполнено хотя бы одно из условий:

- (а) $2^{l-1}(b - r) < q_{111} < 2^{l-1}r$ и $q_{112} > 0$,
- (б) $q_{111} = 2^{l-1}r$ и $q_{112} > 2^{l-1}(b - r)$,
- (в) $q_{111} > 2^{l-1}r$;

m_2 -свойством, если при данном q существует цепочка инцидентных ребер, идущая (в направлении к листьям) от ребра j уровня i до ребра j' уровня i' включительно, где $1 \leq i \leq i' \leq l$, такая, что в ребре j уровня i существует ресничка с номером k , где $k \in \{1, \dots, n\}$, такая, что $q_{ijk} = 0$ или $q_{ijk} > 2^{l-i}r$, и в случае $k < n$ справедливо равенство $q_{ij(k+1)} = 0$, а в случае $k = n$ — равенство $q_{(i+1)j''1} = 0$, где ребро j'' уровня $i + 1$ принадлежит этой цепочке и инцидентно ребру j уровня i , и при этом, начиная с реснички с номером либо $ij(k + 2)$ при $k < n - 1$, либо $(i + 1)j''1$ при $k = n - 1$, либо $(i + 1)j''2$ при $k = n$, существует m , где $m \in \{0, 1, \dots, [(n(l - i + 1) - k - 2)/3]\}$, подряд идущих μ -троек с соответствующими ребрам, которым они принадлежат, параметрами и при $i' = i + 1$ $(3m + k + 2 - n)/n$ и $k' = 3m + k + 2 - n[(3m + k + 1)/n]$ выполняется хотя бы одно из следующих условий:

- (а) $q_{i'j'k'} > 2^{l-i'}r$,

- (б) $q_{i'j'k'} = 2^{l-i'}r$ и при $k' < n$ справедливо неравенство $q_{i'j'(k'+1)} > 2^{l-i'}(b-r)$, и при $k' = n$ и $i' < l$ справедливо неравенство $q_{(i'+1)j'_1} > 2^{l-(i'+1)}(b-r)$, где ребро j'_1 уровня $i' + 1$ инцидентно ребру j' уровня i' ,
- (в) $0 < q_{i'j'k'} < 2^{l-i'}r$ и при $k' < n$ справедливо неравенство $q_{i'j'(k'+1)} > 0$, а при $k' = n$ и $i' < l$ выполнено одно из следующих условий (ребра j'_1 и j'_2 уровня $i' + 1$ инцидентны ребру j' уровня i'): если $q_{i'j'k'} \neq 2^{l-(i'+1)}r$, то $q_{(i'+1)j'_1} > 0$ и $q_{(i'+1)j'_2} > 0$, а если $q_{i'j'k'} = 2^{l-(i'+1)}r$, то при $b \geq 2r$ справедливо неравенство $q_{(i'+1)j'_1} > 2^{l-(i'+1)}(b-r)$, а при $r < b < 2r$ либо $q_{(i'+1)j'_1} > 2^{l-(i'+1)}(b-r)$ и $q_{(i'+1)j'_2} > 2^{l-(i'+1)}(b-r)$, либо $q_{(i'+1)j'_1} > 2^{l-(i'+1)}r$, либо выполняется хотя бы одно из следующих условий: при $q_{(i'+1)j'_1} = 2^{l-(i'+1)}r$ справедливо неравенство $q_{(i'+1)j'_2} > 2^{l-(i'+1)}(b-r)$, а при $2^{l-(i'+1)}(b-r) < q_{(i'+1)j'_1} < 2^{l-(i'+1)}r$ справедливо неравенство $q_{(i'+1)j'_2} > 0$;

m_3 -свойством, если $l > 1$ и при данном q существует ресничка с номером ijn , где $i = 1, \dots, l-1$ и $1 \leq j \leq 2^{l-1}$, такая, что $q_{ijn} = 1$ и при этом $q_{(i+1)j'1} = 0$ и $q_{(i+1)j''1} = 0$, где ребро j уровня i инцидентно ребрам j' и j'' уровня $i+1$, а также, начиная с ресничек с номерами $(i+1)j'2$ и $(i+1)j''2$, существуют две цепочки из m и m' , соответственно, где $m, m' \in \{0, 1, 2, \dots, [(n(l-i)-2)/3]\}$, подряд идущих (в направлении к листьям) μ -троек с соответствующими ребрам, которым они принадлежат, параметрами до ресничек с номерами $i_1j_1k_1$ и $i_2j_2k_2$ (не включая последние), и таких что при $i_1 = i + \lfloor (3m+2)/n \rfloor$, $i_2 = i + \lfloor (3m'+2)/n \rfloor$, $k_1 = 3m+2 - n\lfloor (3m+1)/n \rfloor$ и $k_2 = 3m'+2 - n\lfloor (3m'+1)/n \rfloor$ выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- (а) $q_{i_1j_1k_1} > 2^{l-i_1}r$ и $q_{i_2j_2k_2} > 2^{l-i_2}r$,
- (б) $q_{i_1j_1k_1} > 2^{l-i_1}r$, $q_{i_2j_2k_2} = 2^{l-i_2}r$ и при $k_2 < n$ справедливо неравенство $q_{i_2j_2(k_2+1)} > 2^{l-i_2}(b-r)$, а при $k_2 = n$ и $i_2 < l$ справедливо неравенство $q_{(i_2+1)j'_2} > 2^{l-(i_2+1)}(b-r)$, где ребро j'_2 уровня $i_2 + 1$ инцидентно ребру j_2 уровня i_2 ,
- (в) $q_{i_1j_1k_1} > 2^{l-i_1}r$, $0 < q_{i_2j_2k_2} < 2^{l-i_2}r$ и при $k_2 < n$ справедливо неравенство $q_{i_2j_2(k_2+1)} > 0$, а при $k_2 = n$ и $i_2 < l$ выполняется одно из следующих условий (ребра j'_2 и j''_2 уровня $i_2 + 1$ инцидентны ребру j_2 уровня i_2): если $q_{i_2j_2k_2} \neq 2^{l-(i_2+1)}r$, то $q_{(i_2+1)j'_2} > 0$ и $q_{(i_2+1)j''_2} > 0$, если $q_{i_2j_2k_2} = 2^{l-(i_2+1)}r$, то справедливо неравенство $q_{(i_2+1)j'_2} > 2^{l-(i_2+1)}(b-r)$ при $b \geq 2r$, а при $r < b < 2r$ либо $q_{(i_2+1)j'_2} > 2^{l-(i_2+1)}(b-r)$ и $q_{(i_2+1)j''_2} > 2^{l-(i_2+1)}(b-r)$, либо $q_{(i_2+1)j'_2} > 2^{l-(i_2+1)}r$, либо выполняется хотя бы одно из следующих условий: при $q_{(i_2+1)j'_2} = 2^{l-(i_2+1)}r$ верно неравенство $q_{(i_2+1)j''_2} > 2^{l-(i_2+1)}(b-r)$, при $2^{l-(i_2+1)}(b-r) < q_{(i_2+1)j'_2} < 2^{l-(i_2+1)}r$ справедливо неравенство $q_{(i_2+1)j''_2} > 0$,
- (г) $q_{i_1j_1k_1} = 2^{l-i_1}r$, $q_{i_2j_2k_2} = 2^{l-i_2}r$ и для каждого p из $\{1, 2\}$ при $k_p < n$ справедливо неравенство $q_{i_pj_p(k_p+1)} > 2^{l-i_p}(b-r)$, а при $k_p = n$ и $i_p < l$ — неравенство $q_{(i_p+1)j'_p} > 2^{l-(i_p+1)}(b-r)$, где ребро j'_p уровня $i_p + 1$ инцидентно ребру j_p уровня i_p ,

- (д) $0 < q_{i_1 j_1 k_1} < 2^{l-i_1} r$, $0 < q_{i_2 j_2 k_2} < 2^{l-i_2} r$ и для каждого p из $\{1, 2\}$ при $k_p < n$ справедливо неравенство $q_{i_p j_p (k_p+1)} > 0$, а при $k_p = n$ и $i_p < l$ выполняется одно из следующих условий (ребра j'_p и j''_p уровня $i_p + 1$ инцидентны ребру j_p уровня i_p): если $q_{i_p j_p k_p} \neq 2^{l-(i_p+1)} r$, то $q_{(i_p+1) j'_p 1} > 0$ и $q_{(i_p+1) j''_p 1} > 0$, если $q_{i_p j_p k_p} = 2^{l-(i_p+1)} r$, то при $b \geq 2r$ верно неравенство $q_{(i_p+1) j'_p 1} > 2^{l-(i_p+1)}(b-r)$, а при $r < b < 2r$ либо $q_{(i_p+1) j'_p 1} > 2^{l-(i_p+1)}(b-r)$ и $q_{(i_p+1) j''_p 1} > 2^{l-(i_p+1)}(b-r)$, либо $q_{(i_p+1) j'_p 1} > 2^{l-(i_p+1)} r$, либо выполняется хотя бы одно из следующих условий: при $q_{(i_p+1) j'_p 1} = 2^{l-(i_p+1)} r$ верно неравенство $q_{(i_p+1) j''_p 2} > 2^{l-(i_p+1)}(b-r)$, при $2^{l-(i_p+1)}(b-r) < q_{(i_p+1) j'_p 1} < 2^{l-(i_p+1)} r$ верно неравенство $q_{(i_p+1) j''_p 2} > 0$,
- (е) $q_{i_1 j_1 k_1} = 2^{l-i_1} r$, $0 < q_{i_2 j_2 k_2} < 2^{l-i_2} r$ и при $k_1 < n$ справедливо неравенство $q_{i_1 j_1 (k_1+1)} > 2^{l-i_1}(b-r)$, при $k_2 < n$ — неравенство $q_{i_2 j_2 (k_2+1)} > 0$, при $k_1 = n$ и $i_1 < l$ — неравенство $q_{(i_1+1) j'_1 1} > 2^{l-(i_1+1)}(b-r)$, где ребро j'_1 уровня $i_1 + 1$ инцидентно ребру j_1 уровня i_1 , а при $k_2 = n$ и $i_2 < l$ выполняется одно из следующих условий (ребра j'_2 и j''_2 уровня $i_2 + 1$ инцидентны ребру j_2 уровня i_2): если $q_{i_2 j_2 k_2} \neq 2^{l-(i_2+1)} r$, то $q_{(i_2+1) j'_2 1} > 0$ и $q_{(i_2+1) j''_2 1} > 0$, если $q_{i_2 j_2 k_2} = 2^{l-(i_2+1)} r$, то при $b \geq 2r$ верно неравенство $q_{(i_2+1) j'_2 1} > 2^{l-(i_2+1)}(b-r)$, а при $r < b < 2r$ либо $q_{(i_2+1) j'_2 1} > 2^{l-(i_2+1)}(b-r)$ и $q_{(i_2+1) j''_2 1} > 2^{l-(i_2+1)}(b-r)$, либо $q_{(i_2+1) j'_2 1} > 2^{l-(i_2+1)} r$, либо выполняется хотя бы одно из следующих условий: при $q_{(i_2+1) j'_2 1} = 2^{l-(i_2+1)} r$ верно неравенство $q_{(i_2+1) j''_2 2} > 2^{l-(i_2+1)}(b-r)$, при $2^{l-(i_2+1)}(b-r) < q_{(i_2+1) j'_2 1} < 2^{l-(i_2+1)} r$ справедливо неравенство $q_{(i_2+1) j''_2 2} > 0$;

m_4 -свойством, если $l > 1$ и при данном q существует ресничка с номером ij_n , где $i = 1, 2, 3, \dots, l-1$ и $1 \leq j \leq 2^{i-1}$, такая, что $2^{l-(i+1)} r < q_{ij_n} \leq 2^{l-i} r$ и при этом $q_{(i+1) j' 1} = 0$ и $q_{(i+1) j'' 1} > 2^{l-(i+1)}(b-r)$, где ребро j уровня i инцидентно ребрам j' и j'' уровня $i+1$, а также, начиная с реснички с номером $(i+1)j'_2$, существует цепочка из m , где $m \in \{0, 1, 2, \dots, [(n(l-i)-2)/3]\}$, подряд идущих (в направлении к листьям) μ -троек с соответствующими ребрам, которым они принадлежат, параметрами до реснички с номером $i_1 j_1 k_1$ (не включая последнюю), и такая, что при $i_1 = i + 1$ $(3m+2)/n$ и $k_1 = 3m+2 - n[(3m+1)/n]$ выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- (а) $q_{i_1 j_1 k_1} > 2^{l-i_1} r$,
- (б) $q_{i_1 j_1 k_1} = 2^{l-i_1} r$ и при $k_1 < n$ верно неравенство $q_{i_1 j_1 (k_1+1)} > 2^{l-i_1}(b-r)$, а при $k_1 = n$ и $i_1 < l$ — неравенство $q_{(i_1+1) j'_1 1} > 2^{l-(i_1+1)}(b-r)$, где ребро j'_1 уровня $i_1 + 1$ инцидентно ребру j_1 уровня i_1 ,
- (в) $0 < q_{i_1 j_1 k_1} < 2^{l-i_1} r$ и при $k_1 < n$ справедливо неравенство $q_{i_1 j_1 (k_1+1)} > 0$, а при $k_1 = n$ и $i_1 < l$ выполняется одно из следующих условий (ребра j'_1 и j''_1 уровня $i_1 + 1$ инцидентны ребру j_1 уровня i_1): если $q_{i_1 j_1 k_1} \neq 2^{l-(i_1+1)} r$, то $q_{(i_1+1) j'_1 1} > 0$ и $q_{(i_1+1) j''_1 1} > 0$, если $q_{i_1 j_1 k_1} = 2^{l-(i_1+1)} r$, то при $b \geq 2r$ справедливо неравенство $q_{(i_1+1) j'_1 1} > 2^{l-(i_1+1)}(b-r)$, а при $r < b < 2r$ либо $q_{(i_1+1) j'_1 1} > 2^{l-(i_1+1)}(b-r)$ и $q_{(i_1+1) j''_1 1} > 2^{l-(i_1+1)}(b-r)$, либо $q_{(i_1+1) j'_1 1} > 2^{l-(i_1+1)} r$, либо выполняется хотя бы одно из следующих условий:

при $q_{(i+1)j'_11} = 2^{l-(i+1)}r$ верно неравенство $q_{(i+1)j'_12} > 2^{l-(i+1)}(b-r)$, а
 при $2^{l-(i+1)}(b-r) < q_{(i+1)j'_11} < 2^{l-(i+1)}r$ — неравенство $q_{(i+1)j'_12} > 0$;

m_5 -свойством, если $l > 1$ и при данном q существует ресничка с номером ijn , где $i = 1, 2, 3, \dots, l-1$ и $1 \leq j \leq 2^{i-1}$, такая, что $0 < q_{ijn} \leq 2^{l-(i+1)}r$ и при этом $q_{(i+1)j'1} = 0$ и либо $q_{(i+1)j''1} > 2^{l-(i+1)}r$, либо $0 < q_{(i+1)j''1} < 2^{l-(i+1)}r$ и $q_{(i+1)j''2} > 0$, либо $q_{(i+1)j''1} = 2^{l-(i+1)}r$ и $q_{(i+1)j''2} > 2^{l-(i+1)}(b-r)$, где ребро j уровня i инцидентно ребрам j' и j'' уровня $i+1$, а также, начиная с реснички с номером $(i+1)j'2$, существует цепочка из m , где $m \in \{0, 1, 2, \dots, [(n(l-i)-2)/3]\}$, подряд идущих (в направлении к листьям) μ -троек с соответствующими ребрам, которым они принадлежат, параметрами до реснички с номером $i_1j_1k_1$ (не включая последнюю), и такая, что при $i_1 = i + \lfloor (3m+2)/n \rfloor$ и $k_1 = 3m+2 - n\lfloor (3m+1)/n \rfloor$ выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- (а) $q_{i_1j_1k_1} > 2^{l-i_1}r$,
- (б) $q_{i_1j_1k_1} = 2^{l-i_1}r$ и при $k_1 < n$ верно неравенство $q_{i_1j_1(k_1+1)} > 2^{l-i_1}(b-r)$, а при $k_1 = n$ и $i_1 < l$ справедливо неравенство $q_{(i_1+1)j'_11} > 2^{l-(i_1+1)}(b-r)$, где ребро j'_1 уровня i_1+1 инцидентно ребру j_1 уровня i_1 ,
- (в) $0 < q_{i_1j_1k_1} < 2^{l-i_1}r$ и при $k_1 < n$ справедливо неравенство $q_{i_1j_1(k_1+1)} > 0$, а при $k_1 = n$ и $i_1 < l$ выполняется одно из следующих условий (ребра j'_1 и j''_1 уровня i_1+1 инцидентны ребру j_1 уровня i_1): если $q_{i_1j_1k_1} \neq 2^{l-(i_1+1)}r$, то $q_{(i_1+1)j'_11} > 0$ и $q_{(i_1+1)j''_11} > 0$, если $q_{i_1j_1k_1} = 2^{l-(i_1+1)}r$, то $q_{(i_1+1)j'_11} > 2^{l-(i_1+1)}(b-r)$ при $b \geq 2r$, а при $r < b < 2r$ либо $q_{(i_1+1)j'_11} > 2^{l-(i_1+1-b-r)}$ и $q_{(i_1+1)j''_11} > 2^{l-(i_1+1)}(b-r)$, либо $q_{(i_1+1)j'_11} > 2^{l-(i_1+1)}r$, либо выполняется хотя бы одно из следующих условий: при $q_{(i_1+1)j'_11} = 2^{l-(i_1+1)}r$ верно неравенство $q_{(i_1+1)j'_12} > 2^{l-(i_1+1)}(b-r)$, а при $2^{l-(i_1+1)}(b-r) < q_{(i_1+1)j'_11} < 2^{l-(i_1+1)}r$ — неравенство $q_{(i_1+1)j'_12} > 0$.

Пусть

$$\mathbf{N}_k = \{1, 2, \dots, k\}, \quad S = \{s_v \mid v \in \mathbf{N}_3\}, \quad M = \{m_v \mid v \in \mathbf{N}_5\}.$$

Класс всех состояний q из $\mathcal{Q}(b, n, l)$ с s_v -свойством при $s_v \in S$ обозначим через K_{s_v} , а класс всех состояний q из $\mathcal{Q}(b, n, l)$ с m_v -свойством при $m_v \in M$ обозначим через K_{m_v} .

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 2. При $b = r$

$$t(b, r, n, l) = \begin{cases} K_{s_1}, & \text{если } l = 1, n = 2, \quad (1) \\ K_{s_1} \cup K_{s_2}, & \text{если } l = 1, n > 2, \quad (2) \\ K_{s_1} \cup K_{s_2} \cup K_{s_3}, & \text{если } l \geq 2, n \geq 2, \quad (3), \end{cases}$$

где $K_{s_v} \neq \emptyset$ при всех v из $\mathbf{N}_3$, и если $j \in \{(2), (3)\}$, то для элементов строки (j) при $v \neq i$ справедливо соотношение $K_{s_v} \not\subseteq K_{s_u}$.

Теорема 3. При $b > r$

$$t(b, r, n, l) = \begin{cases} K_{m_1}, & \text{если } l = 1 \text{ и } n = 2, \quad (1) \\ K_{m_1} \cup K_{m_2}, & \text{если } l = 1 \text{ и } n > 2, \quad (2) \\ \bigcup_{v \in \mathbf{N}_5} K_{m_v}, & \text{если } l \geq 2 \text{ и } n \geq 2, \quad (3) \end{cases}$$

где $K_{m_v} \neq \emptyset$ при всех v из $\mathbf{N}_5$, и если $j \in \{(2), (3)\}$, то для элементов строки (j) при $v \neq u$ справедливо соотношение $K_{m_v} \not\subseteq K_{m_u}$.

Теорема 4. Справедливы неравенства

$$C \leq \frac{|St(b, r, n, l)|}{|Q(b, n, l)|} \leq 1,$$

где

$$C = \left(\frac{2^{l-1}b}{2^{l-1}b + 1} \right)^2$$

при $b = r$,

$$C = \frac{(2^{l-1})^2 r b}{(2^{l-1}b + 1)^2}$$

при $r < b < 2r$ и

$$C = \frac{2^{l-1}r}{2^{l-1}b + 1}$$

при $b \geq 2r$.

Следствие 3. При $l \rightarrow \infty$

(а) $|St(b, r, n, l)| \sim |Q(b, n, l)|$, если $b = r$,

(б) $|St(b, r, n, l)| \asymp |Q(b, n, l)|$, если $b > r$.

Его справедливость вытекает из теоремы 4 с учетом того, что при $l \rightarrow \infty$, если $b = r$, то $C \rightarrow 1$, а если $b > r$, то $C \rightarrow r/b$.

3. Доказательства теорем

Докажем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1. При $b = r$, $l = 1$, $n = 2$ состояние $q \in Q(b, n, l)$ I -дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ является стартовым тогда и только тогда, когда $q \in K_{s_1}$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что если q из $Q(b, n, l)$ принадлежит классу K_{s_1} , то q является стартовым. Покажем, что, если q является стартовым, то оно принадлежит K_{s_1} . Рассмотрим все возможные случаи для нагрузок ресничек I -дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ в состоянии q :

(1) $q_{111} = 0$ и $q_{112} = 0$;

(2) $q_{111} = 0$ и $q_{112} > 0$;

(3) $q_{111} > 0$ и $q_{112} = 0$;

(4) $q_{111} > 0$ и $q_{112} > 0$.

В случаях (1)–(3) состояние q не является стартовым. Действительно, в каждом из этих случаев существует предшественник q' состояния q такой, что в случае (1) $q'_{111} = 1$ и $q'_{112} = 0$, в случае (2) $q'_{111} = 1$ и $q'_{112} = q_{112}$, в случае (3) $q'_{111} = 0$ и $q'_{112} = q_{111}$.

В случае (4) состояние q , очевидно, является стартовым и при этом обладает s_1 -свойством. Следовательно, $q \in K_{s_1}$. Лемма доказана.

Лемма 2. Если $b = r$, $l = 1$ и $n > 2$, то справедливы следующие утверждения:

- (а) состояние $q \in Q(b, n, l)$ I -дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ является стартовым тогда и только тогда, когда $q \in K_{s_v}$ при некотором $v \in \mathbb{N}_2$,
- (б) $K_{s_u} \not\subseteq K_{s_v}$ для любых $s_u, s_v \in \{s_1, s_2\}$ при $u \neq v$.

Доказательство. Докажем утверждение (а). Легко видеть, что, если q из $Q(b, n, l)$ принадлежит классу K_{s_v} , где $v \in \mathbb{N}_2$, то q является стартовым.

Покажем, что, если q является стартовым, то оно принадлежит хотя бы одному из классов K_{s_v} , где $v \in \mathbb{N}_2$. Заметим, что если q стартовое, то для него выполняется хотя бы одно из следующих условий:

- (1) $q_{111} > 0$ и $q_{112} > 0$;
- (2) $q_{11n} > 0$, $q_{11(n-1)} = 0$ и $q_{11(n-2)} = 0$;
- (3) при $n > 3$ существуют четыре соседние реснички с номерами $11k$, $11(k+1)$, $11(k+2)$ и $11(k+3)$, где $k < n-2$, такие, что $q_{11k} = 0$, $q_{11(k+1)} = 0$, $q_{11(k+2)} > 0$ и $q_{11(k+3)} > 0$.

Действительно, пусть для q не выполняется ни одно из условий (1), (2), (3). Тогда существует предшественник q' состояния q такой, что для всех пар ресничек с номерами $11(p-1)$ и $11p$, $p > 1$ таких, что $q_{11(p-1)} > 0$ и $q_{11p} = 0$, справедливы равенства $q'_{11(p-1)} = 0$ и $q'_{11p} = q_{11(p-1)}$, а при $q_{111} = 0$ равенство $q'_{111} = 1$, остальные реснички I -дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ в состоянии q' имеют те же нагрузки, что и в состоянии q . Следовательно, при невыполнении ни одного из трех указанных условий состояние q стартовым не является, а при выполнении хотя бы одного из этих условий q , очевидно, является стартовым.

Если для q выполняется условие (1), то q обладает s_1 -свойством, а следовательно, $q \in K_{s_1}$. Если для q выполняется условие (2) или (3), то q обладает s_2 -свойством, а следовательно, $q \in K_{s_2}$.

Таким образом, показано, что если q является стартовым, то $q \in K_{s_v}$, где $v \in \mathbb{N}_2$.

Докажем утверждение (б). Пусть состояние q^1 из K_{s_1} такое, что $q^1_{111} = 1$, $q^1_{112} = 1$, а остальные реснички в I -дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ имеют нулевые нагрузки. Легко видеть, что $q^1 \notin K_{s_2}$. Следовательно, $K_{s_1} \not\subseteq K_{s_2}$.

Пусть состояние q^2 из K_{s_2} такое, что $q^2_{11n} = 1$, а остальные реснички в I -дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ имеют нулевые нагрузки. Легко видеть, что $q^2 \notin K_{s_1}$. Следовательно, $K_{s_2} \not\subseteq K_{s_1}$. Лемма доказана.

Лемма 3. Если $b = r$, $l \geq 2$ и $n \geq 2$, то справедливы следующие утверждения:

- (а) состояние q из $Q(b, n, l)$ I -дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ является стартовым тогда и только тогда, когда $q \in K_{s_v}$ при некотором v таком, что $v \in \mathbb{N}_3$,
- (б) $K_{s_u} \not\subseteq K_{s_v}$ для любых s_u, s_v из S при $u \neq v$.

Доказательство. Докажем утверждение (а). Нетрудно видеть, что если q из $Q(b, n, l)$ принадлежит классу K_{s_v} , где $v \in \mathbb{N}_3$, то q является стартовым.

Покажем, что, если q является стартовым, то оно обладает хотя бы одним из s_v -свойств, а следовательно, принадлежит классу K_{s_v} , где $v \in \mathbb{N}_3$. Предположим, что состояние q является стартовым и при этом не обладает ни одним из указанных трех свойств. Тогда

у q существует предшественник q' , который можно построить следующим образом. Для каждого ребра j уровня i для всех пар ресничек с номерами $ij(k-1)$ и ijk , $k > 1$ таких, что $q_{ij(k-1)} > 0$ и $q_{ijk} = 0$, справедливы равенства $q'_{ij(k-1)} = 0$ и $q'_{ijk} = q_{11(k-1)}$, где $i \in \mathbf{N}_l$ и $j \in \mathbf{N}_{2^{i-1}}$, а при $q_{111} = 0$ равенство $q'_{111} = 1$. Для каждой тройки инцидентных ребер, состоящей из ребра j уровня i и ребер j' и j'' уровня $i+1$, где $i \in \mathbf{N}_{l-1}$ и $j \in \mathbf{N}_{2^{i-1}}$ такой, что

- (1) $1 < q_{ijn} \leq 2^{l-(i+1)}r$, $q_{(i+1)j'1} = 0$ и $q_{(i+1)j''1} = 0$ и справедливы равенства $q'_{ijn} = 0$, $q'_{(i+1)j'1} = 1$ и $q'_{(i+1)j''1} = q_{ijn} - 1$;
- (2) $0 < q_{ijn} \leq 2^{l-(i+1)}r$, $q_{(i+1)j'1} = 0$ и $q_{(i+1)j'2} > 0$, и соотношения $q'_{ijn} = 0$, $q'_{(i+1)j'1} = q_{ijn}$ и $q'_{(i+1)j'2} = q_{(i+1)j'2}$ справедливы тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий (где ребра j'_1 и j'_2 уровня $i+2$ инцидентны ребру j' уровня $i+1$):
 - $n > 2$ и $q_{(i+1)j'3} > 0$,
 - $n = 2$ и $i = l-1$,
 - $n = 2$, $i < l-1$, $q_{(i+1)j'2} \leq 2^{l-(i+2)}r$, $q_{(i+2)j'_11} > 0$ и $q_{(i+2)j'_12} > 0$ или $q_{(i+2)j'_21} > 0$,
 - $n = 2$, $i < l-1$, $q_{(i+1)j'2} > 2^{l-(i+2)}r$ и $q_{(i+2)j'_11} > 0$;
- (3) $2^{l-(i+1)}r < q_{ijn} \leq 2^{l-i}r$, $q_{(i+1)j'1} = 0$ и $q_{(i+1)j''1} = 0$, справедливы равенства $q'_{ijn} = 0$, $q'_{(i+1)j'1} = 2^{l-(i+1)}r$ и $q'_{(i+1)j''1} = q_{ijn} - 2^{l-(i+1)}r$.

Остальные реснички I -дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ в состоянии q' имеют те же нагрузки, что и в состоянии q .

Получено противоречие, так как стартовое состояние не имеет предшественников.

Таким образом, показано, что если q является стартовым, то $q \in K_{s_v}$, где $v \in \mathbf{N}_3$.

Докажем утверждение (б). Пусть состояние q^1 из K_{s_1} такое, что $q^1_{111} = 1$ и $q^1_{112} = 1$, а нагрузки остальных ресничек в I -дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ равны нулю. Легко видеть, что $q^1 \notin K_{s_2} \cup K_{s_3}$. Следовательно, $K_{s_1} \not\subseteq K_{s_v}$ при всех $v \in \{2, 3\}$.

Пусть состояние q^2 из K_{s_2} такое, что $q_{11n} = 1$, а нагрузки остальных ресничек в I -дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ равны нулю. Легко видеть, что $q^2 \notin K_{s_1} \cup K_{s_3}$. Следовательно, $K_{s_2} \not\subseteq K_{s_v}$ при всех $v \in \{1, 3\}$.

Пусть состояние q^3 из K_{s_3} такое, что $q^3_{(l-1)1n} = 1$, $q^3_{l12} = 1$, $q^3_{l22} = 1$ и если $n > 2$, то еще $q^3_{l13} = 1$ и $q^3_{l23} = 1$, а нагрузки остальных ресничек в I -дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ равны нулю. Легко видеть, что $q^3 \notin K_{s_1} \cup K_{s_2}$. Следовательно, $K_{s_3} \not\subseteq K_{s_v}$ при всех $v \in \{1, 2\}$. Лемма доказана.

Лемма 4. При $b > r$, $l = 1$ и $n = 2$, состояние q из $Q(b, n, l)$ I -дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ является стартовым тогда и только тогда, когда $q \in K_{m_1}$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что если q из $Q(b, n, l)$ принадлежит классу K_{m_1} , то q является стартовым.

Покажем, что если q является стартовым, то оно принадлежит K_{m_1} . Рассмотрим все возможные случаи для нагрузок ресничек I -дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ в состоянии q , это

- (1) $q_{111} > b - r$ и $q_{112} \geq 0$;
- (2) $q_{111} \leq b - r$ и $q_{112} \geq 0$.

Состояние q в случае (2) не является стартовым, так как существует предшественник q' состояния q такой, что $q'_{111} = q_{111} + r$ и $q'_{112} = q_{112}$.

Если $b \geq 2r$, то состояние q в случае (1), очевидно, является стартовым и при этом обладает m_1 -свойством, а следовательно, $q \in K_{m_1}$.

Если $r < b < 2r$, то рассмотрим все возможные варианты нагрузок ресничек I -дерева в состоянии q в случае (1), это

- (а) $q_{111} > r$ и $q_{112} \geq 0$;
- (б) $q_{111} = r$ и $q_{112} > b - r$;
- (в) $q_{111} = r$ и $q_{112} \leq b - r$;
- (г) $b - r < q_{111} < r$ и $q_{112} > 0$;
- (д) $b - r < q_{111} < r$ и $q_{112} = 0$.

В случаях (в) и (д) состояние q не является стартовым, так как в каждом из этих случаев существует предшественник q' состояния q такой, что в случае (в) $q'_{111} = 0$ и $q'_{112} = q_{112} + r$, а в случае (д) $q'_{111} = 0$ и $q'_{112} = q_{112}$.

Легко видеть, что в случаях (а), (б) и (г) состояние q является стартовым и при этом обладает m_1 -свойством, а следовательно, $q \in K_{m_1}$. Лемма доказана.

Лемма 5. Если $b > r$, $l = 1$ и $n > 2$, то справедливы следующие утверждения:

- (а) состояние q из $Q(b, n, l)$ I -дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ является стартовым тогда и только тогда, когда $q \in K_{m_v}$ при некотором v таком, что $v \in \mathbb{N}_2$,
- (б) $K_{m_u} \not\subseteq K_{m_v}$ для любых m_u, m_v из $\{m_1, m_2\}$ при $u \neq v$.

Доказательство. Докажем утверждение (а). Нетрудно видеть, что, если $q \in Q(b, n, l)$ принадлежит классу K_{m_v} , где $v \in \mathbb{N}_2$, то q является стартовым.

Покажем, что если q является стартовым, то оно обладает хотя бы одним из m_v -свойств, а следовательно, принадлежит классу K_{m_v} , где $v \in \mathbb{N}_2$. Предположим, что состояние q является стартовым и при этом не обладает ни одним из указанных двух свойств. Тогда у q существует предшественник q' , который можно построить следующим образом. Для всех пар ресничек с номерами $11(k-1)$ и $11k$, $k > 1$ таких, что $0 < q_{11(k-1)} \leq r$ и $q_{11k} = 0$, справедливы равенства $q'_{11(k-1)} = 0$ и $q'_{11k} = q_{11(k-1)}$. Если $b \geq 2r$, то при $0 \leq q_{111} \leq r$ и $q_{112} > 0$ или при $r < q_{111} \leq b - r$ справедливо равенство $q'_{111} = q_{111} + r$. Если $b < 2r$, то при $0 \leq q_{111} \leq b - r$ и $q_{112} > 0$ справедливо равенство $q'_{111} = q_{111} + r$, а при $q_{111} = r$ и $q_{112} > 0$ справедливы равенства $q'_{111} = 0$ и $q'_{112} = q_{112} + r$. Остальные реснички I -дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ в состоянии q' имеют те же нагрузки, что и в состоянии q .

Получили противоречие, так как стартовое состояние не имеет предшественников. Таким образом, показано, что если q является стартовым, то $q \in K_{m_v}$, где $v \in \mathbb{N}_2$.

Докажем утверждение (б). Пусть состояние q^1 из K_{m_1} такое, что $q^1_{111} = b$, а остальные реснички в I -дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ имеют нулевые нагрузки. Легко видеть, что $q^1 \notin K_{m_2}$. Следовательно, $K_{m_1} \not\subseteq K_{m_2}$.

Пусть состояние q^2 из K_{m_2} такое, что $q^2_{11n} = 1$, а остальные реснички в I -дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ имеют нулевые нагрузки. Легко видеть, что $q^2 \notin K_{m_1}$. Следовательно, $K_{m_2} \not\subseteq K_{m_1}$. Лемма доказана.

Лемма 6. Если $b > r$, $l \geq 2$ и $n \geq 2$, то справедливы следующие утверждения:

- (а) состояние q из $Q(b, n, l)$ I -дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ является стартовым тогда и только тогда, когда $q \in K_{m_v}$ при некотором v таком, что $v \in N_5$;
- (б) $K_{m_u} \not\subseteq K_{m_v}$ для любых m_u, m_v из M при $u \neq v$.

Доказательство. Докажем утверждение (а). Нетрудно видеть, что если q из $Q(b, n, l)$ принадлежит классу K_{m_v} , где $v \in N_5$, то q является стартовым.

Покажем, что, если q является стартовым, то оно обладает хотя бы одним из m_v -свойств, а следовательно, принадлежит классу K_{m_v} , где $v \in N_5$. Предположим, что состояние q является стартовым и при этом не обладает ни одним из указанных пяти свойств. Тогда у q существует предшественник q' , который можно построить следующим образом. Для каждого ребра j уровня i , где $i \in N_l$ и $j \in N_{2i-1}$, для всех пар ресничек с номерами $ij(k-1)$ и ijk , $k > 1$, таких, что $0 < q_{ij(k-1)} \leq 2^{l-i}r$ и $q_{ijk} = 0$, справедливы равенства $q'_{ij(k-1)} = 0$ и $q'_{ijk} = q_{ij(k-1)}$. Если $b \geq 2r$, то при $0 \leq q_{111} \leq 2^{l-1}r$ и $q_{112} > 0$ или при $2^{l-1}r < q_{111} \leq 2^{l-1}(b-r)$ справедливо равенство $q'_{111} = q_{111} + 2^{l-1}r$. Если $b < 2r$, то при $0 \leq q_{111} \leq 2^{l-1}(b-r)$ и $q_{112} > 0$ справедливо равенство $q'_{111} = q_{111} + 2^{l-1}r$, а при $q_{111} = 2^{l-1}r$ и $q_{112} > 0$ — равенства $q'_{111} = 0$ и $q'_{112} = q_{112} + 2^{l-1}r$.

Для каждой тройки инцидентных ребер, состоящей из ребра j уровня i и ребер j' и j'' уровня $i+1$, где $i \in N_{l-1}$ и $j \in N_{2i-1}$, такой, что

- (1) $1 < q_{ijn} \leq 2^{l-(i+1)}r$, $q_{(i+1)j'1} = 0$ и $q_{(i+1)j''1} = 0$, верны равенства $q'_{ijn} = 0$, $q'_{(i+1)j'1} = 1$ и $q'_{(i+1)j''1} = q_{ijn} - 1$;

- (2) $0 < q_{ijn} \leq 2^{l-(i+1)}r$ и $q_{(i+1)j'1} = 0$, верны равенства $q'_{ijn} = 0$ и $q'_{(i+1)j'1} = q_{ijn}$ тогда и только тогда, когда, начиная с реснички с номером $(i+1)j'2$, существует цепочка из m , где $m \in \{0, 1, \dots, [(n(l-i)-2)/3]\}$, подряд идущих (в направлении к листьям) μ -троек с соответствующими ребрам, которым они принадлежат, параметрами до реснички с номером $i_1j_1k_1$ (не включая последнюю), и такая, что при $i_1 = i + 1$ $(3m+2)/n$ $[k_1 = 3m+2-n[(3m+1)/n]$ выполняется хотя бы одно из следующих условий:

- (а) $q_{i_1j_1k_1} > 2^{l-i_1}r$,
- (б) $q_{i_1j_1k_1} = 2^{l-i_1}r$ и при $k_1 < n$ верно неравенство $q_{i_1j_1(k_1+1)} > 2^{l-i_1}(b-r)$, а при $k_1 = n$ и $i_1 < l$ выполнено неравенство $q_{(i_1+1)j'_1} > 2^{l-(i_1+1)}(b-r)$, где ребро j'_1 уровня i_1+1 инцидентно ребру j_1 уровня i_1 ,
- (в) $0 < q_{i_1j_1k_1} < 2^{l-i_1}r$ и при $k_1 < n$ справедливо неравенство $q_{i_1j_1(k_1+1)} > 0$, а при $k_1 = n$ и $i_1 < l$ выполняется одно из следующих условий (ребра j'_1 и j''_1 уровня i_1+1 инцидентны ребру j_1 уровня i_1): если $q_{i_1j_1k_1} \neq 2^{l-(i_1+1)}r$, то $q_{(i_1+1)j'_1} > 0$ и $q_{(i_1+1)j''_1} > 0$, а если $q_{i_1j_1k_1} = 2^{l-(i_1+1)}r$, то при $b \geq 2r$ справедливо неравенство $q_{(i_1+1)j'_1} > 2^{l-(i_1+1)}(b-r)$, а при $r < b < 2r$ либо $q_{(i_1+1)j'_1} > 2^{l-(i_1+1)}(b-r)$ и $q_{(i_1+1)j''_1} > 2^{l-(i_1+1)}(b-r)$, либо $q_{(i_1+1)j'_1} > 2^{l-(i_1+1)}r$, либо выполняется хотя бы одно из следующих условий: при $q_{(i_1+1)j'_1} = 2^{l-(i_1+1)}r$ верно неравенство $q_{(i_1+1)j'_2} > 2^{l-(i_1+1)}(b-r)$, а при $2^{l-(i_1+1)}(b-r) < q_{(i_1+1)j'_1} < 2^{l-(i_1+1)}r$ — неравенство $q_{(i_1+1)j'_2} > 0$;
- (3) $2^{l-(i+1)}r < q_{ijn} \leq 2^{l-i}r$, $q_{(i+1)j'1} = 0$ и $0 \leq q_{(i+1)j''1} \leq 2^{l-(i+1)}(b-r)$, справедливы равенства $q'_{ijn} = 0$, $q'_{(i+1)j'1} = q_{ijn} - 2^{l-(i+1)}r$ и $q'_{(i+1)j''1} = q_{(i+1)j''1} + 2^{l-(i+1)}r$.

Остальные реснички I -дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ в состоянии q' имеют те же нагрузки, что и в состоянии q .

Получили противоречие, так как стартовое состояние не имеет предшественников.

Таким образом, показано, что если q является стартовым, то $q \in K_{m_v}$, где $v \in N_5$.

Докажем утверждение (б). Пусть состояние q^1 из K_{m_1} такое, что $q_{111}^1 = 2^{l-1}b$, а нагрузки остальных ресничек в I -дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ равны нулю. Легко видеть, что $q^1 \notin \bigcup_{v \in N_5 \setminus \{1\}} K_{m_v}$. Следовательно, $K_{m_1} \not\subseteq K_{m_v}$ при всех $v \in N_5 \setminus \{1\}$.

Пусть состояние q^2 из K_{m_2} такое, что $q_{11n}^2 = 1$, а нагрузки остальных ресничек в I -дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ равны нулю. Легко видеть, что $q^2 \notin \bigcup_{v \in N_5 \setminus \{2\}} K_{m_v}$. Следовательно, $K_{m_2} \not\subseteq K_{m_v}$ при всех $v \in N_5 \setminus \{2\}$.

Пусть состояние q^3 из K_{m_3} такое, что $q_{(l-1)1n}^3 = 1$, $q_{l12}^3 = b$, $q_{l22}^3 = b$, а нагрузки остальных ресничек в I -дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ равны нулю. Легко видеть, что $q^3 \notin \bigcup_{v \in N_5 \setminus \{3\}} K_{m_v}$. Следовательно, $K_{m_3} \not\subseteq K_{m_v}$ при всех $v \in N_5 \setminus \{3\}$.

Пусть состояние q^4 из K_{m_4} такое, что $q_{(l-1)1(n-1)}^4 = 1$, $q_{(l-1)1n}^4 = 2r$, $q_{l12}^4 = b$, $q_{l21}^4 = b$, а нагрузки остальных ресничек в I -дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ равны нулю. Легко видеть, что $q^4 \notin \bigcup_{v \in N_5 \setminus \{4\}} K_{m_v}$. Следовательно, $K_{m_4} \not\subseteq K_{m_v}$ при всех $v \in N_5 \setminus \{4\}$.

Пусть состояние q^5 из K_{m_5} такое, что $q_{(l-1)1(n-1)}^5 = 1$, $q_{(l-1)1n}^5 = r$, $q_{l12}^5 = b$, $q_{l21}^5 = b$, а нагрузки остальных ресничек в I -дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ равны нулю. Легко видеть, что $q^5 \notin \bigcup_{v \in N_4} K_{m_v}$. Следовательно, $K_{m_5} \not\subseteq K_{m_v}$ при всех $v \in N_4$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Ресничка с номером k ребра j уровня i , где $i \in N_l$, $j \in N_{2^{i-1}}$ и $k \in N_n$, может иметь нагрузку q_{ijk} такую, что $q_{ijk} \in \{0\} \cup N_{2^{l-i}b}$. Значит, число всевозможных конфигураций нагрузок ребра j уровня i равно $(2^{l-i}b + 1)^n$. Так как число ребер на уровне i равно 2^{i-1} , число всевозможных конфигураций нагрузок по всем ребрам уровня i равно $((2^{l-i}b + 1)^n)^{2^{i-1}}$. Так как I -дерево $D^{-1}(b, r, n, l)$ имеет l уровней, число всевозможных состояний этого I -дерева равно $\prod_{i=1}^l (2^{l-i}b + 1)^{2^{i-1}n}$. Теорема доказана.

Утверждение теоремы 2 следует из лемм 1, 2 и 3.

Утверждение теоремы 3 следует из лемм 4, 5 и 6.

Доказательство теоремы 4. Положим $b = r$. Из теоремы 2 вытекает неравенство $|St(b, r, n, l)| \geq |K_{s_1}|$. Так как для всякой реснички с номером ijk , где $i \in N_l \setminus \{1\}$, $j \in N_{2^{i-1}}$ и $k \in N_n$, возможны $2^{l-i}b + 1$ варианта ее нагрузки, для всех ресничек ребра первого уровня, кроме ресничек с номерами 111 и 112, возможны $2^{l-1}b + 1$ варианта их нагрузок, а для ресничек с номерами 111 и 112 этого ребра возможны $2^{l-1}b$ варианта их нагрузок, мощность класса K_{s_1} равна $(2^{l-1}b)^2(2^{l-1}b + 1)^{n-2} \prod_{i=2}^l (2^{l-i}b + 1)^{2^{i-1}n}$. По теореме 1 число всех состояний I -дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ равно $\prod_{i=1}^l (2^{l-i}b + 1)^{2^{i-1}n}$ и число стартовых состояний I -дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ не превосходит числа всех состояний этого I -дерева, поэтому справедливы оценки

$$\frac{(2^{l-1}b)^2(2^{l-1}b + 1)^{n-2} \prod_{i=2}^l (2^{l-i}b + 1)^{2^{i-1}n}}{\prod_{i=1}^l (2^{l-i}b + 1)^{2^{i-1}n}} \leq \frac{|St(b, r, n, l)|}{|Q(b, n, l)|} \leq 1.$$

Отсюда получаем, что

$$\left(\frac{2^{l-1}b}{2^{l-1}b + 1} \right)^2 \leq \frac{|St(b, r, n, l)|}{|Q(b, n, l)|} \leq 1.$$

Пусть $b \geq 2r$. Из теоремы 3 следует, что $|St(b, r, n, l)| \geq |K_{m_1}|$. Мощность класса K_{m_1} равна $2^{l-1}r(2^{l-1}b + 1)^{n-1} \prod_{i=2}^l (2^{l-i}b + 1)^{2^{i-1}n}$, так как для всякой реснички с номером ijk , где $i \in \mathbb{N}_l \setminus \{1\}$, $j \in \mathbb{N}_{2^{i-1}}$ и $k \in \mathbb{N}_n$, возможны $2^{l-i}b + 1$ варианта ее нагрузки, для всех ресничек ребра первого уровня, кроме реснички с номером 111, возможны $2^{l-1}b + 1$ варианта их нагрузок, а для реснички с номером 111 этого ребра возможны $2^{l-1}b - 2^{l-1}(b - r) = 2^{l-1}r$ варианта ее нагрузки. Так как по теореме 1 число всех состояний I -дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ равно $\prod_{i=1}^l (2^{l-i}b + 1)^{2^{i-1}n}$ и число стартовых состояний I -дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ не превосходит числа всех состояний этого I -дерева, справедливы оценки

$$\frac{2^{l-1}r(2^{l-1}b + 1)^{n-1} \prod_{i=2}^l (2^{l-i}b + 1)^{2^{i-1}n}}{\prod_{i=1}^l (2^{l-i}b + 1)^{2^{i-1}n}} \leq \frac{|St(b, r, n, l)|}{|Q(b, n, l)|} \leq 1.$$

Отсюда получаем, что

$$\frac{2^{l-1}r}{2^{l-1}b + 1} \leq \frac{|St(b, r, n, l)|}{|Q(b, n, l)|} \leq 1.$$

Пусть $r < b < 2r$. Из теоремы 3 следует, что $|St(b, r, n, l)| \geq |K_{m_1}|$. Найдем мощность класса K_{m_1} . Для всякой реснички с номером ijk , где $i \in \mathbb{N}_l \setminus \{1\}$, $j \in \mathbb{N}_{2^{i-1}}$ и $k \in \mathbb{N}_n$, возможны $2^{l-i}b + 1$ варианта ее нагрузки, для всех ресничек ребра первого уровня, кроме ресничек с номерами 111 и 112, возможны $2^{l-1}b + 1$ варианта их нагрузок, для ресничек с номерами 111 и 112 этого ребра возможны следующие числа вариантов их нагрузок (где через q_{111} и q_{112} обозначены нагрузки ресничек 111 и 112, соответственно, в состоянии q , обладающем m_1 -свойством):

- (а) $2^{l-1}(2r - b) - 1$ для реснички с номером 111 и $2^{l-1}b$ для реснички с номером 112 (в случае $2^{l-1}(b - r) < q_{111} < 2^{l-1}r$ и $q_{112} > 0$),
- (б) 1 для реснички с номером 111 и $2^{l-1}r$ для реснички с номером 112 (в случае $q_{111} = 2^{l-1}r$ и $q_{112} > 2^{l-1}(b - r)$),
- (в) $2^{l-1}(b - r)$ для реснички с номером 111 и $2^{l-1}b + 1$ для реснички с номером 112 (в случае $q_{111} > 2^{l-1}r$).

Таким образом, общее число вариантов нагрузок ресничек с номерами 111 и 112 равно

$$(2^{l-1}(2r - b) - 1)2^{l-1}b + 2^{l-1}r + 2^{l-1}(b - r)(2^{l-1}b + 1) = 2^{l-1}r2^{l-1}b.$$

Из вышесказанного следует, что

$$|K_{m_1}| = 2^{l-1}r2^{l-1}b(2^{l-1}b + 1)^{n-2} \prod_{i=2}^l (2^{l-i}b + 1)^{2^{i-1}n}.$$

По теореме 1 число состояний I -дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ равно $\prod_{i=1}^l (2^{l-i}b + 1)^{2^{i-1}n}$ и число стартовых состояний I -дерева $D^{-1}(b, r, n, l)$ не превосходит числа всех состояний этого I -дерева, поэтому справедливы оценки

$$\frac{2^{l-1}r2^{l-1}b(2^{l-1}b + 1)^{n-2} \prod_{i=2}^l (2^{l-i}b + 1)^{2^{i-1}n}}{\prod_{i=1}^l (2^{l-i}b + 1)^{2^{i-1}n}} \leq \frac{|St(b, r, n, l)|}{|Q(b, n, l)|} \leq 1.$$

Отсюда получаем, что

$$\frac{(2^{l-1})^2 r b}{(2^{l-1} b + 1)^2} \leq \frac{|St(b, r, n, l)|}{|Q(b, n, l)|} \leq 1.$$

Теорема доказана.

Автор выражает глубокую благодарность В. Б. Кудрявцеву и А. Г. Чучалину за постановку задачи и научное руководство.

Список литературы

1. Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С., *Введение в теорию автоматов*. Наука, Москва, 1985.
2. Гераськина Ю. Г., Об одной автоматной модели в биологии. *Дискретная математика* (2007) **19**, №3, 122–139.
3. Гераськина Ю. Г., Модель процесса дыхания живых организмов. *Интеллектуальные системы* (2003) **8**, №1/4, 429–456.
4. Гераськина Ю. Г., Модель самоочищения легочных структур. *Интеллектуальные системы* (2002–2003) **7**, №1/4, 41–54.

Статья поступила 21.03.2008.