Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Майлыбаева, Порядок коммуникационной сложности PIR-протоколов, *Дискрет. матем.*, 2008, том 20, выпуск 3, 136–146

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1020>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 14:55:06

Порядок коммуникационной сложности PIR-протоколов

© 2008 г. Г. А. Майлыбаева

Протоколы извлечения информации без раскрытия запроса (PIR-протоколы) позволяют пользователю получить желаемый бит информации из базы данных, копия которой хранится на нескольких несообщающихся серверах таким образом, что администраторы базы данных ничего не узнают о номере бита который запрашивал пользователь. Коммуникационная сложность протокола определяется как суммарное число битов, которыми обмениваются пользователь и серверы во время протокола. В работе найден порядок коммуникационной сложности PIR-протоколов в зависимости от степени существенности функций ответов серверов.

1. Введение

Рассмотрим протокол с $k + 1$ участником: пользователем и k несообщающимися серверами, $k \geq 1$, причем каждый из серверов хранит один и тот же булев вектор $x = (x_0, \dots, x_{n-1})$ длины n , базу данных. Пользователь желает узнать значение i -го бита x_i этого вектора так, чтобы номер бита i не стал известен ни одному из серверов. Протокол, который позволяет это делать, называется протоколом доступа к данным без раскрытия запроса и состоит из следующих шагов.

- (1) Пользователь имеет номер бита i и вырабатывает случайное число r . По числам i и r пользователь вычисляет с помощью специальной функции, называемой функцией запросов, k чисел q^j и посылает j -му серверу запрос q^j .
- (2) Каждый из k серверов по полученному запросу q^j и базе данных x с помощью специальной функции ответов вычисляет вектор a^j и посылает его пользователю.
- (3) Пользователь по числам i , r и k ответам серверов a^j вычисляет с помощью реконструирующей функции нужный бит x_i .

Первое требование к протоколу состоит в том, что ни один из серверов по своему запросу q^j не может понять, с помощью какого бита i этот запрос был порожден. Это требование называется требованием защищенности. Второе требование к протоколу, называемое требованием корректности, заключается в том, что пользователь по ответам серверов правильно восстанавливает бит x_i . Предполагается, что всем участникам протокола, и пользователю и серверам, известны функции запросов, ответов и реконструирующая функция, но серверам не известно случайное число r и, разумеется, не известен номер бита i .

Понятие такого протокола впервые было введено в [1] под названием Private Information Retrieval, поэтому мы в дальнейшем будем называть такие протоколы PIR-протоколами.

Суммарная длина в битах запросов к серверам и ответов серверов называется коммуникационной сложностью PIR-протокола. Обозначим $C(I)$ коммуникационную сложность PIR-протокола I .

Известны следующие результаты. В [2] для каждого натурального $k \geq 2$ получен PIR-протокол с коммуникационной сложностью $n^{O(\lg k / (k \lg k))}$. Для $k = 2$ сложность построенного PIR-протокола равна $O(n^{1/3})$. На данный момент, коммуникационная сложность этого протокола является наилучшей для $k = 2$.

В [3] получен PIR-протокол для $k = 3$ серверов с коммуникационной сложностью $O(n^{10^{-7}})$. На данный момент, коммуникационная сложность этого протокола является наилучшей для 3-х серверов.

В [4] показано, что если функции ответов всех серверов линейные и длина в битах ответа любого сервера равна a , то длина запроса должна быть не меньше $c_1 n 2^{-a}$, где c_1 — некоторая постоянная. Также было показано, что сложность любого PIR-протокола для 2-х серверов, функции ответов которого являются линейными и пользователь использует ровно a бит из ответа каждого сервера, не превышает $c_2 n^{1/a+1}$, где c_2 — некоторая постоянная. Для доказательства нижних оценок авторы преобразовывают произвольный PIR-протокол в LDC-протокол (Locally Decodable Code) и приводят доказательство оценки для LDC-протокола.

В [6] показано, что если пользователь берет из ответа каждого сервера не более a бит, то длина запроса должна быть не меньше $c_3 n 2^{-6a}$, где c_3 — некоторая постоянная. Для доказательства нижней оценки авторы преобразовывают произвольный PIR-протокол в квантовый PIR-протокол и приводят доказательство оценки для квантового PIR-протокола.

В [5] получена следующая нижняя оценка. Если функция запросов линейна и ответ любого сервера составляет ровно один бит, то длина запроса к каждому серверу должна быть не меньше $n - 1$ бит. Эта оценка является точной. В той же работе построен PIR-протокол с такой же коммуникационной сложностью.

В [7] предыдущий результат был улучшен путем отказа от линейности функции запросов. А именно, было показано, что если каждый сервер посылает в ответ пользователю ровно один бит, то длина запроса должна быть не менее $n - 2$.

Для того чтобы сформулировать следующий результат, дадим некоторые определения. Для любого натурального n положим $E_n = \{0, 1, \dots, n - 1\}$.

Определение 1. Пусть k, n, s, t, a — произвольные натуральные числа. Пусть

$$I = \langle Q, A^0, A^1, \dots, A^{k-1}, R \rangle$$

— PIR-протокол для k серверов для базы данных длины n с датчиком случайных чисел длины s с длиной запроса t и длиной ответа a , тогда PIR-протокол I называется линейным, если для любого j , $0 \leq j \leq k - 1$, функция $A^j: E_2^m \rightarrow E_2^a$ линейна по каждой переменной, то есть для произвольных $b_1, \dots, b_{p-1}, b, c, b_{p+1}, \dots, b_m \in \{0, 1\}$

$$\begin{aligned} A^j(b_1, \dots, b_{p-1}, b + c, b_{p+1}, \dots, b_m) &= A^j(b_1, \dots, b_{p-1}, b, b_{p+1}, \dots, b_m) \\ &+ A^j(b_1, \dots, b_{p-1}, c, b_{p+1}, \dots, b_m). \end{aligned}$$

Пусть l — произвольное натуральное число. PIR-протокол I называется l -мульти-линейным, если для любого j , $0 \leq j \leq k - 1$, функция $A^j: (E_2^l)^{m/l} \rightarrow E_2^a$ линейна по

каждой переменной, то есть для произвольных $b_1, \dots, b_{p-1}, b, c, b_{p+1}, \dots, b_{m/l}$ из $\{0, 1\}^l$

$$A^j(b_1, \dots, b_{p-1}, b + c, b_{p+1}, \dots, b_{m/l}) = A^j(b_1, \dots, b_{p-1}, b, b_{p+1}, \dots, b_{m/l}) + A^j(b_1, \dots, b_{p-1}, c, b_{p+1}, \dots, b_{m/l}).$$

Пусть l — произвольное натуральное число. PIR-протокол I называется l -аффинным, если для любого j , $0 \leq j \leq k-1$, функция $A^j: (E_2^l)^{m/l} \rightarrow E_2^a$ линейна с параметром $0^l = (0, \dots, 0) \in \{0, 1\}^l$ по каждой переменной, то есть для произвольных $b_1, \dots, b_{p-1}, b, c, b_{p+1}, \dots, b_{m/l} \in \{0, 1\}^l$

$$A^j(b_1, \dots, b_{p-1}, b + c, b_{p+1}, \dots, b_{m/l}) = A^j(b_1, \dots, b_{p-1}, b, b_{p+1}, \dots, b_{m/l}) + A^j(b_1, \dots, b_{p-1}, c, b_{p+1}, \dots, b_{m/l}) + A^j(b_1, \dots, b_{p-1}, 0^l, b_{p+1}, \dots, b_{m/l}).$$

В [8] показано, что любой линейный PIR-протокол для k серверов имеет сложность не менее $c_4 \sqrt{n/(2k)}$, где c_4 — некоторая постоянная. Пусть k, l — произвольные натуральные числа и ε — произвольное положительное число. Тогда если I произвольный l -мультилинейный или l -аффинный PIR-протокол для k серверов, то почти для всех n

$$C(I) \geq (1/(k-1)^{1/(l+1)} - 1)n^{1/(l+1)}.$$

В [9] получена нижняя оценка для билинейных, основанных на группах (group based) PIR-протоколов с двумя серверами. Реконструирующая функция билинейных PIR-протоколов является суммой бит ответов серверов, а то, что протоколы основаны на группах означает, что серверы представляют базу данных в виде функции, действующей в конечной группе, и позволяют пользователю запросить значение этой функции на некотором элементе группы, используя схему разделения секрета в этой группе. А именно, показано, что для данного класса PIR-протоколов

$$C(I) \geq \Omega(n^{1/3}).$$

В данной работе получен результат для более широкого класса PIR-протоколов. А именно, во-первых, в отличие от всех рассмотренных выше результатов, мы не предполагаем, что длины ответов серверов должны быть равны между собой, во-вторых, мы не предполагаем, что пользователь использует из ответа каждого из серверов одинаковое число битов. В-третьих, и это самое главное отличие, нижняя оценка, полученная в данной работе, не требует линейности ни функции запросов, ни функции ответов, а также не накладывает никаких ограничений на реконструирующую функцию. Также заметим, что для доказательства нижней оценки, авторы статьи [4] используют сведение PIR-протоколов к LDC-протоколам, а авторы статьи [6] используют сведение PIR-протоколов к квантовым PIR-протоколам. В данной статье мы доказываем нижнюю оценку напрямую для PIR-протоколов.

Определим степень существенности функции ответов сервера как максимальное число битов базы данных, которые может использовать сервер для получения одного бита ответа. В работе найден порядок коммуникационной сложности PIR-протоколов в зависимости от степени существенности функций ответов серверов.

Автор благодарен Э. Э. Гасанову за постановку задачи.

2. Основные понятия

Формальное определение PIR-протокола было введено в [10, 11].

Для натурального n введем обозначение

$$E_n = \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Пусть $k, n, s, p^0, \dots, p^{k-1}$ — натуральные числа, $p = p^0 + \dots + p^{k-1}$. Пусть на множестве

$$B = \{(i, r), i \in E_n, r \in E_s\}$$

задано вероятностное пространство $\langle B, 2^B, \mathbf{P} \rangle$, где $\mathbf{P}(i, r) = 1/(ns)$ для любых $i \in E_n, r \in E_s$. Тогда (k, n, s, p) PIR-протоколом называется набор из $k+2$ функций $I = \langle Q, A^0, \dots, A^{k-1}, R \rangle$, где $Q, A^0, \dots, A^{k-1}, R$ — некоторые отображения, $Q: E_k \times E_n \times E_s \rightarrow E_s, A^j: E_s \times \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^{p^j}, j \in E_k, R: E_n \times E_s \times \{0, 1\}^p \rightarrow \{0, 1\}$ такие, что выполнены следующие два условия.

Условие корректности: для любых $i \in E_n, r \in E_s$

$$R(i, r, A^0(Q(0, i, r), x), \dots, A^{k-1}(Q(k-1, i, r), x)) = x_i.$$

Условие защищенности: для любых $q \in E_s, t \in E_k, i, j \in E_n$

$$\mathbf{P}(Q(t, i, r) = q) = \mathbf{P}(Q(t, j, r) = q).$$

Здесь и везде далее в статье k — число серверов, n — длина базы данных $x = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$, s — параметр датчика случайных чисел, точнее, датчик случайных чисел дает равновероятно числа из множества E_s , p^j — число битов в ответе j -го сервера, A^j — функция ответа j -го сервера, $j \in E_k, R$ — реконструирующая функция.

Содержательно протокол $I = \langle Q, A^0, \dots, A^{k-1}, R \rangle$ состоит из следующих шагов.

Пользователь U , имея запрос i , вырабатывает случайное число $r \in E_s$, для каждого $j \in E_k$ вычисляет $q^j = Q(j, i, r)$ и посылает q^j серверу S_j .

Каждый сервер $S_j, j \in E_k$, вычисляет $a^j = (a_0^j, \dots, a_{p^j-1}^j) = A^j(q^j, x)$ и посылает вектор a^j пользователю.

Пользователь U вычисляет $x_i = R(i, r, a^0, \dots, a^{k-1})$.

Если d — вещественное число, то через $\lfloor d \rfloor$ обозначим наименьшее целое не меньшее, чем d , а через $\lceil d \rceil$ — наибольшее целое не большее, чем d .

Величина

$$C(I) = \lceil k \rceil \log_2 s + p$$

называется коммуникационной сложностью протокола I и представляет собой число битов, переданных в процессе протокола.

Условие корректности гарантирует, что пользователь получит нужный бит базы данных, а условие защищенности, что ни один из серверов по числу q , которое он получил, не сможет понять, какой бит интересует пользователя.

Основной целью исследований в этой области является построение для заданного числа серверов k , заданной длины базы данных n и максимального значения датчика случайных чисел s PIR-протокола с минимальной коммуникационной сложностью.

Степенью существенности булевой функции $f(x_0, \dots, x_{l-1})$ назовем число переменных, от которых она существенно зависит, и обозначим его через $S(f)$.

Степенью существенности булевой вектор-функции

$$F(x_0, \dots, x_{l-1}) = (f_0(x_0, \dots, x_{l-1}), \dots, f_{m-1}(x_0, \dots, x_{l-1}))$$

назовем число

$$S(F) = \max_{0 \leq t \leq m-1} S(f_t).$$

Пусть $A^j(q, x) = (A_0^j(q, x), \dots, A_{p^j-1}^j(q, x))$. Для функций $A^j(q, x)$, $A_l^j(q, x)$, $l \in E_{p^j}$, $j \in E_k$, $q \in E_s$, также будем использовать следующую запись:

$$A^j(q, x) = A^j(q)(x), \quad A_l^j(q, x) = A_l^j(q)(x),$$

где $A^j(q): \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^{p^j}$ — булева вектор-функция, а $A_l^j(q): \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ — булева функция n переменных.

Степенью существенности функции ответов j -го сервера

$$A^j: E_s \times \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^{p^j}, \quad j \in E_k,$$

назовем число

$$S(A^j) = \max_{q \in E_s} S(A^j(q)).$$

Обозначим $\mathcal{F}(k, n, s)$ класс всех (k, n, s, p) PIR-протоколов, где $p > 0$. Пусть $\mathcal{A}$ — некоторое множество PIR-протоколов. Положим также

$$C(k, n, s, \mathcal{A}) = \min\{C(I): I \in \mathcal{A} \cap \mathcal{F}(k, n, s)\},$$

$$C(k, n, \mathcal{A}) = \min_{s \in \mathbb{N}} C(k, n, s, \mathcal{A}).$$

Для натурального d обозначим через $\mathcal{A}_d$ множество всех PIR-протоколов таких, что степень существенности функции ответов каждого сервера не превосходит d .

Теорема 1. Для любых натуральных k, n и d таких, что $d \leq n^{2k-2/2k-1}$,

$$C(k, n, 2^{(k-1)[d^{1/2k-2}]} , \mathcal{A}_d) \leq (k^2 - k)d^{1/2k-2} + 4kn/d.$$

Теорема 2. Для любых натуральных k, n, s, d

$$C(k, n, s, \mathcal{A}_d) \geq k \log_2 s + n/d.$$

Следствие 1. Если натуральные числа k, n, d таковы, что $d \leq n^{2k-2/2k-1}$ при $n \rightarrow \infty$, то при $n \rightarrow \infty$

$$C(k, n, \mathcal{A}_d) \asymp n/d.$$

3. Верхняя оценка

Рассмотрим класс PIR-протоколов I^{pol} для $k \geq 2$ серверов, построенных по алгоритму, описанному в [2]. Используя общую балансирующую технику, описанную в [1], для любых натуральных n и k построим PIR-протокол с любой, наперед заданной степенью существенности функции ответов, не превосходящей $n^{2k-2/2k-1}$.

Пусть m — минимальное натуральное число такое, что $\binom{m}{2k-1} \geq n$. Для произвольного вектора $y = (y_0, \dots, y_{m-1}) \in E_2^m$ обозначим $H(y_0, \dots, y_{m-1}) = |\{l \in E_m: y_l = 1\}|$ число единиц в векторе y . Для любого $i \in E_n$ положим $E(i) = (E_0(i), \dots, E_{m-1}(i)) \in E_2^m$, причем $H(E(i)) = 2k - 1$ и $E(i_1) \neq E(i_2)$ для любых $i_1, i_2 \in E_n$ таких, что $i_1 \neq i_2$. По выбору m ясно, что всегда найдется n векторов, удовлетворяющих этим условиям.

Протокол проходит следующим образом.

Шаг 1. Пользователь хочет узнать значение x_i , $i \in E_n$, выбирает случайные векторы $y_j = (y_{j,0}, \dots, y_{j,m-1}) \in E_2^m$, $j \in E_k$ такие, что

$$\sum_{j \in E_k} y_j = \left(\sum_{j \in E_k} y_{j,0}, \dots, \sum_{j \in E_k} y_{j,m-1} \right) = (E_0(i), \dots, E_{m-1}(i)) = E(i),$$

и посылает серверу S_j векторы y_l , $l \in E_k \setminus \{j\}$.

Шаг 2. Сервер S_j , $j \in E_k$ по базе данных $x = (x_0, \dots, x_{n-1})$ строит многочлен, коэффициентами которого являются биты базы данных

$$P_x(Y_0, \dots, Y_{m-1}) = \sum_{i \in E_n} x_i p_i(Y_0, \dots, Y_{m-1}),$$

где $Y_0, \dots, Y_{m-1} \in E_2$. Многочлены $p_0, \dots, p_{n-1}$ определяются рекурсивно следующим образом.

Для каждого $i \in E_n$ пусть $B_i = \{l: E_l(i) = 1\}$ — множество позиций в векторе $E(i)$, в которых стоят единицы. Тогда для любого $i \in E_n$

$$p_i(Y_0, \dots, Y_{m-1}) = \prod_{h \in B_i} Y_h.$$

Ясно, что для любых $i, g \in E_n$

$$p_i(E(g)) = \begin{cases} 1, & \text{если } g = i, \\ 0, & \text{если } g \neq i. \end{cases}$$

Тогда для любого $i \in E_n$

$$P_x(E(i)) = \sum_{g \in E_n} x_g p_g(E(i)) = x_i.$$

Определим многочлен $q(\tilde{Y})$ от kt переменных степени $2k-1$, полагая

$$q(\tilde{Y}) = q(\{Y_{j,b}\}_{j \in E_k, b \in E_m}) = P_x \left(\sum_{j \in E_k} Y_{j,0}, \dots, \sum_{j \in E_k} Y_{j,m-1} \right).$$

Для произвольного $i \in E_n$ рассмотрим многочлен

$$q_i(\tilde{Y}) = q_i(\{Y_{j,b}\}_{j \in E_k, b \in E_m}) = p_i \left(\sum_{j \in E_k} Y_{j,0}, \dots, \sum_{j \in E_k} Y_{j,m-1} \right)$$

от kt переменных степени $2k-1$. Ясно, что

$$q(\tilde{Y}) = \sum_{i \in E_n} x_i q_i(\tilde{Y}).$$

Пусть $B_i = \{b_1^i, \dots, b_{2k-1}^i\}$, тогда любой одночлен q_i имеет вид $Y_{j_1, b_1^i} \dots Y_{j_{2k-1}, b_{2k-1}^i}$, где $j_1, \dots, j_{2k-1} \in E_k$.

Пусть $Y_{j_1, b_1^i} \dots Y_{j_{2k-1}, b_{2k-1}^i}$ — произвольный одночлен многочлена q_i . Рассмотрим набор $\{j_1, \dots, j_{2k-1}\}$. Поскольку в наборе ровно $2k - 1$ элементов, каждый из которых принимает значение $j_1, \dots, j_{2k-1} \in E_k$, существует число $j \in E_k$, которое встречается в этом наборе не более чем $\lfloor 2k - 1/k \rfloor = 1$ раз. Учитывая, что серверу S_j известны значения всех переменных вида $Y_{l, b}, l \in E_k, b \in E_m$ и неизвестны значения переменных $Y_{j, 0}, \dots, Y_{j, m-1}$, получаем, что сервер S_j не знает значение не более 1 переменной из этого одночлена. Поставим этот одночлен в соответствие серверу S_j . Проведем эту операцию с каждым одночленом q_i

Обозначим сумму всех одночленов q_i , поставленных в соответствие серверу S_j через q_i^j . Тогда многочлен, соответствующий серверу S_j , равен $q^j = \sum_{i \in E_n} x_i q_i^j$. Заметим, что $q = \sum_{j \in E_k} q^j$ и каждый одночлен q принадлежит ровно одному из многочленов q^j .

Пусть $\tilde{Y}' = \{Y_{l, b}\}_{l \in E_m, b \in E_k \setminus \{j\}}$ — переменные, значения которых известны серверу S_j , тогда многочлен q_i^j , соответствующий серверу S_j , имеет вид

$$q_i^j(\tilde{Y}) = q_i^j(\tilde{Y}) + q_i^j(\tilde{Y}'),$$

где $j \in \{j_1, \dots, j_{2k-1}\}$ для любого одночлена $Y_{j_1, b_1^i} \dots Y_{j_{2k-1}, b_{2k-1}^i}$ многочлена $q_i^j(\tilde{Y})$, и многочлен $q_i^j(\tilde{Y}')$ зависит от переменных $\tilde{Y}'$, значения которых известны серверу S_j .

Сервер S_j , подставив значения переменных, которые ему известны, в многочлен q^j , получает линейный многочлен $\hat{q}^j$ от переменных $Y_{j, b}, b \in E_m$ вида

$$\hat{q}^j = t_0 Y_{j, 0} + \dots + t_{m-1} Y_{j, m-1} + t_m,$$

где $t_l = t_l(x, \tilde{Y}'), l \in E_{m+1}$, причем t_m имеет вид

$$t_m = \sum_{i \in E_n} x_i q_i^j(\tilde{Y}').$$

До настоящего момента мы в точности повторили протокол, описанный в [2], для случая $H(E(i)) = 2k - 1$, где $i \in E_n$. Для уменьшения степени существенности функции ответов серверов, произведем небольшую модификацию протокола.

Пусть $\lfloor n/m \rfloor = n'$. Представим t_m в виде суммы $t_m = t'_0 + \dots + t'_m$, где для любого l , $0 \leq l \leq m - 1$,

$$t'_l = \sum_{ln' \leq i < (l+1)n'} x_i q_i^j(\tilde{Y}'), \quad t'_m = \sum_{mn' \leq i < n} x_i q_i^j(\tilde{Y}').$$

Определим функцию ответов $A^j(q, x)$ сервера S_j , $j \in E_k$, полагая

$$A^j(q, x) = (t_0(x, \tilde{Y}'), \dots, t_{m-1}(x, \tilde{Y}'), t'_0(x, \tilde{Y}'), \dots, t'_m(x, \tilde{Y}')).$$

Шаг 3. Пользователю известны значения всех переменных $Y_{j, 0}, \dots, Y_{j, m-1}$, $j \in E_k$, он может вычислить

$$\sum_{j \in E_k} q^j(y_{j, 0}, \dots, y_{j, m-1}) = P_x \left(\sum_{j \in E_k} y_{j, 0}, \dots, \sum_{j \in E_k} y_{j, m-1} \right) = P_x(E(i)) = x_i.$$

Коммуникационная сложность протокола

$$C(I^{pol}) \leq k(k-1)m + k(2m+1) = k^2m + 2km + k.$$

Положим $m = \lceil n^{1/2k-1} \rceil$, такого числа переменных достаточно для выполнения неравенства $\binom{m}{2k-1} \geq n$. Тогда

$$C(I^{pol}) \leq k^2 m + 2km + k \leq k^2 n^{1/2k-1} + 2kn^{1/2k-1} + k = O(n^{1/2k-1}).$$

Чтобы на первом шаге получить k случайных векторов $y_j = (y_{j,0}, \dots, y_{j,m-1})$, $j \in E_k$, принадлежащих E_2^m и в сумме дающих вектор $E(i)$, пользователь вырабатывает $k-1$ случайный вектор, k -й вектор получается путем сложения всех случайных векторов и вектора $E(i)$. Таким образом, длина датчика случайных чисел равна $s = 2^{(k-1)m} \leq 2^{(k-1)n^{1/2k-1}}$.

Найдем степень существенности функций ответов A^j , $j \in E_k$. Ясно, что для любого $0 \leq l \leq m$ степень существенности функции $t'_l(\tilde{Y}')(x) = t'_l(\tilde{Y}', x)$ не превосходит $S(t'_l(\tilde{Y}')) \leq n/m$.

Рассмотрим функции t_l , $l \in E_m$. Для всех $j \in E_k$, $b \in E_m$ подсчитаем число многочленов q_i , в которых может присутствовать одночлен вида $Y_{j,b} Y_{j_1,b_1} \dots Y_{j_{2k-2},b_{2k-2}}$, где $j_1, \dots, j_{2k-1} \in E_k$, $b_1, \dots, b_{2k-1} \in E_m$. Для того, чтобы многочлен q_i содержал одночлен такого вида, необходимо и достаточно, чтобы многочлен p_i содержал одночлен вида $Y_b Y_{b_1} \dots Y_{b_{2k-2}}$, где $b_1, \dots, b_{2k-1} \in E_m$ — произвольные числа. По определению многочлена $p_i = \prod_{h \in B_i} Y_h$ для этого необходимо и достаточно, чтобы $b \in B_i$, то есть чтобы $E_b(i) = 1$. Учитывая, что $H(E(i)) = 2k-1$ для любого $i \in E_n$, получаем, что число векторов $E(i)$, удовлетворяющих этому условию, равно

$$\binom{m-1}{2k-2} = \frac{1}{m} \binom{m}{2k-1} \leq \frac{n}{m}.$$

Таким образом, для любого $j \in E_k$ степень существенности функции ответов A^j не превосходит

$$S(A^j) = \max_{t \in E_m} A_t^j \leq \frac{n}{m} \leq n^{2k-2/(2k-1)}.$$

Доказательство теоремы 1. Для натуральных k, n, d таких, что $d \leq n^{2k-2/2k-1}$, опишем PIR-протокол $I_d^{pol} = \langle Q', A'^0, \dots, A'^{k-1}, R' \rangle$ с датчиком случайных чисел, принимающим $s = 2^{(k-1)[d^{1/2k-2}]}$ значений, степень существенности функций ответов серверов которого не превосходит d .

Протокол состоит в следующем. Без ограничения общности будем считать, что n делится нацело на $[d^{2k-1/2k-2}]$, в противном случае дополним базу данных до нужной длины нулями. База данных $x = (x_0, \dots, x_{n-1})$ делится на $l = n/[d^{2k-1/2k-2}]$ частей, длина каждой из которых равна $n' = [d^{2k-1/2k-2}]$, а именно, $E_n = \bigcup_{t \in E_l} I_t$, где $I_t = \{t[d^{2k-1/2k-2}], \dots, (t+1)[d^{2k-1/2k-2}] - 1\}$ для любого $t \in E_l$.

К каждой из l частей базы данных применяем протокол I^{pol} для базы данных длины n' . Тогда степень существенности функции ответов протокола в каждой части будет не превышать $n'^{2k-2/2k-1} \leq ([d^{2k-1/2k-2}])^{2k-2/2k-1} \leq d$.

Положим $m' = [d^{1/2k-2}]$, тогда будет выполнено условие $\binom{m'}{2k-1} \geq n'$. Для любого $i \in E_{n'}$ определим вектор $E(i) \in E_2^{m'}$, такой, что $H(E(i)) = 2k-1$ и $E(i_1) \neq E(i_2)$ для любых $i_1, i_2 \in E_{n'}$, $i_1 \neq i_2$. По выбору m' ясно, что всегда найдется n' векторов, удовлетворяющих этим условиям.

Шаг 1. Пользователь хочет узнать значение x_i , $i \in E_n$, он строит запрос, используя функцию запросов протокола I^{pol} для базы данных длины n' и номера

искомого бита $i' = i \bmod n'$. Затем пользователь выбирает случайные векторы $y_j = (y_{j,0}, \dots, y_{j,m'-1}) \in E_2^{m'}$, $j \in E_k$, такие, что

$$\sum_{j \in E_k} y_j = \left(\sum_{j \in E_k} y_{j,0}, \dots, \sum_{j \in E_k} y_{j,m'-1} \right) = (E_0(i'), \dots, E_{m'-1}(i')) = E(i'),$$

и посылает серверу S_j векторы y_l , $l \in E_k \setminus \{j\}$.

Шаг 2. Для каждой части I_t , $t \in E_l$, сервер S_j , $j \in E_k$, вычисляет ответ согласно протоколу I^{pol} . Ответом сервера S_j является вектор $a^j = (a_0^j, \dots, a_{p^j-1}^j)$, где $p^j = (2m' + 1)n/n'$.

Шаг 3. Для того, чтобы вычислить бит x_i , пользователь выбирает $t \in E_l$ такое, что $i \in I_t$, и вычисляет ответ согласно протоколу I^{pol} , используя ответы серверов S_j , $j \in E_k$, вычисленных для базы данных с индексами из I_t .

Коммуникационная сложность протокола равна

$$\begin{aligned} C(I_d^{pol}) &= k(k-1)m' + k(2m' + 1)n/n' \leq k(k-1)m' + 2km'n/n' \\ &\leq k(k-1)d^{1/2k-2} + 2kd^{1/2k-2} \frac{n}{d^{2k-1/2k-2} + 1} \\ &\leq (k^2 - k)d^{1/2k-2} + 4kn/d. \end{aligned}$$

4. Нижняя оценка

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим произвольный (k, n, s, p) PIR-протокол

$$I = \langle Q, A^0, \dots, A^{k-1}, R \rangle \in \mathcal{A}_d.$$

Пусть

$$p = \sum_{j \in E_k} p^j.$$

Для произвольной булевой функции n переменных $f(x_0, \dots, x_{l-1})$ обозначим $V(f) \subseteq E_l$ множество ее существенных переменных, тогда $S(F) = |V(f)|$ — степень существенности функции f . Для произвольной булевой вектор-функции n переменных $F(f_0(x_0, \dots, x_{l-1}), \dots, f_{m-1}(x_0, \dots, x_{l-1}))$ пусть

$$V(F) = \bigcup_{t \in E_m} V(f_t) \subseteq E_l,$$

тогда $W(F) = |V(F)|$ — совокупная степень существенности функции F .

Рассмотрим булеву вектор-функцию

$$A(i, r, x) = (A^0(Q(0, i, r), x), \dots, A^{k-1}(Q(k-1, i, r), x)).$$

Учитывая, что для любых $j \in E_k$, $l \in E_{p^j}$ функции A_l^j являются существенными функциями не более чем d переменных, $(A_l^j) \leq d$, получаем, что

$$W(A) \leq \sum_{j \in E_k} W(A^j) \leq \sum_{j \in E_k} \sum_{l \in E_{p^j}} S(A_l^j) \leq \sum_{j \in E_k} p^j d = pd.$$

Пусть отображение $R': E_n \times E_s \times \{0, 1\}^p \rightarrow \{0, 1\}$ задано равенствами

$$R'(i, r, A(i, r, x)) = R(i, r, A^0(Q(0, i, r), x), \dots, A^{k-1}(Q(k-1, i, r), x)) = x_i.$$

Предположим, что $pd < n$, тогда $W(A) < n$, и значит, существует число $i \in E_n$ такое, что x_i не является существенной переменной $A(i, r, x)$. А именно, для любых соседних по i -й компоненте векторов $x', x'' \in \{0, 1\}^n$ (векторов, для которых $x'_l = x''_l$ для любого $l \in E_n \setminus \{i\}$ и $x'_i \neq x''_i$) для любого $r \in E_s$ справедливо равенство

$$A(i, r, x') = A(i, r, x'').$$

Тогда

$$x'_i = R'(i, r, A(i, r, x')) = R'(i, r, A(i, r, x'')) = x''_i.$$

Это противоречие доказывает, что $pd \geq n$. Тогда

$$C(I) = k] \log_2 s[+ p \geq k] \log_2 s[+ n/d.$$

5. Порядок коммуникационной сложности в классе $\mathcal{A}_d$

Рассмотрим произвольные натуральные k, d, n и s такие, что $d \leq n^{2k-2/2k-1}$ при $n \rightarrow \infty$ и $s = 2^{(k-1)[d^{1/2k-2}]}$. Тогда из теоремы 1 следует неравенство

$$C(k, n, \mathcal{A}_d) \leq C(k, n, s, \mathcal{A}_d) \leq (k^2 - k)d^{1/2k-2} + 4k \frac{n}{d} \leq \frac{n}{d}.$$

Из теоремы 2 следует неравенство

$$C(k, n, \mathcal{A}_d) \geq C(k, n, s, \mathcal{A}_d) \geq k] \log_2 s[+ \frac{n}{d} \geq \frac{n}{d}.$$

Следовательно, при $n \rightarrow \infty$ и $d \leq n^{2k-2/2k-1}$

$$C(k, n, \mathcal{A}_d) \asymp n/d.$$

Список литературы

1. Chor B., Goldreich O., Kushilevitz E., Sudan M., Private information retrieval. In: *Proc. 36th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*. IEEE Computer Society Press, 1995, pp. 41–51.
2. Beimel A., Ishai Y., Kushilevitz E., Raymond J.-F., Breaking the $O(n^{1/(2k-1)})$ barrier for information-theoretic private information retrieval. In: *Proc. 43rd IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*. IEEE Computer Society Press, 2002, pp. 261–270.
3. Yekhanin S., New locally decodable codes and private information retrieval schemes. *Electronic Colloquium on Computational Complexity* (TR06-127).
4. Goldreich O., Karloff H., Schulman L., Trevisan L., Lower bounds for linear locally decodable codes and private information retrieval systems. In: *Proc. 17th IEEE Conference on Computational Complexity*. IEEE Computer Society Press, 2002, pp. 175–183.
5. Chor B., Goldreich O., Kushilevitz E., Sudan M., Private information retrieval. *J. ACM* (1998) **45**, 965–981.
6. Kerendis I., de Wolf R., Exponential lower bound for 2-query locally decodable codes. In: *Proc. 35th ACM Symposium on Theory of Computing*. ACM, 2003, pp. 106–115.

7. Beigel R., Fortnow L., Gasarch W., A nearly tight lower bound for private information retrieval protocols. *Electronic Colloquium on Computational Complexity* (TR03-087).
8. Itoh T., On lower bounds for the communication complexity of private information retrieval. *IEICE Trans. Fundamentals of Electronics, Commun. and Comp. Sci.* (2001) **ES4-A**, №1, 157–164.
9. Razborov A., Yekhanin S., An $\Omega(n^{1/3})$ lower bound for bilinear group based private information retrieval. *Electronic Colloquium on Computational Complexity* (TR06-050).
10. Гасанов Э. Э., Майлыбаева Г. А., Доступ к базам данных без раскрытия запроса. В сб.: *Материалы конференции «Математика и безопасные информационные технологии»*, Москва, 2003, с. 393–395.
11. Майлыбаева Г. А., Границы вырожденности протоколов доступа к данным без раскрытия запроса. *Дискретная математика* (2006) **18**, №2, 98–110.

Статья поступила 3.08.2006.