Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Волков, Конечная порождаемость некоторых групп рекурсивных перестановок, *Дискрет. матем.*, 2008, том 20, выпуск 4, 61–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1026>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 09:52:02

Конечная порождаемость некоторых групп рекурсивных перестановок

© 2008 г. С. А. Волков

Пусть класс Q функций натурального аргумента замкнут относительно суперпозиции и содержит тождественную функцию. Множество перестановок f таких, что $f, f^{-1} \in Q$, образует группу (относительно операции композиции), которую будем обозначать $Gr(Q)$. В работе доказана конечная порождаемость $Gr(Q)$ для большого семейства классов Q , удовлетворяющих определенным требованиям. В качестве примера рассмотрен класс FP функций, вычисляемых за полиномиальное время на машине Тьюринга. Полученный результат обобщается на классы $\mathcal{E}^n$ иерархии Гжегорчика, $n \geq 2$.

Кроме того, для рассматриваемых классов Q определено минимальное число перестановок, порождающих группу $Gr(Q)$, равное двум. Точнее, получен более сильный результат: существуют две перестановки из данной группы, композициями которых можно получить любую перестановку этой группы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 06-01-00438.

1. Основные определения и обозначения

Рассматриваются всюду определенные функции на множестве $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$. Случаи, когда будут рассматриваться функции другого вида, будут оговариваться отдельно. Кроме того, по умолчанию под термином перестановка подразумевается перестановка на множестве $\mathbb{N}$.

Для одноместных функций f, g, h запись $h = f \circ g$ означает, что $h(x) = f(g(x))$. Если f — перестановка, то f^{-1} обозначает обратную к f перестановку.

Под операцией суперпозиции будем подразумевать подстановку функций в функции, перестановку и отождествление переменных, введение фиктивных переменных. Будем обозначать $[Q]$ замыкание по суперпозиции класса Q функций натурального аргумента.

Для любого класса Q , замкнутого относительно суперпозиции и содержащего функцию $I(x) = x$, через $Gr(Q)$ обозначим группу перестановок $(\{f: f, f^{-1} \in Q\}, \circ)$.

Для класса функций Q будем обозначать $Q^{(1)}$ множество всех одноместных функций из Q .

Определение 1. Графом перестановки $f(x)$ называется ориентированный граф с множеством вершин $\mathbb{N}$ и множеством дуг $\{(x, f(x)): x \in \mathbb{N}\}$.

Положим

$$f^z = \begin{cases} f \circ \dots \circ f, & \text{если } z > 0, \\ I, & \text{если } z = 0, \\ (f^{-1})^{|z|}, & \text{если } z < 0, \end{cases}$$

где $f \circ \dots \circ f$ содержит z перестановок f и $I(x) = x$ при всех x .

Определение 2. Перестановка f называется паросочетанием на множестве A , если $f = f^{-1}$ и $f(x) = x$ для любого $x \notin A$. Паросочетания на множестве $\mathbb{N}$ будем называть просто паросочетаниями.

Определение 3. Характеристической функцией множества $A \subseteq \mathbb{N}$ называется функция $\chi_A(x)$, определяемая равенствами

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Определение 4. Перестановка f называется стационарной на множестве A , если для любого $x \in A$ справедливо равенство $f(x) = x$.

Далее будем использовать сокращенную запись перестановок. Например, запись

$$f: \quad g(y) \leftrightarrow h(y), \quad y \geq 2, \quad t(y) \rightarrow u(y) \rightarrow v(y) \rightarrow t(y)$$

означает, что

$$f(x) = \begin{cases} h(y), & \text{если } x = g(y) \text{ при некотором } y \geq 2, \\ g(y), & \text{если } x = h(y) \text{ при некотором } y \geq 2, \\ u(y), & \text{если } x = t(y) \text{ при некотором натуральном } y, \\ v(y), & \text{если } x = u(y) \text{ при некотором натуральном } y, \\ t(y), & \text{если } x = v(y) \text{ при некотором натуральном } y, \\ x & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Отметим, что подобная запись не всегда корректна, корректность будет доказываться в каждом отдельном случае, кроме тех случаев, когда она не вызывает сомнений.

Определение 5. Тройка (f, g, B) , где f, g — паросочетания, B — множество векторов из $\mathbb{N}^4$, называется правильной, если все компоненты векторов из B различны (как внутри векторов, так и в различных векторах) и выполнены соотношения

$$\begin{aligned} f: \quad & b_1 \leftrightarrow b_3, \quad b_2 \leftrightarrow b_4, \quad (b_1, b_2, b_3, b_4) \in B, \\ g: \quad & b_1 \leftrightarrow b_2, \quad (b_1, b_2, b_3, b_4) \in B. \end{aligned} \quad (1)$$

Определение 6. Правильная тройка (f, g, B) называется правильной в $\mathcal{Q}$, если $f, g \in \mathcal{Q}$.

Определение 7. Бесконечное множество $A \subseteq \mathbb{N}$ называется регулярным в классе функций $\mathcal{Q}$, если выполняются условия

- (1) $\chi_A \in \mathcal{Q}$;
- (2) можно так занумеровать элементы множества A , что функция $\mu(x)$, вычисляющая номер элемента x в этой нумерации (равна нулю при $x \notin A$), и функция $\nu(x)$, вычисляющая элемент с номером x , принадлежат $\mathcal{Q}$ (нумерация начинается с нуля).

Для любого регулярного в Q множества A зафиксируем эти функции и обозначим их μ_A и ν_A . Положим

$$\begin{aligned} x \div y &= \max(0, x - y), \\ [x/y] &= \begin{cases} \text{целой части от деления } x \text{ на } y, & \text{если } y > 0, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \\ \text{gm}(x, y) &= x \div (y \cdot [x/y]), \\ \text{sg } x &= \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \end{aligned}$$

Далее будем налагать дополнительные требования на рассматриваемые классы функций Q :

(I) Q содержит функции

$$1, \quad x + y, \quad x \div y, \quad x \cdot \text{sg } y, \quad [x/2]; \quad (2)$$

(II) Q содержит нумерационную функцию $c_2(x_1, x_2)$, взаимно однозначно отображающую множество $\mathbb{N}^2$ на $\mathbb{N}$, вместе с обратными к ней функциями $c_{2,1}(x)$ и $c_{2,2}(x)$ ($c_{2,1}(c_2(x, y)) = x$, $c_{2,2}(c_2(x, y)) = y$ при любых x, y);

(III) Для любой перестановки $f \in Gr(Q)$ существуют непересекающиеся регулярные в Q множества A, B такие, что $f(A) \cap B = \emptyset$ и $\mathbb{N} \setminus A, \mathbb{N} \setminus B$ регулярны в Q ;

(IV) Q замкнут относительно суперпозиции;

(V) Q имеет конечный базис по суперпозиции.

Заметим, что требования не являются независимыми (например, IV следует из V). Тем не менее, рассматриваться будут все требования, чтобы для некоторых утверждений показать, что они справедливы при достаточно слабых ограничениях на Q . Кроме того, отметим, что из требований II и IV следует существование в Q нумерационных функций $c_n(x_1, \dots, x_n)$, взаимно однозначно отображающих $\mathbb{N}^n$ в $\mathbb{N}$, и обратных к ним функций $c_{n,1}(x), \dots, c_{n,n}(x)$ (см. [2]). Далее в тексте даны определения некоторых функций, использующие нумерационные функции, то есть зависящие от их выбора. Подразумевается, что если в каком-либо утверждении упоминается класс Q , удовлетворяющий требованиям II, IV, и некоторые функции из приведенных ниже, то эти функции построены на основе нумерационных функций из класса Q (фиксированных для данного класса).

Для каждой функции $f(x)$ положим

$$\begin{aligned} p_f: \quad & c_3(x, 2y, z) \rightarrow c_3(f(x), 2c_2(x, y), z), \\ & c_3(x, 4y + 1, z) \rightarrow c_3(x, 2y + 1, z), \\ & c_3(x, 4y + 3, z) \rightarrow c_3(x, 2y, z), \quad x < f(c_{2,1}(y)), \\ & c_3(x, 4y + 3, z) \rightarrow c_3(x + 1, 2y, z), \quad x \geq f(c_{2,1}(y)). \end{aligned} \quad (3)$$

Корректность этого определения будет доказана далее.

Определение 8. Паросочетание $f(x)$ называется кодом частично определенной функции $g(x_1, x_2)$, если

$$f: c_3(x, y, 0) \leftrightarrow c_3(x, y, g(x, y) + 2), \quad (4)$$

где $g(x, y)$ определено.

Обозначим px код функции $g(x_1, x_2) = x_1$. Положим

$$\text{del:} \quad c_3(x, 2y, 0) \leftrightarrow c_3(x, 2y, 1), \quad (5)$$

$$s_{ij}: \quad 4x + i \leftrightarrow 4x + j, \quad 0 \leq i < j < 3,$$

$$\text{move:} \quad c_3(x, 2y, 0) \rightarrow c_3(x, 2y + 2, 0), \quad (6)$$

$$c_3(x, 1, 0) \rightarrow c_3(x, 0, 0),$$

$$c_3(x, 2y + 3, 0) \rightarrow c_3(x, 2y + 1, 0),$$

$$\text{place:} \quad c_3(x, 0, 0) \rightarrow 2x, \quad (7)$$

$$c_3(x, y + 1, 0) \rightarrow 4c_2(x, y) + 1,$$

$$c_3(x, y, z + 1) \rightarrow 4c_3(x, y, z) + 3,$$

$$\text{swap}_1: \quad c_3(x, 2y, z) \rightarrow c_3(x + 2, 2y, z), \quad z \geq 2, \quad (8)$$

$$c_3(x, 2y, 0) \rightarrow c_3(x, 2y, 0),$$

$$c_3(x + 2, 2y + 1, z) \rightarrow c_3(x, 2y + 1, z), \quad z \geq 2,$$

$$c_3(x, 2y + 1, z) \rightarrow c_3(x, 2y, z), \quad x \in \{0, 1\}, \quad z \geq 2,$$

$$\text{swap}_2: \quad c_3(x, 2y, z) \rightarrow c_3(z, 2y, x + 2), \quad z \geq 2, \quad (9)$$

$$c_3(x, 2y, 0) \rightarrow c_3(x, 2y, 0),$$

$$c_3(x + 2, 2y + 1, z) \rightarrow c_3(x, 2y + 1, z), \quad z \geq 2,$$

$$c_3(x, 2y + 1, z) \rightarrow c_3(x, 2y, z), \quad x \in \{0, 1\}, \quad z \geq 2.$$

2. Конечная порождаемость группы $Gr(Q)$

Предложение 1. *Определение p_f корректно, и p_f — перестановка для любой функции $f(x)$. Кроме того, если Q удовлетворяет требованиям I, II, IV и $f \in Q$, то $\text{p}_f \in Gr(Q)$.*

Доказательство. Докажем, что определение (3) корректно и p_f — перестановка. Действительно, нетрудно заметить, что i -е правило в (3), $1 \leq i \leq 4$, взаимно однозначно отображает множество A_i на B_i , где

$$A_1 = \{c_3(u, v, w): \text{rm}(v, 2) = 0\},$$

$$A_2 = \{c_3(u, v, w): \text{rm}(v, 4) = 1\},$$

$$A_3 = \{c_3(u, v, w): \text{rm}(v, 4) = 3, u < f(c_{2,1}([v/4]))\},$$

$$A_4 = \{c_3(u, v, w): \text{rm}(v, 4) = 3, u \geq f(c_{2,1}([v/4]))\},$$

$$B_1 = \{c_3(u, v, w): \text{rm}(v, 2) = 0, u = f(c_{2,1}([v/2]))\},$$

$$B_2 = \{c_3(u, v, w): \text{rm}(v, 2) = 1\},$$

$$B_3 = \{c_3(u, v, w): \text{rm}(v, 2) = 0, u < f(c_{2,1}([v/2]))\},$$

$$B_4 = \{c_3(u, v, w): \text{rm}(v, 2) = 0, u > f(c_{2,1}([v/2]))\}.$$

Ясно, что $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}, \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ — разбиения множества $\mathbb{N}$. Из этого следует корректность определения и то, что p_f — перестановка.

Доказательство того, что $\text{p}_f, \text{p}_f^{-1} \in Q$, следует непосредственно из (3) (см. [4]). Предложение доказано.

Доказательства предложений 2 и 3 аналогичны доказательству предложения 1.

Предложение 2. Определения *move*, *place*, swap_1 , swap_2 корректны и являются определениями перестановок. Кроме того, если класс Q удовлетворяет требованиям I, II, IV, то эти перестановки принадлежат $\text{Gr}(Q)$.

Предложение 3. Если класс Q удовлетворяет требованиям I, II, IV, то $\text{del} = \text{del}^{-1} \in Q$, $s_{ij} = s_{ij}^{-1} \in Q$, $0 \leq i < j \leq 3$, $\text{px} = \text{px}^{-1} \in Q$.

Предложение 4. Пусть класс Q удовлетворяет требованиям I, IV. Тогда любое регулярное в Q множество A можно разбить на два регулярных в Q множества A_1 и A_2 .

Доказательство. Для $i = 1, 2$ положим

$$\begin{aligned} A_i &= \{x: x \in A, \mu_A(x) \equiv i - 1 \pmod{2}\}, \\ \mu_{A_i}(x) &= \begin{cases} (\mu_A(x) - i + 1)/2, & \text{если } x \in A_i, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \\ \nu_{A_i}(x) &= \nu_A(2x + i - 1). \end{aligned}$$

Из I и IV следует, что $\chi_{A_i}, \mu_{A_i}, \nu_{A_i} \in Q$ при $i = 1, 2$. Ясно, что функции μ_{A_i}, ν_{A_i} подходят под определение регулярности для A_i . Кроме того, очевидно, A_1, A_2 бесконечны и образуют разбиение A . Предложение доказано.

Предложение 5. Пусть класс Q удовлетворяет требованиям I, IV. Тогда для любых непересекающихся регулярных в Q множеств A и B множество $A \cup B$ регулярно в Q .

Доказательство. Положим

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \begin{cases} 2\mu_A(x), & \text{если } x \in A, \\ 2\mu_B(x) + 1, & \text{если } x \in B, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \\ \nu(x) &= \begin{cases} \nu_A(x/2), & \text{если } x \equiv 0 \pmod{2}, \\ \nu_B((x-1)/2), & \text{если } x \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Из требований I и IV следует, что $\mu, \nu \in Q$. Ясно, что функции μ, ν подходят под определение регулярности для $A \cup B$, $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B \in Q$. Предложение доказано.

Предложение 6. Пусть класс Q удовлетворяет требованиям I–IV. Тогда для любой перестановки $f \in \text{Gr}(Q)$ существуют перестановки $f_1, f_2 \in \text{Gr}(Q)$ и регулярные в Q множества A_1, A_2 такие, что $\mathbb{N} \setminus A_1, \mathbb{N} \setminus A_2$ регулярны в Q , $f = f_1 \circ f_2$, f_i стационарна на множестве A_i , $i = 1, 2$.

Доказательство. Пусть A, B — множества из требования III для Q и f . Разобьем B на два регулярных в Q множества B_1, B_2 (это возможно в силу предложения 4).

Положим

$$\begin{aligned} f_1: \quad & x \rightarrow f(x), & x \in A; \\ & x \rightarrow \nu_{B_1}(c_2(x, 0)), & x \notin A, \quad f^{-1}(x) \in A; \\ & \nu_{B_1}(c_2(x, 0)) \rightarrow x, & x \in A, \quad f^{-1}(x) \notin A; \\ & \nu_{B_1}(c_2(x, y)) \rightarrow \nu_{B_1}(c_2(x, y + 1)), & x \notin A, \quad f^{-1}(x) \in A; \\ & \nu_{B_1}(c_2(x, y + 1)) \rightarrow \nu_{B_1}(c_2(x, y)), & x \in A, \quad f^{-1}(x) \notin A. \end{aligned}$$

Легко показать, что множество дуг графа перестановки f_1 получается из множества $\{(x, f(x)): x \in A\}$ добавлением для каждой вершины x , являющейся стоком этого множества (вершины, в которую входит дуга, но из которой не выходит) бесконечной цепочки $x \rightarrow v_{B_1}(c_2(x, 0)) \rightarrow v_{B_1}(c_2(x, 1)) \rightarrow \dots$, для каждой вершины x , являющейся истоком (вершины, из которой выходит дуга, но не входит) бесконечной цепочки $\dots \rightarrow v_{B_1}(c_2(x, 1)) \rightarrow v_{B_1}(c_2(x, 0)) \rightarrow x$ и добавлением петель (x, x) для каждой вершины x , из которой не выходит дуга и в которую не входит дуга. После этого построения получается граф, у которого для каждой вершины существует ровно одна выходящая и ровно одна входящая дуга. Из этого следует, что определение f_1 корректно и f_1 — перестановка.

Из определения f_1 следует, что f_1 стационарна на множестве $\mathbf{N} \setminus (A \cup f(A) \cup B_1)$. Из требования III для Q следует, что $(A \cup f(A)) \cap B = \emptyset$. Поэтому $B_2 \subseteq \mathbf{N} \setminus (A \cup f(A) \cup B_1)$. Отсюда вытекает, что f_1 стационарна на B_2 .

Пусть $f_2 = f_1^{-1} \circ f$. Из того, что f_1 совпадает с f на A (см. определение f_1) следует, что f_2 стационарна на A .

По аналогии с предложением 1 легко показать, что $f_1, f_1^{-1} \in Q$. Из этого следует, что $f_2 \in Q$ и $f_2^{-1} = f^{-1} \circ f_1 \in Q$. Положим $A_1 = B_2$, $A_2 = A$. Заметим, что регулярность $\mathbf{N} \setminus A_2$ в Q следует из выбора множества A , регулярность $\mathbf{N} \setminus A_1 = (\mathbf{N} \setminus B) \cup B_1$ — из выбора множества B , регулярности B_1 и предложения 5. Предложение доказано.

Предложение 7. Пусть класс Q удовлетворяет требованиям I, II, IV. Тогда, если перестановка $f \in Gr(Q)$ стационарна на некотором регулярном в Q множестве A таком, что $\mathbf{N} \setminus A$ тоже регулярно в Q , то существуют правильные в Q тройки $(f_1, g_1, B_1), \dots, (f_k, g_k, B_k)$ такие, что $f = f_1 \circ \dots \circ f_k$.

Доказательство. Применив два раза предложение 4, разобьем множество A на регулярные в Q множества A_1, A_2, A_3 .

Введем вспомогательные функции c' и c'' , отображающие $\mathbf{N} \times \mathbf{Z}$, где $\mathbf{Z}$ — множество целых чисел, в $\mathbf{N}$,

$$c'(x, z) = \begin{cases} v_{\mathbf{N} \setminus A}(x), & \text{если } z = 0, \\ v_{A_1}(x), & \text{если } z = 1, \\ v_{A_3}(c_2(x, z - 2)), & \text{если } z > 1, \\ v_{A_2}(c_2(x, -z - 1)), & \text{если } z < 0, \end{cases} \quad (10)$$

$$c''(x, z) = \begin{cases} c'(x, z), & \text{если } z \leq 0, \\ c'(\mu_{\mathbf{N} \setminus A} \circ f \circ v_{\mathbf{N} \setminus A}(x), z), & \text{если } z > 0. \end{cases} \quad (11)$$

Очевидно, что отображение c' взаимно однозначно. Кроме того, ясно, что f взаимно однозначно отображает $\mathbf{N} \setminus A$ на $\mathbf{N} \setminus A$ (потому что f стационарна на A). Следовательно, $\mu_{\mathbf{N} \setminus A} \circ f \circ v_{\mathbf{N} \setminus A}$ — перестановка ($v_{\mathbf{N} \setminus A}$ взаимно однозначно отображает $\mathbf{N}$ на $\mathbf{N} \setminus A$, f — $\mathbf{N} \setminus A$ на $\mathbf{N} \setminus A$, а $\mu_{\mathbf{N} \setminus A} — \mathbf{N} \setminus A$ на $\mathbf{N}$). Из этого следует, что c'' тоже взаимно однозначно.

Положим

$$\begin{aligned} r_1: \quad c''(x, z) &\leftrightarrow c''(x, 1 - z), \quad z \in \mathbf{Z}, \\ r_2: \quad c''(x, z) &\leftrightarrow c''(x, -z), \quad z \in \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

Перестановки h_1, h_2 определим такими же формулами с заменой c'' на c' . Отметим, что r_1, r_2, h_1, h_2 — паросочетания, принадлежащие Q (доказывается аналогично предложению 1).

Положим $r = r_1 \circ r_2$, $h = h_1 \circ h_2$. Проверкой убеждаемся, что

$$r: c''(x, z) \rightarrow c''(x, z + 1), \quad (12)$$

$$h: c'(x, z) \rightarrow c'(x, z + 1). \quad (13)$$

Из (11), (12) и из того, что $\mu_{\mathbb{N} \setminus A} \circ f \circ \nu_{\mathbb{N} \setminus A}$ — перестановка, вытекает, что множество дуг графа перестановки r представляет собой объединение всех бесконечных цепочек вида $\dots \rightarrow c'(x, -1) \rightarrow c'(x, 0)$, $c'(x, 1) \rightarrow c'(x, 2) \rightarrow \dots$, где $x \in \mathbb{N}$, и множества $\{(c'(x, 0), c'(\mu_{\mathbb{N} \setminus A} \circ f \circ \nu_{\mathbb{N} \setminus A}(x), 1)), x \in \mathbb{N}\}$. С другой стороны, из (13) следует, что множество всех дуг графа перестановки h представляет собой объединение непересекающихся бесконечных цепочек вида $\dots \rightarrow c'(x, -1) \rightarrow c'(x, 0) \rightarrow c'(x, 1) \rightarrow \dots$, где $x \in \mathbb{N}$. Из этого вытекает, что r и h совпадают на множестве $\{c'(x, z): z \in \mathbb{Z}, z \neq 0\} = A$ (см. (10)). Отсюда можно сделать вывод, что $h^{-1} \circ g$ стационарна на A .

Далее, при любом $x \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$r(c'(x, 0)) = r(c''(x, 0)) = c''(x, 1) = c'(\mu_{\mathbb{N} \setminus A} \circ f \circ \nu_{\mathbb{N} \setminus A}(x), 1) \quad (14)$$

(равенства следуют из (11), (12), (11) соответственно). Далее,

$$\begin{aligned} h^{-1} \circ r \circ \nu_{\mathbb{N} \setminus A}(x) &= h^{-1} \circ r(c'(x, 0)) = h^{-1}(c'(\mu_{\mathbb{N} \setminus A} \circ f \circ \nu_{\mathbb{N} \setminus A}(x), 1)) \\ &= c'(\mu_{\mathbb{N} \setminus A} \circ f \circ \nu_{\mathbb{N} \setminus A}(x), 0) = \nu_{\mathbb{N} \setminus A} \circ \mu_{\mathbb{N} \setminus A} \circ f \circ \nu_{\mathbb{N} \setminus A}(x) \\ &= f \circ \nu_{\mathbb{N} \setminus A}(x) \end{aligned}$$

(равенства от первого до четвертого следуют из (10), (14), (13), (10) соответственно). Таким образом, $h^{-1} \circ r$ и f совпадают на $\mathbb{N} \setminus A$. С учетом того, что f и $h^{-1} \circ r$ стационарны на A , получаем, что $f = h^{-1} \circ r = h_2 \circ h_1 \circ r_1 \circ r_2$. Пусть

$$s_1: c'(x, -2y) \leftrightarrow c'(x, -2y - 1), \quad y \geq 0,$$

$$s_2: c'(x, -2y - 1) \leftrightarrow c'(x, -2y - 2), \quad y \geq 0,$$

$$M_1 = \{(c'(x, -2y), c'(x, -2y - 1), c'(x, 2y + 1), c'(x, 2y + 2)), y \geq 0\},$$

$$M_2 = \{(c'(x, -2y - 1), c'(x, -2y - 2), c'(x, 2y + 1), c'(x, 2y + 2)), y \geq 0\}.$$

Ясно, что s_1, s_2 — паросочетания в Q . Поэтому нетрудно заметить, что $(r_1, s_1, M_1), (r_2, s_2, M_2), (h_1, s_1, M_1), (h_2, s_2, M_2)$ — правильные в Q тройки. Предложение доказано.

Теорема 1. Пусть класс Q удовлетворяет требованиям I–IV. Тогда для любой перестановки $f \in Gr(Q)$ найдутся правильные в Q тройки $(f_1, g_1, B_1), \dots, (f_k, g_k, B_k)$ такие, что $f = f_1 \circ \dots \circ f_k$.

Доказательство. Используя предложение 6, представим f в виде композиции перестановок, лежащих в Q вместе с обратными им перестановками, стационарных на некоторых множествах, регулярных вместе со своими дополнениями. Затем с использованием предложения 7 представим каждую из этих перестановок в виде композиции разбиваемых в Q паросочетаний. Теорема доказана.

Предложение 8. Пусть перестановка f корректно определяется формулой

$$f: g_1(\tilde{x}_1) \rightarrow h_1(\tilde{x}_1), \rho_1(\tilde{x}_1) \text{ истинно}, \dots, g_n(\tilde{x}_n) \rightarrow h_n(\tilde{x}_n), \rho_n(\tilde{x}_n) \text{ истинно},$$

где g_i, h_i — некоторые функции, ρ_i — некоторые предикаты, $1 \leq i \leq n$. Кроме того, пусть p — некоторая перестановка. Тогда

$$p \circ f \circ p^{-1}: p(g_1(\tilde{x}_1)) \rightarrow p(h_1(\tilde{x}_1)), \rho_1(\tilde{x}_1) \text{ истинно}, \dots,$$

$$p(g_n(\tilde{x}_n)) \rightarrow p(h_n(\tilde{x}_n)), \rho_n(\tilde{x}_n) \text{ истинно}.$$

Справедливость предложения подтверждается прямой проверкой.

Предложение 9. Пусть $g(x, y)$ — частично определенная функция, f — перестановка, являющаяся ее кодом. Кроме того, пусть $(h_1(x, y), h_2(x, y))$ — перестановка на множестве $\mathbb{N}^2$, p — перестановка, определяемая формулой

$$p: c_3(x, y, z) \rightarrow c_3(h_1(x, y), h_2(x, y), z).$$

Тогда $p^{-1} \circ f \circ p$ является кодом функции $g(h_1(x, y), h_2(x, y))$.

Доказательство. Пусть (h'_1, h'_2) — обратная перестановка к (h_1, h_2) , то есть

$$h'_1(h_1(x, y), h_2(x, y)) = x, \quad h'_2(h_1(x, y), h_2(x, y)) = y$$

для любых x, y . Ясно, что $p^{-1}: c_3(x, y, z) \rightarrow c_3(h'_1(x, y), h'_2(x, y), z)$. Используя предложение 8, получаем, что

$$p^{-1} \circ f \circ p: c_3(h'_1(x, y), h'_2(x, y), 0) \leftrightarrow c_3(h'_1(x, y), h'_2(x, y), g(x, y) + 2),$$

где $g(x, y)$ определено. С учетом того, что (h'_1, h'_2) — перестановка, можно сделать замену переменных $z = h'_1(x, y), t = h'_2(x, y)$ и получить, что

$$p^{-1} \circ f \circ p: c_3(z, t, 0) \leftrightarrow c_3(z, t, g(h_1(z, t), h_2(z, t)) + 2),$$

где $g(h_1(z, t), h_2(z, t))$ определено. Предложение доказано.

Предложение 10. Пусть $f(x), g(x)$ — некоторые функции, $r(x_1, x_2)$ — функция, для которой при любых x, y справедливо равенство $r(x, 2y) = f(x)$, s — перестановка, являющаяся кодом r . Тогда $p_g^{-1} \circ s \circ p_g$ — перестановка, являющаяся кодом такой функции $q(x_1, x_2)$, что $q(x, 2y) = f(g(x))$.

Доказательство. Из определения перестановки p_g (см. (3)) следует, что

$$p_g: c_3(x, y, z) \rightarrow c_3(h_1(x, y), h_2(x, y), z),$$

где (h_1, h_2) — перестановка на $\mathbb{N}^2$, причем при любых x, y имеют место равенства

$$h_1(x, 2y) = g(x), \quad h_2(x, 2y) = 2c_2(x, y)$$

(равенства следуют из первого правила в (3)). Используя предложение 9, получаем, что

$$q(x, 2y) = r(h_1(x, 2y), h_2(x, 2y)) = r(g(x), 2c_2(x, y)) = f(g(x)).$$

Предложение доказано.

Предложение 11. Пусть $f_1(x), \dots, f_n(x)$ — функции, $f = f_1 \circ \dots \circ f_n$ и

$$p = p_{f_n}^{-1} \circ \dots \circ p_{f_1}^{-1} \circ p_x \circ p_{f_1} \circ \dots \circ p_{f_n}.$$

Тогда p есть код функции $g(x, y)$, причем $g(x, 2y) = f(x)$ при любых x, y .

Доказательство. По определению перестановки p_x есть код функции $p'(x, y) = x$, поэтому при любых x и y имеет место равенство $p'(x, 2y) = x$. Таким образом, применив n раз предложение 10, получим доказываемое утверждение.

Предложение 12. Пусть f_1, f_2 — паросочетания, $A \subseteq \mathbb{N}$. Кроме того, пусть выполнены следующие условия:

- (1) $A, f_1(A)$ и $f_2(A)$ попарно не пересекаются;
- (2) f_1 стационарна на $f_2(A)$;
- (3) f_2 стационарна на $\mathbb{N} \setminus (A \cup f_2(A))$.

Тогда $(f_1 \circ f_2)^4 \circ f_2: x \leftrightarrow f_1(x), x \in A$.

Доказательство. Ясно, что множество всех дуг (исключая петли) графа перестановки f_1 состоит из пар дуг вида $x \leftrightarrow f_1(x), x \in A$, и еще некоторых пар дуг вида $x \leftrightarrow y$, где $x, y \notin A \cup f_1(A) \cup f_2(A)$. Аналогичное множество для f_2 состоит только из пар дуг $x \leftrightarrow f_2(x), x \in A$. Из этого с учетом условия 1 следует, что граф перестановки $f_1 \circ f_2$ состоит из непересекающихся циклов длины 3 вида $x \rightarrow f_2(x) \rightarrow f_1(x) \rightarrow x, x \in A$, циклов длины 2 вида $x \leftrightarrow f_1(x), x, f_1(x) \notin A \cup f_1(A) \cup f_2(A)$ и петель. После возведения в 4-ю степень циклы длины 3 и петли останутся на месте, циклы длины 2 преобразуются в пары петель. После умножения результата на f_2 циклы длины 3 преобразуются в циклы длины 2 вида $x \leftrightarrow f_1(x), x \in A$, и петли $f_2(x) \rightarrow f_2(x), x \in A$, все остальное останется на месте. Предложение доказано.

Предложение 13. Если f — перестановка, являющаяся кодом всюду определенной функции $g(x_1, x_2)$, то $(f \circ \text{del})^4 \circ \text{del}$ есть код частично определенной функции $g'(x_1, x_2)$, где

$$g'(x_1, x_2) = \begin{cases} g(x_1, x_2), & \text{если } x_2 \text{ четно,} \\ \text{не определено} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $A = \{c_3(x, 2y, 0), x, y \in \mathbb{N}\}$. Из (4) и (5) следует, что

$$f(A) \subseteq \{c_3(x, 2y, z): z \geq 2\}, \quad \text{del}(A) = \{c_3(x, 2y, 1): x, y \in \mathbb{N}\}.$$

Таким образом, $A, f(A), \text{del}(A)$ попарно не пересекаются. Кроме того, легко проверить, что f стационарна на $\{c_3(x, 2y, 1): x, y \in \mathbb{N}\}$, а del — на $\{c_3(x, 2y, z): z \geq 2\}$. Таким образом, выполнены все условия предложения 12 для множества A и функций f, del . Из этого следует, что $(f \circ \text{del})^4 \circ \text{del}: x \leftrightarrow f(x), x \in A$. Это можно переписать в виде $(f \circ \text{del})^4 \circ \text{del}: c_3(x, 2y, 0) \leftrightarrow c_3(x, 2y, g(x, 2y) + 2)$. Предложение доказано.

Предложение 14. Пусть класс Q удовлетворяет требованиям I, II и IV, и пусть $Q^{(1)} = \{q_1, \dots, q_n\}$. Тогда любое паросочетание на множестве всех четных чисел $f \in Q$ представимо в виде композиции перестановок $p_{q_1}, \dots, p_{q_n}, \text{px}, \text{swap}_1, \text{swap}_2, \text{move}, \text{place}, \text{del}$ и им обратных.

Доказательство. Пусть

$$f'(x) = f(2x)/2. \quad (15)$$

Ясно, что $f'(x)$ — паросочетание, принадлежащее Q . Пусть $f' = r_1 \circ \dots \circ r_k$, где $r_1, \dots, r_k \in \{q_1, \dots, q_n\}$. Пусть $\psi = p_{r_k}^{-1} \circ \dots \circ p_{r_1}^{-1} \circ \text{px} \circ p_{r_1} \circ \dots \circ p_{r_k}$. Из предложения 11 следует, что ψ является кодом некоторой функции $g(x, y)$, причем для любых x и y

$$g(x, 2y) = f'(x). \quad (16)$$

Положим $\psi_1 = (\psi \circ \text{del})^4 \circ \text{del}$. Из предложения 13 и (16) следует, что ψ_1 — код частично определенной функции $g'(x, y)$, задаваемой равенством

$$g'(x, y) = \begin{cases} f'(x), & \text{если } y \text{ четно,} \\ \text{не определено} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Из этого следует, что

$$\psi_1: \quad c_3(x, 2y, 0) \leftrightarrow c_3(x, 2y, f'(x) + 2). \quad (17)$$

Пусть $\psi_2 = \text{swap}_1 \circ \psi_1 \circ \text{swap}_1^{-1}$, $\psi_3 = \text{swap}_2 \circ \psi_1 \circ \text{swap}_2^{-1}$. Из первых двух правил в формулах (8) и (9), (17) и предложения 8 следует, что

$$\psi_2: \quad c_3(x, 2y, 0) \leftrightarrow c_3(x + 2, 2y, f'(x) + 2), \quad (18)$$

$$\psi_3: \quad c_3(x, 2y, 0) \leftrightarrow c_3(f'(x) + 2, 2y, x + 2). \quad (19)$$

С учетом того, что f' — паросочетание, сделаем замену $u = f'(x)$ и перепишем (19) в виде

$$\psi_3: \quad c_3(f'(u), 2y, 0) \leftrightarrow c_3(u + 2, 2y, f'(u) + 2). \quad (20)$$

Пусть $\psi_4 = \psi_3 \circ \psi_2$. Из (18), (20) и того, что f' — паросочетание, следует, что

$$\begin{aligned} \psi_4: \quad & c_3(x, 2y, 0) \leftrightarrow c_3(f'(x), 2y, 0), \\ & c_3(x + 2, 2y, f'(x) + 2) \leftrightarrow c_3(f'(x) + 2, 2y, x + 2). \end{aligned} \quad (21)$$

Пусть $\psi_5 = \text{move} \circ \psi_4 \circ \text{move}^{-1}$. Из (6), (21) и предложения 8 следует, что

$$\begin{aligned} \psi_5: \quad & c_3(x, 2y, 0) \leftrightarrow c_3(f'(x), 2y, 0), \quad y > 0, \\ & c_3(x + 2, 2y, f'(x) + 2) \leftrightarrow c_3(f'(x) + 2, 2y, x + 2). \end{aligned} \quad (22)$$

Положим

$$\psi_6: \quad c_3(x, 0, 0) \leftrightarrow c_3(f'(x), 0, 0). \quad (23)$$

Из (21), (22) и равенства $\psi_5 = \psi_5^{-1}$ следует, что $\psi_6 = \psi_5 \circ \psi_4$. Из первого правила в (7), (23) и предложения 8 следует, что $\text{place} \circ \psi_6 \circ \text{place}^{-1}: 2x \leftrightarrow 2f'(x)$. Из этого и (15) вытекает, что $f = \text{place} \circ \psi_6 \circ \text{place}^{-1}$. Предложение доказано.

Теорема 2. Пусть класс $\mathcal{Q}$ удовлетворяет требованиям I–IV и $\mathcal{Q}^{(1)} = [\{q_1, \dots, q_n\}]$. Тогда любая перестановка $f \in \text{Gr}(\mathcal{Q})$ представима в виде композиции перестановок $p_{q_1}, \dots, p_{q_n}$, p_x , swap_1 , swap_2 , move , place , del , s_{01} , s_{02} , s_{03} , s_{12} , s_{13} , s_{23} и им обратных.

Доказательство. По теореме 1 можно считать, что f — паросочетание. Пусть

$$f_{ij}: \quad x \leftrightarrow f(x), \quad x \equiv i \pmod{4}, \quad f(x) \equiv j \pmod{4}, \quad 0 \leq i \leq j \leq 3.$$

Ясно, что f_{ij} — паросочетания, $f = f_{00} \circ f_{01} \circ \dots \circ f_{33}$.

Очевидно, что для любых i, j , $0 \leq i \leq j \leq 3$, существует перестановка q_{ij} , представляемая в виде композиции перестановок s_{01} , s_{02} , s_{03} , s_{12} , s_{13} , s_{23} , переводящая множество

$\{x: \text{gm}(x, 4) \in \{i, j\}\}$ в некоторое подмножество множества всех четных чисел (заметим, что q_{ij}^{-1} тоже представима в виде композиции этих перестановок). Пусть

$$f'_{ij} = q_{ij} \circ f_{ij} \circ q_{ij}^{-1}, \quad 0 \leq i \leq j \leq 3.$$

Из предложения 8 и того, что f_{ij} — парасочетание на множестве $\{x: \text{gm}(x, 4) \in \{i, j\}\}$ следует, что f'_{ij} — парасочетание на множестве всех четных чисел. Следовательно, при любых $i, j, 0 \leq i \leq j \leq 3$, f'_{ij} представимо в виде композиции перестановок из условия теоремы (см. предложение 14). Из того, что

$$f_{ij} = q_{ij}^{-1} \circ f'_{ij} \circ q_{ij}, \quad 0 \leq i \leq j \leq 3,$$

вытекает утверждение теоремы.

Следствие 1. Если класс Q удовлетворяет требованиям I–III, V, то группа $Gr(Q)$ является конечно порождаемой.

Доказательство. Действительно, из [3] известно, что из требований I, II, V вытекает существование конечного базиса по суперпозиции в $Q^{(1)}$. Остается применить теорему 2.

3. Порождаемость $Gr(Q)$ двумя перестановками

Предложение 15. Пусть класс Q удовлетворяет требованиям I, IV. Кроме того, пусть A, B, C — непересекающиеся множества, B регулярно в Q . Тогда любая перестановка $f \in Q$, являющаяся парасочетанием на множестве $A \cup B \cup C$, представима в виде композиции перестановок из Q , каждая из которых — парасочетание на множестве $A \cup B$ или $B \cup C$.

Доказательство. Пусть

$$\begin{aligned} f_1: & x \leftrightarrow f(x), & x, f(x) \in A \cup B, \\ f_2: & x \leftrightarrow f(x), & x \in C, \quad f(x) \in B \cup C, \\ f_3: & x \leftrightarrow f(x), & x \in A, \quad f(x) \in C. \end{aligned}$$

Ясно, что $f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$. Положим

$$\begin{aligned} g_1: & x \leftrightarrow v_B(x), & x \in A, \quad f(x) \in C, \\ g_2: & v_B(x) \leftrightarrow f(x), & x \in A, \quad f(x) \in C. \end{aligned}$$

Отметим, что $v_B(x)$ инъективна, поэтому определения корректны. Кроме того, нетрудно проверить, что $g_2 \circ g_1: x \rightarrow f(x) \rightarrow v_B(x) \rightarrow x, x \in A, f(x) \in C$. Из этого следует, что $g_1 \circ g_2 \circ g_1: x \leftrightarrow f(x), x \in A, f(x) \in C$. Таким образом, $f_3 = g_1 \circ g_2 \circ g_1$, или $f = f_1 \circ f_2 \circ g_1 \circ g_2 \circ g_1$. Заметим, что $f_1, f_2, g_1, g_2 \in Q$. Кроме того, f_1, g_1 — парасочетания на $A \cup B$, а f_2, g_2 — парасочетания на $B \cup C$. Предложение доказано.

Предложение 16. Пусть класс Q удовлетворяет требованиям I, IV. Кроме того, пусть $\{A_1, \dots, A_n\}$ — разбиение множества $A \subseteq \mathbb{N}$ на регулярные в Q множества, $n \geq 2$. Тогда любое парасочетание $f \in Q$ на множестве A можно представить в виде композиции перестановок из Q , каждая из которых является парасочетанием на множестве вида $A_i \cup A_{i+1}, 1 \leq i \leq n-1$.

Доказательство. Докажем это предложение индукцией по n . При $n = 2$ утверждение очевидно. Пусть $n \geq 3$ и утверждение доказано для значений $2, \dots, n-1$. Применим предложение 15 для множеств $A_1, A_2 \cup \dots \cup A_{n-1}$ и A_n (из предложения 5 следует, что эти множества регулярны). Получаем, что f представима в виде композиции перестановок из Q , каждая из которых — паросочетание на множестве $A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}$ или $A_2 \cup \dots \cup A_n$. Применив для каждой из этих перестановок и соответствующих множеств предположение индукции, получим доказываемое утверждение.

Предложение 17. Пусть паросочетание f и множество четырехмерных векторов B с различными компонентами (внутри векторов и в разных векторах) удовлетворяют (1). Кроме того, пусть паросочетания f'_1 и f'_2 на множестве $A \subseteq \mathbb{N}$ определяются соотношениями

$$f'_1: b_1 \leftrightarrow b_2, \quad b_3 \leftrightarrow b_4, \quad (b_1, b_2, b_3, b_4) \in B, \quad (24)$$

$$f'_2: b_1 \leftrightarrow b_3, \quad (b_1, b_2, b_3, b_4) \in B, \quad (25)$$

И пусть f''_1, f''_2 — паросочетания на множествах A''_1 и A''_2 соответственно, A, A''_1, A''_2 попарно не пересекаются, $f_1 = f'_1 \circ f''_1$, $f_2 = f'_2 \circ f''_2$. Тогда $f = (f_1 \circ f_2)^2$.

Доказательство. Отметим, что если φ, ψ — паросочетания на множествах A_φ и A_ψ соответственно, $A_\varphi \cap A_\psi = \emptyset$, то $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$. Отсюда и из того, что A, A''_1, A''_2 попарно не пересекаются, следует, что

$$\begin{aligned} (f_1 \circ f_2)^2 &= f'_1 \circ f''_1 \circ f'_2 \circ f''_2 \circ f'_1 \circ f''_1 \circ f'_2 \circ f''_2 \\ &= (f'_1 \circ f'_2)^2 \circ (f''_1)^2 \circ (f''_2)^2 = (f'_1 \circ f'_2)^2. \end{aligned}$$

Из (24) и (25) следует, что $f'_1 \circ f'_2: b_1 \rightarrow b_4 \rightarrow b_3 \rightarrow b_2 \rightarrow b_1$, $(b_1, b_2, b_3, b_4) \in B$. Из этого вытекает, что $(f'_1 \circ f'_2)^2: b_1 \leftrightarrow b_3, b_2 \leftrightarrow b_4$, $(b_1, b_2, b_3, b_4) \in B$. Правая часть этой формулы совпадает с правой частью (1). Таким образом, $f = (f'_1 \circ f'_2)^2$. Предложение доказано.

Введем несколько вспомогательных определений. Пусть класс Q удовлетворяет требованиям I–III, V. Тогда по следствию 1 существует конечное число перестановок из $Gr(Q)$, в виде композиции которых можно представить любую перестановку из $Gr(Q)$. Из этого и из теоремы 1 следует, что существуют правильные в Q тройки $(f_1, g_1, B'_1), \dots, (f_n, g_n, B'_n)$ такие, что множество, состоящее из паросочетаний

$$f_1, \dots, f_n, \quad (26)$$

порождает $Gr(Q)$.

Определим вектор-функцию $\delta: \mathbb{N}^4 \rightarrow \mathbb{N}^4$ равенством

$$\delta(b_1, b_2, b_3, b_4) = \begin{cases} (b_1, b_2, b_3, b_4), & \text{если } b_1 < b_2, \\ (b_2, b_1, b_4, b_3) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для всех i , $1 \leq i \leq n$, положим $B_i = \{\delta(b_1, b_2, b_3, b_4): (b_1, b_2, b_3, b_4) \in B'_i\}$. Отметим, что $(f_1, g_1, B_1), \dots, (f_n, g_n, B_n)$ — правильные в Q тройки. Кроме того,

$$B_i = \{(x, g_i(x), f_i(x), f_i(g_i(x))): x < g_i(x)\}, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (27)$$

Положим

$$h_i: b_1 \leftrightarrow b_2, \quad b_3 \leftrightarrow b_4, \quad (b_1, b_2, b_3, b_4) \in B_i, \quad (28)$$

$$h_{i+n}: b_1 \leftrightarrow b_3, \quad (b_1, b_2, b_3, b_4) \in B_i, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (29)$$

С учетом (27) это можно переписать в виде

$$h_i: x \leftrightarrow g_i(x), \quad f_i(x) \leftrightarrow f_i(g_i(x)), \quad x < g_i(x), \quad (30)$$

$$h_{i+n}: x \leftrightarrow f_i(x), \quad x < g_i(x). \quad (31)$$

Пусть

$$\text{rol}(x) = x - \text{rm}(x, 2^{2n+1}) + \text{rm}(x + 1, 2^{2n+1}), \quad (32)$$

$$E_0 = \{2^{2n+1}x, x \in \mathbf{N}\}, \quad (33)$$

$$E_i = \text{rol}^i(E_0), \quad 1 \leq i < 2^{2n+1}. \quad (34)$$

Отметим, что $\{E_0, \dots, E_{2^{2n+1}-1}\}$ — разбиение множества $\mathbf{N}$. Ясно, что E_0 регулярно в Q ($\mu_{E_0}(x) = [x/2^{2n+1}]$, если $\text{rm}(x, 2^{2n+1}) = 0$, $\mu_{E_0}(x) = 0$, в противном случае, $\nu_{E_0}(x) = 2^{2n+1}x$), аналогично доказывается регулярность в Q всех множеств E_i , $1 \leq i < 2^{2n+1}$. Из предложения 5 следует, что $E_0 \cup E_1$ регулярно в Q .

Положим

$$u_i: \nu_{E_0 \cup E_1}(x) \rightarrow \nu_{E_0 \cup E_1}(h_i(x)), \quad (35)$$

$$v_i = \text{rol}^{2^i} \circ u_i \circ \text{rol}^{-2^i}, \quad 1 \leq i \leq 2n, \quad (36)$$

$$\text{all} = v_1 \circ \dots \circ v_{2n}, \quad (37)$$

$$w_i: \nu_{E_0 \cup E_1}(x) \rightarrow \nu_{E_0 \cup E_1}(f_i(x)), \quad 1 \leq i \leq n. \quad (38)$$

Предложение 18. *Справедливы соотношения $\text{rol}, \text{rol}^{-1}, \text{all} = \text{all}^{-1} \in Q$.*

Доказательство. Утверждение для rol и rol^{-1} следует непосредственно из (32). Из (30) и (31) следует, что $h_i \in Q$, $1 \leq i \leq 2n$, из этого и из (35), (36), (37) следует, что $\text{all} \in Q$. Кроме того, из (30) и (31) следует, что h_i — паросочетание при любом i , $1 \leq i \leq 2n$. Из этого и из (35) вытекает, что u_i — паросочетание на $E_0 \cup E_1$, из (36) следует, что v_i — паросочетание на $E_{2^i} \cup E_{2^i+1}$, $1 \leq i \leq 2n$. Таким образом, $v_1, \dots, v_{2n}$ — паросочетания на попарно непересекающихся множествах. Из этого и из (37) следует, что all — паросочетание. Следовательно, $\text{all}^{-1} = \text{all} \in Q$.

Предложение 19. *Пусть $n \geq 1$, $1 \leq i \leq n$, при всех j , $1 \leq j \leq 2n$, числа α_j и β_j определяются равенствами*

$$\alpha_j = \text{rm}(2^{2n+1} + 2^j - 2^i, 2^{2n+1}), \quad \beta_j = \text{rm}(2^{2n+1} + 2^j - 2^{i+n}, 2^{2n+1}).$$

Тогда числа $0, 1, \alpha_j, \alpha_j + 1, j \neq i, \beta_j, \beta_j + 1, j \neq i + n$, попарно различны.

Доказательство. С учетом того, что все числа α_j, β_j четные, достаточно доказать, что числа $0, \alpha_j, j \neq i, \beta_j, j \neq i + n$, попарно различны. Докажем это от противного. Пусть $\alpha_j = 0$. Тогда $2^j \equiv 2^i \pmod{2^{2n+1}}$, то есть $i = j$. Аналогично, если $\beta_j = 0$, то $j = i + n$. Если $\alpha_{j_1} = \alpha_{j_2}$, то $2^{j_1} \equiv 2^{j_2} \pmod{2^{2n+1}}$, то есть $j_1 = j_2$. Аналогично разбирается случай $\beta_{j_1} = \beta_{j_2}$. Если $\alpha_{j_1} = \beta_{j_2}$, то $2^{j_1} + 2^{i+n} \equiv 2^{j_2} + 2^i \pmod{2^{2n+1}}$, то есть $2^{j_1} + 2^{i+n} = 2^{j_2} + 2^i$ (потому что левая и правая части лежат между 4 и 2^{2n+1}). Это равенство возможно, только если $j_1 = i$ и $j_2 = i + n$. Предложение доказано.

Предложение 20. Перестановки w_i , $1 \leq i \leq n$, представимы в виде композиции перестановок all и rol .

Доказательство. Зафиксируем i . Пусть

$$s_1 = \text{rol}^{-2^i} \circ \text{all} \circ \text{rol}^{2^i} = \text{rol}^{2^{2n+1}-2^i} \circ \text{all} \circ \text{rol}^{2^i}, \quad (39)$$

$$s_2 = \text{rol}^{-2^{i+n}} \circ \text{all} \circ \text{rol}^{2^{i+n}} = \text{rol}^{2^{2n+1}-2^{i+n}} \circ \text{all} \circ \text{rol}^{2^{i+n}}. \quad (40)$$

Справедливы равенства

$$\begin{aligned} s_1 &= \text{rol}^{-2^i} \circ v_1 \circ \dots \circ v_{2n} \circ \text{rol}^{2^i} \\ &= (\text{rol}^{-2^i} \circ v_1 \circ \text{rol}^{2^i}) \circ \dots \circ (\text{rol}^{-2^i} \circ v_{2n} \circ \text{rol}^{2^i}) \\ &= p'_1 \circ \dots \circ p'_{2n}, \end{aligned}$$

где

$$p'_j = \text{rol}^{2^j-2^i} \circ u_j \circ \text{rol}^{2^i-2^j}, \quad 1 \leq j \leq 2n. \quad (41)$$

Из (32), (34), предложения 8 и того, что u_j — паросочетание на $E_0 \cup E_1$, следует, что p'_j — паросочетание на $E_{\alpha_j} \cup E_{\alpha_j+1}$, где

$$\alpha_j = \text{rm}(2^{2n+1} + 2^j - 2^i, 2^{2n+1}), \quad 1 \leq j \leq 2n.$$

Аналогично,

$$s_2 = p''_1 \circ \dots \circ p''_{2n},$$

где

$$p''_j = \text{rol}^{2^j-2^{i+n}} \circ u_j \circ \text{rol}^{2^{i+n}-2^j}, \quad 1 \leq j \leq 2n, \quad (42)$$

p''_j — паросочетание на $E_{\beta_j} \cup E_{\beta_j+1}$, где

$$\beta_j = \text{rm}(2^{2n+1} + 2^j - 2^{i+n}, 2^{2n+1}), \quad 1 \leq j \leq 2n.$$

Из предложения 19 следует, что множество $E_0 \cup E_1$ и все множества $E_{\alpha_j} \cup E_{\alpha_j+1}$, $j \neq i$, $E_{\beta_j} \cup E_{\beta_j+1}$, $j \neq i+n$, попарно не пересекаются. Отсюда

$$\begin{aligned} p'_i \circ p'_j &= p'_j \circ p'_i, & j \neq i, \\ p''_{i+n} \circ p''_j &= p''_j \circ p''_{i+n}, & j \neq i+n. \end{aligned}$$

Из этого можно сделать вывод, что

$$s_1 = p'_1 \circ \dots \circ p'_{2n} = s'_1 \circ s''_1, \quad (43)$$

где

$$\begin{aligned} s'_1 &= p'_i, \\ s''_1 &= p'_1 \circ \dots \circ p'_{i-1} \circ p'_{i+1} \circ \dots \circ p'_{2n}. \end{aligned} \quad (44)$$

Аналогично,

$$s_2 = s'_2 \circ s''_2, \quad (45)$$

где

$$\begin{aligned} s'_2 &= p''_{i+n}, \\ s''_2 &= p''_1 \circ \dots \circ p''_{i+n-1} \circ p''_{i+n+1} \circ \dots \circ p''_{2n}. \end{aligned} \quad (46)$$

Кроме того, из попарной непересекаемости указанных множеств следует, что s'_1, s''_2 — паросочетания.

Из (28), (29), (35) следует, что

$$\begin{aligned} u_i: \quad & \nu_{E_0 \cup E_1}(b_1) \leftrightarrow \nu_{E_0 \cup E_1}(b_2), \\ & \nu_{E_0 \cup E_1}(b_3) \leftrightarrow \nu_{E_0 \cup E_1}(b_4), \quad (b_1, b_2, b_3, b_4) \in B_i, \end{aligned} \quad (47)$$

$$u_{i+n}: \quad \nu_{E_0 \cup E_1}(b_1) \leftrightarrow \nu_{E_0 \cup E_1}(b_3), \quad (b_1, b_2, b_3, b_4) \in B_i, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (48)$$

Из (38) и того, что (f_i, g_i, B_i) — правильная тройка, следует, что

$$\begin{aligned} w_i: \quad & \nu_{E_0 \cup E_1}(b_1) \leftrightarrow \nu_{E_0 \cup E_1}(b_3), \\ & \nu_{E_0 \cup E_1}(b_2) \leftrightarrow \nu_{E_0 \cup E_1}(b_4), \quad (b_1, b_2, b_3, b_4) \in B_i. \end{aligned} \quad (49)$$

где $1 \leq i \leq n$. Из (41), (44) следует, что

$$s'_1 = u_i, \quad (50)$$

и из (42), (46) следует, что

$$s'_2 = u_{i+n}. \quad (51)$$

Заметим, что s'_1, s'_2 — паросочетания на $E_0 \cup E_1$ (это следует из (35), (50), (51)), s''_1 — паросочетание на $\bigcup_{j \neq i} (E_{\alpha_j} \cup E_{\alpha_j+1})$, s''_2 — на $\bigcup_{j \neq i+n} (E_{\beta_j} \cup E_{\beta_j+1})$, указанные множества не пересекаются. Из (43), (45), (47), (48), (49), (50), (51) следует, что для перестановок $w_i, s_1, s_2, s'_1, s'_2, s''_1, s''_2$ (вместо $f, f_1, f_2, f'_1, f'_2, f''_1, f''_2$ соответственно) и множества $B'_i = \{(\nu_{E_0 \cup E_1}(b_1), \nu_{E_0 \cup E_1}(b_2), \nu_{E_0 \cup E_1}(b_3), \nu_{E_0 \cup E_1}(b_4)), (b_1, b_2, b_3, b_4) \in B_i\}$ выполнены все условия предложения 17. Из этого следует, что $w_i = (s_1 \circ s_2)^2$. Заметим, что s_1 и s_2 представимы в виде композиции rol и all (см. (39), (40)). Предложение доказано.

Предложение 21. Любое паросочетание на $E_0 \cup E_1$, принадлежащее Q , представимо в виде композиции rol и all .

Доказательство. Пусть f — данное паросочетание. Положим

$$g(x) = \mu_{E_0 \cup E_1} \circ f \circ \nu_{E_0 \cup E_1}(x).$$

Нетрудно видеть, что g — паросочетание, принадлежащее Q . Следовательно, существуют $i_1, \dots, i_k$ такие, что $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$ и

$$g = f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_k} \quad (52)$$

$(f_1, \dots, f_n$ — паросочетания из (26)). Нетрудно заметить, что

$$f: \nu_{E_0 \cup E_1}(x) \rightarrow \nu_{E_0 \cup E_1}(g(x)).$$

Из этого, из (38) и (52) следует, что

$$f = w_{i_1} \circ \dots \circ w_{i_k}.$$

Отсюда и из предложения 20 вытекает доказываемое утверждение.

Предложение 22. Если $0 \leq i < 2^{2n+1} - 1$, $f \in Q$ — паросочетание на $E_i \cup E_{i+1}$, то f представимо в виде композиции rol и all .

Доказательство. Пусть

$$f' = \text{rol}^{-i} \circ f \circ \text{rol}^i.$$

Из (32), (33), (34) и предложения 8 следует, что f' — паросочетание на $E_0 \cup E_1$. Кроме того, очевидно, что

$$f = \text{rol}^i \circ f' \circ \text{rol}^{-i} = \text{rol}^i \circ f' \circ \text{rol}^{2^{2n+1}-i}.$$

Отсюда и из предложения 21 вытекает доказываемое утверждение.

Теорема 3. Любая перестановка $f \in Gr(Q)$ может быть представлена в виде композиции rol и all .

Доказательство. Действительно, из теоремы 1 следует, что f можно представить в виде композиции паросочетаний в Q , по предложению 16 каждое такое паросочетание представимо в виде композиции паросочетаний на множествах вида $E_i \cup E_{i+1}$, $0 \leq i < 2^{2n+1} - 1$, принадлежащих Q , по предложению 22 каждое такое паросочетание представимо в виде композиции rol и all .

4. Конечная порождаемость $Gr(\text{FP})$

Пусть FP — множество всех функций $f(x_1, \dots, x_n)$, вычислимых на машине Тьюринга за полиномиальное время (от длины входа при двоичном кодировании входа и выхода).

Теорема 4. Класс FP удовлетворяет требованиям I–III, V.

Доказательство. Требования I, II для FP легко проверяются. Требование V следует из [5]. Докажем, что выполнено требование III. Пусть f — перестановка, $f, f^{-1} \in \text{FP}$. Выберем функцию $h(x)$ вида $2^{\lceil \log_2(x+4) \rceil^n} + 2x$, $n \geq 2$, такую, что для любого x справедливы неравенства $f(x), f^{-1}(x) < h(x)$. Заметим, что $h(x) > x$ при любом x и функция $h(x) - x$ возрастает. Пусть

$$A_i = \{x: h^i(0) \leq x < h^{i+1}(0)\}, \quad i \geq 0.$$

Ясно, что $\{A_i\}$ — разбиение множества $\mathbf{N}$. Пусть

$$\begin{aligned} R_1 &= A_0 \cup A_4 \cup A_8 \cup \dots, \\ R_2 &= A_2 \cup A_6 \cup A_{10} \cup \dots \end{aligned} \tag{53}$$

Если $x \in A_i$, $f(x) \in A_j$, то $x < h^{i+1}(0)$ и, следовательно, $f(x) < h^{i+2}(0)$, то есть $j \leq i + 1$. Аналогично, заметив, что $x = f^{-1}(f(x))$, получаем, что $i \leq j + 1$, то есть $|i - j| \leq 1$. Из этого следует, что

$$f(R_1) \cap R_2 = \emptyset.$$

Докажем регулярность R_1 в FP, регулярность R_2 , $\mathbb{N} \setminus R_1$, $\mathbb{N} \setminus R_2$ доказывается аналогично. Пусть

$$\mu_1(x) = \begin{cases} \text{номер } x \text{ в } R_1 \text{ (нумерация по возрастанию с нуля)}, & \text{если } x \in R_1, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

и пусть $v_1(x)$ равно элементу множества R_1 с номером x .

Заметим, что $h(x) > 2x$ при всех x , поэтому для вычисления значений $\mu_1(x)$ и $\chi_{R_1}(x)$ достаточно $\lceil \log_2 x \rceil + 1$ итераций функции h . Из этого, очевидно, следует, что $\mu_1, \chi_{R_1} \in \text{FP}$. Осталось доказать, что $v_1 \in \text{FP}$ (для этого, очевидно, достаточно доказать, что она ограничена сверху некоторой функцией из FP).

Отметим, что $A_0, A_1, \dots$ — непересекающиеся отрезки в $\mathbb{N}$, их длины $|A_i|$ возрастают при увеличении i (потому что $h(x) - x$ возрастает). Отсюда и из (53) следует, что

$$\mu_1(h^{4i+1}(0) - 1) + 1 \geq \frac{h^{4i+1}(0)}{4}$$

для любого i . Из этого следует, что если $v_1(x) = h^{4i+1}(0) - 1$ при некоторых x и i , то

$$v_1(x) \leq 4x + 3.$$

Докажем, что для любого x справедливо неравенство

$$v_1(x) < h^5(4x + 3).$$

Действительно, при $x < h(0) - 1$ это очевидно, при $x \geq h(0) - 1$ выберем наибольшее i такое, что $h^{4i+1}(0) - 1 \leq v_1(x)$. Пусть

$$h^{4i+1}(0) - 1 = v_1(x').$$

Тогда

$$\begin{aligned} v_1(x) &< h^{4i+5}(0) - 1 \leq h^5(h^{4i+1}(0) - 1) \\ &= h^5(v_1(x')) \leq h^5(4x' + 3) \leq h^5(4x + 3). \end{aligned}$$

Из этого неравенства следует, что $v_1(x) \in \text{FP}$. Таким образом, f , R_1 и R_2 удовлетворяют всем условиям из требования III. Теорема доказана.

Следствие 2. В $\text{Gr}(\text{FP})$ существуют две перестановки, композициями которых можно представить любую перестановку из $\text{Gr}(\text{FP})$.

Замечание 1. Теорема 4 допускает обобщение на классы Гжегорчика $\mathcal{E}^n$, $n \geq 2$ (см. [1]), произвольные $\mathcal{E}^2$ -замкнутые классы функций, имеющие конечный базис по суперпозиции ([3]) и многие другие классы. Для каждого такого класса нужно соответствующим образом подобрать семейство функций h .

Список литературы

1. Гжегорчик А., Некоторые классы рекурсивных функций. В сб.: *Проблемы математической логики*. Мир, Москва, 1970, с. 9–49.
2. Мальцев А. И., *Алгоритмы и рекурсивные функции*. Наука, Москва, 1986.
3. Марченков С. С., Базисы по суперпозиции в классах рекурсивных функций. *Матем. вопросы кибернетики* (1991) **3**, 115–139.
4. Марченков С. С., *Элементарные рекурсивные функции*. МЦНМО, Москва, 2003.
5. Мучник А. А., О двух подходах к классификации рекурсивных функций. В сб.: *Проблемы математической логики*. Мир, Москва, 1970, с. 123–138.

Статья поступила 22.06.2007.