Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Солодовников, Гомоморфизмы регистров сдвига в линейные автоматы, *Дискрет. матем.*, 2008, том 20, выпуск 4, 89–101

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1029>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 15:41:11

Гомоморфизмы регистров сдвига в линейные автоматы

© 2008 г. В. И. Солодовников

Работа посвящена описанию всех гомоморфизмов регистров сдвига над конечными полями с подстановочной по входной переменной функцией обратной связи в линейные автоматы. Доказывается, что линейный автомат, который является гомоморфным образом регистра сдвига, изоморфен линейному регистру сдвига. Тем самым по ранее полученной автором теореме вопрос о гомоморфизмах регистров сдвига в линейные автоматы сводится к вопросу о разложении функции (или представляющего ее многочлена) в так называемую сдвиг-композицию двух функций (многочленов), из которых левая функция является аффинной. Доказывается также, что всякий многочлен однозначно представляется в виде суммы сдвиг-композиций линейных многочленов и одночленов с первой переменной. Этим линейным многочленам ставятся в соответствие многочлены от одной переменной, и вопрос о разложении сводится к поиску общих делителей последних. Указываются некоторые простые условия, достаточные для отсутствия нетривиальных внутренних гомоморфизмов регистра сдвига в линейные автоматы.

Гомоморфизмы являются неотъемлемой частью любой категории, в том числе и категории автоматов. Традиционный для теории автоматов интерес представляют автоматы, называемые регистрами сдвига. Это автоматы, вырабатывающие управляемые (то есть в общем случае зависящие от входа) усложненные (некоторой выходной функцией) рекуррентные последовательности. В [2] доказано, что всякий гомоморфизм двоичного регистра сдвига с линейной по входной переменной функцией обратной связи разлагается в композицию гомоморфизма на регистр и некоторого гомоморфизма, близкого к изоморфизму. При описании этого разложения основную роль играет некая бинарная некоммутативная операция на функциях (называемая здесь сдвиг-композицией). Она в некотором смысле распространяет операцию умножения многочленов от одной переменной на множество всех функций. Вопрос о гомоморфизмах регистра сводится к вопросу о поиске общих правых делителей его функции обратной связи и выходной функции.

Настоящая работа посвящена описанию всех гомоморфизмов регистров сдвига над конечными полями с подстановочной по входной переменной функцией обратной связи в линейные автоматы.

В работе приняты следующие обозначения и терминология.

Пусть X — произвольное конечное множество, $F_{n+1}(X) = \{f \mid f: X^{n+1} \rightarrow X\}$ — множество всех X -значных функций от $n+1$ переменной, $n \geq 0$, $F(X) = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_{n+1}(X)$.

Функцию $f \in F_{n+1}(X)$ называют подстановочной (биективной) по i -й переменной, если при любой фиксации всех остальных переменных получаемое отображение $X \rightarrow X$

является биекцией. В случае подстановочности по последней, то есть по $(n + 1)$ -й переменной, через f^{-1} будем обозначать функцию, обратную к функции f по последней переменной, то есть $f^{-1} \in F_{n+1}(X)$, $f^{-1}(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_{n+1})) = x_{n+1}$. В двоичном случае подстановочность по какой-либо переменной равносильна линейности по этой переменной.

Через $F_{n+1}^*(X)$ обозначим множество всех подстановочных по последней переменной функций из $F_{n+1}(X)$, $F^*(X) = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_{n+1}^*(X)$.

Через $P = GF(q)$ обозначим конечное поле из q элементов, $P[x]$ — кольцо многочленов над P от одной переменной x , $d(\varphi)$ — степень многочлена φ .

Пусть $M(P)$ — множество всех многочленов над P от переменных $\{x_i, i \geq 1\}$ с ограниченными степенями, то есть формул вида

$$g = \sum_{0 \leq k, 1 \leq i_1 < \dots < i_k, 1 \leq s_j \leq q-1} a_{i_1, \dots, i_k; s_1, \dots, s_k} x_{i_1}^{s_1} \dots x_{i_k}^{s_k},$$

где $a_{i_1, \dots, i_k; s_1, \dots, s_k} \in P$ называют коэффициентом при одночлене $x_{i_1}^{s_1} \dots x_{i_k}^{s_k}$ степени $s_1 + \dots + s_k$ и только конечное число коэффициентов отлично от нуля. Говорят, что одночлен входит в g , если коэффициент при нем ненулевой. Максимальная степень входящих в ненулевой многочлен g одночленов называется степенью g и обозначается через $d(g)$. Номером одночлена $x_{i_1}^{s_1} \dots x_{i_k}^{s_k}$ назовем число

$$|x_{i_1}^{s_1} \dots x_{i_k}^{s_k}| = \sum_{j=1}^k s_j q^{i_j-1}.$$

Каждый одночлен однозначно определяется своим номером. Хорошо известно, что любая функция из $F(P)$ однозначно представляется некоторым многочленом из $M(P)$. В случаях, когда число переменных функции определено, будем при необходимости отождествлять эту функцию с представляющим ее многочленом.

Пусть $M^*(P)$ — множество всех многочленов из $M(P)$ положительной степени, подстановочных (как функции) по последней (то есть существенной с максимальным номером) переменной.

Автоматом с входным алфавитом X , множеством состояний S , выходным алфавитом Y , функцией переходов $\delta: S \times X \rightarrow S$ и функцией выходов $\lambda: S \times X \rightarrow Y$ называют пятерку объектов $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$. При этом подразумевается, что если автомат A находится в состоянии $s \in S$ и на его вход подается входной символ $x \in X$, то на его выходе появляется выходной символ $\lambda(s, x)$ и автомат переходит в состояние $\delta(s, x)$.

Для отображений ψ и φ через $\psi\varphi$ обозначается их композиция, при которой φ действует первым. Аналогично, для автоматов A и B через AB обозначается их последовательное соединение, при котором выход с автомата B подается на вход автомата A .

Гомоморфизмом автомата $A' = (X', S', Y', \delta', \lambda')$ в автомат $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$ называется тройка отображений (α, β, γ) , $\alpha: X' \rightarrow X$, $\beta: S' \rightarrow S$, $\gamma: Y' \rightarrow Y$, удовлетворяющих условиям $\beta\delta' = \delta(\beta \times \alpha)$, $\gamma\lambda' = \lambda(\beta \times \alpha)$. В этом случае пишут $(\alpha, \beta, \gamma): A' \rightarrow A$. Если α и γ — тождественные вложения, то гомоморфизм называется внутренним и обозначается $\beta: A' \rightarrow A$.

Любой гомоморфизм $(\alpha, \beta, \gamma): A' \rightarrow A$ сводится к внутреннему гомоморфизму $\beta: \gamma A' \rightarrow A\alpha$, а в случае биективности α и к внутреннему гомоморфизму $\beta: \gamma A' \alpha^{-1} \rightarrow A$. Поэтому часто достаточно рассматривать только внутренние гомоморфизмы.

Композиция гомоморфизмов (покоординатная композиция троек отображений) также является гомоморфизмом.

Рис. 1.

Гомоморфизм (α, β) автоматов без выхода назовем тривиальным, если справедливо равенство $|\beta(S')| = 1$.

Как и в [2], автомат $R(h, f) = (X, X^n, X, \rho, \mu)$, у которого функция переходов ρ и функция выходов μ определяются равенствами

$$\rho((x_1, \dots, x_n), x) = (x_2, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n, x)),$$

$$\mu((x_1, \dots, x_n), x) = h(x_2, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n, x))$$

для любых $x_1, \dots, x_n, x \in X$, называется регистром сдвига над множеством X длины n с функцией обратной связи f и выходной функцией h , где $f, h \in F_{n+1}(X)$. Регистр сдвига без выхода с функцией обратной связи f обозначается через $R(f)$. Эти автоматы изображаются, как на рис. 1.

Для любых $f_i \in F_{n_i+1}(X)$, $i = 1, 2$, функция $f_2 \triangleleft f_1 \in F_{n_1+n_2+1}(X)$ и отображение $\pi_{f_1, n_2}: X^{n_1+n_2} \rightarrow X^{n_2}$ определяются равенствами

$$\begin{aligned} f_2 \triangleleft f_1(x_1, \dots, x_{n_1+n_2+1}) \\ = f_2(f_1(x_1, \dots, x_{n_1+1}), f_1(x_2, \dots, x_{n_1+2}), \dots, f_1(x_{n_2+1}, \dots, x_{n_1+n_2+1})), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_{f_1, n_2}(x_1, \dots, x_{n_1+n_2}) \\ = (f_1(x_1, \dots, x_{n_1+1}), f_1(x_2, \dots, x_{n_1+2}), \dots, f_1(x_{n_2}, \dots, x_{n_1+n_2})) \end{aligned}$$

для любых $x_1, \dots, x_{n_1+n_2+1} \in X$, так что $f_2 \triangleleft f_1 = f_2 \pi_{f_1, n_2+1}$. Операцию $\triangleleft$ назовем сдвиг-композицией функций.

Множество $F(X)$ относительно операции $\triangleleft$ является моноидом с единичным элементом $x_1 \in F_1(X)$, а множество $F^*(X)$ — его подмоноидом. Операция $\triangleleft$ является продолжением на множество всех функций операции умножения многочленов в следующем смысле. Обозначим через $P[x]^*$ моноид (относительно умножения) всех ненулевых многочленов над полем P . Тогда отображение $w: P[x]^* \rightarrow F^*(P)$, где

$$w(c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n) = (c_0x_1 + c_1x_2 + \dots + c_nx_{n+1}),$$

является инъективным гомоморфизмом моноидов.

Следующая теорема сводит описание всех гомоморфизмов регистра на регистр с подстановочными по входной переменной функциями обратной связи к описанию разложений функций в сдвиг-композицию (см. [2]).

Теорема 1. Пусть $n_1, n_2 \geq 0$, $f \in F_{n_1+1}^*(X)$, $f_2 \in F_{n_2+1}^*(X)$, $h \in F_{n+1}(X)$, $h_2 \in F_{n_2+1}(X)$, $\beta: X^n \rightarrow X^{n_2}$. Тогда следующие утверждения равносильны:

- (1) $\beta: R(h, f^{-1}) \rightarrow R(h_2, f_2^{-1})$ — внутренний гомоморфизм,
- (2) $n \geq n_2$, $\beta = \pi_{f_1, n_2}$, $f = f_2 \triangleleft f_1$, $h = h_2 \triangleleft f_1$ для некоторой функции $f_1 \in F_{n_1+1}^*(X)$, где $n_1 = n - n_2$.

Далее для простоты будут рассматриваться только автоматы без выхода. Соответствующие результаты для автоматов с выходом легко получить, воспользовавшись теоремой 1.

Всюду далее $X = P$ — конечное поле.

Линейным автоматом над P длины m с одномерным входом без выхода назовем автомат (P, P^m, δ) , у которого функция переходов δ определяется равенством

$$\delta(s, x) = sQ + xb + b_0$$

для всех $s \in P^m$, $x \in P$, где Q — $m \times m$ матрица над P , $b, b_0 \in P^m$. Матрицу Q назовем матрицей этого автомата, а вектор b — его входным сдвигом.

Линейным регистром сдвига над P длины n без выхода называют регистр $R(f)$, у которого функция $f \in F_{n+1}(P)$ представляется в виде

$$f(x_1, \dots, x_{n+1}) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i + x_{n+1}.$$

Такие функции (многочлены) будем называть унитарными аффинными функциями (многочленами).

Ясно, что линейный регистр сдвига является сильно связными линейным автоматом. Докажем теорему, из которой следует, что других сильно связных линейных автоматов с точностью до изоморфизма нет.

Подавтомат называют внутренним, если его входной алфавит не сокращен.

Теорема 2. Для любого автомата A , являющегося внутренним подавтоматом линейного автомата над полем P с одномерным входом без выхода, следующие утверждения равносильны:

- (1) A является гомоморфным образом некоторого регистра сдвига над P без выхода с подстановочной по последней (то есть входной) переменной функцией обратной связи,

- (2) A аффинно внутренне изоморфен некоторому линейному регистру сдвига над P без выхода,
- (3) любое состояние A достижимо из некоторого состояния A , не меняющегося при некотором входном знаке.

Доказательство. Импликация (2) $\Rightarrow$ (1) очевидна. Докажем импликацию (1) $\Rightarrow$ (3). Из подстановочности следует, что регистр сильно связан и, например, нулевое состояние остается на месте при одном из входных знаков. Поскольку при гомоморфизме эти свойства сохраняются, (3) выполнено.

Докажем импликацию (3) $\Rightarrow$ (2). Пусть $P^m \subseteq S$ — множество состояний подавтомата A и все они достижимы из состояния $s_0 \in S$, $s_0 = s_0Q + a_0b + b_0$. Тогда любое состояние из S представляется в виде

$$\delta(s_0, (x_1, \dots, x_l)) = s_0 + \sum_{i=1}^l (x_i - a_0)bQ^{l-i}.$$

Пусть $\sum_{i=1}^n a_i x^{i-1} + x^n$ — минимальный многочлен вектора b относительно матрицы Q . Определим функцию $f \in F_{n+1}(P)$ равенством

$$f(x_1, \dots, x_{n+1}) = -a_0 + \sum_{i=1}^n -a_i x_i + x_{n+1}.$$

Пусть $e_i = bQ^{i-1}$, $i = 1, \dots, n$. Векторы $e_1, \dots, e_n$ линейно независимы, и для любого $i \geq 0$ вектор bQ^i линейно выражается через них. Поэтому S — смежный класс по подпространству пространства P^m с базисом $e_1, \dots, e_n$.

Определим аффинное отображение $\beta: P^n \rightarrow S$ формулой $\beta(s) = sCE + s_0$, где матрицы C и E определяются равенствами

$$C = \begin{pmatrix} a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 1 \\ a_3 & a_4 & a_5 & \dots & a_{n-1} & a_n & 1 & 0 \\ a_4 & a_5 & a_6 & \dots & a_n & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & a_n & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_n & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}.$$

Конструкция матрицы C была предложена в доказательстве теоремы 2.1 в [1]. Поскольку матрица C невырождена, β биективно. Покажем, что $\beta: R(f) \rightarrow A$ — гомоморфизм автоматов. Нетрудно видеть, что

$$\delta(\beta(s), x) = (sCE + s_0)Q + xb + b_0 = sC \begin{pmatrix} e_2 \\ \vdots \\ e_n \\ -a_1e_1 - \dots - a_ne_n \end{pmatrix} + (x - a_0)e_1 + s_0$$

$$\begin{aligned}
&= \left(sC \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & a_4 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & -a_n \end{pmatrix} + (x - a_0)(1, 0, \dots, 0) \right) E + s_0 \\
&= \left(s \begin{pmatrix} -a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & \dots & a_{n-1} & a_n & 1 \\ 0 & 0 & a_4 & a_5 & a_6 & \dots & a_n & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n-1} & a_n & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_n & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (x - a_0)(1, 0, \dots, 0) \right) E + s_0 \\
&= \left(s \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_n \end{pmatrix} C + (x - a_0)(0, \dots, 0, 1)C \right) E + s_0 \\
&= \beta \left(s \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & -a_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_n \end{pmatrix} + (x - a_0)(0, \dots, 0, 1) \right).
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Следствие 1. Для любой квадратной матрицы Q над полем P следующие утверждения равносильны:

- (1) любой линейный автомат над полем P с одномерным входом без выхода с матрицей Q и ненулевым входным сдвигом аффинно внутренне изоморфен некоторому линейному регистру сдвига над P без выхода,
- (2) характеристический многочлен матрицы Q неприводим.

Доказательство. Воспользуемся доказательством теоремы 2. Допустим, что выполнено условие (1), а (2) не выполнено. Тогда найдется ненулевой вектор b с минимальным многочленом степени $n < m$. Возьмем $b_0 = s_0 = (0, \dots, 0)$, $a_0 = 0$. Тогда не все состояния достижимы из s_0 , что противоречит сильной связности линейного регистра сдвига.

Наоборот, пусть выполнено условие (2). Из неприводимости следует существование состояния $s_0 \in P^m$ и входного знака $a_0 \in P$ таких, что $s_0 = s_0 Q + a_0 b + b_0$. Минимальный многочлен делит характеристический, а вектор b ненулевой, поэтому $n = m$. Следствие доказано.

Покажем, что при $q \geq 4$ любой линейный регистр сдвига внутренне изоморфен некоторому нелинейному. Пусть $f_2 \in F_{n_2+1}^*(P)$, $f_1 \in F_1(P)$, $f_1(x_1) = x_1^t$, $f = f_2 \triangleleft f_1$.

При $q \leq 4$ возьмем t такое, что $(t, q-1) = 1$, $2 \leq t \leq q-2$ (например, $t = q-2$). Тогда $f_1 \in F_1^*(P)$, и по теореме 1 регистры $R(f^{-1})$ и $R(f_2^{-1})$ внутренне изоморфны, причем $f \triangleleft f_1^{-1} = f_2$. Пусть теперь f_2 — произвольная унитарная аффинная функция. Тогда f_2^{-1} — унитарная аффинная функция, а f — неаффинная функция. Но тогда и f^{-1} — неаффинная функция.

Теорема 3. Пусть $n \geq 0$, $f \in F_{n+1}^*(P)$, α — подстановка множества P .

- (1) Если B — линейный автомат над полем P с одномерным входом без выхода и $(\alpha, \beta): R(f^{-1}) \rightarrow B$ — гомоморфизм, то существуют функции $f_1 \in F_{n_1+1}^*(P)$, $f_2 \in F_{n_2+1}^*(P)$, где $n_1 + n_2 = n$, и инъективный внутренний аффинный гомоморфизм $\beta': R(f_2^{-1}) \rightarrow B$ такие, что $f\alpha^{-1}f_2 \triangleleft f_1$, f_2 — унитарная аффинная функция и $\beta = \beta'\pi_{f_1, n_2}$.
- (2) Если $f = \alpha^{-1}f_2 \triangleleft f_1$, где $f_1 \in F_{n_1+1}^*(P)$, $f_2 \in F_{n_2+1}^*(P)$, $n_1 + n_2 = n$, f_2 — унитарная аффинная функция, то $(\alpha, \pi_{f_1, n_2}): R(f^{-1}) \rightarrow R(f_2^{-1})$ — гомоморфизм на линейный регистр сдвига.

Доказательство. Докажем (1). Поскольку условие (1) теоремы 2 выполнено, внутренний подавтомат $A = (\alpha, \beta)(R(f^{-1}))$ линейного автомата B внутренне аффинно изоморфен некоторому линейному регистру $R(f_2^{-1})$ (то есть f_2 — унитарная аффинная функция), $f_2 \in F_{n_2+1}^*(P)$. Пусть этот изоморфизм есть $\beta_0: A \rightarrow R(f_2^{-1})$. Тогда условие (1) теоремы 1 выполнено для $\beta_0\beta: R(f^{-1}) \rightarrow R(f_2^{-1})\alpha = R((\alpha^{-1}f_2)^{-1})$, и следовательно, существует функция $f_1 \in F_{n_1+1}^*(P)$, где $n_1 + n_2 = n$, такая, что $\beta_0\beta = \pi_{f_1, n_2}$ и $f = \alpha^{-1}f_2 \triangleleft f_1$. Гомоморфизм $\beta': R(f_2^{-1}) \rightarrow B$ определим равенством $\beta'(s) = \beta_0^{-1}(s)$.

Утверждение (2) следует непосредственно из импликации (2) $\Rightarrow$ (1) теоремы 1. Теорема доказана.

Теорема 3 сводит задачу об описании всех гомоморфизмов (α, β) регистра сдвига $R(f^{-1})$ в линейные автоматы (где α — подстановка) к задаче о нахождении всех разложений функции αf в сдвиг-композицию двух функций, в которых левая функция аффинная. Оставшаяся часть статьи посвящена решению этой задачи.

Здесь целесообразно перейти с языка функций на язык представляющих их многочленов из $M(P)$.

Операцию $\triangleleft$ на $M(P)$ (сдвиг-композицию многочленов) определим следующим образом: $g_2 \triangleleft g_1$ — многочлен функции $f_2 \triangleleft f_1$, где g_i — многочлен функции f_i , $i = 1, 2$.

Множество $M(P)$ относительно операций $+$ и $\cdot$ есть коммутативное кольцо, а относительно операции $\triangleleft$ — моноид с единицей x_1 . Отображение $F(P) \rightarrow M(P)$, ставящее в соответствие каждой функции представляющий ее многочлен, является сюръективным гомоморфизмом моноидов относительно операции $\triangleleft$.

Обозначим через $L(P)$ множество всех линейных многочленов из $M(P)$, то есть многочленов вида $a_1x_1 + \dots + a_nx_n$. Оно является коммутативным кольцом с единицей x_1 относительно операций $+$ и $\triangleleft$, изоморфным кольцу $P[x]$, изоморфизм $\nu: P[x] \rightarrow L(P)$ определяется равенством

$$\nu(c_0 + c_1x_1 + \dots + c_nx^n) = c_0x_1 + c_1x_2 + \dots + c_nx_{n+1}.$$

Множество $M(P)$ является абелевой группой относительно сложения. Определим умножение слева многочленов из кольца $P[x]$ на многочлены из $M(P)$ равенством $\varphi g = \nu(\varphi) \triangleleft g$. Тогда $M(P)$ — левый $P[x]$ -модуль.

Рассмотрим одну интерпретацию модуля $M(P)$. Пусть $P[x, +]$ — аддитивная группа кольца $P[x]$. Определим на ней бинарную операцию $\times$ равенством

$$\left(\sum_{0 \leq i} a_i x^i \right) \times \left(\sum_{0 \leq j} b_j x^j \right) = \sum_{0 \leq k} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) x^k.$$

Легко проверить, что эта операция ассоциативна, коммутативна, дистрибутивна и x — нейтральный элемент. Следовательно, множество многочленов относительно операций $+$ и $\times$ является коммутативным кольцом с единицей x , которое обозначим через $P[x, +, \times] = N(P)$. Приведем некоторые очевидные его свойства.

Предложение 1. Пусть $\varphi, \psi \in N(P)$. Тогда

- (1) если $d(\varphi) \geq 1$, $d(\psi) \geq 1$, то $d(\varphi \times \psi) = d(\varphi)d(\psi)$,
- (2) если $\varphi, \psi \neq 0$, $\varphi \times \psi = 0$, то либо $\varphi = a_0$, $\psi(1) = 0$, либо $\psi = a_0$, $\varphi(1) = 0$ для некоторого $a_0 \in P$, $a_0 \neq 0$.

Следствие 2. Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \psi \in N(P)$, $\psi \notin P$, $\varphi_1 \times \psi = \varphi_2 \times \psi$. Тогда $\varphi_1 - \varphi_2 \in P$.

Определим отображение $u: P[x] \rightarrow N(P)$ равенством

$$u \left(\sum_{0 \leq i} a_i x^i \right) = \sum_{0 \leq i} a_i x^{q^i}.$$

Нетрудно проверить, что u — инъективный гомоморфизм колец. Определим умножение слева многочленов из кольца $P[x]$ на многочлены из кольца $N(P)$ равенством

$$\varphi \bullet \psi = u(\varphi) \times \psi.$$

Тогда из гомоморфности u и коммутативности $N(P)$ следует, что $N(P)$ — $P[x]$ -алгебра.

Теорема 4. Отображение $U: M(P) \rightarrow N(P)$, определяемое равенством

$$U \left(\sum_{0 \leq k, 1 \leq i_1 < \dots < i_k, 1 \leq s_j \leq -1} a_{i_1, \dots, i_k; s_1, \dots, s_k} x_{i_1}^{s_1} \dots x_{i_k}^{s_k} \right) = \sum_{0 \leq k, 1 \leq i_1 < \dots < i_k, 1 \leq s_j \leq q-1} a_{i_1, \dots, i_k; s_1, \dots, s_k} x^{\sum_{j=1}^k s_j} q^{i_j - 1}.$$

является изоморфизмом $P[x]$ -модулей.

Доказательство. Члены многочлена однозначно определяются своими номерами, поэто-

му U — биекция. Так как $U(g_2 + g_1) = U(g_2) + U(g_1)$ и

$$\begin{aligned}
 U(\varphi g) &= U(v(\varphi) \triangleleft g) \\
 &= U\left(\left(\sum_{0 \leq i} a_i x_{i+1}\right) \triangleleft \left(\sum_{0 \leq k, 1 \leq i_1 < \dots < i_k, 1 \leq s_j \leq q-1} a_{i_1, \dots, i_k; s_1, \dots, s_k} x_{i_1}^{s_1} \dots x_{i_k}^{s_k}\right)\right) \\
 &= U\left(\sum_{0 \leq k, 1 \leq i_1 < \dots < i_k, 1 \leq s_j \leq q-1} a_i a_{i_1, \dots, i_k; s_1, \dots, s_k} x_{i_1+i}^{s_1} \dots x_{i_k+i}^{s_k}\right) \\
 &= \sum_{0 \leq k, 1 \leq i_1 < \dots < i_k, 1 \leq s_j \leq q-1} a_i a_{i_1, \dots, i_k; s_1, \dots, s_k} x^{\sum_{j=1}^k s_j q^{i+i_j-1}} \\
 &= \left(\sum_{0 \leq i} a_i x^{q^i}\right) \sum_{0 \leq k, 1 \leq i_1 < \dots < i_k, 1 \leq s_j \leq q-1} a_{i_1, \dots, i_k; s_1, \dots, s_k} x^{\sum_{j=1}^k s_j q^{i_j-1}} \\
 &= u(\varphi) \times U(g) = \varphi \bullet U(g).
 \end{aligned}$$

теорема доказана.

Пусть $M_0(P) = P \subset M(P)$, а $M_1(P)$ — множество всех многочленов из $M(P)$ с нулевым свободным членом, и пусть $E(P)$ — множество всех одночленов с первой переменной, то есть

$$E(P) = \{x_1^{s_1} x_{i_2}^{s_2} \dots x_{i_k}^{s_k} \mid 1 \leq k, 1 < i_2 < \dots < i_k, 1 \leq s_j \leq q-1\} \subset M(P).$$

Теорема 5. $M(P) = M_0(P) + M_1(P)$ есть прямая сумма подмодулей $P[x]$ -модуля $M(P)$, и $M_1(P)$ — свободный $P[x]$ -модуль с базисом $E(P)$.

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Поскольку

$$x_{i_1}^{s_1} x_{i_2}^{s_2} \dots x_{i_k}^{s_k} = x_{i_1} \triangleleft x_1^{s_1} x_{i_2-i_1+1}^{s_2} \dots x_{i_k-i_1+1}^{s_k} = x^{i_1} (x_1^{s_1} x_{i_2-i_1+1}^{s_2} \dots x_{i_k-i_1+1}^{s_k}), \quad (1)$$

$E(P)$ порождает модуль $M_1(P)$. Покажем, что $E(P)$ — свободное множество. Пусть

$$\sum_{1 \leq k, 1 \leq i_2 < \dots < i_k, 1 \leq s_j \leq q-1} \varphi_{i_2, \dots, i_k; s_1, \dots, s_k} x_{i_1}^{s_1} \dots x_{i_k}^{s_k} = 0.$$

Любое натуральное число (номер одночлена) однозначно разлагается в произведение степени q и некратного q числа, поэтому $\varphi_{i_2, \dots, i_k; s_1, \dots, s_k} x_{i_1}^{s_1} \dots x_{i_k}^{s_k} = 0$ для всех $k, i_2, \dots, i_k; s_1, \dots, s_k$. Теорема доказана.

Эта теорема означает следующее: любой многочлен $g \in M(P)$ однозначно представляется в виде

$$g = a_0 + \sum_{1 \leq k, 1 \leq i_2 < \dots < i_k, 1 \leq s_j \leq q-1} l_{i_2, \dots, i_k; s_1, \dots, s_k} \triangleleft x_{i_1}^{s_1} \dots x_{i_k}^{s_k}, \quad (2)$$

где $a_0 \in P$, $l_{i_2, \dots, i_k; s_1, \dots, s_k} \in L(P)$. Это представление назовем разложением многочлена по одночленам с первой переменной. Его легко получить, используя (1).

В качестве следствия из теоремы 5 получаем теорему об аффинных левых делителях.

Теорема 6. Пусть $g, g_1, g_2 \in M(P)$ и разложения этих многочленов по одночленам с первой переменной имеют вид

$$\begin{aligned} g &= a_0 + \sum_{1 \leq k, 1 \leq i_2 < \dots < i_k, 1 \leq s_j \leq q-1} l_{i_2, \dots, i_k; s_1, \dots, s_k} \triangleleft x_{i_1}^{s_1} \dots x_{i_k}^{s_k}, \\ g_1 &= a'_0 + \sum_{1 \leq k, 1 \leq i_2 < \dots < i_k, 1 \leq s_j \leq q-1} l'_{i_2, \dots, i_k; s_1, \dots, s_k} \triangleleft x_{i_1}^{s_1} \dots x_{i_k}^{s_k}, \\ g_2 &= a''_0 + l, \end{aligned}$$

где $l \in L(P)$. Тогда следующие утверждения равносильны:

- (1) $g = g_2 \triangleleft g_1$,
- (2) $l_{i_2, \dots, i_k; s_1, \dots, s_k} = l \triangleleft l'_{i_2, \dots, i_k; s_1, \dots, s_k}$ для всех $1 \leq k, 1 < i_2 < \dots < i_k, 1 \leq s_j \leq q-1$ и $a_0 = a''_0 + l(a'_0, \dots, a'_0)$,
- (3) $v^{-1}(l_{i_2, \dots, i_k; s_1, \dots, s_k}) = v^{-1}(l)v^{-1}(l'_{i_2, \dots, i_k; s_1, \dots, s_k})$ для всех $1 \leq k, 1 < i_2 < \dots < i_k, 1 \leq s_j \leq q-1$ и $a_0 = a''_0 + l(a'_0, \dots, a'_0)$.

Утверждение (3) этой теоремы сводит задачу об описании всех разложений $g = g_2 \triangleleft g_1$ с аффинным многочленом g_2 к задаче об описании всех общих делителей многочленов $v^{-1}(l_{i_2, \dots, i_k; s_1, \dots, s_k}) \in P[x]$.

Если $g = g_2 \triangleleft g_1, g_2 = a + a_i x_i, 1 \leq i, a, a_i \in P$, то g_2 назовем тривиальным левым делителем многочлена g .

Для любого ненулевого многочлена $g \in M(P)$ через $d'(g)$ обозначим максимальное число переменных во входящих в g одночленах. Для двоичного случая $d'(g) = d(g)$.

Следствие 3. Пусть $g \in M(P), d(g) \geq 2$ и выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- (1) для некоторого $s \geq 1$ в g входит только один одночлен степени s ,
- (2) для некоторого $k_0 \geq 1$ в g входит только один одночлен с числом переменных k_0 ,
- (3) для некоторого r , некратного q , в g входит только один одночлен с номером вида $q^t r$,
- (4) $g = \sum_{0 \leq k, 1 \leq i_1 < \dots < i_k, 1 \leq s_j \leq q-1} a_{i_1, \dots, i_k; s_1, \dots, s_k} x_{i_1}^{s_1} \dots x_{i_k}^{s_k}, a_{n+1;1} \neq 0, d'(g) \geq 2$ и многочлен $\sum_{i=1}^{n+1} a_{i;1} x^{i-1}$ неприводим.

Тогда g не имеет неприводимых аффинных левых делителей.

Доказательство. Из (1) следует (3) и из (2) следует (3).

Пусть выполнено (3), и этот одночлен есть $x_{i_1}^{s_1} \dots x_{i_{k_0}}^{s_{k_0}}$ (то есть $t = i_1 - 1$). Тогда в обозначениях теоремы 6 $l_{i_2-i_1+1, \dots, i_{k_0}-i_1+1; s_1, \dots, s_{k_0}} = a_{i_1, \dots, i_{k_0}; s_1, \dots, s_{k_0}} x_{i_1}$ и $l = a_i x_i$ для некоторого $1 \leq i \leq i_1, a_i \neq 0$.

Пусть выполнено условие (4). Тогда в обозначениях теоремы 6 многочлен $v^{-1}(l_1) = \sum_{i=1}^{n+1} a_{i;1} x^{i-1}$ неприводим, и следовательно, либо $v^{-1}(l) = a \neq 0$, либо $v^{-1}(l) = v^{-1}(l_1)$.

Если в многочлен g входит член вида $x_{i_1}^{s_1} \dots x_{i_k}^{s_k}$, то $i_1 \leq n - k + 2$. Следовательно, в формуле (2)

$$d(v^{-1}(l_{i_2, \dots, i_k; s_1, \dots, s_k})) \leq n - k + 1. \quad (3)$$

Допустим, что $v^{-1}(l) = v^{-1}(l_1)$. Из неприводимости этого многочлена и теоремы 6 следует, что тогда $l_{i_2, \dots, i_k; s_1, \dots, s_k} = 0$ для всех $k \geq 2$. Тогда из формулы (2) следует, что $d'(g) \leq 1$, получаем противоречие. Следствие доказано.

Следствие 4. Пусть $f \in F_{n+1}^*(P)$, f существенно зависит от первой переменной и для представляющего функцию f^{-1} многочлена g выполнено условие следствия 3. Тогда регистр $R(f)$ не имеет нетривиальных внутренних гомоморфизмов в линейные автоматы над полем P с одномерным входом без выхода.

Доказательство. Пусть $\beta: R(f) \rightarrow B$ — гомоморфизм в линейный автомат над полем P с одномерным входом без выхода. Тогда по теореме 3 существуют функции $f_1 \in F_{n_1+1}^*(P)$, $f_2 \in F_{n_2+1}^*(P)$, где $n_1 + n_2 = n$, такие, что $f^{-1} = f_2 \triangleleft f_1$, f_2 — унитарная аффинная функция, $\beta(R(f)) \cong R(f_2^{-1})$. Тогда $f_2 = a + x_{n_2+1}$ по следствию 3. Поскольку f^{-1} существенно зависит от первой переменной, справедливо равенство $n_2 = 0$, и следствие доказано.

Для двоичного случая следствие 4 приобретает более простой вид.

Следствие 5. Пусть $P = GF(2)$, $f \in F_{n+1}^*(P)$, f существенно зависит от первой переменной, $g = \sum_{0 \leq k, 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n+1} x_{i_1} \dots x_{i_k}$ — представляющий функцию f многочлен, $d(g) \geq 2$, и выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- (1) для некоторого $s \geq 1$ в g входит только один одночлен степени s ,
- (2) для некоторого нечетного r в g входит только один одночлен с номером вида $2^t r$,
- (3) многочлен $\sum_{i=1}^{n+1} a_i x^{i-1}$ неприводим.

Тогда регистр $R(f)$ не имеет нетривиальных гомоморфизмов в линейные автоматы над полем P с одномерным входом без выхода.

Доказательство. Пусть $u(\alpha, \beta): R(f) \rightarrow B$ — гомоморфизм в линейный автомат над полем P с одномерным входом без выхода. Тогда $\beta: R(f) \rightarrow B\alpha$ — внутренний гомоморфизм в линейный автомат и по следствию 4 он тривиален. Следствие доказано.

Следствие 6. Пусть $f \in F_{n+1}^*(P)$, $f_2 \in F_{n_2+1}^*(P)$, f_2 — унитарная аффинная функция и регистр $R(f_2)$ является внутренне гомоморфным образом регистра $R(f)$. Тогда $n_2 \leq n - d'(g) + 1$, где g — многочлен, представляющий функцию f^{-1} .

Доказательство. По теореме 1, $g = g_2 \triangleleft g_1$, где $g_2 = a''_0 + l$ — аффинный многочлен $d(v^{-1}(l)) = n_2$. В разложении (2) при $k = d'(g) = n_2$ есть коэффициент $l_{i_2, \dots, i_k; s_1, \dots, s_k}$, отличный от нуля. По теореме 6 и формуле (3),

$$n_2 = d(v^{-1}(l)) \leq d(v^{-1}(l_{i_2, \dots, i_k; s_1, \dots, s_k})) \leq n - d'(g) + 1.$$

Следствие доказано.

Для двоичного случая эту оценку можно уточнить.

Следствие 7. Пусть $P = GF(2)$, $f \in F_{n+1}^*(P)$, $f_2 \in F_{n_2+1}^*(P)$, $d(f) \geq 2$, f_2 — аффинная функция и регистр $R(f_2)$ является внутренне гомоморфным образом регистра $R(f)$. Тогда $n_2 \leq n - d(f)$.

Доказательство. По теореме 1, $g = g_2 \triangleleft g_1$, где $g_2 = a_0'' \oplus l$ — аффинный многочлен, $d(v^{-1}(l)) = n_2$. Поскольку f линейна по последней переменной, в разложении (2) при $k \geq 2$

$$d(v^{-1}(l_{i_2, \dots, i_k})) \geq n - k. \quad (4)$$

В разложении (2) при $k = d(g)$ есть $l_{i_2, \dots, i_k} \neq 0$. По теореме 6 и формуле (4),

$$n_2 = d(v^{-1}(l)) \leq d(v^{-1}(l_{i_2, \dots, i_k})) \leq n - d(g).$$

Следствие доказано.

Пример 1 (двоичный случай). Опишем все гомоморфизмы регистра $R(f)$ на линейные регистры для функции $f \in F_{n+1}^*(GF(2))$, где $n = 8$ и f представляется многочленом

$$g = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_7 \oplus x_8 \oplus x_9 \oplus x_2x_4 \oplus x_3x_5 \oplus x_3x_6 \oplus x_4x_6 \oplus x_4x_7 \oplus x_5x_8.$$

1. По формуле (1) найдем разложение g по одночленам с первой переменной:

$$g = (x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_7 \oplus x_8 \oplus x_9) \triangleleft x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3 \oplus x_4) \triangleleft x_1x_3 \oplus (x_3 \oplus x_4 \oplus x_5) \triangleleft x_1x_4.$$

2. Справедливы равенства

$$\begin{aligned} v^{-1}(l_\emptyset) &= 1 \oplus x \oplus x^2 \oplus x^6 \oplus x^7 \oplus x^8 \\ &= (1 \oplus x \oplus x^2)(1 \oplus x^6), \\ v^{-1}(l_3) &= x \oplus x^2 \oplus x^3 = (1 \oplus x \oplus x^2)x, \\ v^{-1}(l_4) &= x^2 \oplus x^3 \oplus x^4 = (1 \oplus x \oplus x^2)x^2, \end{aligned}$$

и следовательно, многочлен $1 \oplus x \oplus x^2$ — единственный нетривиальный общий делитель этих многочленов.

3. Для $a = 0, 1$ положим

$$\begin{aligned} g_{2,a} &= a \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3, \\ g_{1,a} &= a \oplus (x_1 \oplus x_7) \triangleleft x_1 \oplus x_2 \triangleleft x_1x_3 \oplus x_3 \triangleleft x_1x_4 \\ &= a \oplus x_1 \oplus x_7 \oplus x_2x_4 \oplus x_3x_6. \end{aligned}$$

Тогда по теореме 6 $g = g_{2,a} \triangleleft g_{1,a}$, $a = 0, 1$, — все нетривиальные разложения с левым аффинным многочленом.

4. Для $a = 0, 1$ положим

$$\begin{aligned} f_{2,a} &\in F_3^*(GF(2)), & f_{2,a} &= g_{2,a}, \\ f_{1,a} &\in F_7^*(GF(2)), & f_{1,a} &= g_{1,a}. \end{aligned}$$

Тогда по теореме 3

$$(x \oplus a_0, \pi_{f_{1,a}, 2}): R(f_{2,a} \oplus a_0), \quad a, a_0 = 0, 1,$$

— все гомоморфизмы регистра $R(f)$ на линейные регистры ненулевой длины.

Список литературы

1. Башев В. А., Теоретико-групповая характеристика неавтономных линейных регистров сдвига. *Труды по дискретной математике* (2004) **8**, 52–68.
2. Солодовников В. И., Гомоморфизмы двоичных регистров сдвига. *Дискретная математика* (2005) **17**, №1, 73–88.

Статья поступила 24.12.2006.