Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Черепов, Оценки сложности приближения непрерывных функций некоторых классов детерминированными функциями с задержкой, *Дискрет. матем.*, 2008, том 20, выпуск 4, 147–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1034>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 16:56:20

Оценки сложности приближения непрерывных функций некоторых классов детерминированными функциями с задержкой

© 2008 г. А. Н. Черепов

Рассматриваются детерминированные функции с задержкой, являющиеся обобщением детерминированных функций. Вводится понятие сложности ε -приближения непрерывной действительной функции функцией с задержкой. Для ряда классов непрерывных функций, для которых известны оценки числа элементов 2ε -различимого множества функций, получены верхние и нижние оценки сложности.

1. Введение

Задача приближения функций является одной из классических в математике. Эта задача часто ставится следующим образом [2]. Пусть $(B, \|\cdot\|)$ — банахово пространство, а H и A — его подмножества, такие, что для любых $x \in H$ и $\varepsilon > 0$ найдется $y \in A$, удовлетворяющий неравенству $\|x - y\| < \varepsilon$. На множестве A вводится функционал L , сопоставляющий каждому $y \in A$ число $L(y)$, называемое сложностью элемента y . Под сложностью ε -приближения элемента x понимается величина

$$L(x, \varepsilon) = \inf\{L(y) : y \in A, \|x - y\| < \varepsilon\},$$

а сложностью приближения класса H — число

$$L(H, \varepsilon) = \sup\{L(x, \varepsilon) : x \in H\}.$$

В качестве H чаще всего берется множество $C(I^n)$ всех непрерывных функций, определенных на n -мерном единичном кубе I^n и принимающих значения из отрезка $[0, 1]$. Норма $\|f\|$ функции $f \in C(I^n)$ определяется равенством

$$\|f\| = \max\{|f(x)| : x \in I^n\}.$$

В теории приближений, как правило, множество A совпадает с классом всех полиномов (или рациональных функций), под сложностью понимается степень полинома (или рациональной функции), реализующего эту функцию.

Задача об оценке сложности реализации непрерывных функций и классов таких функций, была поставлена А. Н. Колмогоровым в начале 60-х годов XX века. При этом в качестве множества приближающих функций A бралось множество дискретных функций, близких к автоматным [5]. Несколько иной подход был рассмотрен С. Б. Гашковым (см.

[2]), множество A при этом совпадает с множеством функций, реализуемых схемами в непрерывных базисах. В предлагаемой работе в качестве множества приближающих функций рассматривается класс дискретных детерминированных функций с задержкой. Этот класс появляется при естественном обобщении понятия детерминированной функции. В этом смысле задача приближения детерминированными функциями с задержкой является более близкой к колмогоровской постановке, чем подход, реализованный С. Б. Гашковым. Первые результаты о приближении непрерывных функций функциями с задержкой были получены Н. Ф. Тюленевым [6, 7]. В предлагаемой статье приводится подробное изложение результатов работ [8–11].

2. Детерминированные функции с задержкой и их свойства

Рассмотрим множество всех бесконечных двоичных последовательностей E . Множество всех функций вида $f: E^n \rightarrow E$ обозначим P . Предположим, что $a_1, \dots, a_n$ — последовательности из E , а $\tilde{a} = (a_1, \dots, a_n)$ — набор таких последовательностей. Пусть $a_1|k, \dots, a_n|k$ — первые k членов последовательностей $a_1, \dots, a_n$ соответственно, тогда $\tilde{a}|k = (a_1|k, \dots, a_n|k)$.

Назовем функцию f детерминированной, если для всех $k = 1, 2, \dots$ выполнено соотношение

$$\forall \tilde{a}, \tilde{b}: \tilde{a}|k = \tilde{b}|k \rightarrow f(\tilde{a})|k = f(\tilde{b})|k.$$

Класс всех детерминированных функций обозначим P_d , все остальные функции из P будем называть недетерминированными.

Определение 1 ([6]). Говорим, что функция f является детерминированной функцией с задержкой τ , где τ — произвольное неотрицательное целое число, если для любого $k = 1, 2, \dots$ и любых $\tilde{a}, \tilde{b}$

$$\tilde{a}|k + \tau = \tilde{b}|k + \tau \implies f(\tilde{a})|k = f(\tilde{b})|k.$$

Множество всех функций с задержкой τ обозначим P_d^τ . Заметим, что $P_d^0 = P_d$.

Множество P_d^τ можно определить и следующим образом.

Определение 2. Говорим, что функция f является детерминированной функцией с задержкой τ , где τ — произвольное неотрицательное целое число, если существует такая детерминированная функция g , что для любого $\tilde{a}$ и $b = g(\tilde{a})$, $b = b(1)b(2)b(3) \dots$ значение функции f на наборе $\tilde{a}$ равно $f(\tilde{a}) = b(\tau + 1)b(\tau + 2)b(\tau + 3) \dots$

Предложение 1 ([9, 10]). *Определения 1 и 2 эквивалентны.*

Из определения 2 следует, что функцию n аргументов из множества P_d^τ можно трактовать так: берется дискретное детерминированное устройство с n входами, преобразующее бесконечные входные последовательности из нулей и единиц в такую же выходную последовательность и рассматривается выход этого устройства не с первого момента времени, а с момента времени $\tau + 1$. Осуществляемое преобразование и считается функцией множества P_d^τ . Таким образом, функции с задержкой являются естественным обобщением детерминированных функций.

3. Приближение непрерывных функций действительными функциями с задержкой

Перейдем к функциям вида $f: I^n \rightarrow [0, 1]$. При этом будем считать, что числа отрезка $[0, 1]$ представлены в двоичной системе счисления и для чисел, допускающих два представления, выберется представление с бесконечным хвостом из нулей. Для числа 1 выберем представление $1 = 0,111\dots$.

Определение 3. Пусть $\alpha = 0, \alpha_1 \alpha_2 \dots, \beta = 0, \beta_1 \beta_2 \dots$ — действительные числа отрезка $[0, 1]$ и k — натуральное число. Тогда будем считать, что $\alpha|k = \beta|k$, если у чисел α, β совпадают первые k двоичных разряда. Для точек $\tilde{a}, \tilde{b} \in [0, 1]^n$ справедливо равенство $\tilde{a}|k = \tilde{b}|k$, если для каждой координаты выполнено равенство $a_i|k = b_i|k$. Действительную функцию f назовем детерминированной, если для любого $k = 1, 2, \dots$ из $\tilde{a}|k = \tilde{b}|k$ следует, что $f(\tilde{a})|k = f(\tilde{b})|k$. Класс всех детерминированных функций обозначим D_d . В множество D_d^τ действительных детерминированных функций с задержкой τ включим все функции, удовлетворяющие условию: для любого $k = 1, 2, \dots$ из равенства $\tilde{a}|k + \tau = \tilde{b}|k + \tau$ следует, что $f(\tilde{a})|k = f(\tilde{b})|k$.

Класс D_d^∞ определим как объединение всех множеств D_d^τ .

Пусть $\tilde{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in E^n, b \in E$ и $\tilde{a}, b$ не заканчиваются бесконечными последовательностями из единиц. Пусть $\tilde{a} = (0, a_1^1 a_2^1 \dots; 0, a_1^2 a_2^2 \dots; \dots; 0, a_1^n a_2^n \dots)$ и $\beta = 0, b_1 b_2 \dots$, где двоичные разряды чисел совпадают с значениями последовательностей $\tilde{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n), b$. Дискретную функцию $f: E^n \rightarrow E$ и действительную функцию $d: I^n \rightarrow [0, 1]$ назовем соответствующими друг другу, если $d(\tilde{a}) = \beta$ для любых таких $\tilde{a}, b$. Множества D_d^τ и D_d^∞ могут быть построены по соответствующим им классам дискретных функций при потере части информации о значениях дискретных функций на последовательностях вида $a(1)a(2)\dots a(i)0111\dots$.

Определение 4. Пусть $\varepsilon > 0$, будем говорить, что функция $d(\tilde{x})$ ε -равна функции $f(\tilde{x})$ на единичном кубе I^n , если при любом $\tilde{x} \in I^n$ справедливо неравенство $|f(\tilde{x}) - d(\tilde{x})| < \varepsilon$. Будем также говорить, что $d(\tilde{x})$ ε -приближает $f(\tilde{x})$.

Пусть $C(I^n)$ — множество непрерывных на единичном кубе I^n функций, принимающих значения из отрезка $[0, 1]$. Оказывается, что не всякую функцию множества $C(I^n)$ можно ε -приблизить детерминированными функциями класса D_d , но функций класса D_d^∞ уже достаточно для решения этой задачи.

Теорема 1 ([6, 9, 10]). Для любого ε и любой функции $f(\tilde{x}) \in C(I^n)$ существует натуральное число τ и функция $d(\tilde{x}) \in D_d^\tau$ такие, что $d(\tilde{x})$ ε -равна $f(\tilde{x})$.

Определение 5. Под константной функцией с задержкой τ понимается функция множества D_d^τ , такая, что соответствующая ей функция P_d^τ на выходе после задержки τ выдает последовательность значений, не зависящую от значений входных сигналов, поступающих после задержки. Назовем функцию $f(\tilde{x})$ ограниченной m разрядами, если существует такое m , что при любом $\tilde{x} \in I^n$ справедливо равенство $f(\tilde{x}) = 0, a_1 a_2 \dots a_m 00\dots$.

Предложение 2. Для любого $\varepsilon = 2^{-k}$ и любой функции $f(\tilde{x}) \in C(I^n)$ существует число τ и константная функция $d(\tilde{x}) \in D_d^\tau$, ограниченная $k+1$ разрядом, такие, что $d(\tilde{x})$ ε -равна $f(\tilde{x})$. При этом дискретная функция $r(\tilde{x})$, соответствующая функции $d(\tilde{x})$, может быть получена с помощью задержки τ из некоторой ограниченно детерминированной функции.

Доказательство. Возьмем $\varepsilon_1 = 2^{-k-1}$. Пусть $g \in D_d^\tau$ — функция, ε_1 -приближающая f . Заметим, что если у функций f и g при любом $\tilde{x}$ совпадают первые $k+1$ разряда, то $|d(\tilde{x}) - g(\tilde{x})| < \varepsilon_1$ при всех x . Для произвольного $\tilde{x}$ определим значение $y = d(\tilde{x})$, полагая, что первые $k+1$ разряда y совпадают с соответствующими первыми разрядами значения $g(\tilde{x})$, а остальные разряды равны 0. Тогда при любом $\tilde{x}$

$$\begin{aligned} |(f(\tilde{x}) - d(\tilde{x}))| &= |(f(\tilde{x}) - g(\tilde{x})) + (g(\tilde{x}) - d(\tilde{x}))| \\ &\leq |f(\tilde{x}) - g(\tilde{x})| + |g(\tilde{x}) - d(\tilde{x})| < \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = \varepsilon, \end{aligned}$$

то есть функция d ε -приближает f и принадлежит множеству D_d^τ .

Рассмотрим дискретную функцию $r(\tilde{x})$, соответствующую $d(\tilde{x})$. Достаточно показать, что дискретная функция, соответствующая константной функции, ограниченной $k+1$ разрядом, может быть получена из некоторой ограниченно-детерминированной функции с помощью задержки τ . Такую функцию можно описать с помощью двоичного дерева следующим образом. Ребрам двоичного дерева, соответствующего задержке, припишем произвольные выходные значения. В каждую висячую вершину поместим ограниченно-детерминированную функцию, реализующую двоичную последовательность $a_1 a_2 \dots a_{k+1} 00 \dots$, первые элементы которой совпадают с первыми $k+1$ разрядами значения функции $d(\tilde{x})$, а остальные значения равны 0.

В дальнейшем дискретную функцию $r(\tilde{x})$ будем называть (τ, m) -реализацией действительной функции $d(\tilde{x})$, если она соответствует константной функции $r(\tilde{x})$ с задержкой τ , ограниченной m разрядами.

Предложение 3. Число различных константных функций n переменных с задержкой τ , ограниченных m разрядами, равно $2^{m2^{n\tau}}$.

Доказательство. Подсчитаем число дискретных функций с задержкой τ , соответствующих константным функциям n переменных, ограниченных m разрядами. Для произвольной константной функции $d(\tilde{x})$ рассмотрим ее (τ, m) реализацию. Задержке τ будет соответствовать двоичное дерево высоты τ , имеющее $2^{n\tau}$ висячие вершины. В каждой висячей вершине расположена ограниченно-детерминированная функция, реализующая двоичную выходную последовательность $a_1 a_2 \dots a_m 00 \dots$. Различных таких функций будет столько же, сколько существует двоичных наборов длины m , то есть 2^m . Следовательно, различных константных функций с задержкой τ , ограниченных m разрядами будет $2^{m2^{n\tau}}$.

4. Оценки сложности приближения для некоторых классов функций

Определение 6. Для любой непрерывной функции $f \in C(I^n)$ и любого $\varepsilon < 1$ назовем сложностью реализации в классе детерминированных функций с задержкой τ наименьшее τ такое, что существует функция $d(\tilde{x})$ класса D_d^τ ε -равная f . Сложность реализации функции f будем обозначать $L(f, \varepsilon)$. Пусть задан подкласс H класса непрерывных на множестве I^n функций, принимающих значения из отрезка $[0, 1]$. Положим

$$L(H, \varepsilon) = \sup(L(f, \varepsilon): f \in H).$$

Укажем оценки величины $L(H, \varepsilon)$ для некоторых известных классов непрерывных функций, для которых найдены оценки числа 2ε -различимых функций (см. [1, 4, 5]).

Введем следующие обозначения [3]. Будем считать, что

$$f(n) = O(g(n)) \iff |f(n)| \leq C|g(n)|$$

для некоторой константы $C > 0$ и всех n . Кроме того,

$$f(n) \leq g(n) \iff \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty.$$

Если $f(n) \leq g(n)$ и $f(n) \leq g(n)$, то $f(n) \asymp g(n)$.

4.1. Класс функций, удовлетворяющих условию Гельдера

Напомним, что функция $f(\tilde{x})$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем α и константой L , если для любых $\tilde{x}, \tilde{y}$

$$|f(\tilde{x}) - f(\tilde{y})| \leq L \|\tilde{x} - \tilde{y}\|^\alpha,$$

где в качестве нормы рассматривается максимум модуля разности координат. В дальнейшем будем полагать $L = 1$, что не ограничивает общности рассмотрения. Обозначим класс функций от не более чем n аргументов, удовлетворяющих условию Гельдера с показателем α и константой $L = 1$, через $G_n(\alpha)$.

Предложение 4. *Справедливо неравенство*

$$L(G_1(\alpha), \varepsilon) \leq \frac{1}{\alpha} \log \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\alpha}.$$

Здесь и в дальнейшем логарифм берется по основанию 2.

Доказательство. Заметим, что приращение функции $f \in G_1(\alpha)$ на отрезке длины δ не превосходит δ^α . Рассмотрим разбиение отрезка $[0, 1]$ с шагом $h = 2^{-\tau}$ точками $0, 2^{-\tau}, \dots, i2^{-\tau}, \dots, 1$ при

$$\tau = \left\lceil \frac{1}{\alpha} \log \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + \frac{1}{\alpha},$$

где $[a]$ означает целую часть числа a с избытком. Такое разбиение будем в дальнейшем называть решеткой I_h . Тогда длина каждого из отрезков решетки не превосходит $2^{-\tau} \leq 2^{-(1/\alpha) \log(1/\varepsilon) - 1/\alpha}$. Приращение функции f на каждом таком отрезке не более $2^{-\tau\alpha} \leq 2^{-\log(1/\varepsilon) - 1} = \varepsilon/2$. Построим функцию $d(x)$ с задержкой τ , ε -равную функции $f(x)$. Для этого рассмотрим дискретную функцию с задержкой τ , устроенную следующим образом. В всякую вершину, которая соответствует последовательности входных двоичных символов $a(1), \dots, a(\tau)$, поместим детерминированную функцию, выдающую последовательность, совпадающую с первыми $k + 1$ двоичными разрядами числа $f(a)$, $a = 0, a(1) \dots a(\tau) 00 \dots$, а затем нули. Число k выберем равным $k = \lceil \log(1/\varepsilon) \rceil$. Тогда при $a = 0, a(1)a(2) \dots a(\tau) 00 \dots$ справедливо неравенство

$$|f(a) - d(a)| \leq 2^{-(k+1)} < 2^{-\log(1/\varepsilon) - 1} = \varepsilon/2.$$

Поскольку изменение функции f на каждом из отрезков решетки I_h не превосходит $\varepsilon/2$, в любой точке x отрезка решетки $|f(x) - d(x)| < \varepsilon$. Отсюда следует оценка

$$L(G_1(\alpha), \varepsilon) \leq \frac{1}{\alpha} \log \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\alpha} \leq C \frac{1}{\alpha} \log \frac{1}{\varepsilon},$$

где C — некоторая положительная константа, не зависящая от α .

Следствие 1. Для класса непрерывных функций $G_1(1)$, удовлетворяющих условию Липшица, справедлива оценка

$$L(G_1(1), \varepsilon) \leq \log \frac{1}{\varepsilon} + 1$$

или

$$L(G_1(1), \varepsilon) = O\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Определение 7 ([1, 4]). Множество функций M называется ε -различимым на множестве G , если для любых функций f_1, f_2 из этого множества справедливо неравенство $\sup |f_1 - f_2| > \varepsilon$, где супремум ищется на множестве G .

Предложение 5 ([1]). В множестве функций $G_1(1)$ с дополнительным условием $f(0) = 0$ существует 2ε -различимое подмножество функций. Мощность этого подмножества имеет порядок $2^{C/\varepsilon}$.

Используя это утверждение, можно получить нижнюю оценку для $L(G_1(1), \varepsilon)$.

Предложение 6. Справедливо соотношение

$$L(G_1(1), \varepsilon) \asymp \log(1/\varepsilon).$$

Доказательство. Поскольку верхняя оценка уже получена, достаточно получить нижнюю оценку. Пусть $k = \lceil \log(1/\varepsilon) \rceil$. Согласно предложению 2, любую функцию класса $G_1(1)$ можно приблизить некоторой функцией, имеющей $(\tau, k + 2)$ -реализацию. Мощность множества $(\tau, k + 2)$ -реализаций не может быть меньше мощности 2ε -различимого подмножества функций из $G_1(1)$, поэтому, учитывая предложение 3, получаем, что $2^{(k+2)2^\tau} \geq 2^{C/\varepsilon}$ или $(k + 2)2^\tau \geq C/\varepsilon$. Поскольку $k = \lceil \log(1/\varepsilon) \rceil$, справедливо соотношение

$$\tau \geq \log C + \log(1/\varepsilon) - \log(\log(1/\varepsilon) + 2)$$

так, что $\tau \asymp \log(1/\varepsilon)$.

4.2. Класс F_r

Класс F_r определяется как класс непрерывных на отрезке $[0, 1]$ функций, имеющих r производных. Функции $f \in F_r$ и их производные удовлетворяют неравенствам

$$\max |f^{(i)}(x)| \leq 1, \quad i = 1, \dots, r,$$

где максимум берется на отрезке $[0, 1]$. При этом выполнены условия

$$f^{(i)}(0) = 0, \quad i = 1, \dots, r - 1.$$

Оценим величину $L(F_r, \varepsilon)$. Для этого воспользуемся тем, что функции класса F_r удовлетворяют условию Липшица с константой 1, и следствием 1 из предложения 4.

Предложение 7. Для функций класса F_r справедлива верхняя оценка

$$L(F_r, \varepsilon) \leq \log \frac{1}{\varepsilon} + 1.$$

Предложение 8 ([1, 4, 5]). В классе F_r существует 2ε -различимое множество, содержащее порядка $2^{C(1/\varepsilon)^{1/r}}$ функций.

Используя это предложение, получим следующий утверждение.

Предложение 9. Для функций класса F_r справедлива нижняя оценка

$$L(F_r, \varepsilon) \geq \log \frac{1}{\varepsilon}.$$

Доказательство. Для любой функции класса F_r имеется $(\tau, k + 2)$ -реализация, где $k = \lceil \log(1/\varepsilon) \rceil$. Число таких реализаций не может быть меньше числа 2ε -различимых функций класса F_r , поэтому число $2^{(k+2)2^\tau}$ не может быть меньше числа $2^{C(1/\varepsilon)^{1/r}}$. Поэтому

$$(k + 2)2^\tau \geq C(1/\varepsilon)^{1/r}.$$

Отсюда следует, что

$$\tau \geq \log C + \frac{1}{r} \log \frac{1}{\varepsilon} - \log \left(\log \frac{1}{\varepsilon} + 2 \right).$$

Следовательно, $\tau \geq \log(1/\varepsilon)$.

4.3. Класс функций от n аргументов, удовлетворяющих условию Гельдера

Пусть E^n есть n -мерное евклидово пространство и I^n есть n -мерный замкнутый куб, задаваемый неравенствами $0 \leq x_i \leq 1$, $i = 1, \dots, n$. Рассмотрим множество $F_r G_n(\alpha)$ действительных функций n переменных, определенных на I^n , все частные производные которых порядка не выше r удовлетворяют условию Гельдера с показателем $0 < \alpha \leq 1$ и константой $L = 1$ и таких, что при $\sum_{i=1}^n k_i \leq r$

$$\left| \frac{\delta^{k_1+k_2+\dots+k_n}}{\delta_{x_1}^{k_1} \delta_{x_2}^{k_2} \dots \delta_{x_n}^{k_n}} f(0, \dots, 0) \right| \leq 1.$$

Предложение 10. Справедлива оценка

$$L(F_r G_n(\alpha), \varepsilon) \geq \frac{1}{\alpha} \log \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\alpha}.$$

Доказательство. Рассмотрим решетку I_h , где $h = 2^{-\tau}$. В n -мерном кубе I^n введем решетку I_h^n как декартову степень решетки I_h . Пусть $\tilde{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ — произвольная точка решетки I_h^n . Интервалом $I_h(\tilde{a})$ решетки I_h^n назовем множество точек $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ куба I^n таких, что $a_i \leq x_i < h$ при $i = 1, 2, \dots$. На каждом из интервалов, определяемых точками разбиения, изменение любой функции f из множества $F_r G_n(\alpha)$ не превосходит $2^{-\tau\alpha}$. Поэтому при

$$\tau \geq \frac{1}{\alpha} \log \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\alpha}$$

это изменение не больше $\varepsilon/2$.

Таким образом, при таком выборе τ достаточно задать значение функции f в одной из точек интервала $I_h(\tilde{a})$ разбиения куба I^n с точностью $\varepsilon/2$. В качестве такой точки можно выбрать, например, точку $\tilde{a}$. При $k = \lceil \log(1/\varepsilon) \rceil$ соответствующая $(\tau, k + 2)$ -реализация строится аналогично $(\tau, k + 2)$ -реализации из доказательства предложения 2:

берется двоичное дерево высоты τ , каждой висячей вершине которого соответствует точка $\tilde{a}$ разбиения I_h^n куба I^n (заметим, что число висячих вершин равно $2^{n\tau}$). В каждую висячую вершину дерева поместим детерминированную функцию, реализующую константу, равную значению приближаемой функции в этой точке с точностью $\varepsilon/2$. Предложение доказано.

Предложение 11 ([1, 5, 11]). *В классе $F_r G_n(\alpha)$ существует 2ε -различимое множество, содержащее порядка $2^{C/(\varepsilon)^{(n/s)}}$ функций, где $s = r + \alpha$.*

Из этого предложения получаем следующее утверждение.

Предложение 12. *Справедлива оценка*

$$L(F_r G_n(\alpha), \varepsilon) \geq \log \frac{1}{\varepsilon}.$$

Доказательство. Подсчитаем число возможных $(\tau, k+2)$ -реализаций функций множества $F_r G_n(\alpha)$. Оно не превосходит $2^{(k+2)2^{n\tau}}$, где $k = \lceil \log(1/\varepsilon) \rceil$. Каждую функцию класса $F_r G_n(\alpha)$ можно приблизить с помощью некоторой $(\tau, k+2)$ -реализации. Число возможных реализаций не может быть меньше числа функций 2ε -различимого множества, поэтому

$$2^{(k+2)2^{n\tau}} \geq 2^{C/(\varepsilon)^{n/s}}$$

или

$$(k+2)2^{n\tau} \geq C/(\varepsilon)^{n/s},$$

$$n\tau \geq \frac{n}{s} \log \frac{1}{\varepsilon} + \log C - \log \left(\log \frac{1}{\varepsilon} + 2 \right).$$

Отсюда,

$$L(F_r G_n(\alpha), \varepsilon) \geq \log \frac{1}{\varepsilon}.$$

Следствие 2. *При $0 < \alpha \leq 1$ справедлива оценка*

$$L(G_1(\alpha), \varepsilon) \geq \log \frac{1}{\varepsilon}.$$

Эта оценка получается из предыдущей при $r = 0$ и $n = 1$.

4.4. Множество F_A аналитических функций

Множество F_A определяется как класс аналитических в некоторой области функций, производные которых удовлетворяют неравенствам

$$\max \left| \frac{f^{(i)}(x)}{i!} \right| \leq \frac{1}{2^i}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Поскольку функции этого класса удовлетворяют условию Липшица с константой 1, справедливо следующее утверждение.

Предложение 13. *Для функций класса F_A верна верхняя оценка*

$$L(F_A, \varepsilon) \leq \log \frac{1}{\varepsilon} + 1.$$

Таблица 1.

Класс	Нижняя оценка	Верхняя оценка
$G_1(1)$	$\log \frac{1}{\varepsilon}$	$\log \frac{1}{\varepsilon} + 1$
$G_1(\alpha)$	$\log \frac{1}{\varepsilon}$	$\frac{1}{\alpha} \log \frac{1}{\varepsilon} + 1$
$F_r G_n(\alpha)$	$\log \frac{1}{\varepsilon}$	$\frac{1}{\alpha} \log \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\alpha}$
F_r	$\log \frac{1}{\varepsilon}$	$\log \frac{1}{\varepsilon} + 1$
F_A	$\log \left(\log \frac{1}{\varepsilon} \right)$	$\log \frac{1}{\varepsilon} + 1$

Предложение 14 ([1, 5]). В компакте F_A существует 2ε -различимое множество функций, содержащее порядка $2^{C \log^2(1/\varepsilon)}$ функций.

Сравнивая эту величину с числом возможных $(\tau, k+2)$ -реализаций, получаем следующее утверждение.

Предложение 15. Для функций класса F_A справедлива нижняя оценка

$$L(F_A, \varepsilon) \geq \log(\log(1/\varepsilon)).$$

Доказательство. Возьмем $k = \lceil \log(1/\varepsilon) \rceil$ и сравним число $(\tau, k+2)$ -реализаций с порядком числа функций в 2ε -различимом множестве. Получаем неравенство

$$2^{(k+2)2^\tau} \geq 2^{C \log^2(1/\varepsilon)},$$

или

$$(k+2)2^\tau \geq C \log^2(1/\varepsilon),$$

$$\tau \geq \log C + 2 \log(\log(1/\varepsilon)) - \log(k+2).$$

Отсюда получаем, что

$$L(F_A, \varepsilon) \geq \log(\log(1/\varepsilon)).$$

В Табл. 1 приводятся оценки сложности реализаций детерминированными функциями с задержкой для рассмотренных классов. В этой таблице нижние оценки являются оценками по порядку.

Сопоставим полученные результаты с результатами работы [5], где непрерывные функции приближались многозвенными автоматами. Для классов $G_1(1)$ и $G_1(\alpha)$ верхние и нижние оценки в [5] совпадают, как и в нашем случае. Для класса F_r в [5] получена верхняя оценка, совпадающая с нижней. Для класса F_A в [5] верхняя оценка не совпадает с нижней. Класс функций $F_r G_n(\alpha)$ в [5] не рассматривался.

В заключение автор выражает свою признательность В. А. Бувичу за постановку задачи и существенную помощь при оформлении полученных результатов.

Список литературы

1. Витушкин А. Г., *Оценка сложности задачи табуляции*. Физматгиз, Москва, 1959.

2. Гашков С. Б., О сложности приближенной реализации непрерывных функций схемами и формулами в полиномиальных и некоторых других базисах. *Матем. вопросы кибернетики* (1994) **5**, 144–207.
3. Грехем Р., Кнут Д., Паташник О., *Конкретная математика*. Мир, Москва, 1998.
4. Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М., ε -энтропия и ε -емкость множеств в функциональных пространствах. *Успехи матем. наук* (1959) **14**, №2, 3–86.
5. Офман Ю. П., О приближенной реализации непрерывных функций на автоматах. *Доклады АН СССР* (1963) **152**, №4, 823–825.
6. Тюленев Н. Ф., Приближение непрерывных функций дискретными. В сб.: *Сборник трудов семинара по дискретной математике и ее приложениям*. Мех.-мат. ф-т МГУ, Москва, 1997, с. 148–151.
7. Тюленев Н. Ф., О приближении непрерывных функций дискретными. В сб.: *Конструкции в алгебре и логике*. Тверской госунив., Тверь, 1990, с. 110–116.
8. Черепов И. А., О приближении непрерывных функций детерминированными функциями с задержкой. В сб.: *Сборник трудов семинара по дискретной математике и ее приложениям*. Мех.-мат. ф-т МГУ, Москва, 2004, с. 163–166.
9. Черепов А. Н., Черепов И. А., О классификации недетерминированных функций. В сб.: *Сборник трудов семинара по дискретной математике и ее приложениям*. Мех.-мат. ф-т МГУ, Москва, 2004, с. 160–163.
10. Черепов А. Н., О сложности приближения непрерывных функций недетерминированными функциями с задержкой. В сб.: *Материалы IX Международной конференции «Интеллектуальные системы и компьютерные науки»*, **1 (2)**. Мех.-мат. ф-т МГУ, Москва, 2006, с. 307–310.
11. Черепов А. Н., Оценки сложности приближения непрерывных функций некоторых классов детерминированными функциями с задержкой. В сб.: *Материалы XVI Международной школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем»*. Мех.-мат. ф-т МГУ, Москва, 2006, с. 118–122.

Статья поступила 28.11.2007.