Общероссийский математический портал

Г. Б. Белявская, А. Х. Табаров, Тождества с подстановками, приводящие к линейности квазигрупп, *Дискрет. матем.*, 2009, том 21, выпуск 1, 36–51

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1037>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 14:57:00

Тождества с подстановками, приводящие к линейности квазигрупп

© 2009 г. Г. Б. Белявская, А. Х. Табаров

В работе рассматривается один класс тождеств с подстановками от трех переменных в квазигруппе $(Q, \cdot)$, каждое из которых приводит к изотопии квазигруппы группе (абелевой группе). С помощью таких тождеств устанавливается критерий изотопии квазигруппы группе (абелевой группе) и выделяется ряд тождеств с подстановками, приводящих к тому или иному типу линейности (алинейности) над группой (абелевой группой) квазигруппы. Из результатов следует, что в тождестве В. Д. Белоусова, характеризующем квазигруппы, изотопные группе (абелевой группе), две переменные из пяти (одна из четырех) могут быть зафиксированы произвольным образом. Полученные результаты дают возможность описать бесконечное число тождеств в примитивной квазигруппе $(Q, \cdot, \setminus, /)$, приводящих к изотопии квазигруппы $(Q, \cdot)$ группе или к ее линейности заданного типа.

1. Введение

Квазигруппы, изотопные группам (абелевым группам), линейные квазигруппы над группами и различные их обобщения образуют важные классы квазигрупп, которые возникают при исследовании квазигрупп, связанных с ними систем, и используются в различных приложениях. Наиболее известными среди таких квазигрупп являются медиальные квазигруппы и T -квазигруппы.

Квазигруппы, изотопные группам (абелевым группам), различные их подклассы и тождества, приводящие к ним, исследовались многими авторами. Такие квазигруппы возникли при изучении уравновешенных тождеств, включающих три переменные [1–3] и произвольное число $n \geq 3$ переменных [4]. Четыре квазигруппы, связанные законом общей ассоциативности, изотопны одной и той же группе [4–6]. Группы автоморфизмов квазигрупп, изотопных группам, и специальных форм таких квазигрупп рассматривались в [7, 8]. В. Д. Белоусов в [4] установил тождество от пяти (четырех) переменных в примитивной квазигруппе $(Q, \cdot, \setminus, /)$, которое является необходимым и достаточным, чтобы квазигруппа $(Q, \cdot)$ была изотопна группе (абелевой группе).

Квазигруппа $(Q, \cdot)$ называется линейной [4] (алинейной [9]) над группой, если существуют группа $(Q, +)$, ее автоморфизмы (антиавтоморфизмы) φ, ψ и элемент $c \in Q$ такие, что $xy = \varphi x + c + \psi y$ для всех $x, y \in Q$.

T -квазигруппа — это квазигруппа, линейная над абелевой группой [10]; если дополнительно $\varphi\psi = \psi\varphi$, то $(Q, \cdot)$ — медиальная квазигруппа [11].

В [4, 5] при исследовании ассоциативных в целом систем квазигрупп и уравновешенных тождеств в квазигруппах возникли односторонние линейные (алинейные) (иначе,

полулинейные и полуалинейные) квазигруппы, когда одна из подстановок φ или ψ является автоморфизмом (антиавтоморфизмом) группы, а другая — подстановкой.

Работа [12] посвящена установлению некоторых свойств многообразий всех квазигрупп, изотопных группам, всех линейных (полулинейных) и всех T -квазигрупп. В [13–15] Ф. Н. Сохацкий рассмотрел широкий круг вопросов, касающихся класса изотопов групп, в частности, установил некоторые свойства тождеств, гарантирующих изотопию квазигруппы группе или ее линейность (полулинейность) над группой. О. Кириасовский в [16] установил критерии принадлежности линейных групповых изотопов многим известным классам квазигрупп, привел алгоритм описания линейных групповых изотопов и дал полный список попарно неизоморфных таких изотопов до 15-го порядка.

Все примитивные квазигруппы $(Q, \cdot, \setminus, /)$, соответствующие линейным, как и алинейным квазигруппам, составляют многообразие, характеризуемое одним тождеством от 4-х переменных [9]. Многообразие всех примитивных T -квазигрупп является пересечением многообразий линейных и алинейных квазигрупп [9].

В [17] установлена связь линейности слева (справа) с левым (правым) ядром квазигруппы и дана характеристика соответствующих примитивных квазигрупп одним тождеством от 4-х переменных. В [18] доказано, что T -квазигруппы связаны с центром квазигруппы, а соответствующие им примитивные квазигруппы можно охарактеризовать двумя тождествами от 4-х переменных. В [19] рассмотрены односторонние T -квазигруппы и доказано, что соответствующие им примитивные квазигруппы могут быть охарактеризованы двумя тождествами.

В данной статье продолжается исследование квазигрупп, изотопных группам и абелевым группам. В квазигруппе $(Q, \cdot)$ выделяется один класс тождеств с подстановками, включающих три переменные, каждое из которых обеспечивает изотопию этой квазигруппы группе (абелевой группе). Из этих результатов следует, что в тождестве В. Д. Белоусова, характеризующем квазигруппы, изотопные группе (абелевой группе), две из пяти (одну из четырех) переменных можно зафиксировать произвольным образом. Рассматриваются различные типы линейности квазигрупп (при этом к типам линейности относим полулинейность и линейность, полуалинейность и алинейность, а также линейность смешанного типа (см. раздел 6), устанавливается ряд тождеств с подстановками в квазигруппе $(Q, \cdot)$, каждое из которых гарантирует тот или иной тип ее линейности над группой или абелевой группой. Полученные результаты дают возможность описать бесконечное число тождеств в примитивной квазигруппе $(Q, \cdot, \setminus, /)$, приводящих к изотопии квазигруппы $(Q, \cdot)$ группе или к ее линейности заданного типа.

2. Необходимые понятия и результаты

Подстановка α множества Q называется квазиавтоморфизмом (обратным квазиавтоморфизмом, мы его будем называть антиквазиавтоморфизмом или, кратко, аквазиавтоморфизмом) группы $(Q, +)$, если для всех $x, y \in Q$

$$\alpha(x + y) = \alpha x - \alpha 0 + \alpha y \quad (\alpha(x + y) = \alpha y - \alpha 0 + \alpha x),$$

где 0 — единица группы [4, 5] (мы используем аддитивную запись группы).

Квазигруппа (Q, B) изотопна квазигруппе (Q, A) , если существует упорядоченная тройка $T = (\alpha, \beta, \gamma)$ подстановок множества Q такая, что $\gamma B(x, y) = A(\alpha x, \beta y)$ для всех $x, y \in Q$. В этом случае пишем $B = A^T$.

Автотопия (антиавтотопия) группы $(Q, +)$ — это упорядоченная тройка подстановок $T = (\alpha, \beta, \gamma)$ такая, что $\gamma(x + y) = \alpha x + \beta y$ ($\gamma(x + y) = \alpha y + \beta x$). Любая подстановка авто-

топии (антиавтотопии) группы является ее квазиавтоморфизмом (аквазиавтоморфизмом). Множество всех квазиавтоморфизмов группы образует группу. Любой квазиавтоморфизм (аквазиавтоморфизм) α группы имеет вид $\alpha x = \varphi x + k$ ($\alpha x = l + \psi x$), где φ, ψ являются автоморфизмами (антиавтоморфизмами) группы $(Q, +)$, k, l — некоторые фиксированные элементы из Q [4, 5].

Приведем некоторые известные результаты, используемые ниже.

Теорема 1 ([4–6]). Если четыре квазигруппы A_i , $i = 1, 2, 3, 4$, заданные на одном и том же множестве Q , связаны общим ассоциативным законом

$$A_1(A_2(x, y), z) = A_3(x, A_4(y, z)), \quad (1)$$

то все они изотопны одной и той же группе.

Лемма 1 ([4, 5]). Если в группе $(Q, +)$ выполняется равенство

$$\alpha_1(\alpha_2(x + y) + z) = \alpha_3x + \alpha_4(\alpha_5y + \alpha_6z)$$

для всех $x, y, z \in Q$, где α_i , $i = 1, \dots, 6$, — подстановка множества Q , то все подстановки α_i — квазиавтоморфизмы группы $(Q, +)$.

Лемма 2 ([4]). Если в группе $(Q, +)$ для любых $x, y \in Q$ выполняется равенство

$$\alpha x + \beta y = \gamma y + \delta x,$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — некоторые подстановки множества Q , то группа $(Q, +)$ абелева.

Лемма 3 ([11]). Если лупа B изотопна квазигруппе A , то изотопия имеет вид $B = A_{a,b}$, где $A_{a,b} = A^T$, $T = (R_a^{-1}, L_b^{-1}, 1)$, $R_ax = A(x, a)$, $L_bx = A(b, x)$.

Отметим, что при этом элемент $A(b, a)$ является единицей лупы B , изотопия T называется главной, а подстановки R_a, L_b называются трансляциями квазигруппы A .

Теорема 2 (теорема Алберта [11]). Если лупа $(Q, \circ)$ изотопна группе $(Q, +)$, то она сама есть группа, изоморфная группе $(Q, +)$.

Каждой квазигруппе $Q(\cdot)$ соответствует примитивная квазигруппа $(Q, \cdot, \backslash, /)$, где обратные операции $(\backslash) = (\cdot)^{-1}$ и $(/) = {}^{-1}(\cdot)$ определяются следующим образом (см. [11]):

$$x \backslash y = z \iff x \cdot z = y,$$

$$x / y = z \iff zy = x.$$

В. Д. Белоусов доказал (см. теоремы 8 и 9 в [14]), что квазигруппа $(Q, \cdot)$ изотопна группе, абелевой группе тогда и только тогда, когда в примитивной квазигруппе $(Q, \cdot, \backslash, /)$ выполняется соответственно следующее тождество:

$$((x(y \backslash z))/u)v = x(y \backslash ((z/u)v)), \quad (2)$$

$$x \backslash (y(u \backslash v)) = u \backslash (y(x \backslash v)). \quad (3)$$

Ф. Н. Сохацкий охарактеризовал квазигруппы, изотопные группам, тождеством от четырех переменных в квазигруппе $(Q, \cdot, \backslash, /)$ (см. [14]):

$$((x(u \backslash z))/u)v = x(u \backslash ((z/u)v)). \quad (4)$$

Это тождество (2), в котором $y = u$.

3. Тождества с подстановками и квазигруппы, изотопные группам

Пусть $(Q, \cdot)$ — квазигруппа, $x * y = y \cdot x$. Рассмотрим равенства (назовем их тождествами с подстановками, иногда — просто тождествами в квазигруппе $(Q, \cdot)$) вида

$$\beta_1(\beta_2(\beta_3x \otimes_1 \beta_4y) \otimes_2 \beta_5z) = \beta_6x \otimes_3 \beta_7(\beta_8y \otimes_4 \beta_9z),$$

где x, y, z — переменные, $\beta_i, i = 1, \dots, 9$ (или $i \in \{1, \dots, 9\}$) — подстановки на Q , $(\otimes_k) = (\cdot)$ или $(\otimes_k) = (*)$, $k = 1, \dots, 4$. Заменой переменных каждое такое тождество можно привести к тождеству с меньшим числом подстановок

$$\alpha_1(\alpha_2(x \otimes_1 y) \otimes_2 z) = \alpha_3x \otimes_3 \alpha_4(\alpha_5y \otimes_4 \alpha_6z), \quad (5)$$

которое выполняется для всех $x, y, z \in Q$, где $\alpha_i, i = 1, \dots, 6$, — некоторые подстановки (возможно, и тождественные) множества Q .

Это тождество есть частный случай обобщенного тождества ассоциативности (1), в котором

$$\begin{aligned} A_1(u, z) &= \alpha_1(u \otimes_2 z), & A_2(x, y) &= \alpha_2(x \otimes_1 y), \\ A_3(x, v) &= \alpha_3x \otimes_3 v, & A_4(y, z) &= \alpha_4(\alpha_5y \otimes_4 \alpha_6z). \end{aligned}$$

Согласно теореме 1, все эти квазигруппы изотопны одной и той же группе $(Q, +)$.

Частным случаем тождества (5) является тождество вида

$$\alpha_2(x \otimes_1 y) \otimes_2 z = \alpha_3x \otimes_3 \alpha_4(\alpha_5y \otimes_4 \alpha_6z), \quad (6)$$

где обязательно одна из операций $(\otimes_2), (\otimes_3)$ является операцией $(\cdot)$, другая — $(*)$.

Верна следующая теорема.

Теорема 3. Если в квазигруппе $(Q, \cdot)$ выполняется тождество (5) (тождество (6)) для некоторых подстановок $\alpha_i, i \in \{1, \dots, 6\}$ ($\alpha_i, i \in \{2, \dots, 6\}$), то квазигруппа $(Q, \cdot)$ изотопна группе (абелевой группе).

Обратно, если квазигруппа $(Q, \cdot)$ изотопна группе (абелевой группе), то в ней выполняется тождество (5) (тождество (6)) для некоторых подходящих подстановок $\alpha_i, i \in \{1, \dots, 6\}$.

Доказательство. Пусть в квазигруппе $(Q, \cdot)$ выполняется тождество (5) для некоторых подстановок, тогда по теореме 1 квазигруппа A_1 , а следовательно, и квазигруппа $(Q, \otimes_2) = (Q, \cdot)$ или $(Q, \otimes_2) = (Q, *)$, изотопна некоторой группе $(Q, +)$. Но если $(Q, *)$ изотопна группе, то $(Q, \cdot)$ также изотопна ей (если $x * y = \gamma^{-1}(\alpha x + \beta y)$, то $y \cdot x = \gamma^{-1}I(\beta y + I\alpha x)$, где $Ix = -x$, $-x$ — противоположный элемент к x в группе).

Обратно, так как квазигруппа изотопна группе, в ней выполняется тождество (2) (или (4)). Но (2) можно записать с помощью трансляций, учитывая, что

$$x/u = R_u^{-1}x, \quad u \backslash x = L_u^{-1}x,$$

следующим образом:

$$\begin{aligned} R_u^{-1}(x \cdot L_y^{-1}z) \cdot v &= x \cdot L_y^{-1}(R_u^{-1}z \cdot v), \\ R_u^{-1}(x \cdot z) \cdot v &= x \cdot L_y^{-1}(R_u^{-1}L_y z \cdot v). \end{aligned}$$

Полагая в последнем равенстве $u = a, y = b$, где a, b — фиксированные элементы из Q , получаем тождество вида (5) с $\alpha_2 = R_a^{-1}, \alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_6 = \varepsilon, \alpha_4 = L_b^{-1}, \alpha_5 = R_a^{-1}L_b$, где ε — тождественная подстановка.

Пусть теперь квазигруппа $(Q, \cdot)$ удовлетворяет тождеству (6) с $(\otimes_2) = (\cdot), (\otimes_3) = (*)$, являющемуся частным случаем тождества (5), поэтому квазигруппа изотопна группе. Если $(Q, +)$ — лупа, главно изотопная квазигруппе $(Q, \cdot)$, то по лемме 3 $x + y = R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}y$ и по теореме Алберта $(Q, +)$ — группа, а $x \cdot y = R_ax + L_by$. Перейдем в (6) к групповой операции, учитывая последнее равенство, получим равенство

$$R_a\alpha_2(x \otimes_1 y) + L_bz = R_a\alpha_4(\alpha_5y \otimes_4 \alpha_6z) + L_b\alpha_3x$$

и положим в этом равенстве $y = c$, где c — произвольный элемент из Q . Мы получим тождество с подстановками в группе

$$\beta_1x + L_bz = \beta_2z + \alpha'_3x,$$

где

$$\begin{aligned} \beta_1x &= R_a\alpha_2R_c^{\otimes 1}x, & \beta_2z &= R_a\alpha_4L_{\alpha_5c}^{\otimes 4}z, \\ R_c^{\otimes 1}x &= x \otimes_1 c, & L_{\alpha_5c}^{\otimes 4}z &= \alpha_5c \otimes_4 z, & \alpha'_3x &= L_b\alpha_3x. \end{aligned}$$

По лемме 2 группа $(Q, +)$ абелева.

Аналогично проводится доказательство тождества (6) с $(\otimes_2) = (*), (\otimes_3) = (\cdot)$.

Обратно, если квазигруппа $(Q, \cdot)$ изотопна абелевой группе, то примитивная квазигруппа $(Q, \cdot, \setminus, /)$ удовлетворяет тождеству (3). Запишем это тождество через трансляции при $x = b$ и преобразуем его к виду

$$\begin{aligned} L_b^{-1}(y \cdot L_u^{-1}v) &= L_u^{-1}(y \cdot L_b^{-1}v), \\ u \cdot L_b^{-1}(y \cdot v) &= y \cdot L_b^{-1}(u \cdot v), \\ L_b^{-1}(y \cdot v) * u &= y \cdot L_b^{-1}(v * u). \end{aligned}$$

Получаем тождество с подстановками (6) при $(\otimes_2) = (*), (\otimes_3) = (\cdot)$, в котором

$$\alpha_3 = \alpha_5 = \alpha_6 = \varepsilon, \quad \alpha_2 = \alpha_4 = L_b^{-1}.$$

Следствие 1. *Квазигруппа $(Q, \cdot)$ изотопна группе (абелевой группе) тогда и только тогда, когда в ней выполняется тождество (2) (тождество (3)) для произвольно фиксированных элементов $u = a, y = b$, в частности, для $u = y = a$ (для произвольно фиксированного элемента $x = a$), $a, b \in Q$.*

Доказательство. Если квазигруппа изотопна группе, то в ней выполняется тождество (2) (тождество (3)) для любой пары элементов $u = a, y = b$ (для любого $x = a$). Обратно, если тождество (2) (тождество (3)) выполняется для некоторой фиксированной пары (для некоторого фиксированного элемента), то, как показано выше, из (2) (из (3)) получаем тождество с подстановками вида (5) (вида (6)), поэтому по теореме 3 квазигруппа изотопна группе (абелевой группе).

Заметим, что тождество (4) в этом смысле эквивалентно тождеству (2) при $u = y = a$.

4. Тождества с подстановками, полулинейные и линейные квазигруппы

Напомним, что тождество $w_1 = w_2$ в квазигруппе $(Q, \cdot)$ называется уравновешенным, если каждая переменная входит слева и справа точно по одному разу.

Если слева и справа переменные упорядочены одинаково, то тождество называется тождеством I-го рода, в противном случае — II-го рода.

Такое тождество называется сократимым, если выполняются следующие два условия: из $xu \in w_1$ следует xu или $x * u = ux \in w_2$; если w_1 имеет вид xu или ux , то w_2 имеет вид xv или vx , где x — свободный элемент, а u, v — слова в $(Q, \cdot)$ (см. [20]).

Длина уравновешенного тождества — это число переменных слева (справа).

Согласно теореме 5 в [4], из выполнения в квазигруппе $(Q, \cdot)$ несократимого уравновешенного тождества следует, что она изотопна группе, причем изотопия имеет вид $xu = \alpha x + \beta u$, где по крайней мере одна из подстановок α или β является автоморфизмом или антиавтоморфизмом группы $(Q, +)$.

Теорема 6 из [4] утверждает, что если группа $(Q, +)$ некоммутативна и на Q определена операция $xu = \varphi x + \gamma u$, где φ — автоморфизм или антиавтоморфизм, а γ не является ни тем, ни другим, то никакое несократимое уравновешенное тождество в $(Q, \cdot)$ не выполняется.

Таким образом, в линейной (алинейной) слева квазигруппе $(Q, \cdot)$ над неабелевой группой не может выполняться несократимое уравновешенное тождество.

Мы рассмотрим частные случаи тождества с подстановками (5), приводящие к полулинейности или линейности квазигруппы $(Q, \cdot)$.

Напомним, что линейная слева (справа) квазигруппа $(Q, \cdot)$ — это квазигруппа вида $x \cdot u = \varphi x + c + \psi u$, где $(Q, +)$ — группа, $\varphi(\psi)$ — ее автоморфизм, $\psi(\varphi)$ — подстановка множества Q , c — фиксированный элемент из множества Q . Если φ и ψ — автоморфизмы, то квазигруппа называется линейной (над группой).

Ниже будем для краткости обозначать класс всех линейных слева (справа) квазигрупп через $L\mathcal{L}$ ($R\mathcal{L}$), а класс всех линейных квазигрупп через $\mathcal{L}$. Отметим, что $\mathcal{L} \subset L\mathcal{L}$, $\mathcal{L} \subset R\mathcal{L}$, более того, $\mathcal{L} = L\mathcal{L} \cap R\mathcal{L}$ (см. [12, 17]).

Теорема 4. Пусть $(Q, \cdot)$ — квазигруппа, тогда $(Q, \cdot) \in L\mathcal{L}$, если в $(Q, \cdot)$ выполняется одно из тождеств

$$\alpha_1(xu \cdot z) = \alpha_3x \cdot \alpha_4(\alpha_5u \cdot \alpha_6z), \quad (7)$$

$$xu \cdot z = \alpha_3x \cdot \alpha_4(\alpha_5u * \alpha_6z); \quad (8)$$

$(Q, \cdot) \in R\mathcal{L}$, если в $(Q, \cdot)$ выполняется одно из тождеств

$$\alpha_2(xu) \cdot z = \alpha_3x \cdot (\alpha_5u \cdot \alpha_6z), \quad (9)$$

$$\alpha_2(x * u) \cdot z = \alpha_3x \cdot (\alpha_5u \cdot \alpha_6z); \quad (10)$$

$(Q, \cdot) \in \mathcal{L}$, если в $(Q, \cdot)$ выполняется одно из тождеств

$$\alpha_1(xu \cdot z) = \alpha_3x \cdot (\alpha_5u \cdot \alpha_6z), \quad (11)$$

$$\alpha_1(xu \cdot z) = \alpha_3x \cdot \alpha_4(u \cdot \alpha_6z), \quad (12)$$

$$\alpha_2(xu) \cdot z = \alpha_3x \cdot (u \cdot \alpha_6z), \quad (13)$$

где α_i , $i \in \{1, \dots, 6\}$, — некоторые подстановки множества Q .

Доказательство. По теореме 3, выполнение любого из указанных в теореме тождеств является достаточным, чтобы квазигруппа $(Q, \cdot)$ была изотопна группе. Пусть $(Q, +)$: $x + y = R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}y$ — лупа, главно изотопная квазигруппе $(Q, \cdot)$ (и, следовательно, по теореме Алберта является группой), тогда

$$x \cdot y = R_ax + L_by. \quad (14)$$

Перейдем в (7) к групповой операции $(+)$, тогда

$$\alpha_1(R_a(R_ax + L_by) + L_bz) = R_a\alpha_3x + L_b\alpha_4(R_a\alpha_5y + L_b\alpha_6z),$$

или после замены переменных

$$\alpha_1(R_a(x + y) + z) = R_a\alpha_3R_a^{-1}x + L_b\alpha_4(R_a\alpha_5L_b^{-1}y + L_b\alpha_6L_b^{-1}z).$$

По лемме 1 R_a — квазиавтоморфизм группы $(Q, +)$, поэтому $R_ax = \varphi x + c$, где φ — автоморфизм группы, $c \in Q$. Таким образом, в (14)

$$x \cdot y = \varphi x + c + L_by,$$

и квазигруппа $(Q, \cdot)$ линейна слева.

Заметим, что если в (7) $\alpha_4 = \varepsilon$ ($\alpha_5 = \varepsilon$), то получаем тождество (11) ((12)) и по лемме 1 $L_b(R_aL_b^{-1})$ — также квазиавтоморфизм, поэтому $L_by = c_1 + \psi y$ и $x \cdot y = \varphi x + c_2 + \psi y$ (учитывая, что все квазиавтоморфизмы группы образуют группу), где φ, ψ — автоморфизмы группы, $c_2 = c + c_1$ и квазигруппа $(Q, \cdot)$ линейна.

Перейдя в (8) к операции $(+)$ и произведя соответствующие замены переменных, получим, что

$$R_a(x + y) + z = R_a\alpha_3R_a^{-1}x + L_b\alpha_4(R_a\alpha_6L_b^{-1}z + L_b\alpha_5L_b^{-1}y).$$

При $z = 0$ ($b \cdot a = 0$ — единица группы) из этого равенства следует, что R_a — компонента автотопии, а следовательно, квазиавтоморфизм группы, поэтому $(Q, \cdot)$ — линейная слева квазигруппа.

Из тождества (9) следует, что

$$R_a\alpha_2(x + y) + z = R_a\alpha_3R_a^{-1}x + L_b(R_a\alpha_5L_b^{-1}y + L_b\alpha_6L_b^{-1}z).$$

Согласно лемме 1, L_b — квазиавтоморфизм группы, $L_by = c + \psi y$, и, согласно (14),

$$x \cdot y = R_ax + c + \psi y,$$

то есть квазигруппа $(Q, \cdot)$ линейна справа. При $\alpha_5 = \varepsilon$ получаем (13), и по лемме 1 $R_aL_b^{-1}$, а следовательно, и R_a — квазиавтоморфизмы и квазигруппа $(Q, \cdot)$ линейна.

Преобразуя тождество в группе, соответствующее (10), получаем, что

$$R_a\alpha_2(y + L_bx) + z = R_a\alpha_3x + L_b(R_a\alpha_5R_a^{-1}y + L_b\alpha_6L_b^{-1}z).$$

Заменим x на $\alpha_3^{-1}R_a^{-1}x$ и положим $x = 0$, тогда

$$\bar{\alpha}_2y + z = L_b(R_a\alpha_5R_a^{-1}y + L_b\alpha_6L_b^{-1}z),$$

где $\bar{\alpha}_2y = R_a\alpha_2R_{b\alpha_3^{-1}b}y$ (учитывая, что $0 = ba$), откуда следует, что L_b — компонента автотопии группы, а следовательно, ее квазиавтоморфизм и квазигруппа $(Q, \cdot)$ линейна справа.

Тождества (11), (12) и (13) были рассмотрены выше.

Известны следующие тождества в примитивной квазигруппе $(Q, \cdot, \backslash, /)$, дающие необходимые и достаточные условия для линейности квазигруппы $(Q, \cdot)$ слева (тождество (15)), справа (тождество (16)) (см. [7]) и линейности (тождество (17)) (см. [9]):

$$(x \cdot (u \backslash y))z = (x(u \backslash u)) \cdot (u \backslash yz), \quad (15)$$

$$(xy/u)((u/u)z) = x((y/u)z), \quad (16)$$

$$xy \cdot uz = xu \cdot (\alpha_u y \cdot z), \quad (17)$$

где $\alpha_u y = (u \backslash ((u/u)y \cdot u)) / (u \backslash u)$. Записывая эти тождества с помощью трансляций, фиксируя $u = a$ и производя замену переменных, соответственно получим тождества с подстановками

$$xy \cdot z = R_{a \backslash a} x \cdot L_a^{-1}(L_a y \cdot z), \quad (18)$$

$$R_a^{-1}(xy) \cdot z = x \cdot (R_a^{-1} y \cdot L_{a/a}^{-1} z), \quad (19)$$

$$xy \cdot z = R_a x \cdot (\alpha_a y \cdot L_a^{-1} z), \quad (20)$$

имеющие вид (7) (при $\alpha_1 = \alpha_6 = \varepsilon$), (9) (при $\alpha_3 = \varepsilon$), (11) (при $\alpha_1 = \alpha_2 = \varepsilon$) соответственно, поэтому по теореме 4 достаточные для соответствующего типа линейности квазигруппы. Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Следствие 2. *Квазигруппа $(Q, \cdot)$ является линейной слева (линейной справа или линейной) тогда и только тогда, когда в ней выполняется тождество с подстановками (18) (соответственно, (19) или (20)) для некоторого произвольно фиксированного элемента $a \in Q$.*

5. Тождества с подстановками, полуалинейные и алинейные квазигруппы

Установим некоторые тождества с подстановками, гарантирующие полуалинейность (то есть алинейность слева или справа) или алинейность квазигруппы.

Квазигруппа $(Q, \cdot)$ называется алинейной слева (справа), если ее можно представить в виде $x \cdot y = \bar{\varphi}x + c + \beta y$ ($x \cdot y = \alpha x + c + \bar{\psi}y$), где $(Q, +)$ — группа, $\bar{\varphi}$ ($\bar{\psi}$) — ее антиавтоморфизм, β (α) — подстановка множества $\underline{Q}$, c — фиксированный элемент из Q .

Квазигруппа алинейна, если $xy = \bar{\varphi}x + c + \bar{\psi}y$, где $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$ — антиавтоморфизмы группы.

Класс всех алинейных слева (справа) квазигрупп обозначим через $LA\mathcal{L}$ ($RA\mathcal{L}$), а класс всех алинейных квазигрупп — через $A\mathcal{L}$. Очевидно, что $A\mathcal{L} \subset LA\mathcal{L}$ и $A\mathcal{L} \subset RA\mathcal{L}$.

Теорема 5. *Пусть $(Q, \cdot)$ — квазигруппа. Тогда $(Q, \cdot) \in LA\mathcal{L}$, если в $(Q, \cdot)$ выполняется одно из тождеств*

$$(x * y) \cdot z = \alpha_3 x \cdot \alpha_4 (\alpha_5 y \cdot \alpha_6 z), \quad (21)$$

$$(x * y) \cdot z = \alpha_3 x \cdot \alpha_4 (\alpha_5 y * \alpha_6 z); \quad (22)$$

$(Q, \cdot) \in RA\mathcal{L}$, если в $(Q, \cdot)$ выполняется одно из тождеств

$$\alpha_2(xy) \cdot z = \alpha_3 x \cdot (\alpha_5 y * \alpha_6 z), \quad (23)$$

$$\alpha_2(x * y) \cdot z = \alpha_3 x \cdot (\alpha_5 y * \alpha_6 z); \quad (24)$$

$(Q, \cdot) \in A\mathcal{L}$, если в $(Q, \cdot)$ выполняется тождество

$$(x * y) \cdot z = \alpha_3 x \cdot (\alpha_5 y * \alpha_6 z), \quad (25)$$

где $\alpha_i, i \in \{2, \dots, 6\}$, — подстановки множества Q .

Доказательство. Все указанные в теореме тождества имеют вид (5), поэтому по теореме 3 квазигруппа $(Q, \cdot)$ изотопна группе. Перейдем в (21) к групповой операции, учитывая равенство (14), и произведя соответствующую замену переменных, получаем равенство

$$R_a(y + x) + z = R_a \alpha_3 L_b^{-1} x + L_b \alpha_4 (R_a \alpha_5 R_a^{-1} y + L_b \alpha_6 L_b^{-1} z).$$

Полагая в этом равенстве $z = 0$, получаем, что R_a — компонента антиавтотопии группы, поэтому является акквазиавтоморфизмом: $R_a x = \bar{\varphi} x + c$, где $\bar{\varphi}$ — антиавтоморфизм группы $(Q, +)$, $c \in Q$. Таким образом, согласно (14)

$$xy = \bar{\varphi} x + c + L_b y,$$

то есть квазигруппа $(Q, \cdot)$ алинейна слева.

Аналогично преобразуем тождество (22) и получим, что

$$R_a(y + x) + z = R_a \alpha_3 L_b^{-1} x + L_b \alpha_4 (R_a \alpha_6 L_b^{-1} z + L_b \alpha_5 R_a^{-1} y),$$

откуда при $z = 0$ следует, что R_a — акквазиавтоморфизм, а квазигруппа $(Q, \cdot)$ алинейна слева.

Если в (22) $\alpha_4 = \varepsilon$ (получим тождество (25)), то произведя в преобразованном тождестве (22) замену x на $L_b \alpha_3^{-1} R_a^{-1} x$ и полагая $x = 0$, получим, что L_b — тоже акквазиавтоморфизм и $(Q, \cdot) \in A\mathcal{L}$.

Из (23) получаем, что

$$R_a \alpha_2 (R_a x + y) + z = R_a \alpha_3 x + L_b (R_a \alpha_6 L_b^{-1} z + L_b \alpha_5 L_b^{-1} y).$$

Заменяя в этом тождестве x на $\alpha_3^{-1} R_a^{-1} x$ и полагая $x = 0$ ($x = ba$), получим, что

$$\bar{\alpha}_2 y + z = L_b (R_a \alpha_6 L_b^{-1} z + L_b \alpha_5 L_b^{-1} y),$$

где $\bar{\alpha}_2 y = R_a \alpha_2 L_{\alpha_3^{-1} b a} y$, откуда следует, что L_b — акквазиавтоморфизм: $L_b y = c + \bar{\psi} y$, а $xy = R_a x + c + \bar{\psi} y$, где $\bar{\psi}$ — антиавтоморфизм группы.

Наконец, преобразуя (24), получим тождество

$$R_a \alpha_2 (y + x) + z = R_a \alpha_3 L_b^{-1} x + L_b (R_a \alpha_6 L_b^{-1} z + L_b \alpha_5 R_a^{-1} y).$$

Заменяя в этом тождестве x на $L_b \alpha_3^{-1} R_a^{-1} x$ и полагая $x = 0$, получим, что L_b — акквазиавтоморфизм, а $(Q, \cdot)$ — алинейная справа квазигруппа.

В [9] установлено тождество $(\beta_u z \cdot x) \cdot uy = ux \cdot yz$, где $\beta_u z = (u((u/u)z))/u/(u \setminus u)$, в примитивной квазигруппе $(Q, \cdot, \setminus, /)$, которое является необходимым и достаточным для того, чтобы квазигруппа $(Q, \cdot)$ была алинейной.

С помощью трансляций его можно записать следующим образом:

$$zx \cdot y = L_u x \cdot ((R_u^{-1} y \cdot \beta_u^{-1} z), \quad \beta_u z = R_{u \setminus u}^{-1} R_u^{-1} L_u L_{u/u} z.$$

Полагая $u = a$ в последнем тождестве, получаем тождество с подстановками

$$(x * z) \cdot y = L_a x \cdot (\beta_a^{-1} z * R_a^{-1} y), \quad (26)$$

которое относится к тождеству вида (25) и по теореме 5 является достаточным для алинейности квазигруппы $(Q, \cdot)$. Таким образом, верно следующее утверждение.

Следствие 3. Квазигруппа $(Q, \cdot)$ является алинейной тогда и только тогда, когда в ней выполняется тождество с подстановками (26) для некоторого произвольно фиксированного элемента $a \in Q$.

6. Тождества с подстановками и квазигруппы смешанного типа линейности

Под квазигруппами смешанного типа линейности мы будем понимать квазигруппы вида $x \cdot y = \varphi x + c + \bar{\psi} y$ или $x \cdot y = \bar{\varphi} x + c + \psi y$, где φ, ψ — автоморфизмы, а $\bar{\varphi}, \bar{\psi}$ — антиавтоморфизмы группы $(Q, +)$. Такие квазигруппы принадлежат классу квазигрупп (обозначим его через $L\mathcal{L} \cap RA\mathcal{L}$), которые являются линейными слева и алинейными справа или классу квазигрупп (обозначим его через $R\mathcal{L} \cap LA\mathcal{L}$), являющихся линейными справа и алинейными слева. Верно следующее утверждение.

Лемма 4. Любая квазигруппа из $L\mathcal{L} \cap RA\mathcal{L}$ (из $R\mathcal{L} \cap LA\mathcal{L}$) имеет вид $x \cdot y = \varphi x + c + \bar{\psi} y$ ($x \cdot y = \bar{\varphi} x + c + \psi y$), где φ, ψ — автоморфизмы, а $\bar{\varphi}, \bar{\psi}$ — антиавтоморфизмы группы $(Q, +)$.

Доказательство. Пусть

$$xy = \varphi x + c + \beta y = \alpha x \oplus c_1 \oplus \bar{\psi} y,$$

где $(Q, +)$, $(Q, \oplus)$ — группы, φ — автоморфизм группы $(Q, +)$, а $\bar{\psi}$ — антиавтоморфизм группы $(Q, \oplus)$, α, β — подстановки. Но тогда

$$\varphi x + \beta_1 y = \alpha_1 x \oplus \bar{\psi} y,$$

где $\beta_1 y = c + \beta y$, $\alpha_1 x = \alpha x \oplus c_1$, то есть группы $(Q, +)$ и $(Q, \oplus)$ изотопны, поэтому по теореме Алберта изоморфны. Более того, из доказательства этой теоремы в [11] следует, что существует такой элемент k , что $R_k(x \oplus y) = R_k x + R_k y$, где $R_k x = x + k$. Но тогда

$$R_k(\varphi x + \beta_1 y) = R_k(\alpha_1 x \oplus \bar{\psi} y) = R_k \alpha_1 x + R_k \bar{\psi} y,$$

откуда при $x = 0$ следует, что

$$\beta_1 y = R_k \alpha_1 0 + \bar{\psi} y,$$

то есть β_1 — аквазиавтоморфизм группы $(Q, +)$ и

$$x \cdot y = \varphi x + c_2 + \bar{\psi} y,$$

где $c_2 = R_k \alpha_1 0$.

Аналогично проводится доказательство в случае, когда квазигруппа является линейной справа и алинейной слева.

Теорема 6. Пусть $(Q, \cdot)$ — квазигруппа. Тогда $(Q, \cdot) \in L\mathcal{L} \cap RA\mathcal{L}$, если в $(Q, \cdot)$ выполняется тождество

$$(xy) \cdot z = \alpha_3 x \cdot (\alpha_5 y * \alpha_6 z); \quad (27)$$

$(Q, \cdot) \in R\mathcal{L} \cap LA\mathcal{L}$, если в $(Q, \cdot)$ выполняется тождество

$$(x * y) \cdot z = \alpha_3 x \cdot (\alpha_5 y \cdot \alpha_6 z), \quad (28)$$

где $\alpha_3, \alpha_5, \alpha_6$ — подстановки множества Q .

Доказательство. Тожество (27) есть тождество (23), в котором $\alpha_2 = \varepsilon$. Из доказательства этого случая в теореме 5 следует, что L_b — аквизавтоморфизм группы $(Q, +)$, а при $z = 0$ получаем, что R_a — квазиавтоморфизм, поэтому

$$x \cdot y = \varphi x + c + \bar{\psi} y.$$

Аналогично, тождество (28) является тождеством (21), в котором $\alpha_4 = \varepsilon$. Из него следует, что R_a является аквизавтоморфизмом, а L_b — квазиавтоморфизмом группы $(Q, +)$, поэтому

$$x \cdot y = \bar{\varphi} x + c + \psi y.$$

Заметим, что в [17] примитивные квазигруппы, соответствующие квазигруппам из $L\mathcal{L} \cap RA\mathcal{L}$ ($R\mathcal{L} \cap LA\mathcal{L}$), охарактеризованы двумя тождествами.

Как известно, обратные квазигруппы для квазигруппы, изотопной группе, также изотопны той же группе [13]. Следующая лемма устанавливает связь между типами линейности квазигруппы и обратных квазигрупп.

Лемма 5. Пусть $(Q, \cdot)$ — квазигруппа. Тогда

$$\begin{aligned} (Q, \cdot) \in \mathcal{L} &\iff (Q, \backslash) \in R\mathcal{L} \cap LA\mathcal{L} \iff (Q, \backslash) \in L\mathcal{L} \cap RA\mathcal{L}, \\ (Q, \backslash) \in \mathcal{L} &\iff (Q, \cdot) \in R\mathcal{L} \cap LA\mathcal{L}, (Q, \cdot) \in \mathcal{L} \iff (Q, \cdot) \in L\mathcal{L} \cap RA\mathcal{L}. \end{aligned}$$

Доказательство. По лемме 3.1 из [21], если $xy = \varphi x + c + \psi y$, то

$$x \backslash y = \bar{\varphi}_1 x + c_1 + \psi_1 y, \quad x / y = \varphi_1 x + c_2 + \bar{\psi}_1 y,$$

где $\varphi, \psi, \varphi_1, \psi_1$ — автоморфизмы, а $\bar{\varphi}_1, \bar{\psi}_1$ — антиавтоморфизмы группы группы $(Q, +)$.

Докажем обратное утверждение. Пусть

$$x \backslash y = \bar{\varphi}_1 x + c_1 + \psi_1 y = z,$$

тогда

$$\begin{aligned} x \cdot z = y &\Rightarrow z = \bar{\varphi}_1 x + c_1 + \psi_1(xz) \\ &\Rightarrow \psi_1(xz) = -c_1 - \bar{\varphi}_1 x + z \\ &\Rightarrow xz = -\psi_1^{-1} c_1 - \psi_1^{-1} \bar{\varphi}_1 x + \psi_1^{-1} z \\ &= -\psi_1^{-1} c_1 - \psi_1^{-1} \bar{\varphi}_1 x + \psi_1^{-1} c_1 - \psi_1^{-1} c_1 + \psi_1^{-1} z \\ &= \varphi x + c + \psi_1^{-1} z, \end{aligned}$$

где

$$\varphi x = -\psi_1^{-1} c_1 - \psi_1^{-1} \bar{\varphi}_1 x + \psi_1^{-1} c_1$$

является автоморфизмом группы $(Q, +)$ (как произведение автоморфизма $I\psi_1^{-1}\bar{\varphi}_1$ и внутреннего автоморфизма, определенного элементом $\psi_1^{-1}c_1$), $c = -\psi_1^{-1}c_1$, то есть квазигруппа $(Q, \cdot)$ является линейной над той же группой.

Аналогично доказывается, что $(Q, \cdot) \in \mathcal{L} \iff (Q, /) \in L\mathcal{L} \cap RA\mathcal{L}$.

Вторые соотношения следуют из первого утверждения и того, что $(\backslash) = (\cdot)^{-1}$ влечет $(\backslash)^{-1} = (\cdot)$, а $(/) = {}^{-1}(\cdot)$ влечет ${}^{-1}(/) = (\cdot)$ (здесь мы использовали более удобные в данном случае обозначения для обратных операций).

Заметим, что свойство быть T -квазигруппой инвариантно при переходе к обратным квазигруппам [10]. Этот же факт следует и из леммы 5.

Из теорем 6, 4 и леммы 5 вытекает следующее утверждение.

Следствие 4. Если в квазигруппе $(Q, \cdot)$ выполняется тождество вида (27) ((28)), то $(Q, /)$ $((Q, \backslash))$ — линейная квазигруппа. Если в $(Q, \cdot)$ выполняется тождество вида (11), (12) или (13), то

$$x \backslash y = \bar{\varphi}x + c + \psi y, \quad x / y = \varphi x + c + \bar{\psi} y,$$

где φ, ψ — автоморфизмы, а $\bar{\varphi}, \bar{\psi}$ — антиавтоморфизмы группы $(Q, +)$.

7. Тождества с подстановками, полулинейные и линейные квазигруппы над абелевой группой

Установим некоторые тождества с подстановками, гарантирующие линейность слева (справа) или линейность квазигруппы над абелевой группой. Класс квазигрупп, линейных слева над абелевой группой (кратко, LT -квазигрупп), линейных справа над абелевой группой (RT -квазигрупп) и линейных над абелевой группой (T -квазигрупп), обозначим соответственно через $L\mathcal{T}$, $R\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}$. Как известно, $\mathcal{T} = \mathcal{L} \cap A\mathcal{L}$ (см. [9]) и $\mathcal{T} = L\mathcal{T} \cap R\mathcal{T}$ (см. [13, 17]).

Замечание 1. Заметим, что если $(Q, \cdot) \in L\mathcal{T}$, то квазигруппа $(Q, *) \in R\mathcal{T}$ и обратно ($xy = \varphi x + c + \alpha y \iff x * y = y \cdot x = \alpha x + c + \varphi y$, так как $(Q, +)$ — абелева группа). Аналогично, если $(Q, *) \in L\mathcal{T}$, то $(Q, \cdot) \in R\mathcal{T}$.

Теорема 7. Пусть $(Q, \cdot)$ — квазигруппа. Тогда

$(Q, \cdot) \in L\mathcal{T}$, если $(Q, \cdot)$ удовлетворяет одному из следующих тождеств:

$$(xy) \cdot z = \alpha_3 x * \alpha_4 (\alpha_5 y \cdot \alpha_6 z), \quad (29)$$

$$(xy) \cdot z = \alpha_3 x * \alpha_4 (\alpha_5 y * \alpha_6 z), \quad (30)$$

$$(x * y) \cdot z = \alpha_3 x * \alpha_4 (\alpha_5 y \cdot \alpha_6 z), \quad (31)$$

$$(x * y) \cdot z = \alpha_3 x * \alpha_4 (\alpha_5 y * \alpha_6 z), \quad (32)$$

где $\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ — некоторые подстановки множества Q ;

$(Q, \cdot) \in R\mathcal{T}$, если $(Q, *)$ удовлетворяет одному из тождеств (29)–(32);

$(Q, \cdot) \in \mathcal{T}$, если $(Q, \cdot)$ и $(Q, *)$ удовлетворяют одному (не обязательно одному и тому же) из тождеств (29)–(32),

$(Q, \cdot)$ или $(Q, *)$ удовлетворяет тождеству (29) при $\alpha_3 = \varepsilon$ или $\alpha_5 = \varepsilon$,

$(Q, \cdot)$ или $(Q, *)$ удовлетворяет тождеству (30) при $\alpha_3 = \varepsilon$ или $\alpha_6 = \varepsilon$,

$(Q, \cdot)$ или $(Q, *)$ удовлетворяет тождеству (32) при $\alpha_5 = \varepsilon$ или $\alpha_6 = \varepsilon$.

Доказательство. По теореме 3, все указанные в теореме тождества приводят к квазигруппе, изотопной абелевой группе. Перейдем в (29) к групповой операции $(+)$, учитывая (14) и произведя соответствующие замены переменных, получаем равенство

$$R_a(x + y) + z = R_a \alpha_4 (R_a \alpha_5 L_b^{-1} y + L_b \alpha_6 L_b^{-1} z) + L_b \alpha_3 R_a^{-1} x.$$

Учитывая лемму 1 и коммутативность группы, находим, что R_a — квазиавтоморфизм группы, а квазигруппа является LT -квазигруппой (см. (14)). Если же $\alpha_3 = \varepsilon$ или $\alpha_5 = \varepsilon$, то $L_b R_a^{-1}$, а значит, и L_b — квазиавтоморфизмы, поэтому $(Q, \cdot)$ — T -квазигруппа.

Преобразуем (30) к виду

$$R_a(x + y) + z = R_a \alpha_4 (R_a \alpha_6 L_b^{-1} z + L_b \alpha_5 L_b^{-1} y) + L_b \alpha_3 R_a^{-1} x.$$

Согласно лемме 1, R_a — квазиавтоморфизм группы $(Q, +)$, то есть $(Q, \cdot)$ — LT -квазигруппа.

При $\alpha_3 = \varepsilon$ или $\alpha_6 = \varepsilon$ получаем, что $L_b R_a^{-1}$, а поэтому и L_b — квазиавтоморфизмы группы и $(Q, \cdot)$ — T -квазигруппа.

После преобразования (31) получаем равенство

$$R_a(y + x) + z = R_a \alpha_4 (R_a \alpha_5 R_a^{-1} y + L_b \alpha_6 L_b^{-1} z) + L_b \alpha_3 L_b^{-1} x.$$

По лемме 1, R_a — квазиавтоморфизм, а $(Q, \cdot)$ — LT -квазигруппа.

Преобразуем (32) к виду

$$R_a(y + x) + z = R_a \alpha_4 (R_a \alpha_6 L_b^{-1} z + L_b \alpha_5 R_a^{-1} y) + L_b \alpha_3 L_b^{-1} x.$$

Если в этом равенстве $z = 0$, то по лемме 1 R_a — квазиавтоморфизм группы, поэтому $(Q, \cdot)$ — LT -квазигруппа. Если $\alpha_5 = \varepsilon$ или $\alpha_6 = \varepsilon$, то по лемме 1 $L_b R_a^{-1}$ — квазиавтоморфизм группы, поэтому L_b — тоже квазиавтоморфизм и $(Q, \cdot)$ — T -квазигруппа.

Второе утверждение теоремы следует из замечания 1, если в тождествах (29)–(32) поменять местами операции $(\cdot)$ и $(*)$.

Рассмотрим случай $(Q, \cdot) \in \mathcal{T}$. Первые три условия третьего утверждения теоремы относительно квазигруппы $(Q, \cdot)$ оговорены при рассмотрении тождеств (29), (30) и (32). Тождеству (29) относительно $Q(*)$ соответствует тождество

$$(x * y) * z = \alpha_3 x \cdot \alpha_4 (\alpha_5 y * \alpha_6 z),$$

которое согласно второму утверждению влечет линейность справа над абелевой группой квазигруппы $(Q, \cdot)$, поэтому в группе из (14) L_b — квазиавтоморфизм.

Переходя в этом тождестве к групповой операции, после замены переменных получим тождество

$$z + L_b(y + x) = R_a \alpha_3 L_b^{-1} x + L_b \alpha_4 (R_a \alpha_6 R_a^{-1} z + L_b \alpha_5 R_a^{-1} y).$$

Так как L_b — квазиавтоморфизм группы, R_a — тоже квазиавтоморфизм, если $\alpha_3 = \varepsilon$ или $\alpha_5 = \varepsilon$. Следовательно, $(Q, \cdot)$ — T -квазигруппа.

Тождество (30) относительно $Q(*)$ при переходе к группе и замене переменных принимает вид

$$z + L_b(y + x) = R_a \alpha_3 L_b^{-1} x + L_b \alpha_4 (R_a \alpha_5 R_a^{-1} y + L_b \alpha_6 R_a^{-1} z),$$

откуда следует, что R_a — квазиавтоморфизм, если $\alpha_3 = \varepsilon$ или $\alpha_6 = \varepsilon$, а $(Q, \cdot) \in L\mathcal{T}$. Но по второму утверждению $(Q, \cdot) \in \mathcal{RT}$. Таким образом, $(Q, \cdot)$ — T -квазигруппа.

Наконец, (32) относительно $Q(*)$ приводится к виду

$$z + L_b(x + y) = R_a \alpha_3 R_a^{-1} x + L_b \alpha_4 (R_a \alpha_5 L_b^{-1} y + L_b \alpha_6 R_a^{-1} z),$$

откуда следует, что L_b (а при $\alpha_5 = \varepsilon$ или $\alpha_6 = \varepsilon$ и R_a) — квазиавтоморфизм группы, поэтому $(Q, \cdot)$ — T -квазигруппа.

Применим полученные результаты к некоторым известным тождествам.

Пусть $(Q, \cdot)$ — медиальная квазигруппа. Преобразуем тождество медиальности $xy \cdot uv = xu \cdot yv$ к виду $xy \cdot u = (x \cdot R_v^{-1}u) \cdot R_v y$ или $(y * x) \cdot u = R_v y * (x \cdot R_v^{-1}u)$.

При фиксировании v это тождество (31) в квазигруппе $(Q, \cdot)$. С другой стороны, из тождества медиальности следует, что $L_x y \cdot uv = L_x u \cdot yv$ или $uv * y = L_x u \cdot (v * L_x^{-1}y)$. При фиксировании x это тождество (31) в квазигруппе $(Q, *)$. По теореме 7, $(Q, \cdot)$ — T -квазигруппа. Учитывая это, коммутирование соответствующих автоморфизмов легко устанавливается непосредственно из тождества медиальности. Получаем известную теорему Тойоды о медиальных квазигруппах [11].

В [22] рассмотрены следующие равенства в квазигруппе $(Q, \cdot)$, которые выполняются для любых $x, y, z, t \in Q$:

$$x(y \cdot zt) = R_{e_z}^{-1}(x \cdot yz) \cdot t \quad \text{или} \quad R_{e_z}^{-1}(x \cdot y) \cdot t = x \cdot (R_z^{-1}y \cdot L_z t), \quad (33)$$

$$(tz \cdot y)x = t \cdot L_{f_z}^{-1}(zy \cdot x) \quad \text{или} \quad ty \cdot x = R_z^{-1}t \cdot L_{f_z}^{-1}(L_z y \cdot x), \quad (34)$$

$$x(y \cdot zt) = ((x \cdot yf_z)z)t \quad \text{или} \quad R_z(xy) \cdot t = x \cdot (R_{f_z}^{-1}y \cdot L_z t), \quad (35)$$

приведены примеры квазигрупп с этими тождествами и доказано, что квазигруппы с любым из этих тождеств изотопны группе.

Заметим, что тождества (33) ((34)) и (35) являются частным случаем левого $x(y \cdot xt) = R_{e_x}^{-1}(x \cdot yx) \cdot t$ (правого $(tx \cdot y)x = t \cdot L_{f_x}^{-1}(xy \cdot x)$) тождества Бола в квазигруппе $(Q, \cdot, \setminus, /)$ [23] и тождества Муфанг $x(y \cdot xt) = ((x \cdot yf_x)x)t$ в квазигруппе $(Q, \cdot)$ [11] соответственно. Используя доказанные выше результаты, можно легко получить дополнительную информацию относительно подкласса класса левых (правых) квазигрупп Бола и подкласса квазигрупп Муфанг, определяемых тождеством (33), (34) или (35). Действительно, при фиксации в этих тождествах элемента z , получаем соответственно тождества вида (9), (7) или (9). По теореме 4, квазигруппа с тождеством (33) или (35) принадлежит классу $R\mathcal{L}$, а квазигруппа с тождеством (34) находится в классе $L\mathcal{L}$. По теореме 8 из [22], выполнение в квазигруппе тождества (35) влечет, что эта квазигруппа удовлетворяет и каждому из тождеств (33) и (34). Так как $\mathcal{L} = L\mathcal{L} \cap R\mathcal{L}$, как следствие, получаем, что квазигруппа с тождеством (35) является линейной.

8. Тождества в примитивной квазигруппе, связанные с линейностью квазигруппы

До сих пор мы в основном рассматривали тождества с подстановками в квазигруппе $(Q, \cdot)$, приводящие к линейности различных типов этой квазигруппы. Теперь мы рассмотрим тождества в примитивной квазигруппе $(Q, \cdot, \setminus, /)$, которые влекут линейность рассмотренных типов квазигруппы $(Q, \cdot)$.

Будем говорить, что тождество (α) в примитивной квазигруппе $(Q, \cdot, \setminus, /)$ имеет свойство (A) относительно тождества с подстановками (δ) в квазигруппе $(Q, \cdot)$, если в (α) можно выделить три переменные (например, x, y, z) такие, что при некоторой фиксации остальных переменных это тождество принимает вид (δ) .

Теорема 8. Если в примитивной квазигруппе $(Q, \cdot, \setminus, /)$ выполняется тождество со свойством (A)

- (а) относительно тождества (5) (относительно тождества (6)), то квазигруппа $(Q, \cdot)$ изотопна группе (абелевой группе);

(б) относительно одного из тождеств теорем 4, 5, 6 или 7, то квазигруппа $(Q, \cdot)$ имеет соответствующий тип линейности.

Если квазигруппа $(Q, \cdot)$ изотопна группе (абелевой группе), то в примитивной квазигруппе $(Q, \cdot, \backslash, /)$ выполняется некоторое тождество со свойством (А) относительно тождества (5) (относительно тождества (6)).

Утверждения теоремы следуют из теорем 3–7.

Отметим, что ряд свойства тождеств в примитивной квазигруппе $(Q, \cdot, \backslash, /)$, обеспечивающих изотопию квазигруппы $(Q, \cdot)$ группе или ее линейность рассмотренных типов, были установлены Ф. Н. Сохацким в [13–15] на языке специальных понятий.

На основании предыдущих результатов легко показать, что существует бесконечное число тождеств в примитивной квазигруппе $(Q, \cdot, \backslash, /)$, гарантирующих линейность различных типов квазигруппы $(Q, \cdot)$ как над абелевой, так и над неабелевой группой.

Опишем тождества такого рода, следующие из предыдущих результатов.

Пусть $(Q, \cdot)$ — квазигруппа, $L_t x = t \cdot x$, $R_t x = x \cdot t$, $M = \{u, v, w, \dots\}$ — произвольное конечное множество переменных, не содержащее x, y, z . Заменяем в одном из рассмотренных тождеств с подстановками, каждую из нетождественных подстановок α_i , $i \in \{1, \dots, 6\}$, участвующих в тождестве, произведением $S_{t_1}^{\varepsilon_1} S_{t_2}^{\varepsilon_2} \dots S_{t_{n_i}}^{\varepsilon_{n_i}}$, где $S_{t_i} = R_{t_i}$ или $S_{t_i} = L_{t_i}$, $\varepsilon_i = \pm 1$, n_i — произвольное конечное натуральное число, t_i — произвольные слова с некоторыми переменными из M относительно сигнатуры $(\cdot, \backslash, /)$ примитивной квазигруппы $(Q, \cdot, \backslash, /)$. Верна следующая теорема.

Теорема 9. Пусть в примитивной квазигруппе $(Q, \cdot, \backslash, /)$ выполняется тождество, полученное из тождества (5) (из тождества (6)) описанным выше способом, тогда эта квазигруппа изотопна группе (абелевой группе).

Если при этом вместо тождества (5) использовать любое тождество из теорем 4, 5, 6 или 7, то квазигруппа $(Q, \cdot)$ имеет соответствующий тип линейности.

Доказательство. Используем теорему 8, принимая во внимание, что в примитивной квазигруппе $(Q, \cdot, \backslash, /)$ в этом случае выполняется тождество со свойством (А) относительно соответствующего тождества с подстановками в квазигруппе $(Q, \cdot)$.

Следствие 5. Для любого натурального числа $n \geq 4$ существует тождество в сигнатуре $(\cdot, \backslash, /)$, включающее n переменных, выполнение которого в примитивной квазигруппе $(Q, \cdot, \backslash, /)$ является достаточным для изотопии квазигруппы $(Q, \cdot)$ группе (абелевой группе) или для ее линейности соответствующего типа.

Проиллюстрируем теоремы 8 и 9 на примерах. Возьмем за основу тождество (5) в квазигруппе $(Q, \cdot)$, и пусть $M = \{u, v\}$, $\alpha_1 = R_u^{-1}$, $\alpha_2 = L_v$, $\alpha_3 = R_v^{-1} L_u$, $\alpha_4 = L_v^{-1}$, $\alpha_5 = R_u^{-1}$, $\alpha_6 = L_u$. Тогда тождество (5) превратится в тождество

$$R_u^{-1} (L_v(xy) \cdot z) = R_v^{-1} L_u x \cdot L_v^{-1} (R_u^{-1} y \cdot L_u z),$$

включающее пять переменных. Перейдя в нем к операциям примитивной квазигруппы, получим равенство

$$(v(xy) \cdot z) / (u \backslash v) = (ux / v) \cdot (v \backslash ((y / u) \cdot uz)). \quad (36)$$

По теореме 9, квазигруппа $(Q, \cdot)$ с этим тождеством изотопна группе.

Взяв за основу любое из тождеств, приведенных в теоремах 4–7, можно получить тождество в примитивной квазигруппе $(Q, \cdot, \backslash, /)$ с любым числом переменных $n \geq 4$,

приводящее к заданному типу линейности квазигруппы $(Q, \cdot)$. С другой стороны, если примитивная квазигруппа $(Q, \cdot, \backslash, /)$ удовлетворяет тождеству (36), то, фиксируя в нем все переменные, кроме x, y, z , получаем тождество со свойством (A) относительно тождества (5), поэтому по теореме 8 квазигруппа $(Q, \cdot)$ изотопна группе.

Список литературы

1. Faragó T., Contribution to the definition of a group. *Publ. Math. Debrecen* (1953) **3**, 133–137.
2. Sade A., Entropie demosienne de multigroupoïdes et de quasigroups. *Ann. Soc. Sci. Bruxelles* (1959) **73**, 302–309.
3. Sade A., Demosian systems of quasigroups. *Amer. Math. Monthly* (1961) **68**, 329–337.
4. Белоусов В. Д., Уравновешенные тождества в квазигруппах. *Матем. сборник* (1966) **70** (112), №1, 55–97.
5. Белоусов В. Д., Ассоциативные в целом системы квазигрупп. *Матем. сборник* (1961) **55** (97), №2, 221–236.
6. Aczél J., Belousov V. D., Hosszú M., Generalized associativity and bisymmetry on quasigroups. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* (1960) **11**, 127–136.
7. Izbash V. I., Isomorphisms of quasigroups isotopic to groups. *Quasigroups Relat. Syst.* (1995) **2**, 34–50.
8. Щербakov В. А., О линейных квазигруппах и их группах автоморфизмов. *Матем. исслед.* (1991) **120**, 104–113.
9. Белявская Г. Б., Табаров А. Х., Характеристика линейных и аilinearных квазигрупп. *Дискретная математика* (1992) **4**, №2, 142–147.
10. Kepka T., Nemec P., T -quasigroups. I. *Acta Univ. Carol., Math. Phys.* (1971) **12**, 39–49.
11. Белоусов В. Д., *Основы теории квазигрупп и луп*. Наука, Москва, 1967.
12. Jezek J., Kepka T., Quasigroups isotopic to a group. *Commentat. Math. Univ. Carol.* (1975) **16**, 59–76.
13. Sokhatsky F. N., On isotopes of groups. I. *Ukrainian Math. J.* (1995) **47**, №10, 1585–1598.
14. Sokhatsky F. N., On isotopes of groups. II. *Ukrainian Math. J.* (1995) **47**, №12, 1935–1948.
15. Sokhatsky F. N., On isotopes of groups. III. *Ukrainian Math. J.* (1996) **48**, №2, 283–293.
16. Kirnasovsky O. U., Linear isotopes of small order groups. *Quasigroups Relat. Syst.* (1995) **2**, 51–82.
17. Белявская Г. Б., Табаров А. Х., Ядра и центр линейных квазигрупп. *Изв. АН Республики Молдова. Математика* (1991) **3**, №6, 37–42.
18. Белявская Г. Б., T -квазигруппы и центр квазигруппы. *Матем. исслед.* (1989) **111**, 24–43.
19. Belyavskaya G. B., Tabarov A. H., One-sided T -quasigroups and irreducible balanced identities. *Quasigroups Relat. Syst.* (1994) **1**, 8–21.
20. Белоусов В. Д., Квазигруппы с вполне сократимыми уравновешенными тождествами. *Матем. исслед.* (1985) **83**, 11–25.
21. Табаров А. Х., *Ядра, линейность и уравновешенные тождества в квазигруппах*, Канд. дисс. физ.-мат. наук. Кишинев, 1992.
22. Флоря И. А., Кройтор Н. Н., Об одном классе квазигрупп Бола. *Вестник Приднестровского ун-ва. Физ.-мат. и технич. науки* (2006) **3**, 91–95.
23. Флоря И. А., Квазигруппы Бола. В сб.: *Исследования по общей алгебре*. АН Молдавской ССР, Кишинев, 1965, с. 136–154.