Общероссийский математический портал

Е. Б. Яровая, Критические ветвящиеся случайные блуждания по решеткам низких размерностей, *Дискрет. матем.*, 2009, том 21, выпуск 1, 117–138

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1042>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 13:33:46

Критические ветвящиеся случайные блуждания по решеткам низких размерностей

© 2009 г. Е. Б. Яровая

Рассматриваются ветвящиеся случайные блуждания с непрерывным временем по целочисленным решеткам с размножением и гибелью частиц в единственной точке — источнике ветвления. В предположении симметричности и однородности случайного блуждания выводятся интегральные и дифференциальные уравнения динамики локальных вероятностей продолжения процесса в произвольных узлах решетки и вероятностей выживания популяции частиц, справедливые для решеток любой размерности. В критическом случае исследовано асимптотическое поведение при $t \rightarrow \infty$ локальных вероятностей, вероятности выживания популяции частиц, а также условных распределений размера популяции частиц на $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{Z}^2$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 07–01–00362а, и программы «Междисциплинарные научные проекты МГУ имени М. В. Ломоносова», 2007 г.

1. Введение

В последние годы благодаря многочисленным приложениям в различных областях естественных наук, где важным оказывается изучение тех или иных эволюционных процессов в зависимости от структуры среды, возрос интерес к случайным блужданиям, обладающим свойством ветвления [1], то есть к процессам, которые могут быть описаны в терминах блуждания, а также размножения и гибели частиц на решетках. Впервые модель ветвящегося случайного блуждания с непрерывным временем в неоднородной среде была введена, по-видимому, в [2] и получила дальнейшее развитие в работах [3, 4, 5, 7, 8]. Неформальное описание предложенной в [2] модели состоит в следующем: пусть имеется целочисленная решетка $\mathbf{Z}^d$ и в начальный момент времени в некотором узле решетки располагается одна частица, которая затем совершает случайное блуждание по решетке, пока не достигнет некоторой выделенной точки, где располагается источник ветвления. Здесь частица может с некоторой интенсивностью погибнуть или произвести потомство. Если размножения не произошло, то частица продолжает случайное блуждание до следующего возвращения в источник. Предполагается, что каждая из новых частиц эволюционирует по тому же закону независимо от остальных частиц и от всей предыстории.

Подобная модель ветвящегося случайного блуждания по $\mathbf{Z}$ с введением дополнительного параметра, управляющего поведением процесса в источнике ветвления и при этом нарушающего симметричность матрицы интенсивностей переходных вероятностей случайного блуждания, была рассмотрена в работах [9, 10]. Как показано в [11], подобного рода ветвящиеся случайные блуждания с одним источником ветвления используются в

качестве аппроксимаций каталитических суперпроцессов, теория которых активно развивается в последние годы [12, 13].

Асимптотическое (по времени) поведение ветвящегося случайного блуждания по целочисленным решеткам существенно зависит от значения интенсивности воспроизводства потомства в источнике ветвления, обозначаемой β . При этом здесь может быть указано такое значение β_c , что при $\beta > \beta_c$, $\beta = \beta_c$ и $\beta < \beta_c$ асимптотическое поведение рассматриваемого процесса оказывается качественно различным [3, 4, 5, 7, 8]. В этом смысле значение интенсивности β_c естественно назвать критическим.

Целью настоящей работы является исследование критических ветвящихся случайных блужданий по $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{Z}^2$. Как будет показано далее, для таких ветвящихся случайных блужданий справедливо условие $\beta = \beta_c = 0$.

Структура работы следующая. В разделе 2 приводится формальное описание рассматриваемой модели и напоминаются необходимые для дальнейшего исследования понятия. Здесь же проводится более детальное, чем во введении, сравнение известных результатов с постановками настоящей работы.

В разделе 3 напоминаются необходимые сведения о переходных вероятностях, свойства которых играют ключевую роль на протяжении всей статьи. Отметим, что рассматриваемый в статье класс случайных блужданий обладает таким существенным для дальнейшего исследования свойством, как возвратность. В работах [5, 8] выведены дифференциальные и интегральные уравнения для производящих функций, на основе которых получены дифференциальные и интегральные уравнения, описывающие динамику локальных вероятностей продолжения процесса в произвольном узле решетки и вероятности выживания популяции частиц. Ряд утверждений этого раздела справедлив для решеток произвольной размерности.

В разделе 4 исследуется вероятность продолжения процесса в источнике на $\mathbf{Z}$. Здесь для анализа этой вероятности используется техника, развитая в работе [9] для модели с дополнительным параметром, управляющим поведением процесса в источнике.

В разделе 5 исследуется вероятность продолжения процесса в источнике на $\mathbf{Z}^2$.

Раздел 6 посвящен анализу вероятностей продолжения процесса в произвольных узлах решеток $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{Z}^2$.

Наконец, в разделе 7 исследуется вероятность выживания популяции частиц на $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{Z}^2$, а также доказана условная предельная теорема о поведении размера популяции частиц.

2. Модель. Основные результаты

Перейдем к формальному описанию модели ветвящегося случайного блуждания по d -мерной целочисленной решетке $\mathbf{Z}^d$.

Пусть $A = (a(x, y))_{x, y \in \mathbf{Z}^d}$ — матрица переходных интенсивностей случайного блуждания, $a(x, y) \geq 0$ при $x \neq y$, $a(x, x) < 0$ и $\sum_{y \in \mathbf{Z}^d} a(x, y) = 0$. В модели предполагается, что блуждание однородно по времени, пространственно однородно ($a(x, y) = a(0, y - x)$), симметрично ($a(x, y) = a(y, x)$) и неприводимо (то есть все точки $y \in \mathbf{Z}^d$ достижимы), причем скачки имеют конечную дисперсию

$$\sigma^2 = -\frac{1}{a(0, 0)} \sum_{x \in \mathbf{Z}^d} |x|^2 a(0, x) < \infty.$$

Заметим, что в этот класс входит простое симметричное случайное блуждание, для которого $a(x, y) = a/(2d)$ при $|y - x| = 1$, $a(x, x) = -a$, и $a(x, y) = 0$ в противном случае.

Процесс ветвления частиц в источнике описывается инфинитезимальной производящей функцией

$$f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n u^n, \quad (1)$$

где $b_n \geq 0$ при $n \neq 1$, $b_1 < 0$ и $\sum_n b_n = 0$. Таким образом, частица, находящаяся в точке x , за малое время h с вероятностью $a(x, y)h + o(h)$ переходит в точку $y \neq x$, с вероятностью $\delta_0(x)b_n h + o(h)$ умирает, породив $n \neq 1$ потомков, или с вероятностью $1 + a(x, x)h + \delta_0(x)b_1 h + o(h)$ остается в точке x . Другими словами, в источнике $x_0 = 0$ частица живет случайное время, распределенное по экспоненциальному закону с параметром $-(a(0, 0) + b_1)$, по истечении которого она либо порождает случайное число $n \neq 1$ потомков, либо перескакивает в иной узел решетки. При этом каждая новая частица эволюционирует по тому же закону независимо от остальных.

Обозначим через $p(t, x, y)$ переходную вероятность случайного блуждания (без ветвления), то есть вероятность того, что в момент $t \geq 0$ частица находится в точке y , при условии, что в момент времени $t = 0$ она находилась в точке x . Введем функцию Грина случайного блуждания, представляющую собой преобразование Лапласа переходной вероятности $p(t, x, y)$ по переменной t с параметром $\lambda \geq 0$:

$$G_\lambda(x, y) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} p(t, x, y) dt. \quad (2)$$

Как известно (см., например, гл. II в [8]), для рассматриваемого случайного блуждания переходные вероятности имеют при $t \rightarrow \infty$ степенную асимптотику, где первый член асимптотического разложения не зависит от x и y :

$$p(t, x, y) \sim \gamma_d t^{-d/2}. \quad (3)$$

Поэтому $G_\lambda(0, 0)|_{\lambda=0} < \infty$ только при $d \geq 3$, и значит, рассматриваемое случайное блуждание неозвратно в размерностях $d \geq 3$ и овозратно в размерностях $d = 1, 2$.

Предположим, что число потомков частицы имеет конечные моменты всех порядков, то есть $\beta_r = f^{(r)}(1) < \infty$ при $r \in \mathbb{N}$. Важной характеристикой процесса ветвления является параметр $\beta = f'(1)$, который определяется равенством

$$\beta = f'(1) = \sum_n n b_n = (-b_1) \left(\sum_{n \neq 1} n \frac{b_n}{(-b_1)} - 1 \right),$$

где последняя сумма — среднее число рождающихся потомков. Как показано в [3, 4, 7, 8], существует такое значение β_c , что асимптотическое поведение процесса различается при $\beta > \beta_c$, $\beta = \beta_c$ и $\beta < \beta_c$. В этом смысле точка β_c является критической для рассматриваемого процесса. Значение величины β_c может быть найдено с помощью равенства $\beta_c = 1/G_0(0, 0)$ и, следовательно, $\beta_c = 0$ при $d = 1, 2$ и $\beta_c > 0$ при $d \geq 3$.

Напомним кратко, чем же именно различается асимптотическое поведение процесса при $\beta > \beta_c$, $\beta = \beta_c$ и $\beta < \beta_c$. Обозначим через $\mu_t(y)$ число частиц в произвольном узле решетки $y \in \mathbb{Z}^d$ и через $\mu_t = \sum_y \mu_t(y)$ общее число частиц на $\mathbb{Z}^d$ в момент времени t .

Асимптотическое поведение моментов $m_n(t, x, y) = \mathbf{E}_x \mu_t^n(y)$ и $m_n(t, x) = \mathbf{E}_x \mu_t^n$, $n \in \mathbb{N}$, где $\mathbf{E}_x$ обозначает математическое ожидание при условии $\mu_0(\cdot) = \delta_x(\cdot)$, исследовано в [8] при любых β во всех размерностях.

Надкритический случай ($\beta > \beta_c$) также исследован во всех размерностях в [3, 8]. В этом случае при нормировке $e^{-\lambda_0 t}$, где показатель экспоненты λ_0 является корнем уравнения $\beta G_\lambda(0, 0) = 1$, случайные величины $\mu_t(y)$ и μ_t имеют предельное распределение при $t \rightarrow \infty$.

Иная картина наблюдается в критическом ($\beta = \beta_c$) и докритическом ($\beta < \beta_c$) случаях [8, 3, 4, 7], где имеет место нерегулярный по номеру n рост моментов при больших временах t . Это свидетельствует о том, что асимптотическое поведение случайной величины μ_t не определяется поведением ее моментов при $t \rightarrow \infty$. По этой причине критический и докритический случаи были до настоящего времени изучены менее полно. В настоящей работе этот пробел до известной степени восполняется, и приводятся полные доказательства некоторых результатов, анонсированных в [6, 7].

В статье для критических ветвящихся случайных блужданий исследуются локальные вероятности продолжения процесса $Q(t, x, y) = \mathbf{P}_x\{\mu_t(y) > 0\}$ и вероятности выживания популяции частиц $Q(t, x) = \mathbf{P}_x\{\mu_t > 0\}$ на решетках размерности $d = 1, 2$.

Основным результатом работы, доказательству которого посвящена оставшаяся часть статьи, является следующая теорема.

Теорема 1. Если $\beta = \beta_c$, то $Q(t, x, y) \sim k_d u(t)$ и $Q(t, x) \sim K_d v(t)$ при $t \rightarrow \infty$, где k_d, K_d — положительные константы, а функции u, v имеют вид

$$\begin{aligned} u(t) &= t^{-1/2}(\ln t)^{-1}, & v(t) &= t^{-1/4} & \text{при } d = 1; \\ u(t) &= t^{-1}, & v(t) &= (\ln t)^{-1/2} & \text{при } d = 2. \end{aligned}$$

Упоминаемые в теореме константы будут найдены в явном виде в разделах 4–7. Одним из следствий теоремы 1 является приводимая ниже предельная теорема о поведении размера популяции частиц при больших t , доказанная в разделе 7.

Теорема 2. Если $\beta = \beta_c$ и $d = 1, 2$, то для любого $z > 0$ справедливо соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}_x[e^{-z\mu_t} \mid \mu_t > 0] = 1 - \sqrt{1 - e^{-z}}. \quad (4)$$

В силу этой теоремы для решеток размерности $d = 1, 2$ правая часть соотношения (4) не зависит от точки x , с которой начинается процесс при $t = 0$.

3. Вспомогательные результаты и основные уравнения

Пусть $p(t, x, y)$ — переходная вероятность случайного блуждания. Из описания модели при малых h вытекают соотношения

$$p(h, x, y) = a(x, y)h + o(h), \quad y \neq x, \quad (5)$$

$$p(h, x, x) = 1 + a(x, x)h + o(h). \quad (6)$$

Как показано, например, в гл. III в [14] из (5), (6) следует, что переходные вероятности $p(t, x, y)$ удовлетворяют системе дифференциально-разностных уравнений (обратные уравнения Колмогорова)

$$\frac{\partial p(t, x, y)}{\partial t} = \mathcal{A}p(t, x, y), \quad p(0, x, y) = \delta_y(x),$$

где $\delta_y(\cdot)$ — дискретная δ -функция Кронекера на $\mathbf{Z}$,

$$\delta_y(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x = y, \\ 0 & \text{при } x \neq y, \end{cases}$$

а выражение $\mathcal{A}p(t, x, y)$ определяется равенством

$$\mathcal{A}p(t, x, y) = \sum_{x'} a(x, x') p(t, x', y). \quad (7)$$

Так как в дальнейшем в первую очередь будет исследована асимптотика локальных численностей в нуле, удобнее перейти к обозначению $p(t) = p(t, 0, 0)$. Необходимые свойства функции $p(t)$ сформулированы в следующей лемме, доказательство которой является несложным обобщением на многомерный случай аналогичного результата из [9] при $d = 1$.

Лемма 1. *Переходная вероятность $p(t)$ не возрастает по t на $\mathbf{Z}^d$, причем ее производная $p'(t) < 0$ не убывает по t и при $t \rightarrow \infty$ имеет представление*

$$p'(t) = -\frac{d\gamma_d}{2} t^{-(d/2+1)} + O(t^{-(d/2+2)}), \quad \gamma_d > 0. \quad (8)$$

Как показано, например, в [8], для каждого $d \geq 1$ и каждых $x, y \in \mathbf{Z}^d$ константа γ_d в асимптотическом представлении (3) может быть выражена через функцию

$$\phi(\theta) = \sum_{x \in \mathbf{Z}^d} a(x, 0) e^{i(x, \theta)}, \quad \theta \in [-\pi, \pi]^d,$$

следующим образом:

$$\gamma_d = ((2\pi)^d D_d)^{-1/2}, \quad D_d = |\det \phi''_{\theta\theta}(0)|.$$

При этом

$$\begin{aligned} p(t, 0, 0) - p(t, x, 0) &\sim \tilde{\gamma}_d(x) t^{-(d/2+1)}, \\ \tilde{\gamma}_d(x) &= \frac{1}{2(2\pi)^d} \int_{\mathbf{R}^d} (\omega, x)^2 e^{(\phi''_{\theta\theta}(0)\omega, \omega)/2} d\omega. \end{aligned} \quad (9)$$

Определим производящие функции для случайных величин $\mu_t(y)$ и μ_t при $z \geq 0$ равенствами

$$F(z; t, x, y) = \mathbf{E}_x e^{-z\mu_t(y)}, \quad F(z; t, x) = \mathbf{E}_x e^{-z\mu_t}, \quad (10)$$

где $\mathbf{E}_x$ обозначает математическое ожидание при условии $\mu_0(\cdot) = \delta_x(\cdot)$. Заметим, что по определению (10)

$$\begin{aligned} F(z; t, x, y) &= \mathbf{P}_x\{\mu_t(y) = 0\} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}_x\{\mu_t(y) = n\} e^{-zn}, \\ F(z; t, x) &= \mathbf{P}_x\{\mu_t = 0\} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}_x\{\mu_t = n\} e^{-zn}, \end{aligned}$$

и поэтому естественно доопределить функции $F(z; t, x, y)$ и $F(z; t, x)$ по непрерывности в точке $z = \infty$, полагая $F(\infty; t, x, y) = \mathbf{P}_x\{\mu_t(y) = 0\}$, $F(\infty; t, x) = \mathbf{P}_x\{\mu_t = 0\}$.

Как показано в [5, 8], производящие функции (10) при каждом $z \geq 0$ непрерывно дифференцируемы по переменной t равномерно по $x, y \in \mathbf{Z}^d$, удовлетворяют неравенствам $0 \leq F(z; t, x), F(z; t, x, y) \leq 1$ и дифференциальным уравнениям

$$\partial_t F(z; t, x) = (\mathcal{A}F(z; t, \cdot))(x) + \delta_0(x)f(F(z; t, x)), \quad (11)$$

$$\partial_t F(z; t, x, y) = (\mathcal{A}F(z; t, \cdot, y))(x) + \delta_0(x)f(F(z; t, x, y)) \quad (12)$$

с начальными условиями $F(z; 0, x) = e^{-z}$ и $F(z; 0, x, y) = e^{-z\delta_y(x)}$ соответственно. В формуле (11), как и в (7), выражение $\mathcal{A}F(z; t, \cdot)$ следует понимать как единый символ, обозначающий зависящую от параметра z и времени t функцию переменной $x \in \mathbf{Z}^d$, определяемую равенством

$$(\mathcal{A}F(z; t, \cdot))(x) = \sum_{x' \in \mathbf{Z}^d} a(x, x')F(z; t, x').$$

Аналогично определяется и выражение $\mathcal{A}F(z; t, \cdot, y)$ в формуле (12).

Напомним, что локальной вероятностью продолжения процесса в разделе 2 была названа вероятность того, что в момент времени t хотя бы одна частица находится в точке y при условии старта процесса из точки x :

$$Q(t, x, y) = \mathbf{P}_x\{\mu_t(y) > 0\} = 1 - \mathbf{P}_x\{\mu_t(y) = 0\}.$$

Там же вероятность продолжения процесса или вероятность выживания популяции частиц была определена как вероятность того, что в момент времени t на решетке $\mathbf{Z}^d$ содержится хотя бы одна частица:

$$Q(t, x) = \mathbf{P}_x\{\mu_t > 0\} = 1 - \mathbf{P}_x\{\mu_t = 0\}.$$

Вероятности $Q(t, x, y)$, $Q(t, x)$ легко выразить через производящие функции

$$Q(t, x, y) = 1 - F(\infty, t, x, y), \quad Q(t, x) = 1 - F(\infty, t, x). \quad (13)$$

Ряд фактов, которые характеризуют свойства производящих функций $F(z; t, x, y)$ и $F(z; t, x)$, может быть достаточно просто получен из уравнений (11) и (12), если трактовать последние как уравнения в банаховых пространствах [5, 8]. Уравнение (11) может быть представлено как зависящая от параметра z задача Коши в банаховом пространстве $l^\infty(\mathbf{Z}^d)$:

$$\frac{dF(z; t, \cdot)}{dt} = \mathcal{A}F(z; t, \cdot) + \delta_0(\cdot)f(F(z; t, \cdot)) \quad (14)$$

с начальным условием $F(z, 0, \cdot) = e^{-z}$.

Аналогично, в силу равномерной по $x, y \in \mathbf{Z}^d$ непрерывной дифференцируемости функции $F(z; t, x, y)$ по переменной t при каждом $z \geq 0$ уравнение (12) также может быть представлено как зависящая от параметров z и y задача Коши в банаховом пространстве $l^\infty(\mathbf{Z}^d)$:

$$\frac{dF(z; t, \cdot, y)}{dt} = \mathcal{A}F(z; t, \cdot, y) + \delta_0(\cdot)f(F(z; t, \cdot, y)) \quad (15)$$

с начальным условием $F(z, 0, \cdot, y) = e^{-z\delta_y(\cdot)}$.

Поскольку правые части уравнений (14) и (15) непрерывны и удовлетворяют условию Липшица как операторы в $l^\infty(\mathbf{Z}^d)$, из (14) и (15) по теореме о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных условий и параметров вытекает, в частности, что функции $F(z; t, \cdot)$ и $F(z; t, \cdot, y)$ при каждом y непрерывно по норме $l^\infty(\mathbf{Z}^d)$ зависят от параметра z при $z \geq 0$ и, более того, имеют такую же гладкость по z , как и функция $f(u)$.

Лемма 2. *Функция $F(z, t, x)$ монотонно не убывает по t при фиксированных $z \geq 0$ и $x \in \mathbf{Z}^d$, а следовательно, вероятность продолжения процесса $Q(t, x)$ монотонно не возрастает по t при каждом фиксированном $x \in \mathbf{Z}^d$.*

Доказательство вытекает из теоремы о положительных решениях для дифференциальных уравнений в $l^\infty(\mathbf{Z}^d)$ с внедиагонально положительной правой частью (см., например, [15]). Отметим, что данный факт верен для любых размерностей d независимо от предположения о критичности параметра β .

Из (15) при помощи формулы вариации произвольной постоянной легко получить (см. теорему 2.7 в [5]) интегральные уравнения для производящих функций

$$F(z; t, x) = e^{-z} + \int_0^t p(t-s, x, 0) f(F(z, s, 0)) ds, \quad (16)$$

$$F(z; t, x, y) = 1 + (e^{-z} p(t, x, y) + \int_0^t p(t-s, x, 0) f(F(z, s, 0, y)) ds. \quad (17)$$

Соотношения (13) позволяют выписать уравнения для вероятностей продолжения процесса.

Теорема 3. *Вероятности продолжения процесса $Q(t, x, y)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям*

$$\partial_t Q(t, x, y) = (\mathcal{A}Q(t, \cdot, y))(x) - \delta_0(x) f(1 - Q(t, x, y)), \quad (18)$$

$$\partial_t Q(t, x, y) = (\mathcal{A}Q(t, x, \cdot))(y) - \delta_0(y) f(1 - Q(t, x, y)), \quad (19)$$

с начальными условиями $Q(0, \cdot, y) = \delta_y(\cdot)$ и $Q(0, x, \cdot) = \delta_x(\cdot)$, а также интегральным уравнениям

$$Q(t, x, y) = p(t, x, y) - \int_0^t p(t-s, x, 0) f(1 - Q(s, 0, y)) ds, \quad (20)$$

$$Q(t, x, y) = p(t, x, y) - \int_0^t p(t-s, 0, y) f(1 - Q(s, x, 0)) ds. \quad (21)$$

При этом функция $Q(t, x, y)$ является симметричной по переменным x и y , то есть $Q(t, x, y) = Q(t, y, x)$. Вероятности выживания частиц на решетке $Q(t, x)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\partial_t Q(t, x) = (\mathcal{A}Q(t, \cdot))(x) - \delta_0(x) f(1 - Q(t, x)), \quad (22)$$

с начальным условием $Q(0, x) = 1$, а также интегральным уравнением

$$Q(t, x) = 1 - \int_0^t p(t-s, x, 0) f(1 - Q(s, 0)) ds. \quad (23)$$

Доказательство. Дифференциальные уравнения для $q(t, x, y) = 1 - Q(t, x, y)$ и $q(t, y) = 1 - Q(t, x)$ в точности совпадают с уравнениями (11) и (12) для производящих функций при $z = \infty$. Отсюда сразу получаем (18) и (22). Уравнения (20) и (23) получаются из (18) и (22) методом вариации произвольной постоянной [16]. Отметим, что с точностью до обозначений уравнение (20) совпадает с уравнением (3.4) из [5].

Уравнение (19) является так называемым прямым уравнением и выводится с учетом изменения числа частиц в точке y за время $[t, t + h]$ с точностью до членов порядка $o(h)$, которое определяется одним из следующих случаев:

- (а) прыжком частицы из некоторой точки y' , $y' \neq y$, в y ;
- (б) прыжком частицы из точки y в какую-то другую точку, и, наконец,
- (в) ветвлением частиц в точке y , при условии, что $y = 0$.

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} Q(t + h, x, y) - Q(t, x, y) &= a(y, y)Q(t, x, y)h - \delta_0(y)b_1(1 - Q(t, x, y))h + o(h) \\ &\quad + \sum_{y' \neq y} a(y', y)Q(t, x, y')h - \delta_0(y) \sum_{n \neq 1} b_n(1 - Q(t, x, y))^n h + o(h) \\ &= \sum_{y'} a(y', y)Q(t, x, y')h - \delta_0(y)f(1 - Q(t, x, y))h + o(h) \\ &= \sum_{y'} a(y, y')Q(t, x, y')h - \delta_0(y)f(1 - Q(t, x, y))h + o(h) \\ &= ((\mathcal{A}Q(t, x, \cdot))(y) - \delta_0(y)f(1 - Q(t, x, y)))h + o(h), \end{aligned}$$

откуда предельным переходом при $h \rightarrow 0$ получаем (19).

Докажем симметричность функции $Q(t, x, y)$. По предположению функция $Q(t, x, y)$ есть решение задачи Коши (19). Поэтому функция $n(t, x, y) = Q(t, y, x)$ удовлетворяет задаче Коши (18) и является ее единственным решением. Но функция $Q(t, x, y)$ также является решением задачи Коши (18). Следовательно, $Q(t, y, x) = n(t, x, y) = Q(t, x, y)$.

Наконец, как и выше, уравнение (21) получается из (19) методом вариации произвольной постоянной. Доказательство теоремы 3 завершено.

Отметим, что теорема 3 справедлива для решеток произвольной размерности d .

Для удобства изложения сведем необходимые в дальнейшем очевидные свойства инфинитезимальной производящей функции (1) в размерностях $d = 1, 2$ в критическом случае $\beta = \beta_c$ в следующую лемму.

Лемма 3. Пусть $b_n \geq 0$ при $n \neq 1$, $b_1 < 0$ и $\sum_n b_n = 0$, $\sum_n n b_n = 0$. Пусть, кроме того, при каждом $r \geq 1$ производные $f^{(r)}(u)$ функции $f(u)$ в точке $u = 1$ определены и конечны. Тогда

- (а) функция $f(u) = f^{(0)}(u)$ и все ее производные $f^{(r)}(u)$, $r \geq 1$, имеют вид

$$f^{(r)}(u) = \sum_{n=r}^{\infty} \frac{n!}{(n-r)!} b_n u^{n-r},$$

где ряд в правой части сходится при всех $u \in [0, 1]$;

- (б) функции $f(u)$ и $f^{(r)}(u)$, $r \geq 2$, неотрицательны при всех $u \in [0, 1]$, а функция $f'(u)$ неположительна при этих же значениях u ;
- (в) $f(u) = (1/2)f''(1)(1-u)^2 + o((1-u)^2)$ при $u \rightarrow 1$.

4. Вероятность продолжения процесса в источнике на $\mathbb{Z}$

Согласно теореме 3, вероятность наличия частиц в нуле $Q(t) = Q(t, 0, 0)$ в момент времени t имеет вид

$$Q(t) = p(t) - \int_0^t p(t-s)f(1-Q(s))ds. \quad (24)$$

Введем, кроме того, функцию

$$M(t) = \int_t^\infty f(1-Q(s))ds. \quad (25)$$

В доказываемых ниже леммах 4–6 устанавливаются свойства функций $Q(t)$ и $M(t)$, необходимые для доказательства основного утверждения настоящего раздела — теоремы 4 об асимптотическом поведении локальной вероятности $Q(t)$.

Лемма 4. *Справедливо равенство $M(0) = 1$, и значит, функция $M(t)$ корректно определена при всех $t \geq 0$.*

Доказательство. Обозначим через

$$\hat{Q}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} Q(t) dt, \quad \hat{f}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(1-Q(t)) dt$$

преобразования Лапласа при $\lambda \geq 0$ функций $Q(t)$ и $f(1-Q(t))$ соответственно. Из (24) по определению (2) вытекает, что

$$\hat{Q}(\lambda) = G_\lambda(0, 0) - G_\lambda(0, 0)\hat{f}(\lambda) = G_\lambda(0, 0)(1 - \hat{f}(\lambda)), \quad (26)$$

и значит, $\hat{f}(\lambda) \leq 1$ при $\lambda \geq 0$. Кроме того, из определения функции $\hat{f}(\lambda)$ в силу неотрицательности $f(u)$ (см. утверждение (б) леммы 3) следует, что функция $\hat{f}(\lambda)$ монотонно возрастает при $\lambda \rightarrow 0$. Поэтому существует конечный предел

$$M(0) = \int_0^\infty f(1-Q(s))ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \hat{f}(\lambda) = c_0 \leq 1. \quad (27)$$

Из асимптотического поведения переходных вероятностей (3) с помощью тауберовой теоремы для плотностей (см. теорему 4 в разделе 5 гл. XIII в [17]) получаем, что при $\lambda \rightarrow 0$

$$G_\lambda(0, 0) \sim \gamma_1 \sqrt{\pi/\lambda}, \quad (28)$$

из которого в силу (26) и (27) при $\lambda \rightarrow 0$ вытекает соотношение

$$\hat{Q}(\lambda) \sim (1 - c_0)\gamma_1 \sqrt{\pi/\lambda}.$$

Тогда по тауберовой теореме (см. теорему 2 в разделе 5 гл. XIII в [17]) при $t \rightarrow \infty$

$$\int_0^t Q(u) du = 2(1 - c_0)\gamma_1 \sqrt{t} + o(\sqrt{t}).$$

Покажем теперь, что $c_0 = 1$. В силу интегрального неравенства Гельдера и утверждения (в) леммы 3, при достаточно больших t имеют место оценки

$$\frac{1}{t} \left(\int_t^{2t} Q(u) du \right)^2 \leq \int_t^{2t} Q^2(u) du \leq \frac{2}{f''(1)} \int_t^{2t} f(1-Q(u)) du. \quad (29)$$

Если бы выполнялось неравенство $c_0 < 1$, то здесь при $t \rightarrow \infty$ имело бы место соотношение

$$\int_t^{2t} Q(u) du \sim 2(\sqrt{2} - 1)(1 - c_0)\gamma_1 \sqrt{t}.$$

Тогда при $t \rightarrow \infty$ левая часть неравенства (29) оценивалась бы снизу ненулевой константой, что влекло бы расходимость интеграла $\int_0^\infty f(1 - Q(u)) du$, приводя к противоречию с утверждением (27). Полученное противоречие опровергает предположение, что $c_0 < 1$. В силу (27) лемма доказана.

Следствие 1. Справедлива оценка $Q(t) \leq p(t)M(t)$, и потому $Q(t) = o(p(t))$ при $t \rightarrow \infty$.

Доказательство. В силу леммы 4, интегральное уравнение (24) может быть представлено в виде

$$Q(t) = p(t) - \int_0^t p(t-s)f(1-Q(s))ds = p(t)M(0) - \int_0^t p(t-s)f(1-Q(s))ds.$$

Отсюда в силу монотонности $p(t)$ получаем оценку

$$Q(t) \leq p(t)M(0) - p(t) \int_0^t f(1-Q(s))ds = p(t)M(t),$$

из которой в силу неотрицательности функции $Q(t)$ вытекает утверждение следствия.

Введем функцию $L(\lambda) = 1 - \hat{f}(\lambda)$. Согласно (26), функция $L(\lambda)$ может быть представлена в виде

$$L(\lambda) = 1 - \hat{f}(\lambda) = \frac{\hat{Q}(\lambda)}{G_\lambda(0,0)}. \quad (30)$$

Лемма 5. Функция $L(\lambda)$ медленно меняется в нуле.

Доказательство. Напомним, что положительная функция $L(\lambda)$, $\lambda > 0$, называется медленно меняющейся в нуле, если при каждом фиксированном c выполняется равенство $\lim_{\lambda \rightarrow 0} L(c\lambda)/L(\lambda) = 1$. Аналогично вводится понятие функции, медленно меняющейся на бесконечности [18]. Отметим, что соотношение $\lim_{\lambda \rightarrow 0} L(c\lambda)/L(\lambda) = 1$ достаточно доказать лишь для всех $c > 1$ или для всех $c < 1$.

В силу утверждения (в) леммы 3, существует такая константа C_1 , что при всех $u \in [0, 1]$ выполняется неравенство $f(u) \leq C_1(1-u)^2$. Тогда, как следует из (30), для любого $c > 1$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} L(c\lambda) - L(\lambda) &= \hat{f}(\lambda) - \hat{f}(c\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda s}(1 - e^{-(c-1)\lambda s})f(1-Q(s))ds \\ &\leq C_1 \int_0^\infty e^{-\lambda s}(1 - e^{-(c-1)\lambda s})Q^2(s)ds = I_1(\lambda) + I_2(\lambda), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} I_1(\lambda) &= C_1 \int_0^{1/\lambda} e^{-\lambda s}(1 - e^{-(c-1)\lambda s})Q^2(s)ds, \\ I_2(\lambda) &= C_1 \int_{1/\lambda}^\infty e^{-\lambda s}(1 - e^{-(c-1)\lambda s})Q^2(s)ds. \end{aligned}$$

Так как $1 - e^{-x} \leq x$ и $1 - e^{-x} \leq 1$ при $x \geq 0$, справедливы неравенства

$$I_1(\lambda) \leq C_1(c-1)\lambda \int_0^{1/\lambda} e^{-\lambda s} Q^2(s) ds \leq C_1(c-1)\sqrt{\lambda} \int_0^{1/\lambda} e^{-\lambda s} (\sqrt{s} Q(s)) Q(s) ds,$$

$$I_2(\lambda) \leq C_1 \int_{1/\lambda}^{\infty} e^{-\lambda s} Q^2(s) ds \leq C_1 \max_{t \geq 1/\lambda} Q(t) \int_{1/\lambda}^{\infty} e^{-\lambda s} Q(s) ds.$$

Заметим теперь, что $\hat{Q}(\lambda) \rightarrow \infty$ при $\lambda \rightarrow 0$, а $\sqrt{t} Q(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, поэтому при $\lambda \rightarrow 0$

$$\int_0^{1/\lambda} e^{-\lambda s} (\sqrt{s} Q(s)) Q(s) ds \leq \int_0^{\infty} e^{-\lambda s} (\sqrt{s} Q(s)) Q(s) ds = o\left(\int_0^{\infty} e^{-\lambda s} Q(s) ds\right),$$

и следовательно,

$$\frac{I_1(\lambda)}{L(\lambda)} \leq C_1(c-1)\sqrt{\lambda} G_{\lambda}(0, 0) \frac{o(\hat{Q}(\lambda))}{\hat{Q}(\lambda)}.$$

Здесь в силу (28) произведение $\sqrt{\lambda} G_{\lambda}(0, 0)$ ограничено при $\lambda \rightarrow 0$, и, следовательно, $I_1(\lambda) = o(L(\lambda))$.

Оценивая сверху с помощью следствия 1 интеграл $I_2(\lambda)$, находим, что

$$I_2(\lambda) \leq C_1 p(\lambda^{-1}) \int_{1/\lambda}^{\infty} Q^2(s) ds \int_{1/\lambda}^{\infty} e^{-\lambda s} Q(s) ds.$$

Тогда

$$\frac{I_2(\lambda)}{L(\lambda)} \leq C_1 p(\lambda^{-1}) G_{\lambda}(0, 0) \int_{1/\lambda}^{\infty} Q^2(s) ds,$$

откуда $I_2(\lambda) = o(L(\lambda))$.

Таким образом, $L(c\lambda) - L(\lambda) = I_1(\lambda) + I_2(\lambda) = o(L(\lambda))$, для любого $c > 1$, откуда в силу определения медленно меняющейся функции вытекает утверждение леммы. Лемма доказана.

Следствие 2. При $t \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое соотношение $M(t) \sim L(t^{-1})$, и следовательно, функция $M(t)$ медленно меняется на бесконечности.

Доказательство. В силу (30) функция $L(\lambda)$ может быть представлена в виде

$$L(\lambda) = 1 - \int_0^{\infty} e^{-\lambda s} f(1 - Q(s)) ds = \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda s} M(s) ds,$$

то есть

$$\lambda^{-1} L(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda s} M(s) ds.$$

Так как по лемме 5 функция $L(\lambda)$ медленно меняется в нуле, по тауберовой теореме для плотностей (см. теорему 4 в разделе 5 гл. XIII в [17]) получаем предельное при $t \rightarrow \infty$ соотношение $M(t) \sim L(t^{-1})$, из которого вытекает требуемое утверждение. Следствие доказано.

Следствие 3. Справедливо асимптотическое при $t \rightarrow \infty$ соотношение

$$\int_0^t Q(s) ds \sim 2\gamma_1 \sqrt{t} M(t). \quad (31)$$

Доказательство. В силу (30) справедливо равенство $\hat{Q}(\lambda) = G_\lambda(0, 0)(\lambda)L(\lambda)$, в котором $L(\lambda)$ медленно меняется в нуле при $\lambda \rightarrow 0$. Тогда из (28) по тауберовой теореме (см. теорему 2 в разделе 5 гл. XIII в [17]) вытекает асимптотическое при $t \rightarrow \infty$ соотношение

$$\int_0^t Q(s) ds \sim 2\gamma_1 \sqrt{t} L(t^{-1}).$$

Отсюда по следствию 2 получаем требуемое соотношение (31). Следствие доказано.

Лемма 6. При $t \rightarrow \infty$ справедливо соотношение

$$I(t) = \int_0^t f(1 - Q(s))(p(t-s) - p(t)) ds = o(p(t)M(t)). \quad (32)$$

Доказательство. Представим функцию $I(t)$ в виде $I(t) = I_{1,\varepsilon}(t) + I_{2,\varepsilon}(t) + I_{3,\varepsilon}(t)$, где

$$I_{1,\varepsilon}(t) = \int_0^{\varepsilon t} f(1 - Q(s))(p(t-s) - p(t)) ds, \quad (33)$$

$$I_{2,\varepsilon}(t) = \int_{\varepsilon t}^{t-\varepsilon t} f(1 - Q(s))(p(t-s) - p(t)) ds, \quad (34)$$

$$I_{3,\varepsilon}(t) = \int_{t-\varepsilon t}^t f(1 - Q(s))(p(t-s) - p(t)) ds, \quad (35)$$

а $\varepsilon > 0$ — некоторое фиксированное число.

Оценим сначала интеграл $I_{1,\varepsilon}(t)$. Представим $I_{1,\varepsilon}(t)$ в виде

$$I_{1,\varepsilon}(t) = \int_0^{t\varepsilon} f(1 - Q(s)) \left(\int_{t-s}^t (-p'(u)) du \right) ds.$$

По лемме 1 функция $(-p'(t))$ положительна и не возрастает, поэтому

$$I_{1,\varepsilon}(t) \leq |p'(t)| \int_0^{t\varepsilon} s f(1 - Q(s)) ds. \quad (36)$$

Здесь интеграл в правой части можно представить в виде

$$\int_0^{\varepsilon t} s f(1 - Q(s)) ds = \int_0^{\varepsilon t} s d(-M(s)) = -\varepsilon t M(\varepsilon t) + \int_0^{\varepsilon t} M(s) ds. \quad (37)$$

Покажем, что при $t \rightarrow \infty$

$$\int_0^t M(s) ds \sim tM(t). \quad (38)$$

Положим

$$U(t) = \int_0^t M(s) ds.$$

Тогда производная $u(t)$ функции $U(t)$ совпадает с $M(t)$ и в силу определения (25) монотонна. Кроме того, функция $u(t)$ может быть представлена в виде $u(t) = t^{\rho-1} \tilde{L}(t) / \Gamma(\rho)$,

где $\rho = 1$, а функция $\tilde{L}(t) = \Gamma(\rho)M(t)$ по следствию 2 медленно меняется на бесконечности. Следовательно, по тауберовой теореме (см. теорему 4 в разделе 5 гл. XIII в [17]) функция

$$\omega(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda s} u(s) ds$$

при $\lambda \rightarrow 0$ имеет асимптотическое представление

$$\omega(\lambda) \sim \lambda^{-1} \Gamma(\rho) \tilde{L}(\lambda^{-1}),$$

или, при $\lambda \rightarrow 0$, поскольку при $\rho = 1$ выполняется соотношение $\Gamma(\rho) = \Gamma(1) = 1$,

$$\omega(\lambda) \sim \lambda^{-1} M(\lambda^{-1}). \quad (39)$$

Представив теперь функцию $\omega(\lambda)$ в виде $\omega(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda s} dU(s)$, по тауберовой теореме (см. теорему 2 в разделе 5 гл. XIII в [17]) получаем, что соотношение (39) влечет (38).

Из (38) при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ получаем, что при $t \rightarrow \infty$

$$\int_0^{t\varepsilon} M(s) ds \sim \varepsilon t M(\varepsilon t)$$

и в силу (37)

$$\int_0^{\varepsilon t} s f(1 - Q(s)) ds = o(p(\varepsilon t) M(\varepsilon t)) = o(p(t) M(t)).$$

Отсюда в силу (36) $I_{1,\varepsilon}(t) \leq |p'(t)| o(p(t) M(t))$, и в силу леммы 1

$$I_{1,\varepsilon}(t) = o(p(t) M(t)). \quad (40)$$

Перейдем к оценке интеграла $I_{2,\varepsilon}(t)$. В силу невозрастания переходной вероятности $p(t)$ выражение $p(t-s) - p(t)$ в (34) оценивается в промежутке интегрирования следующим образом: $p(t-s) - p(t) \leq p(\varepsilon t)$, потому

$$I_{2,\varepsilon}(t) \leq p(\varepsilon t) \left(\int_{\varepsilon t}^\infty f(1 - Q(s)) ds - \int_{t-\varepsilon t}^\infty f(1 - Q(s)) ds \right) = p(\varepsilon t) (M(\varepsilon t) - M(t - \varepsilon t)).$$

Здесь согласно следствию 2 функция $M(\varepsilon t)$ медленно меняется в нуле. Поэтому $M(\varepsilon t) - M(t - \varepsilon t) = o(M(t))$, и следовательно,

$$I_{2,\varepsilon}(t) \leq p(\varepsilon t) o(M(t)) = o(p(t) M(t)). \quad (41)$$

Оценим интеграл

$$I_{3,\varepsilon}(t) = \int_{t-t\varepsilon}^t f(1 - Q(s)) p(t-s) ds - p(t) \int_{t-t\varepsilon}^t f(1 - Q(s)) ds,$$

для него справедлива цепочка неравенств

$$\begin{aligned} I_{3,\varepsilon}(t) &\leq \int_{t-t\varepsilon}^t f(1 - Q(s)) p(t-s) ds \leq C_1 \int_{t-t\varepsilon}^t Q^2(s) p(t-s) ds \\ &\leq C_1 \max_{t(1-\varepsilon) \leq s \leq t} Q^2(s) \int_0^{t\varepsilon} p(s) ds. \end{aligned}$$

Заметим теперь, что $Q(t) \leq p(t)M(t)$ по следствию 1. Тогда в силу невозрастания функции $p(t)M(t)$ при достаточно больших t выполняется неравенство

$$I_{3,\varepsilon}(t) \leq 2C_1\gamma_1 p^2((1-\varepsilon)t)M^2((1-\varepsilon)t) \int_0^{t\varepsilon} p(s) ds. \quad (42)$$

Здесь из (28) и тауберовой теоремы (см. теорему 2 в разделе 5 гл. XIII в [17]) вытекает, что для интеграла в правой части при $x \rightarrow \infty$ справедливо соотношение

$$\int_0^x p(s) ds \sim \gamma_1 \sqrt{x},$$

и поэтому найдется такая константа C_2 , что

$$\int_0^x p(s) ds \leq C_2\gamma_1 \sqrt{x}, \quad x \geq 0.$$

Тогда отсюда и из (42) получаем, что

$$I_{3,\varepsilon}(t) \leq 2C_1C_2\gamma_1^2 p^2((1-\varepsilon)t)M^2((1-\varepsilon)t)\sqrt{\varepsilon t}. \quad (43)$$

В силу представления (3) для функции $p(t)$ найдется такая константа C_3 , что $p(t) \leq C_3\gamma_1 t^{-1/2}$, потому неравенство (43) может быть преобразовано к виду

$$I_{3,\varepsilon}(t) \leq 2C_1C_2C_3\gamma_1^3 p((1-\varepsilon)t)M^2((1-\varepsilon)t)\sqrt{\varepsilon/(1-\varepsilon)}.$$

Так как функция $M(t)$, согласно следствию 2, медленно меняется и стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, из последнего неравенства получаем соотношение

$$I_{3,\varepsilon}(t) = o(p(t)M(t)). \quad (44)$$

Итак, в силу (40), (41), (44) каждый из интегралов $I_{1,\varepsilon}(t)$, $I_{2,\varepsilon}(t)$, $I_{3,\varepsilon}(t)$ имеет порядок $o(p(t)M(t))$ при $t \rightarrow \infty$. Следовательно, функция $I(t) = I_{1,\varepsilon}(t) + I_{2,\varepsilon}(t) + I_{3,\varepsilon}(t)$ также имеет порядок $o(p(t)M(t))$ при $t \rightarrow \infty$. Лемма доказана.

Следствие 4. При $t \rightarrow \infty$ справедливо равенство $Q(t) = p(t)M(t)(1 + o(1))$.

Доказательство. Согласно лемме 4, справедливо равенство $M(0) = 1$, поэтому интегральному представлению (24) можно придать вид

$$\begin{aligned} Q(t) &= p(t)M(0) - \int_0^t p(t-s)f(1-Q(s)) ds \\ &= p(t)M(t) - \int_0^t f(1-Q(s))(p(t-s) - p(t)) ds. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом леммы 6 получаем утверждение следствия.

Теорема 4. При $t \rightarrow \infty$

$$Q(t) \sim 2(\beta_2\gamma_1\sqrt{t}\ln t)^{-1}. \quad (45)$$

Доказательство. Положим

$$y(t) = \int_t^\infty Q^2(s) ds, \quad \varphi(t) = \frac{Q(t)}{p(t)y(t)}.$$

Так как функция $y(t)$ не возрастает при $t \rightarrow \infty$, ее производная неположительна и $Q(t) = \sqrt{-y'(t)}$. Тогда по следствию 4

$$-\frac{y'(t)}{y^2(t)} = p^2(t)\varphi^2(t), \quad (46)$$

где

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}f''(1) + o(1).$$

Проинтегрировав левую и правую части (46), получим, что

$$\frac{1}{y(t)} - \frac{1}{y(0)} = \int_0^t p^2(s)\varphi^2(s) ds.$$

Здесь при $t \rightarrow \infty$

$$\int_0^t p^2(s)\varphi^2(s) ds \sim \left(\frac{f''(1)}{2}\right)^2 \gamma_1^2 \ln t.$$

Следовательно, при $t \rightarrow \infty$

$$y(t) \sim \frac{4}{(f''(1)\gamma_1)^2 \ln t}$$

или, что равносильно,

$$\int_t^\infty Q^2(s) ds \sim \frac{4}{(f''(1)\gamma_1)^2 \ln t}.$$

Так как при достаточно больших t по утверждению (в) леммы 3 имеет место асимптотическое равенство

$$p(t)M(t) \sim p(t) \int_t^\infty \frac{f''(1)}{2} Q^2(s) ds,$$

в силу следствия 4 и асимптотического представления для $p(t)$, а также определения β_2 , получаем утверждение (45). Теорема доказана.

5. Вероятность продолжения процесса в источнике на Z^2

Теперь перейдем к исследованию локальной вероятности продолжения процесса в источнике на Z^2 . Прежде чем приступить к доказательству основного утверждения настоящего раздела, теоремы 5, докажем две вспомогательные леммы 7 и 8.

Лемма 7. *Справедливо неравенство $M(0) < 1$, и значит, функция $M(t)$ корректно определена при всех $t \geq 0$.*

Доказательство. Как отмечалось в начале раздела 4, вероятность наличия частиц в нуле $Q(t)$ удовлетворяет уравнению (24). В силу монотонности $p(t)$ (см. лемму 1) из интегрального уравнения (24) вытекает оценка

$$Q(t) = p(t) - \int_0^t p(t-s)f(1-Q(s)) ds \leq p(t) \left(1 - \int_0^t f(1-Q(s)) ds\right).$$

С другой стороны, по определению $Q(t) = \mathbf{P}_0\{\mu_t(0) > 0\}$. Поэтому, введя обозначение $m_n(t) = m_n(t, 0, 0) = \mathbf{E}_0\mu_t^n(0)$, с помощью неравенства Коши–Буняковского получаем цепочку соотношений

$$\begin{aligned} m_1^2(t) &= (\mathbf{E}_0\mu_t(0))^2 = (\mathbf{E}_0\mu_t(0)I(\mu_t(0) > 0))^2 \leq \mathbf{E}_0\mu_t^2(0)\mathbf{E}_0I(\mu_t(0) > 0) \\ &= m_2(t)\mathbf{P}_0\{\mu_t(0) > 0\} = m_2(t)Q(t), \end{aligned}$$

откуда вытекает оценка снизу для $Q(t)$

$$\frac{m_1^2(t)}{m_2(t)} \leq Q(t).$$

Заметим теперь, что $m_1(t) = p(t)$ при $d = 2$ [3, 8]. Следовательно, для вероятности $Q(t)$ продолжения процесса в источнике справедливы неравенства

$$\frac{p^2(t)}{m_2(t)} \leq Q(t) \leq p(t) \left(1 - \int_0^t f(1 - Q(s)) ds \right),$$

из которых вытекает оценка

$$\frac{p(t)}{m_2(t)} \leq 1 - \int_0^t f(1 - Q(s)) ds$$

или, что то же,

$$\int_0^t f(1 - Q(s)) ds \leq 1 - \frac{p(t)}{m_2(t)}. \quad (47)$$

Здесь, как показано в [8], $m_2(t) \sim C_2(0, 0)t^{-1}$ при $t \rightarrow \infty$, где $C_2(0, 0) = \beta_2\gamma_2^2 > 0$. В этом случае при $t \rightarrow \infty$ правая часть неравенства (47) в силу асимптотического поведения (3) функции $p(t)$ стремится к константе $1 - (\beta_2\gamma_2)^{-1} < 1$. Следовательно,

$$M(0) = \int_0^\infty f(1 - Q(s)) ds \leq 1 - (\beta_2\gamma_2)^{-1} < 1.$$

Лемма доказана.

Лемма 8. Если $M(0) < 1$ и $p(t) \sim \gamma_2 t^{-1}$, то

$$\int_0^t p(t-s)f(1 - Q(s)) ds \sim \gamma_2 M(0)t^{-1} \quad (48)$$

при $t \rightarrow \infty$.

Доказательство. Представим интеграл в левой части асимптотического равенства (48) в виде

$$\int_0^t p(t-s)f(1 - Q(s)) ds = p(t) \int_0^t f(1 - Q(s)) ds + \int_0^t (p(t-s) - p(t))f(1 - Q(s)) ds.$$

Здесь первое слагаемое по условию леммы 8 при $t \rightarrow \infty$ удовлетворяет асимптотическому равенству

$$p(t) \int_0^t f(1 - Q(s)) ds \sim M(0)p(t),$$

и поэтому для завершения доказательства достаточно показать, что

$$I(t) = \int_0^t (p(t-s) - p(t)) f(1 - Q(s)) ds = o(p(t)). \quad (49)$$

Представим интеграл $I(t)$ в виде

$$I(t) = \int_0^t f(1 - Q(s)) \left(\int_{t-s}^t (-p'(u)) du \right) ds.$$

По лемме 1 функция $(-p'(t))$ положительна и не возрастает, и поэтому

$$I(t) \leq |p'(t)| \int_0^t s f(1 - Q(s)) ds.$$

Здесь правая часть неравенства может быть приведена к виду

$$\begin{aligned} |p'(t)| \int_0^t s f(1 - Q(s)) ds &= |p'(t)| \int_0^t s d(-M(s)) \\ &= |p'(t)|(-tM(t)) + |p'(t)| \int_0^t M(s) ds. \end{aligned}$$

Так как для функции $(-p'(t))$ справедливо асимптотическое представление (8) и из леммы 7 следует, что $M(t)$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, отсюда получаем (49). Лемма доказана.

Теорема 5. При $t \rightarrow \infty$

$$Q(t) \sim \gamma_2(1 - M(0))t^{-1}. \quad (50)$$

Доказательство. Как следует из теоремы 3, вероятность продолжения процесса в источнике $Q(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению (24). В этом уравнении в силу (3) $p(t) \sim \gamma_2 t^{-1}$ при $t \rightarrow \infty$, и поэтому согласно (48) справедливо представление (50), в котором $M(0) < 1$. Теорема доказана.

Обратим внимание на тот факт, что $M(0) < 1$ при $d = 2$. Этим объясняется идентичность асимптотического поведения по времени t переходной вероятности $p(t)$ и локальной вероятности продолжения процесса в источнике $Q(t)$ на $\mathbb{Z}^2$.

6. Вероятности продолжения процесса в произвольных узлах Z и Z^2

В разделах 4–5 предполагалось, что процесс стартовал в источнике ветвления, то есть в точке $x = 0$. В настоящем разделе будет показано, что на решетках низких размерностей асимптотическое поведение локальных вероятностей продолжения процесса $Q(t, x, y)$ не зависит от расположения узлов x и y .

Теорема 6. Если $\beta = \beta_c$ и $d = 1, 2$, то для произвольных x и y при $t \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое равенство $Q(t, x, y) \sim Q(t)$.

Доказательство. Рассмотрим случай $d = 1$. Из интегральных уравнений (20) и (24) вытекает равенство

$$\begin{aligned} Q(t, x, y) - Q(t, 0, y) - (p(t, x, y) - p(t, 0, y)) \\ = \int_0^t (p(t-s) - p(t-s, x, 0)) f(1 - Q(s, 0, y)) ds. \end{aligned} \quad (51)$$

Вначале исследуем асимптотику свертки в правой части (51) при $y = 0$. В силу (3), при $d = 1$ справедливо асимптотическое $t \rightarrow \infty$ представление

$$p(t) - p(t, x, 0) \sim \tilde{\gamma}_1(x) t^{-3/2}. \quad (52)$$

В то же время из теоремы 4 и утверждения (в) леммы 3 вытекает, что при $t \rightarrow \infty$

$$f(1 - Q(t)) \sim \frac{2}{\beta_2 \gamma_1^2 t \ln^2 t}. \quad (53)$$

Тогда по лемме о свертках степенно-логарифмических функций (см. лемму 5.1.2 в [8]) получаем из (52) и (53), что при $t \rightarrow \infty$

$$\int_0^t (p(t-s) - p(t-s, x, 0)) f(1 - Q(s)) ds \sim \frac{2}{\beta_2 \gamma_1^2 t \ln^2 t} \int_0^\infty (p(s) - p(s, x, 0)) ds. \quad (54)$$

Таким образом, при $t \rightarrow \infty$

$$Q(t, x, 0) - Q(t) \sim \frac{2}{\beta_2 \gamma_1^2 t \ln^2 t} \int_0^\infty (p(s) - p(s, x, 0)) ds. \quad (55)$$

Здесь по теореме 4 $Q(t) \sim 2(\beta_2 \gamma_1 \sqrt{t} \ln t)^{-1}$, значит, функция $Q(t)$ убывает на бесконечности медленнее, чем правая часть в асимптотическом представлении (55). Следовательно, $Q(t) \sim Q(t, x, 0)$ при $t \rightarrow \infty$.

Теперь перейдем к исследованию представления (51) при произвольном значении переменной y . Согласно теореме 3, функция $Q(t, x, y)$ симметрична, и поэтому $Q(t) \sim Q(t, y, 0) = Q(t, 0, y)$. Тогда при $t \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое равенство $f(1 - Q(t, 0, y)) \sim f(1 - Q(t))$, из которого следует, что свертка, стоящая в правой части (51), асимптотически ведет себя так же, как и свертка (54). Из свойств однородности и симметричности переходной вероятности случайного блуждания следует, что $p(t, x, y) = p(t, 0, y-x) = p(t, y-x, 0)$. Поэтому, в силу (3), в размерности $d = 1$ справедливо асимптотическое представление $p(t) - p(t, y-x, 0) \sim \gamma_1(y-x) t^{-3/2}$. Следовательно, $Q(t, x, y) \sim Q(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Доказательство теоремы для размерности $d = 1$ завершено.

Докажем теперь теорему в случае $d = 2$. В силу (20) и свойства симметричности $Q(t, x, y)$, локальные вероятности продолжения процесса $Q(t, 0, y)$ удовлетворяют равенствам

$$\begin{aligned} Q(t, 0, y) &= p(t, 0, y) - \int_0^t p(t-s) f(1 - Q(s, 0, y)) ds \\ &= p(t, y, 0) - \int_0^t p(t-s, y, 0) f(1 - Q(s, 0, 0)) ds. \end{aligned} \quad (56)$$

Переходные вероятности симметричны относительно переменных x и y , то есть $p(t, 0, y) = p(t, y, 0)$, поэтому

$$\int_0^t p(t-s)f(1-Q(s, 0, y))ds = \int_0^t p(t-s, y, 0)f(1-Q(s, 0, 0))ds. \quad (57)$$

Здесь при $d = 2$ и $t \rightarrow \infty$ в силу (3) справедливо асимптотическое равенство $p(t, y, 0) \sim \gamma_2 t^{-1}$, и $M(0) < 1$ по лемме 7. Отсюда с помощью леммы о поведении сверток степенно-логарифмических функций (см. лемму 5.1.2 в [8]) получаем, что асимптотическое поведение свертки, стоящей в правой части равенства (57), имеет вид $\gamma_2 t^{-1} M(0)$. Тогда из первого равенства в (56) следует, что при $t \rightarrow \infty$

$$Q(t, 0, y) = Q(t, y, 0) \sim \gamma_2(1 - M(0))t^{-1}, \quad (58)$$

и значит, первый член асимптотического разложения $Q(t, 0, y)$ по t не зависит от y . Таким образом, нами получено равенство $M(0, y) = M(0)$, где

$$M(t, y) = \int_t^\infty f(1 - Q(s, 0, y))ds.$$

Теперь установим, что $Q(t, x, y) \sim Q(t)$ при $t \rightarrow \infty$. В силу (3) $p(t, x, 0) \sim \gamma_2 t^{-1}$ при $t \rightarrow \infty$, и поэтому согласно лемме 5.1.2 в [8] при $t \rightarrow \infty$

$$\int_0^t p(t-s, x, 0)f(1-Q(s, 0, y))ds \sim \gamma_2 t^{-1} M(0, y).$$

Отсюда и из интегрального уравнения (20) получаем соотношение

$$Q(t, x, y) = \gamma_2 t^{-1}(1 - M(0, y))(1 + o(1)), \quad (59)$$

но, как было показано выше, $M(0, y) = M(0)$. Отсюда и из (58), (59) вытекает требуемая асимптотика для $Q(t, x, y)$. Теорема доказана.

7. Вероятность выживания популяции частиц на Z и Z^2

Лемма 9. В размерностях $d = 1, 2$ в случае $\beta = \beta_c$ при каждом фиксированных x и $z \geq 0$ справедливы соотношения

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(z, t, x) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} Q(t, x) = 0.$$

Доказательство. При любых фиксированных x и $z \geq 0$ в силу леммы 2 найдется такое $c_0(z, x) \geq 0$, что $\lim_{t \rightarrow \infty} F(z, t, x) = 1 - c_0(z, x) \leq 1$. Предположив, что $c_0(z, x) > 0$, преобразуем уравнение (16) к виду

$$F(z, t, x) - e^{-z} = \int_0^t p(t-s, x, 0)f(F(z, s, 0))ds.$$

Устремив теперь в полученном уравнении t к бесконечности, получим, что

$$1 - c_0(z, x) - e^{-z} = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t p(t-s, x, 0)f(F(z, s, 0))ds, \quad (60)$$

откуда вытекает, что предел в правой части (60) конечен.

С другой стороны, в силу утверждения (в) леммы 3, в наших предположениях при $t \rightarrow \infty$ справедливо соотношение $f(F(z, t, 0)) = (f''/2)c_0^2(z, 0) + o(t)$, то есть функция $f(F(z, t, 0))$ имеет при каждом фиксированном $z \geq 0$ конечный ненулевой предел при $t \rightarrow \infty$. Но тогда в силу (3) предел в правой части (60) должен быть бесконечным. Таким образом, мы приходим к противоречию с предположением $c_0(z, x) > 0$. Значит, $c_0(z, x) \equiv 0$, и из равенства (13) получаем, что при каждом фиксированном x выполняется соотношение $\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t, x) = 0$. Лемма доказана.

Лемма 10. Пусть $\beta = \beta_c$. Тогда при $t \rightarrow \infty$ имеют место асимптотические равенства

$$Q(t, x) \sim \sqrt{2}(\beta_2 \gamma_1 \pi)^{-1/2} t^{-1/4} \quad \text{при } d = 1, \quad (61)$$

$$Q(t, x) \sim \sqrt{2}(\beta_2 \gamma_2)^{-1/2} \ln^{-1/2} t \quad \text{при } d = 2. \quad (62)$$

Доказательство. Интегральное уравнение (23) в размерностях $d = 1, 2$ принимает вид

$$1 - Q(t, x) = \int_0^t p(t-s, x, 0) f(1 - Q(s, 0)) ds. \quad (63)$$

Положив в этом уравнении $x = 0$ и затем применив преобразование Лапласа к обеим его частям, в силу определения (2) получим, что

$$\widehat{(1 - Q)}(\lambda) = G_\lambda(0, 0) \widehat{f(1 - Q)}(\lambda), \quad (64)$$

где в левой части стоит преобразование Лапласа вероятности вырождения процесса $1 - Q(t, 0)$. По лемме 9 эта вероятность стремится к 1 при $t \rightarrow \infty$, и значит, $\widehat{(1 - Q)}(\lambda) \sim \lambda^{-1}$. Из асимптотического поведения $p(t, 0, 0)$ (3) с помощью тауберовых теорем (см. теорему 4 в разделе 5 гл. XIII в [17]) определяем асимптотическое поведение функции Грина (2) при $\lambda \rightarrow 0$, которое имеет вид

$$G_\lambda(0, 0) \sim \gamma_1 \Gamma(1/2) \lambda^{-1/2} \quad \text{при } d = 1, \quad (65)$$

$$G_\lambda(0, 0) \sim \gamma_2 \ln(1/\lambda) \quad \text{при } d = 2. \quad (66)$$

Так как $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, отсюда и из равенства (64) получаем, что при $\lambda \rightarrow 0$

$$\widehat{f(1 - Q)}(\lambda) \sim \gamma_1^{-1} (\pi \lambda)^{-1/2} \quad \text{при } d = 1, \quad (67)$$

$$\widehat{f(1 - Q)}(\lambda) \sim (\gamma_2 \lambda \ln(\lambda^{-1}))^{-1} \quad \text{при } d = 2. \quad (68)$$

В силу определения инфинитезимальной производящей функции f и леммы 2 о монотонности функции Q , функция $f(1 - Q(t, 0))$ также является монотонной. Как и выше, применяя тауберову теорему к (67), (68) получаем при $t \rightarrow \infty$ асимптотические равенства

$$f(1 - Q(t, 0)) \sim (\gamma_1 \pi)^{-1} t^{-1/2} \quad \text{при } d = 1,$$

$$f(1 - Q(t, 0)) \sim (\gamma_2 \ln t)^{-1} \quad \text{при } d = 2.$$

Отсюда, по лемме 3, получаем, что асимптотическое поведение $Q^2(t, 0)$ при $t \rightarrow \infty$ имеет вид

$$Q^2(t, 0) \sim 2(\beta_2 \gamma_1 \pi)^{-1} t^{-1/2} \quad \text{при } d = 1, \quad (69)$$

$$Q^2(t, 0) \sim 2(\beta_2 \gamma_2 \ln t)^{-1} \quad \text{при } d = 2, \quad (70)$$

откуда и следует утверждение леммы при $x = 0$.

Так как первый член асимптотического разложения (при $\lambda \rightarrow 0$) функций Грина $G_\lambda(x, y)$ не зависит от x , из соотношений (69), (70) вытекает, что асимптотика $Q(t, x)$ не зависит от x и ведет себя как $Q(t, 0)$. Следовательно, при любом x справедливы асимптотические равенства (61)–(62). Лемма доказана.

Лемма 11. Пусть $\beta = \beta_c$. Тогда в размерностях $d = 1, 2$ при $t \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое равенство

$$1 - F(z, t, x) \sim \sqrt{(1 - e^{-z})} Q(t, x). \quad (71)$$

Доказательство. Интегральное уравнение (16) при $x = 0$ в размерностях $d = 1, 2$ принимает вид

$$F(z, t, 0) = e^{-z} + \int_0^t p(t-s, 0, 0) f(F(z, s, 0)) ds. \quad (72)$$

Применив преобразование Лапласа к обеим частям уравнения (72), получим, что

$$\widehat{F}(\lambda) = \frac{e^{-z}}{\lambda} + G_\lambda(0, 0) \widehat{f(F)}(\lambda).$$

По лемме 9, функция $F(z, t, 0)$ при $t \rightarrow \infty$ стремится к 1. Следовательно, для преобразования Лапласа от $F(z, t, 0)$ при $\lambda \rightarrow 0$ справедливо асимптотическое равенство $\widehat{F}(\lambda) \sim \lambda^{-1}$. Асимптотическое поведение функций Грина $G_\lambda(0, 0)$ при $\lambda \rightarrow 0$ в размерностях $d = 1, 2$ имеет вид (65), (66). Следовательно, из (67), (68) при $\lambda \rightarrow 0$ получаем, что $\widehat{f(F)}(\lambda) \sim (1 - e^{-z}) \widehat{f(1 - Q)}(\lambda)$, $d = 1, 2$. В силу леммы 2 и тауберовой теоремы из [17], получаем при $t \rightarrow \infty$ асимптотические равенства $f(F(z, t, 0)) \sim (1 - e^{-z}) f(1 - Q(t, 0))$, $d = 1, 2$. Здесь в силу утверждения (в) леммы 3 левая часть равенства имеет вид

$$f(F(z, t, 0)) \sim \frac{f''(1)}{2} (1 - F(z, t, 0))^2,$$

а правая часть в силу того же утверждения (в) леммы 3 имеет вид

$$(1 - e^{-z}) f(1 - Q(t, 0)) \sim (1 - e^{-z}) \frac{f''(1)}{2} Q^2(t, 0).$$

Из последних двух асимптотических равенств вытекают соотношения (71) между производящими функциями $F(z, t, 0)$ и вероятностями продолжения процесса $Q(t, 0)$. Так как первый член асимптотического разложения функций Грина (65), (66) при $\lambda \rightarrow 0$ не зависит от x , отсюда вытекает, что асимптотика $F(z, t, x)$ не зависит от x и ведет себя как $F(z, t, 0)$. Следовательно, при любом x справедливо утверждение леммы (71). Лемма доказана.

Таким образом, доказательства всех утверждений теоремы 1 завершены.

Перейдем к доказательству теоремы 2. Так как $\mathbf{P}_x\{\mu_t = 0 \mid \mu_t > 0\} = 0$, справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x[e^{-z\mu_t} \mid \mu_t > 0] &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-zn} \mathbf{P}_x\{\mu_t = n \mid \mu_t > 0\} = \mathbf{P}_x^{-1}\{\mu_t > 0\} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-zn} \mathbf{P}_x\{\mu_t = n\} \\ &= \mathbf{P}_x^{-1}\{\mu_t > 0\} (F(z, t, x) - \mathbf{P}_x\{\mu_t = 0\}), \end{aligned}$$

откуда, используя (13), получаем, что

$$\mathbf{E}_x[e^{-z\mu_t} \mid \mu_t > 0] = \frac{F(z, t, x) - F(\infty, t, x)}{1 - F(\infty, t, x)} = 1 - \frac{1 - F(z, t, x)}{Q(t, x)}.$$

Отсюда в силу леммы 11 при $t \rightarrow \infty$ вытекает утверждение теоремы. Теорема доказана.

Автор благодарен В. А. Ватутину за внимание к работе и рецензенту за полезные замечания.

Список литературы

1. Севастьянов Б. А., *Ветвящиеся процессы*. Наука, Москва, 1971.
2. Яровая Е. Б., Применение спектральных методов в изучении ветвящихся процессов с диффузией в некомпактном фазовом пространстве. *Теор. матем. физ.* (1991) **88**, №1, 25–30.
3. Богачев Л. В., Яровая Е. Б., Моментный анализ ветвящегося случайного блуждания на решетке с одним источником. *Доклады РАН* (1998) **363**, №4, 439–442.
4. Alberverio S., Bogachev L. V., Yarovaya E. B., Asymptotics of branching symmetric random walk on the lattice with a single source. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, Math.* (1998) **326**, №8, 975–980.
5. Alberverio S., Bogachev L. V., Branching random walk in a catalytic medium. I. Basic equations. *Positivity* (2000) **4**, 41–100.
6. Yarovaya E. B., About limit theorems for branching symmetric random walk on $\mathbf{Z}^d$. В сб.: *Kolmogorov and Contemporary Mathematics*. МГУ, Москва, 2003, с. 592–593.
7. Яровая Е. Б., Предельная теорема для критического ветвящегося случайного блуждания на $\mathbf{Z}^d$ с одним источником. *Успехи матем. наук* (2005) **60**, №1, 175–176.
8. Яровая Е. Б., *Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде*. ЦПИ при мех-мате МГУ, Москва, 2007.
9. Vatutin V. A., Topchii V. A., Yarovaya E. B., Catalytic branching random walk and queuing systems with random number of independent servers. *Theory Probab. Math. Stat.* (2004) **69**, 1–15.
10. Ватутин В. А., Топчий В. А., Предельная теорема для критических каталитических ветвящихся случайных блужданий. *Теория вероятностей и ее применения* (2004) **49**, №3, 461–484.
11. Vatutin V. A., Xiong J., Limit theorems for a particle system of single point catalytic branching random walks. *Acta Mathematica Sinica* (2007) **23**, №6, 997–1012.
12. Fleischmann K., Le Gall J., A new approach to the single point catalytic super-Brownian motion. *Probab. Theory Relat. Fields* (1995) **102**, 63–82.
13. Greven A., Klenke A., Wakolbinger A., The long time behavior of branching random walk in a catalytic medium. *Electron. J. Probab.* (1999) **4**, №12, 1–80.
14. Гихман И. И., Скороход А. В., *Теория случайных процессов*, **2**. Наука, Москва, 1973.
15. Красносельский М. А., *Оператор сдвига по траекториям обыкновенных дифференциальных уравнений*. Наука, Москва, 1966.
16. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г., *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*. Наука, Москва, 1970.
17. Феллер В., *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, **2**. Мир, Москва, 1984.
18. Сенета Е., *Правильно меняющиеся функции*. Наука, Москва, 1985.

Статья поступила 24.11.2007.

Переработанный вариант поступил 30.12.2008.