Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Емеличев, О. В. Карелкина, Конечные коалиционные игры: параметризация концепции равновесия (от Парето до Нэша) и устойчивость эффективной ситуации в метрике Гельдера, *Дискрет. матем.*, 2009, том 21, выпуск 2, 43–50

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1045>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 09:30:03

Конечные коалиционные игры: параметризация концепции равновесия (от Парето до Нэша) и устойчивость эффективной ситуации в метрике Гельдера

© 2009 г. В. А. Емеличев, О. В. Карелкина

Рассматривается конечная коалиционная игра нескольких лиц с параметрическим принципом оптимальности, при котором отношения участников внутри коалиции строятся на основе максимума по Парето. Введение этого принципа позволяет связать такие классические понятия, как оптимальность по Парето и равновесность по Нэшу. Проведен количественный анализ устойчивости ситуации игры, оптимальной для заданного способа разбиения, к возмущениям параметров функций выигрыша в пространстве с l_p -метрикой Гельдера, $1 \leq p \leq \infty$. Получена формула радиуса устойчивости такой ситуации, тем самым указан предельный уровень возмущений параметров игры, сохраняющих заданную оптимальность ситуации.

1. Введение

Будем рассматривать основной объект изучения в теории игр — конечную игру n лиц в нормальной форме [1, 2], в которой каждый игрок $i \in N_n = \{1, \dots, n\}$, $n \geq 2$, выбирает соответствующую стратегию x_i из множества стратегий. Это множество будем обозначать X_i , считая, что $X_i \subset \mathbf{R}$, $2 \leq |X_i| < \infty$. Реализация игры и ее исход (ситуация) однозначно определяется выбором стратегий каждым из игроков. Пусть на множестве всех ситуаций $X = \prod_{i \in N_n} X_i$ заданы линейные функции выигрыша (платежные функции) игроков $f_i(x) = C_i x$, $i \in N_n$, где C_i — i -я строка матрицы $C = [c_{ij}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, $x_j \in X_j$, $j \in N_n$. В результате игры, которую будем называть игрой с матрицей C , каждый игрок i получает в качестве выигрыша величину $f_i(x)$, которую стремится максимизировать, используя отношения предпочтения.

Для каждой игры в нормальной форме используются коалиционные и бескоалиционные концепции равновесия (принципы оптимальности), приводящие, как правило, к различным ситуациям. В теории неантагонистических игр нет единого подхода к разработке таких концепций. Наиболее известна концепция равновесия по Нэшу [3], а также ее разнообразные обобщения, связанные с проблематикой группового выбора, под которым понимается сведение различных индивидуальных мнений о порядке предпочтения в единое коллективное предпочтение (см., например, [4, 5]).

В настоящей работе вводится параметрическая концепция равновесия (обобщенный принцип оптимальности) конечной игры, порождающая множество обобщенно-равновесных ситуаций. Параметром этой концепции является способ разбиения игроков на

коалиции, при этом внутри каждой коалиции отношения игроков строятся на основе паретовского принципа. Проведен количественный анализ чувствительности обобщенно-равновесной ситуации с точки зрения инвариантности относительно изменений параметров игры. Выведена формула радиуса устойчивости такой ситуации в предположении, что в пространстве параметров $\mathbf{R}^{n \times n}$ игры с матрицей C задана произвольная метрика Гельдера l_p , $1 \leq p \leq \infty$. Ранее в [6–10] были получены аналогичные результаты для радиусов иных типов устойчивости оптимальных ситуаций при других обобщениях концепций равновесия конечной игры в случае чебышевской метрики l_∞ , заданной в пространстве параметров игры.

2. Определения, обозначения и свойства

В пространстве $\mathbf{R}^k$ произвольной размерности $k \in \mathbf{N}$ введем бинарное отношение $<_P$, порождающее принцип оптимальности по Парето [11]

$$y <_P y' \iff y \leq y' \text{ \& } y \neq y',$$

где $y = (y_1, y_2, \dots, y_k)^T \in \mathbf{R}^k$, $y' = (y'_1, y'_2, \dots, y'_k)^T \in \mathbf{R}^k$.

Всякое непустое подмножество $I \subseteq N_n$ назовем коалицией игроков. Положим $X_I = \prod_{i \in I} X_i$. Для ситуации $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^T$ и коалиции I введем обозначение $x_I^0 = (x_{i_1}^0, x_{i_2}^0, \dots, x_{i_s}^0)^T$, где $I = \{i_1, i_2, \dots, i_s\} \subseteq N_n, i_1 < i_2 < \dots < i_s$, то есть $x_I^0 \in X_I$. Для любой коалиции $I \subseteq N_n$ на множестве ситуаций X игры с матрицей C введем бинарное отношение $\Omega(C, I)$ по правилу

$$x \Omega(C, I) x' \iff \begin{cases} C_I x <_P C_I x' \text{ \& } x_J = x'_J, & \text{если } I \neq N_n, \\ C x <_P C x', & \text{если } I = N_n, \end{cases}$$

где C_I – матрица размера $|I| \times n$, состоящая из строк матрицы C с номерами коалиции I , $J = N_n \setminus I$.

Пусть $s \in N_n$, $N_n = \bigcup_{r \in N_s} I_r$ – разбиение множества игроков N_n на s коалиций, то есть $I_r \neq \emptyset$, $r \in N_s$; $p \neq q \Rightarrow I_p \cap I_q = \emptyset$. По аналогии с [4], зададим множество обобщенно-равновесных, или, иначе, $(I_1, I_2, \dots, I_s)$ -эффективных ситуаций игры с матрицей C следующим образом:

$$Q^n(C, I_1, I_2, \dots, I_s) = \{x \in X: \forall r \in N_s \forall x' \in X (x \overline{\Omega(C, I_r)} x')\}.$$

Здесь и далее черта над бинарным отношением означает отрицание этого отношения. Таким образом, отношения игроков внутри каждой коалиции строятся на основе максимума по Парето. Поэтому множество всех N_n -эффективных ситуаций $Q^n(C, N_n)$ ($s = 1$, то есть все игроки образуют одну коалицию) является множеством Парето (множеством эффективных ситуаций)

$$P^n(C) = \{x \in X: \forall x' \in X (C x \overline{<_P} C x')\}$$

векторной задачи максимизации функций выигрыша $f_i(x)$, $i \in N_n$, на множестве ситуаций X . Рациональность коллективно-эффективной ситуации $x \in P^n(C)$ заключается в том, что возрастание выигрыша любого игрока возможно лишь за счет уменьшения выигрыша хотя бы одного из остальных игроков. Очевидно, что в другом крайнем случае,

когда игра бескоалиционная ($s = n$), любая ситуация $x \in Q^n(C, \{1\}, \{2\}, \dots, \{n\})$ является ситуацией равновесия по Нэшу (или равновесной) [3], то есть не существует таких $r \in N_n$ и $x' \in X$, что

$$C_r x < C_r x' \quad \& \quad x_{N_n \setminus \{r\}} = x'_{N_n \setminus \{r\}}.$$

Тем самым, рациональность ситуации равновесия x (индивидуально-эффективной ситуации) заключается в том, что любые отклонения от нее одного игрока (в то время как остальные ее придерживаются) не приносит ему выгоды. Множество всех равновесных ситуаций $Q^n(C, \{1\}, \{2\}, \dots, \{n\})$ для краткости будем обозначать $NE^n(C)$ и называть множеством Нэша.

Итак, в данном контексте под параметризацией концепции равновесия конечной игры с матрицей C понимается введение такой характеристики бинарного отношения предпочтения, которая позволила, используя разбиение игроков на коалиции, связать классические понятия оптимальности по Парето и равновесности по Нэшу.

Учитывая сепарабельность линейных функций выигрыша $C_i x$, $i \in N_n$, непосредственно из определения множества обобщенно-равновесных ситуаций получаем равенство

$$Q^n(C, I_1, I_2, \dots, I_s) = \prod_{r=1}^s P^{|I_r|}(C^r), \quad (1)$$

где каждый множитель $P^{|I_r|}(C^r)$ является множеством Парето $|I_r|$ -критериальной векторной задачи

$$C^r z \xrightarrow{z \in X_{I_r}} \max,$$

то есть

$$P^{|I_r|}(C^r) = \{z \in X_{I_r} : \forall z' \in X_{I_r} (C^r z \not\prec_P C^r z')\}.$$

Здесь C^r — квадратная матрица размера $|I_r| \times |I_r|$, состоящая из элементов матрицы C , находящихся на пересечении строк и столбцов с номерами I_r . В частном случае, когда $s = 1$, справедливо равенство

$$P^n(C) = Q^n(C, N_n).$$

В силу конечности множеств X_{I_r} , $r \in N_s$, все множества Парето $P^{|I_r|}(C^r)$, $r \in N_s$, непусты. Поэтому (ввиду (1)) при любой матрице $C \in \mathbf{R}^{n \times n}$ и каждом разбиении множества игроков на s коалиций $I_1, I_2, \dots, I_s$ множество $(I_1, I_2, \dots, I_s)$ -эффективных ситуаций $Q^n(C, I_1, I_2, \dots, I_s)$ не пусто.

Очевидно следующее свойство.

Свойство 1. Ситуация $x \in Q^n(C, I_1, I_2, \dots, I_n)$ имеет место тогда и только тогда, когда $x_{I_r} \in P^{|I_r|}(C^r)$ для любого индекса $r \in N_s$.

Для всякого натурального числа $k \geq 2$ в действительном пространстве $\mathbf{R}^k$ зададим метрику Гельдера l_p , $1 \leq p \leq \infty$, то есть норму $y = (y_1, y_2, \dots, y_k) \in \mathbf{R}^k$ определим формулами

$$\|y\|_p = \left(\sum_{j \in N_k} |y_j|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|y\|_\infty = \max\{|y_j| : j \in N_k\},$$

а нормой матрицы будем считать норму вектора, составленного из всех ее элементов.

Метрика l_p , заданная в пространстве $\mathbf{R}^k$, порождает метрику l_q в сопряженном пространстве $(\mathbf{R}^k)^*$, причем числа p и q , как известно, связаны условиями

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad 1 < p < \infty.$$

Кроме того, как обычно, полагаем $q = 1$, если $p = \infty$, и $q = \infty$, если $p = 1$. Итак, в дальнейшем будем считать, что областью изменений чисел p и q является интервал $[1, \infty]$, а сами числа p и q связаны указанными выше условиями.

Свойство 2. Если $p > 1$ и векторы $y, y' \in \mathbf{R}^n$ таковы, что $y_j = (y')_j^{q-1}$, $j \in N_n$, то

$$\|y\|_p = \|y'\|_q^{q-1}.$$

В самом деле, при $p = \infty$ ($q = 1$) свойство 2 тривиально, а при $1 < p < \infty$

$$\|y\|_p = \left(\sum_{j \in N_n} |y'_j|^{p(q-1)} \right)^{1/p} = \left(\sum_{j \in N_n} |y'_j|^q \right)^{1/p} = \|y'\|_q^{q/p} = \|y'\|_q^{q-1}.$$

В дальнейшем будем использовать классическое неравенство Гельдера

$$cx \leq \|c\|_p \|x\|_q, \quad (2)$$

где $c = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbf{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbf{R}^n$.

Будем исследовать меру устойчивости обобщенно-равновесной ситуации при возмущении параметров векторного критерия в пространстве $\mathbf{R}^{n \times n}$ с произвольной l_p -метрикой, $1 \leq p \leq \infty$. Такое изменение параметров задачи будем осуществлять путем прибавления к матрице C матриц множества

$$\Psi_p(\varepsilon) = \{B \in \mathbf{R}^{n \times n} : \|B\|_p < \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0,$$

которые будем называть возмущающими.

По аналогии с [12–15], радиусом устойчивости ситуации $x \in Q^n(C, I_1, I_2, \dots, I_n)$ в метрике Гельдера l_p , $1 \leq p \leq \infty$, назовем число

$$\rho_p^n(x, C, I_1, I_2, \dots, I_s) = \begin{cases} \sup \Theta, & \text{если } \Theta \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } \Theta = \emptyset, \end{cases}$$

где

$$\Theta = \{\varepsilon > 0 : \forall B \in \Psi_p(\varepsilon) (x \in Q^n(C + B, I_1, I_2, \dots, I_s))\}.$$

Далее будем использовать обозначение C_i^k , $k \in N_s$, $i \in I_k$, для i -й строки квадратной матрицы C^k . Аналогично понимается и вектор-строка B_i^k .

Введем оператор проектирования вектора $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ на неотрицательный ортант

$$a^+ = [a]^+ = (a_1^+, a_2^+, \dots, a_n^+),$$

где $a_i^+ = [a_i]^+ = \max\{0, a_i\}$.

Свойство 3. Если для некоторых индексов $k \in N_s$, $i \in I_k$ и векторов $y, z \in X_{I_k}$ верно неравенство

$$(C_i^k + B_i^k)y \leq (C_i^k + B_i^k)z, \quad (3)$$

то

$$[C_i^k(y - z)]^+ \leq \|B_i^k\|_p \|y - z\|_q. \quad (4)$$

Действительно, при $C_i^k y \leq C_i^k z$ неравенство (4) очевидно. Если $C_i^k y > C_i^k z$, то с учетом условия (3) и неравенства Гельдера (2) находим, что

$$[C_i^k(y - z)]^+ = C_i^k(y - z) \leq -B_i^k(y - z) \leq \|B_i^k\|_p \|y - z\|_q.$$

3. Формула радиуса устойчивости

Теорема 1. При любом разбиении $(I_1, I_2, \dots, I_s)$, $s \in N_n$, $n \geq 2$, множества игроков N_n на s коалиций для радиуса устойчивости $(I_1, I_2, \dots, I_s)$ -эффективной ситуации $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in Q^n(C, I_1, I_2, \dots, I_s)$, $C \in \mathbf{R}^{n \times n}$, в метрике Гельдера l_p , $1 \leq p \leq \infty$, справедлива формула

$$\rho_p^n(x^0, C, I_1, I_2, \dots, I_s) = \min_{r \in N_s} \min_{z \in X_{I_r} \setminus \{x_{I_r}^0\}} \frac{\|[C^r(x_{I_r}^0 - z)]^+\|_p}{\|x_{I_r}^0 - z\|_q}. \quad (5)$$

Доказательство. Для краткости дальнейшего изложения левую и правую части формулы (5) обозначим соответственно через ρ и φ . Очевидно, что $\varphi \geq 0$.

Сначала докажем неравенство $\rho \geq \varphi$. Если $\varphi = 0$, то это неравенство очевидно. Пусть $\varphi > 0$. Тогда непосредственно из определения числа φ следует, что для любых $r \in N_s$, $1 \leq p \leq \infty$, $z \in X_{I_r} \setminus \{x_{I_r}^0\}$ справедливы неравенства

$$0 < \varphi \|x_{I_r}^0 - z\|_q \leq \|[C^r(x_{I_r}^0 - z)]^+\|_p. \quad (6)$$

Доказательство неравенства $\rho \geq \varphi$ проведем методом от противного. Предположим, что $\rho < \varphi$. Тогда существует такая матрица $B \in \Psi_p(\varphi)$, что $x^0 \notin Q^n(C + B, I_1, I_2, \dots, I_s)$. Отсюда, согласно свойству 1, найдется индекс $k \in N_s$, удовлетворяющий условию $x_{I_k}^0 \notin P^{|I_k|}(C^k + B^k)$. Поэтому в силу внешней устойчивости множества $P^{|I_k|}(C^k + B^k)$ существует такой вектор $z \in P^{|I_k|}(C^k + B^k)$, что справедливо неравенство

$$(C^k + B^k)x_{I_k}^0 \leq (C^k + B^k)z.$$

Теперь ввиду свойства 3

$$[C_i^k(x_{I_k}^0 - z)]^+ \leq \|B_i^k\|_p \|x_{I_k}^0 - z\|_q, \quad i \in I_k.$$

Отсюда, принимая во внимание неравенства

$$\|B^k\|_p \leq \|B\|_p < \varphi,$$

при $1 \leq p < \infty$ выводим, что

$$\begin{aligned} \|[C^k(x_{I_k}^0 - z)]^+\|_p &= \left(\sum_{i \in I_k} ([C_i^k(x_{I_k}^0 - z)]^+)^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i \in I_k} \|B_i^k\|_p^p \right)^{1/p} \|x_{I_k}^0 - z\|_q \\ &= \|B^k\|_p \|x_{I_k}^0 - z\|_q < \varphi \|x_{I_k}^0 - z\|_q, \end{aligned}$$

а при $p = \infty$

$$\begin{aligned} \| [C^k(x_{I_k}^0 - z)]^+ \|_\infty &= \max_{i \in I_k} [C_i^k(x_{I_k}^0 - z)]^+ \leq \max_{i \in I_k} \|B_i^k\|_\infty \|x_{I_k}^0 - z\|_1 \\ &= \|B^k\|_\infty \|x_{I_k}^0 - z\|_1 < \varphi \|x_{I_k}^0 - z\|_1. \end{aligned}$$

Полученные неравенства противоречат неравенству (6). Тем самым, доказано неравенство $\rho \geq \varphi$.

Теперь докажем, что $\rho \leq \varphi$. Пусть $\varepsilon > \varphi$. Согласно определению числа $\varphi \geq 0$ существуют такие $k \in N_s$ и $z^* \in X_{I_k} \setminus \{x_{I_k}^0\}$, что

$$\varphi \|x_{I_k}^0 - z^*\|_q = \| [C^k(x_{I_k}^0 - z^*)]^+ \|_p.$$

Отсюда при любом $1 \leq p \leq \infty$ справедливо неравенство $\|g\|_p = \varphi$, где $g \in \mathbf{R}^{|I_k|}$ — вектор с координатами

$$g_i = [C_i^k(x_{I_k}^0 - z^*)]^+ \|x_{I_k}^0 - z^*\|_q^{-1}, \quad i \in I_k.$$

Поэтому из неравенства $\varepsilon > \varphi$ и непрерывной зависимости нормы вектора от его координат вытекает существование таких положительных чисел $h_i > g_i$, $i \in I_k$, что $\varepsilon > \|h\|_p > \varphi$, где h — вектор с компонентами h_i , $i \in I_k$. В результате получаем, что

$$h_i \|x_{I_k}^0 - z^*\|_q > [C_i^k(x_{I_k}^0 - z^*)]^+, \quad i \in I_k. \quad (7)$$

Рассмотрим два возможных случая.

В первом случае $p = 1$. Зафиксировав индекс $s = \arg \max\{|x_j^0 - z_j^*|, j \in I_k\}$, определим элементы возмущающей матрицы B размера $n \times n$ по правилу

$$b_{ij} = \begin{cases} h_i \operatorname{sign}(z_j^* - x_j^0), & \text{если } i \in I_k, j = s, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Понятно, что $\varepsilon > \|B\|_1 = \|h\|_1 > \varphi$.

Во втором случае $p > 1$ ($q < \infty$). Тогда зададим элементы возмущающей матрицы $B = [b_{ij}]$ размера $n \times n$ по формуле

$$b_{ij} = \begin{cases} h_i |x_j^0 - z_j^*|^{q-1} \|x_{I_k}^0 - z^*\|_q^{1-q} \operatorname{sign}(z_j^* - x_j^0), & \text{если } (i, j) \in |I_k| \times |I_k|, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Поэтому, учитывая свойство 2, легко показать, что

$$\varepsilon > \|B\|_p = \|B^k\|_p = \|h_p\| > \varphi.$$

Итак, $B \in \Psi_p(\varepsilon)$ при любом $1 \leq p \leq \infty$.

Кроме того, из структуры каждой строки B_i^k , $i \in I_k$, матрицы B^k следуют равенства

$$B_i^k(x_{I_k}^0 - z^*) = \begin{cases} -h_i \|x_{I_k}^0 - z^*\|_\infty, & \text{если } p = 1, \\ -h_i \|x_{I_k}^0 - z^*\|_q^{1-q} \sum_{j \in I_k} |x_j^0 - z_j^*|^q, & \text{если } 1 < p \leq \infty. \end{cases}$$

Отсюда после несложных преобразований получим, что

$$B_i^k(x_{I_k}^0 - z^*) = -h_i \|x_{I_k}^0 - z^*\|_q, \quad i \in I_k.$$

Поэтому благодаря неравенству (7) убеждаемся в справедливости следующих соотношений:

$$\begin{aligned} (C_i^k + B_i^k)(x_{I_k}^0 - z^*) &= C_i^k(x_{I_k}^0 - z^*) + B_i^k(x_{I_k}^0 - z^*) \\ &= C_i^k(x_{I_k}^0 - z^*) - h_i \|x_{I_k}^0 - z^*\|_q \\ &\leq [C_i^k(x_{I_k}^0 - z^*)]^+ - h_i \|x_{I_k}^0 - z^*\|_q < 0, \quad i \in I_k, \end{aligned}$$

свидетельствующих о том, что $x_{I_k}^0 \notin P^{|I_k|}(C^k + B^k)$. Далее, воспользовавшись свойством 1, заключаем, что $x^0 \notin Q^n(C + B, I_1, I_2, \dots, I_s)$, $B \in \Psi_p(\varepsilon)$, $\|B\|_p > \varphi$. Следовательно, для любого числа $\varepsilon > \varphi$ справедливо неравенство $\rho < \varepsilon$. Поэтому $\rho \leq \varphi$.

Теорема доказана.

4. Следствия

Следствие 1. В метрике l_p , $1 \leq p \leq \infty$, для радиуса устойчивости $\rho_p^n(x, C, N_n)$ эффективной ситуации $x \in P^n(C)$ справедлива формула

$$\rho_p^n(x, C, N_n) = \min_{x' \in X \setminus \{x\}} \frac{\|[C(x - x')]\|_p^+}{\|x - x'\|_q}.$$

Заметим, что приведенная здесь формула имеет тот же вид, что и полученная в [14] формула радиуса устойчивости эффективного решения векторной задачи целочисленного линейного программирования на конечном множестве решений.

Следствие 2 ([6, 7]). В чебышевской метрике l_∞ для радиуса устойчивости $\rho_\infty^n(x, C, N_n)$ эффективной ситуации $x \in P^n(C)$ справедлива формула

$$\rho_\infty^n(x, C, N_n) = \min_{x' \in X \setminus \{x\}} \max_{i \in N_n} \frac{C_i(x - x')}{\|x - x'\|_1}.$$

Следствие 3. В метрике l_1 для радиуса устойчивости $\rho_1^n(x, C, N_n)$ эффективной ситуации $x \in P^n(C)$ имеет место формула

$$\rho_1^n(x, C, N_n) = \min_{x' \in X \setminus \{x\}} \sum_{i \in N_n} [C_i(x - x')]^+.$$

Следствие 4. В любой метрике Гельдера l_p , $1 \leq p \leq \infty$, для радиуса устойчивости $\rho_p^n(x, C, \{1\}, \{2\}, \dots, \{n\})$ ситуации равновесия по Нэшу $x \in NE^n(C)$ справедлива формула

$$\rho_p^n(x, C, \{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}) = \min_{i \in N_n} |c_{ii}|.$$

Ранее (см., например, [7, 8]) эта формула была известна лишь в случае метрик l_1 и l_∞ .

Список литературы

1. Мулен Э., *Теория игр с примерами из математической экономики*. Мир, Москва, 1985.
2. Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Семина Е. А., *Теория игр*. Высшая школа, Москва, 1998.
3. Нэш Дж., Бескоалиционные игры. В сб.: *Матричные игры* (Воробьев Н. Н., ред.). Физматгиз, Москва, 1961, с. 205–221.

4. Миркин Б. Г., *Проблема группового выбора*. Наука, Москва, 1974.
5. Харшаньи Дж., Зельтен Р., *Общая теория выбора равновесия в играх*. Экономическая школа, Санкт-Петербург, 2001.
6. Бухтояров С. Е., Емеличев В. А., Конечные коалиционные игры: параметризация принципа оптимальности (от Парето до Нэша) и устойчивость обобщенно-эффективных ситуаций. *Докл. НАН Беларуси* (2002) **46**, №6, 36–38.
7. Бухтояров С. Е., Емеличев В. А., Степанишина Ю. В., Вопросы устойчивости векторных дискретных задач с параметрическим принципом оптимальности. *Кибернетика и системный анализ* (2003), № 4, 155–166.
8. Емеличев В. А., Кузьмин К. Г., Конечные коалиционные игры с параметрической концепцией равновесия в условиях неопределенности. *Известия РАН. Теория и системы управления* (2006), № 2, 117–122.
9. Бухтояров С. Е., Емеличев В. А., Мера устойчивости конечной коалиционной игры с параметрическим (от Парето до Нэша) принципом оптимальности. *Журнал вычислительной математики и математической физики* (2006) **46**, №7, 1258–1264.
10. Гуревский Е. Е., Емеличев В. А., Платонов А. А., Об устойчивости конечной коалиционной игры с обобщенной концепцией равновесия. *Труды Института математики НАН Беларуси* (2007) **15**, №1, 47–55.
11. Pareto V., *Manuel d'économie politique*. Giard & Brière, Paris, 1909.
12. Emelichev V. A., Krichko V. N., Nikulin Yu. V., The stability radius of an efficient solution in minimax Boolean programming problem. *Control and Cybernetics* (2004) **33**, 127–132.
13. Емеличев В. А., Кузьмин К. Г., О радиусе устойчивости эффективного решения векторной задачи булева программирования в метрике l_1 . *Докл. РАН* (2005) **401**, №6, 733–735.
14. Емеличев В. А., Кузьмин К. Г., О радиусе устойчивости эффективного решения векторной задачи целочисленного линейного программирования в метрике Гельдера. *Кибернетика и системный анализ* (2006), № 4, 175–181.
15. Гуревский Е. Е., Емеличев В. А., Об устойчивости эффективного решения векторной булевой задачи максимизации модулей линейных функций. *Дискретная математика* (2007) **19**, №2, 45–50.

Статья поступила 18.03.2009.