Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Подколзина, О полноте и A -полноте S -множеств детерминированных функций, содержащих все одноместные детерминированные S -функции, *Дискрет. матем.*, 2009, том 21, выпуск 2, 75–87

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1047>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 11:46:53

О полноте и A -полноте S -множеств детерминированных функций, содержащих все одноместные детерминированные S -функции

© 2009 г. М. А. Подколзина

Исследуется задача о полноте систем, состоящих из S -функций, то есть таких детерминированных функций, что в каждом состоянии вычисляющего их автомата реализуются функции, не выпускающие ни одного значения. Предполагается, что каждой рассматриваемой на полноту системе S -функций принадлежат все S -функции, зависящие не более, чем от одной переменной. В терминах сохранения отношений описаны все A -предполные классы для таких систем. Показано, что существует алгоритм для распознавания A -полноты S -систем одноместных детерминированных функций, содержащих все одноместные детерминированные S -функции.

Пусть $k \geq 2$, $\tau \geq 1$ и P_k^τ — функциональная система, элементами которой являются детерминированные функции, определенные на словах длины τ , составленных из букв алфавита $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$, а операциями — операции суперпозиции. Заметим, что любая детерминированная функция из P_k^τ может быть вычислена некоторым конечным автоматом за первые τ тактов его работы. Пусть $\mathfrak{M} \subseteq P_k^\tau$. Замыкание множества $\mathfrak{M}$ относительно операций суперпозиции обозначим через $[\mathfrak{M}]$. Множество $\mathfrak{M} \subseteq P_k^\tau$ называется замкнутым, если оно совпадает со своим замыканием.

Определение 1. Пусть $k \geq 2$, $\tau \geq 1$, $\mathfrak{M} \subseteq P_k^\tau$. Множество $\mathfrak{M}$ называется полным в P_k^τ , если $[\mathfrak{M}] = P_k^\tau$.

Известно [1, 5], что для любых $k \geq 2$, $\tau \geq 1$ существуют конечные системы, полные в P_k^τ .

Из определения детерминированных функций [1, 3] следует, что проблема полноты в k -значных логиках эквивалентна проблеме полноты в P_k^1 , то есть при $\tau = 1$. Вместе с тем, при $\tau \geq 2$ существует принципиальное различие между функциональной системой, элементами которой являются функции k -значных логик, и функциональной системой P_k^τ . Множество всех детерминированных отображений, рассматриваемых на словах длины τ , порождает специальное замкнутое подмножество в k^τ -значных логиках, существенно зависящее от двух параметров, параметра k и параметра τ [1, 4].

Определение 2. Пусть $k \geq 2$, $\tau \geq 1$. Замкнутое множество $\mathfrak{N} \subset P_k^\tau$ называется предполным классом в P_k^τ , если $\mathfrak{N}$ не является полным в P_k^τ , но для любой детерминированной функции $f \notin \mathfrak{N}$ замыкание множества $\mathfrak{N} \cup \{f\}$ совпадает с P_k^τ .

Используя естественную аналогию между проблемой полноты в P_k^τ и проблемой полноты в конечнопорожденных замкнутых классах k^τ -значной логики, можно показать, что всякое множество является полным в P_k^τ тогда и только тогда, когда оно целиком не содержится ни в одном из предполных в P_k^τ классов; совокупность предполных в P_k^τ классов конечна, может быть описана эффективно и образует минимальную критериальную систему для распознавания полноты систем функций из P_k^τ ; при этом множество предполных классов в P_k изоморфно некоторому подмножеству предполных классов в P_k^τ .

В общем случае для любых $k \geq 2$, $\tau \geq 1$ задача о полноте в P_k^τ решена в [1]. В терминах сохранения отношений описаны все предполные в P_k^τ классы. Однако это описание оказалось довольно сложным. В связи с этим представлялась естественной задача об исследовании на полноту систем детерминированных функций, которые обладают некоторыми наперед заданными и вместе с тем достаточно общими свойствами [1, 3].

Определение 3. Пусть $k \geq 2$, $\tau \geq 1$ и $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k^\tau$. Детерминированная функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется S -функцией, если в любом состоянии вычисляющего ее автомата реализуется функция k -значной логики, не выпускающая ни одного значения из множества E_k .

Определение 4. Пусть $\mathfrak{M} \subset P_k^\tau$. Множество $\mathfrak{M}$ называется S -множеством, если любая функция из $\mathfrak{M}$ является S -функцией.

Множество всех S -функций, принадлежащих P_k^τ , обозначим $S(P_k^\tau)$.

Определение 5. Пусть $k \geq 2$, $\tau \geq 1$; S -множество $\mathfrak{N} \subset P_k^\tau$ называется S -предполным классом в P_k^τ , если $\mathfrak{N}$ не является полным в P_k^τ , но для любой детерминированной S -функции $f \notin \mathfrak{N}$ замыкание множества $\mathfrak{N} \cup \{f\}$ совпадает с P_k^τ .

В [1, 3] доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $k \geq 2$, $\tau \geq 1$; S -множество $\mathfrak{M} \subset P_k^\tau$ является полным в P_k^τ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}$ не принадлежит целиком ни одному из S -предполных в P_k^τ классов, причем число S -предполных классов в P_k^τ конечно.

Так же, как и в общем случае, совокупность всех S -предполных классов в P_k^τ описывается с использованием аппарата сохранения отношений.

Определение 6. Пусть $k \geq 2$, $\tau \geq 1$. Пусть $h \geq 1$, $T = (t_1, \dots, t_h)$ — произвольный набор положительных целых чисел такой, что $\max\{t_1, \dots, t_h\} \leq \tau$. Пусть $E_k^T = E_k^{t_1} \times \dots \times E_k^{t_h}$, где для любого i , $1 \leq i \leq h$, $E_k^{t_i}$ — множество всех слов длины t_i , составленных из букв алфавита E_k . Произвольное непустое множество $R \subseteq E_k^T$ называется отношением, заданным на E_k^T , а число h — арностью этого отношения.

Определение 7. Пусть $k \geq 2$, $\tau \geq 1$. Детерминированная функция $f(x_1, \dots, x_n)$ из P_k^τ сохраняет отношение $R \subset E_k^T$, если для любой совокупности $(a_1^1, \dots, a_h^1), \dots, (a_1^n, \dots, a_h^n)$ элементов из R набор $(f(a_1^1, \dots, a_1^n), \dots, f(a_h^1, \dots, a_h^n))$ также принадлежит R . Множество $\mathfrak{M} \subseteq P_k^\tau$ сохраняет отношение R , если каждая функция из $\mathfrak{M}$ сохраняет это отношение [1, 3, 9].

Множество всех детерминированных функций, сохраняющих некоторое отношение R , обозначим через $U(R)$, а множество всех S -функций, сохраняющих R , — через $S(U(R))$. Нетрудно видеть, что для любого R множество $U(R)$ замкнуто, а множество $S(U(R))$, вообще говоря, не является таковым.

В данной работе для любых $k \geq 2$, $\tau \geq 1$ рассматривается задача, аналогичная классической задаче Слупецкого–Яблонского [4, 7] для k -значных логик. Пусть $S(P_k^\tau(1))$ — множество всех S -функций из P_k^τ , существенно зависящих только от одной переменной. Пусть M_k^τ — совокупность всех S -множеств $\mathfrak{M} \subset P_k^\tau$ таких, что $S(P_k^\tau(1)) \subseteq \mathfrak{M}$. Возникает вопрос, какой должна быть минимальная критериальная система для распознавания полноты S -множеств, принадлежащих M_k^τ . Очевидно, эта критериальная система состоит из всех тех и только тех S -предполных классов, которые содержат все одноместные S -функции из P_k^τ . Известно, что при $\tau = 1$, то есть в k -значных логиках, существует единственный предполный класс, содержащий все функции k -значной логики, зависящие не более, чем от одной переменной. Заметим также, что в общем случае при рассмотрении произвольных подмножеств P_k^τ данная задача решена в [6].

Как было отмечено выше, множество всех S -предполных классов в терминах сохранения отношений описано в [3]. Совокупность всех отношений R таких, что множество $S(U(R))$ совпадает с S -предполным классом в P_k^τ , разбивается на шесть семейств $Z(k, \tau)$, $D(k, \tau)$, $N(k, \tau)$, $V(k, \tau)$, $L(k, \tau)$ и $I(k, \tau)$.

Опишем эти семейства.

Семейство $Z(k, \tau)$. $Z(k, \tau) \neq \emptyset$ для любых $k \geq 2$, $\tau \geq 1$.

Унарное отношение R принадлежит семейству $Z(k, \tau)$ тогда и только тогда, когда $R \subset E_k^t$ для некоторого $t \leq \tau$, причем при $\tau \geq 2$, $t \geq 2$ имеет место следующее. Для любого $a \in E_k^{t-1}$, $a = (a(1), \dots, a(t-1))$ существуют $a(t) \in E_k$, $a'(t) \in E_k$ такие, что $a(t) \neq a'(t)$, $(a(1), \dots, a(t-1), a(t))$ принадлежит, а $(a(1), \dots, a(t-1), a'(t))$ не принадлежит R .

Семейство $D(k, \tau)$. $D(k, \tau) \neq \emptyset$ для любых $k \geq 3$, $\tau \geq 1$.

Бинарное отношение R принадлежит семейству $D(k, \tau)$ тогда и только тогда, когда $R \subset E_k^t \times E_k^t$ для некоторого t , $1 \leq t \leq \tau$, R является определенным на E_k^t отношением эквивалентности, причем имеет место следующее. Существует принадлежащий R набор (a_1, a_2) такой, что $a_1(1) = a_2(1), \dots, a_1(t-1) = a_2(t-1)$. Кроме того, для любого $a \in E_k^t$ существует $a' \in E_k^t$ такой, что $a(t) \neq a'(t)$, набор (a, a') не принадлежит R и $a(1) = a'(1), \dots, a(t-1) = a'(t-1)$ при $\tau \geq 2$, $t \geq 2$.

Семейство $N(k, \tau)$. $N(k, \tau) \neq \emptyset$ для любых $k \geq 2$, $\tau \geq 1$.

Бинарное отношение R принадлежит семейству $N(k, \tau)$ тогда и только тогда, когда $R \subset E_k^t \times E_k^t$ для некоторого t , $1 \leq t \leq \tau$, существует определенная на E_k^t подстановка σ_R , которая разлагается в произведение циклов одинаковой простой длины $p \geq 2$ и график которой совпадает с R , причем, если $\tau \geq 2$, $t \geq 2$ и набор (a_1, a_2) принадлежит R , то $a_1(1) = a_2(1), \dots, a_1(t-1) = a_2(t-1)$. Таким образом, $(a, \sigma_R(a)) \in R$ для любого $a \in E_k^t$ и $(a_2, \sigma_R(a_1))$ для любого набора (a_1, a_2) из R .

Пусть $k \geq 2$, $\tau \geq 1$. Пусть Σ — множество всех подстановок (перестановок), определенных на E_k . Пусть $t \in \{1, \dots, \tau\}$ и Φ_t — совокупность отображений множества E_k^t в Σ такая, что $\varphi(a) = \varphi(a')$ при $t = 1$ для любых $\varphi \in \Phi_t$, $a \in E_k$, $a' \in E_k$, а при $\tau \geq 2$, $t \geq 2$ справедливо равенство $\varphi(a) = \varphi(a')$ для любых $\varphi \in \Phi_t$, $a \in E_k^t$, $a' \in E_k^t$, если $a(1) = a'(1), \dots, a(t-1) = a'(t-1)$. Подстановку, которую отображение $\varphi \in \Phi_t$ ставит в соответствие элементу $a \in E_k^t$, обозначим через $\sigma_{\varphi(a)}$.

Семейство $V(k, \tau)$. $V(k, \tau) \neq \emptyset$ для любых $k \geq 2$, $\tau \geq 2$.

Бинарное отношение R принадлежит семейству $V(k, \tau)$, если для некоторых $t \leq \tau$, $\varphi \in \Phi_t$ имеет место следующее: $R \subset E_k^t \times E_k^t$, набор (a_1, a_2) принадлежит R тогда и

только тогда, когда либо $a_1(t-1) = a_2(t-1)$, $a_1(t) = a_2(t)$, либо $a_1(t-1) \neq a_2(t-1)$ и существует $\alpha \in E_k$ такое, что $a_1(t) = \sigma_{\varphi(a_1)}(\alpha)$, $a_2(t) = \sigma_{\varphi(a_2)}(\alpha)$, причем $a_1(1) = a_2(1), \dots, a_1(t-2) = a_2(t-2)$ при $\tau \geq 3, t \geq 3$.

Пусть $k = p^m$, где p — простое число, $p \geq 2, m \geq 1$. Пусть $G = \langle E_k, \oplus \rangle$ — произвольная элементарная абелева p -группа. В каждой такой группе всякий ненулевой элемент имеет порядок p . Пусть $\tau \geq 1$.

Семейство $L(k, \tau)$. $L(k, \tau) \neq \emptyset$ для любого $\tau \geq 1$, если $k = p^m$, где p — простое число, $p \geq 2, m \geq 1$.

Отношение R , арность которого равна 4, принадлежит семейству $L(k, \tau)$, если для некоторых $t, 1 \leq t \leq \tau, \varphi \in \Phi_t$, справедливо включение $R \subset E_k^t \times E_k^t \times E_k^t \times E_k^t$ и набор (a_1, a_2, a_3, a_4) принадлежит R тогда и только тогда, когда

$$\sigma_{\varphi(a_1)}(a_1(t)) \oplus \sigma_{\varphi(a_1)}(a_2(t)) = \sigma_{\varphi(a_1)}(a_3(t)) \oplus \sigma_{\varphi(a_1)}(a_4(t)),$$

причем

$$a_1(1) = a_2(1) = a_3(1) = a_4(1), \dots, a_1(t-1) = a_2(t-1) = a_3(t-1) = a_4(t-1)$$

при $\tau \geq 2, t \geq 2$.

Определенное в [1] семейство $I(k, \tau)$ разобьем на два подсемейства, семейство $I_0(k, \tau)$ и семейство $I_1(k, \tau)$.

Семейство $I_0(k, \tau)$. $I_0(k, \tau) \neq \emptyset$ для всякого $\tau \geq 1$ и любого $k > 5$, представимого в виде $k = h^m$, где $h \geq 5, m > 1$.

Пусть $h \geq 5, m > 1, k = h^m$. Бинарное отношение R принадлежит подсемейству $I_h(k, \tau)$ семейства отношений $I_0(k, \tau)$, если для некоторых $t, 1 \leq t \leq \tau, \varphi \in \Phi_t$, справедливо включение $R \subset E_k^t \times E_k^t$, набор (a_1, a_2) принадлежит R тогда и только тогда, когда для любого $i, 1 \leq i \leq m$, i -е компоненты чисел $\sigma_{\varphi(a_1)}(a_1(t)), \sigma_{\varphi(a_1)}(a_2(t))$ при разложении их по степеням h различны и $a_1(1) = a_2(1), \dots, a_1(t-1) = a_2(t-1)$ при $\tau \geq 2, t \geq 2$. Семейство отношений $I_0(k, \tau)$ есть объединение семейств $I_h(k, \tau)$, взятое по всем $h \geq 5$ таким, что $h^m = k$, где $m > 1$.

Семейство $I_1(k, \tau)$. $I_1(k, \tau) \neq \emptyset$ для любых $k \geq 5, \tau \geq 1$.

Бинарное отношение R принадлежит семейству $I_1(k, \tau)$, если для некоторого $t, 1 \leq t \leq \tau$, имеет место следующее: $R \subset E_k^t \times E_k^t$, набор (a_1, a_2) принадлежит R тогда и только тогда, когда $a_1(t) \neq a_2(t)$, причем $a_1(1) = a_2(1), \dots, a_1(t-1) = a_2(t-1)$ при $\tau \geq 2, t \geq 2$.

Пусть $k \geq 2, \tau \geq 1, W(k, \tau)$ — объединение семейств $Z(k, \tau), D(k, \tau), N(k, \tau), V(k, \tau), L(k, \tau), I_0(k, \tau), I_1(k, \tau)$.

Имеют место следующие утверждения [1].

Теорема 2. Пусть $k \geq 2, \tau \geq 1$. Произвольное S -множество $\mathfrak{M} \subset P_k^\tau$ является полным в P_k^τ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}$ не сохраняет ни одного отношения R из $W(k, \tau)$.

Теорема 3. Пусть $k \geq 2, \tau \geq 1$. Пусть $\mathfrak{N}$ — произвольный S -предполный класс из P_k^τ . Тогда существует отношение $R \in W(k, \tau)$ такое, что $\mathfrak{N} = S(U(R))$.

Теорема 4. Пусть $k \geq 2, \tau \geq 1$. Пусть $R \in W(k, \tau)$. Тогда множество $S(U(R))$ образует S -предполный класс в P_k^τ .

Определение 8. Пусть $h \geq 1, T = (t_1, \dots, t_h)$, причем $\max\{t_1, \dots, t_h\} \leq \tau$. Пусть $R \subset E_k^T$. Отношение R назовем CS -отношением, если для всякого набора $(a_1, \dots, a_h)$ из R и для любой S -функции $f(x) \in S(P_k^\tau(1))$ набор $(f(a_1), \dots, f(a_h))$ также принадлежит R .

Очевидно, что справедлива следующая теорема.

Теорема 5. Пусть $k \geq 2, \tau \geq 1$. Произвольное S -множество $\mathfrak{M}$, принадлежащее совокупности S -множеств M_k^τ , является полным в P_k^τ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}$ не сохраняет ни одного CS -отношения R из $W(k, \tau)$.

Целью данной работы является описание всех CS -отношений, принадлежащих множеству $W(k, \tau)$.

Для любого $\tau \geq 1$ рассмотрим три семейства отношений, семейства $L_2(2, \tau), L_3(3, \tau)$ и $L_4(4, \tau)$.

Семейство $L_2(2, \tau)$. $L_2(2, \tau) \neq \emptyset$ для любого $\tau \geq 1$.

Отношение R , арность которого равна 4, принадлежит семейству $L_2(2, \tau)$, если для некоторого $t, 1 \leq t \leq \tau$, имеет место следующее: $R \subset E_2^t \times E_2^t \times E_2^t \times E_2^t$, набор (a_1, a_2, a_3, a_4) принадлежит R тогда и только тогда, когда справедливо сравнение $a_1(t) \oplus a_2(t) \pmod{2} = a_3(t) \oplus a_4(t) \pmod{2}$, причем при $\tau \geq 2, t \geq 2$

$$a_1(1) = a_2(1) = a_3(1) = a_4(1), \dots, a_1(t-1) = a_2(t-1) = a_3(t-1) = a_4(t-1).$$

Семейство $L_3(3, \tau)$. $(L_3(3, \tau) \neq \emptyset$ при любом $\tau \geq 1$.

Отношение R , арность которого равна 4, принадлежит семейству $L_3(3, \tau)$, если для некоторого $t, 1 \leq t \leq \tau$, имеет место следующее: $R \subset E_3^t \times E_3^t \times E_3^t \times E_3^t$, набор (a_1, a_2, a_3, a_4) принадлежит R тогда и только тогда, когда справедливо сравнение $a_1(t) \oplus a_2(t) \pmod{3} = a_3(t) \oplus a_4(t) \pmod{3}$, причем при $\tau \geq 2$ и $t \geq 2$

$$a_1(1) = a_2(1) = a_3(1) = a_4(1), \dots, a_1(t-1) = a_2(t-1) = a_3(t-1) = a_4(t-1).$$

Семейство $L_4(4, \tau)$. $(L_4(4, \tau) \neq \emptyset$ для любого $\tau \geq 1$.

Отношение R , арность которого равна 4, принадлежит семейству $L_4(4, \tau)$, если для некоторого $t, 1 \leq t \leq \tau$, имеет место следующее: $R \subset E_4^t \times E_4^t \times E_4^t \times E_4^t$, набор (a_1, a_2, a_3, a_4) принадлежит R тогда и только тогда, когда справедливо равенство $a_1(t) + a_2(t) = a_3(t) + a_4(t)$, где коммутативная операция $+$ на множестве E_4 определяется равенствами $0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1, 0 + 2 = 2, 0 + 3 = 3, 1 + 1 = 0, 1 + 2 = 3, 1 + 3 = 2, 2 + 2 = 0, 2 + 3 = 1, 3 + 3 = 0$. При этом, если $\tau \geq 2, t \geq 2$, то

$$a_1(1) = a_2(1) = a_3(1) = a_4(1), \dots, a_1(t-1) = a_2(t-1) = a_3(t-1) = a_4(t-1).$$

Очевидно, семейства отношений $L_2(2, \tau), L_3(3, \tau)$ и $L_4(4, \tau)$ являются подсемействами семейств отношений $L(2, \tau), L(3, \tau)$ и $(L(4, \tau)$ соответственно.

Теорема 6. *Справедливы следующие утверждения.*

- (1) Пусть $\tau \geq 1$, $k = 2$. Отношение R из $W(2, \tau)$ является CS -отношением тогда и только тогда, когда $R \in N(2, \tau) \cup L_2(2, \tau)$.
- (2) Пусть $\tau \geq 1$, $k = 3$. Отношение R из $W(3, \tau)$ является CS -отношением тогда и только тогда, когда $R \in L_3(3, \tau)$.
- (3) Пусть $\tau \geq 1$, $k = 4$. Отношение R из $W(4, \tau)$ является CS -отношением тогда и только тогда, когда $R \in L_4(4, \tau)$.
- (4) Пусть $\tau \geq 1$, $k \geq 5$. Отношение R из $W(k, \tau)$ является CS -отношением тогда и только тогда, когда $R \in I_1(k, \tau)$.

Справедливость утверждений теоремы 6 будет следовать из справедливости приведенных ниже предложений 1–11.

Предложение 1. Пусть $k \geq 2$, $\tau \geq 1$, R — произвольное отношение из семейства $Z(k, \tau)$. Тогда $S(P_k^\tau(1)) \not\subset S(U(R))$.

Доказательство. По определению семейства отношений $Z(k, \tau)$, найдется t , $1 \leq t \leq \tau$, такое, что $R \subset E_k^t$. Пусть $a \in R$, $a' \in E_k^t$, но $a' \notin R$. Очевидно, существует S -функция $f(x)$ такая, что $f(a) = a'$. Отсюда следует, что $f(x) \notin S(U(R))$ и $S(P_k^\tau(1)) \not\subset S(U(R))$.

Предложение 2. Пусть $k \geq 3$, $\tau \geq 1$, R — произвольное отношение из семейства $D(k, \tau)$. Тогда $S(P_k^\tau(1)) \not\subset S(U(R))$.

Доказательство. По определению семейства отношений $D(k, \tau)$, найдется t , $1 \leq t \leq \tau$, такое, что $R \subset E_k^t \times E_k^t$. Кроме того, существуют $a \in E_k^t$, $a_1 \in E_k^t$, $a_2 \in E_k^t$ такие, что набор (a, a_1) принадлежит, а набор (a, a_2) не принадлежит отношению R . При этом, если $\tau \geq 2$, $t \geq 2$, то $a_1(1) = a_2(1) = a(1), \dots, a_1(t-1) = a_2(t-1) = a(t-1)$. Нетрудно видеть, что существует S -функция $f(x)$ такая, что $f(a) = a$, $f(a_1) = a_2$. Отсюда следует, что $f(x) \notin S(U(R))$ и $S(P_k^\tau(1)) \not\subset S(U(R))$.

Предложение 3. Пусть $k \geq 3$, $\tau \geq 1$, R — произвольное отношение из семейства $N(k, \tau)$. Тогда $S(P_k^\tau(1)) \not\subset S(U(R))$.

Доказательство. Пусть для некоторого t , $1 \leq t \leq \tau$, $R \subset E_k^t \times E_k^t$, набор (a_1, a_2) принадлежит R . Так как $k \geq 3$, из определения семейства отношений $N(k, \tau)$ следует, что существует $a_2^1 \in E_k^t$ такое, что $a_2^1 \neq a_1$, $a_2^1 \neq a_2$, набор (a_1, a_2^1) не принадлежит R и, если $\tau \geq 2$, $t \geq 2$, то $a_2^1(1) = a_2(1) = a_1(1), \dots, a_2^1(t-1) = a_2(t-1) = a_1(t-1)$. Вместе с тем, как легко видеть, существует S -функция $f(x)$ такая, что $f(a_1) = a_1$, $f(a_2) = a_2^1$. Очевидно, $f(x) \notin S(U(R))$ и $S(P_k^\tau(1)) \not\subset S(U(R))$.

Предложение 4. Пусть $k = 2$, $\tau \geq 1$, R — произвольное отношение из семейства $N(2, \tau)$. Тогда $S(P_2^\tau(1)) \subset S(U(R))$.

Доказательство. Пусть для некоторого t , $1 \leq t \leq \tau$, $R \subset E_k^t \times E_k^t$. Из определения семейства отношений $N(2, \tau)$ следует, что набор (a_1, a_2) принадлежит R лишь в том случае, когда $a_2(t) = \bar{a}_1(t)$ и $a_2(1) = a_1(1), \dots, a_2(t-1) = a_1(t-1)$ при $\tau \geq 2$, $t \geq 2$. Пусть $f(x)$ — произвольная S -функция из P_2^τ . Пусть $f(a_1) = a'_1$, $f(a_2) = a'_2$. Очевидно, $a'_2(t) = \bar{a}_1(t)$ и при $\tau \geq 2$, $t \geq 2$, $a'_2(1) = a_2(1), \dots, a'_2(t-1) = a_2(t-1)$. Таким образом, $f(x) \in s(U(R))$ и $S(P_2^\tau(1)) \subset S(U(R))$.

Предложение 5. Пусть $k \geq 2$, $\tau \geq 2$, R — произвольное отношение из семейства $V(k, \tau)$. Тогда $S(P_k^\tau(1)) \not\subset S(U(R))$.

Доказательство. Пусть для некоторых t , $2 \leq t \leq \tau$, $\varphi \in \Phi_t$, $R \subset E_k^t \times E_k^t$, набор (a_1, a_2) принадлежит R , причем $a_1(t-1) \neq a_2(t-1)$ и если $\tau \geq 3$, $t \geq 3$, то $a_2(1) = a_1(1), \dots, a_2(t-2) = a_1(t-2)$. Не ограничивая общности, будем считать, что $a_1(t) = \sigma_{\varphi(a_1)}(0)$, $a_2(t) = \sigma_{\varphi(a_2)}(0)$. Пусть (a_1, a'_2) — элемент из $E_k^t \times E_k^t$ такой, что $a'_2(1) = a_2(1), \dots, a'_2(t-2) = a_2(t-2)$, $a'_2(t-1) = a_2(t-1)$ при $\tau \geq 3$, $t \geq 3$, но $a'_2(t) \neq \sigma_{\varphi(a'_2)}(0)$, то есть $a'_2(t) \neq \sigma_{\varphi(a_2)}(0)$. Из определения семейства отношений V_k^τ следует, что набор (a_1, a'_2) не принадлежит R . Вместе с тем, как нетрудно видеть, существует S -функция $f(x)$ такая, что $f(a_2) = a'_2$ и $f(x) \notin S(U(R))$ и $S(P_k^\tau(1)) \not\subset S(U(R))$.

Предложение 6. Пусть $k \in \{2, 3, 4\}$. Пусть набор (a_1, a_2, a_3, a_4) принадлежит множеству $E_k \times E_k \times E_k \times E_k$. Пусть $G(E_k, \oplus)$ — произвольная элементарная абелева 2-группа, если $k = 2$, $k = 4$, и 3-группа, если $k = 3$. Равенство

$$a_1 \oplus a_2 = a_3 \oplus a_4 \quad (1)$$

справедливо тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия.

- (а) Пусть $a_1 = a_2$. Тогда, если $k = 2$, $k = 4$, то $a_3 = a_4$. если $k = 3$, то либо $a_3 = a_4 = a_2 = a_1$, либо $a_3 \neq a_4$, $a_3 \neq a_1$, $a_4 \neq a_1$.
- (б) Пусть $a_1 \neq a_2$. Тогда, если $k = 2$, то $a_3 \neq a_4$, если $k = 3$, то $a_3 = a_1$, $a_4 = a_2$ или $a_3 = a_2$, $a_4 = a_1$, либо $a_3 = a_4$, $a_1 \neq a_3$, $a_2 \neq a_3$, если $k = 4$, то либо $a_3 = a_1$, $a_4 = a_2$ или $a_3 = a_2$, $a_4 = a_1$, либо $a_3 \neq a_4$, $a_1 \neq a_3$, $a_2 \neq a_3$, $a_2 \neq a_4$.

Доказательство. Пусть число b из E_k — ноль группы $G(E_k, \oplus)$. Если $k = 2$, то справедливость предложения 6 очевидна.

Пусть $k = 3$. Из определения элементарной абелевой 3-группы $G(E_3, \oplus)$ следует, что для любого $a \in E_3$ такого, что $a \oplus a \oplus a = b$, если $a \neq b$, то $a \oplus a \neq b$, $a \oplus a \neq a$, если a и a' из E_3 таковы, что $a \neq a'$, $a \neq b$, $a' \neq b$, то $a \oplus a' = b$.

Пусть $k = 4$. Из определения элементарной абелевой 2-группы $G(E_4, \oplus)$ следует, что для любого $a \in E_4$ такого, что $a \oplus a = b$, если a и a' из E_4 таковы, что $a \neq a'$, $a \neq b$, $a' \neq b$, то $a \oplus a' \neq a$, $a \oplus a' \neq a'$, $a \oplus a' \neq b$.

Используя эти свойства групп $G(E_3, \oplus)$ и $G(E_4, \oplus)$ легко убедиться в том, что для любого набора (a_1, a_2, a_3, a_4) , удовлетворяющего свойствам (а) и (б) при $k = 3$ и $k = 4$ равенство (1) выполнено; и наоборот, для любого набора, для которого имеет место равенство (1), справедливы свойства (а) и (б).

Предложение 7. Пусть $k \in \{2, 3, 4\}$. Пусть $G(E_k, \oplus)$, $G(E_k, +)$ — элементарные абелевы 2-группы, если $k = 2$, $k = 4$, и 3-группы, если $k = 3$; при этом будем считать, что операция $+$ в группах $G(E_2, +)$, $G(E_3, +)$, $G(E_4, +)$ задается так же, как и при определении семейств отношений $L_2(2, \tau)$, $L_3(3, \tau)$, $L_4(4, \tau)$. Пусть наборы (a_1, a_2, a_3, a_4) и (a'_1, a'_2, a'_3, a'_4) из $E_k \times E_k \times E_k \times E_k$ таковы, что для некоторых определенных на E_k подстановок (перестановок) σ_1 и σ_2

$$\begin{aligned} a'_1 &= \sigma_1(a_1), & a'_2 &= \sigma_1(a_2), & a'_3 &= \sigma_1(a_3), & a'_4 &= \sigma_1(a_4), \\ \sigma_2(a_1) \oplus \sigma_2(a_2) &= \sigma_2(a_3) \oplus \sigma_2(a_4). \end{aligned}$$

Тогда для любой подстановки (перестановки) σ , определенной на E_k ,

$$\sigma(a'_1) \oplus \sigma(a'_2) = \sigma(a'_3) \oplus \sigma(a'_4).$$

Кроме того, имеют место равенства

$$a_1 + a_2 = a_3 + a_4, \quad a'_1 + a'_2 = a'_3 + a'_4.$$

Доказательство. Заметим, что если для набора (a_1, a_2, a_3, a_4) справедливо одно из свойств (а) или (б) предложения 6, то то же свойство справедливо и для наборов (a'_1, a'_2, a'_3, a'_4) , $(\sigma(a'_1), \sigma(a'_2), \sigma(a'_3), \sigma(a'_4))$. Поэтому $\sigma(a'_1) \oplus \sigma(a'_2) = \sigma(a'_3) \oplus \sigma(a'_4)$. Вместе с тем, согласно предложению 6, элементарные абелевы 2-группы и 3-группы могут выбираться произвольно. Отсюда следует, что $a_1 + a_2 = a_3 + a_4$, $a'_1 + a'_2 = a'_3 + a'_4$.

Предложение 8. Пусть $k \in \{2, 3, 4\}$, R — произвольное отношение из семейства $L(k, \tau)$. Тогда $S(P_k^\tau(1)) \subset S(U(R))$, причем $R \in L_2(2, \tau)$ при $k = 2$, $R \in L_3(3, \tau)$ при $k = 3$, $R \in L_4(4, \tau)$ при $k = 4$.

Доказательство. Пусть $R \subset E_k^t \times E_k^t \times E_k^t \times E_k^t$ для некоторых t , $1 \leq t \leq \tau$, $\varphi \in \Phi_t$. Пусть набор (a_1, a_2, a_3, a_4) принадлежит R . Это означает, что

$$\sigma_{\varphi(a_1)}(a_1(t)) \oplus \sigma_{\varphi(a_1)}(a_2(t)) = \sigma_{\varphi(a_1)}(a_3(t)) \oplus \sigma_{\varphi(a_1)}(a_4(t)).$$

Пусть $f(x)$ — произвольная S -функция из P_k^τ и $f(a_1) = a'_1$, $f(a_2) = a'_2$, $f(a_3) = a'_3$, $f(a_4) = a'_4$. Так как $f(x)$ — S -функция, существует, как не трудно видеть, определенная на E_k подстановка (перестановка) σ такая, что $a'_1(t) = \sigma(a_1(t))$, $a'_2(t) = \sigma(a_2(t))$, $a'_3(t) = \sigma(a_3(t))$, $a'_4(t) = \sigma(a_4(t))$. Из предложения 7 следует, что тогда

$$\sigma_{\varphi(a'_1)}(a'_1(t)) \oplus \sigma_{\varphi(a'_1)}(a'_2(t)) = \sigma_{\varphi(a'_1)}(a'_3(t)) \oplus \sigma_{\varphi(a'_1)}(a'_4(t)).$$

Однако это означает, что набор (a'_1, a'_2, a'_3, a'_4) также принадлежит R . Таким образом, $f(x) \in S(U(R))$ и $S(P_k^\tau(1)) \subset S(U(R))$. Вместе с тем, $a_1(t) + a_2(t) = a_3(t) + a_4(t)$ и $a'_1(t) + a'_2(t) = a'_3(t) + a'_4(t)$. Поэтому $R \in L_2(2, \tau)$, если $k = 2$, $R \in L_3(3, \tau)$, если $k = 3$, $R \in L_4(4, \tau)$, если $k = 4$.

Предложение 9. Пусть $k \geq 5$, $\tau \geq 1$, R — произвольное отношение из семейства $L(k, \tau)$. Тогда $S(P_k^\tau(1)) \not\subset S(U(R))$.

Доказательство. Пусть $R \subset E_k^t \times E_k^t \times E_k^t \times E_k^t$ для некоторых t , $1 \leq t \leq \tau$, и $\varphi \in \Phi_t$. Нетрудно видеть, что в R существует набор (a_1, a_2, a_3, a_4) такой, что $a_1(t)$, $a_2(t)$, $a_3(t)$, $a_4(t)$ попарно различны и

$$\sigma_{\varphi(a_1)}(a_1(t)) \oplus \sigma_{\varphi(a_1)}(a_2(t)) = \sigma_{\varphi(a_1)}(a_3(t)) \oplus \sigma_{\varphi(a_1)}(a_4(t)).$$

Так как $k \geq 5$, в E_k существует a' такое, что $a' \neq a_4(t)$, и следовательно,

$$\sigma_{\varphi(a_1)}(a_1(t)) \oplus \sigma_{\varphi(a_1)}(a_2(t)) \neq \sigma_{\varphi(a_1)}(a_3(t)) \oplus \sigma_{\varphi(a_1)}(a').$$

Рассмотрим набор (a_1, a_2, a_3, a'_4) из $E_k^t \times E_k^t \times E_k^t \times E_k^t$ такой, что $a'_4(t) = a'$, и если $t \geq 2$, $\tau \geq 2$, то $a'_4(1) = a_4(1), \dots, a'_4(t-1) = a_4(t-1)$. Легко убедиться в том, что в P_k^τ существует S -функция $f(x)$ такая, что $f(a_1) = a_1$, $f(a_2) = a_2$, $f(a_3) = a_3$, $f(a_4) = a'_4$. Но

$$\sigma_{\varphi(a_1)}(a_1(t)) \oplus \sigma_{\varphi(a_1)}(a_2(t)) \neq \sigma_{\varphi(a_1)}(a_3(t)) \oplus \sigma_{\varphi(a_1)}(a'_4(t)).$$

Поэтому набор (a_1, a_2, a_3, a'_4) не принадлежит отношению R . Отсюда следует, что $f(x) \notin S(U(R))$ и $S(P_k^\tau(1)) \not\subset S(U(R))$.

Предложение 10. Пусть $k > 5$, $\tau \geq 1$, R — произвольное отношение из семейства $I_0(k, \tau)$. Тогда $S(P_k^\tau(1)) \not\subset S(U(R))$.

Доказательство. Из определения семейства отношений $I_0(k, \tau)$ следует, что k представимо в виде $k = h^m$, где $h \geq 5$, $m > 1$. Пусть для некоторых t , $1 \leq t \leq \tau$, и $\varphi \in \Phi_t$ справедливо включение $R \subset E_k^t \times E_k^t$. Пусть набор (a_1, a_2) принадлежит R . Это означает, что для любого i , $1 \leq i \leq m$, i -е компоненты чисел $\sigma_{\varphi(a_1)}(a_1(t))$ и $\sigma_{\varphi(a_1)}(a_2(t))$ при разложении их по степеням числа h различны. Так как $m > 1$, очевидно, что в E_k существуют $\tilde{a}_1$ и $\tilde{a}_2$ такие, что $\tilde{a}_1 \neq \tilde{a}_2$ и первые компоненты чисел $\tilde{a}_1$ и $\tilde{a}_2$ при разложении их по степеням числа h совпадают. Вместе с тем, существуют $\tilde{a}'_1$ и $\tilde{a}'_2$, принадлежащие E_k , такие, что $\sigma_{\varphi(a_1)}(\tilde{a}'_1) = \tilde{a}_1$, $\sigma_{\varphi(a_1)}(\tilde{a}'_2) = \tilde{a}_2$. Рассмотрим набор (a'_1, a'_2) из $E_k^t \times E_k^t$ такой, что $a'_1(t) = \tilde{a}'_1$, $a'_2(t) = \tilde{a}'_2$ и $a'_1(1) = a'_2(1) = a_1(1), \dots, a'_1(t-1) = a'_2(t-1) = a_1(t-1)$ при $\tau \geq 2$, $t \geq 2$. Очевидно, набор (a'_1, a'_2) не принадлежит R . Однако в P_k^τ существует S -функция $f(x)$ такая, что $f(a_1) = a'_1$, $f(a_2) = a'_2$. Ясно, что S -функция $f(x) \notin S(U(R))$. Поэтому $S(P_k^\tau(1)) \not\subset S(U(R))$.

Предложение 11. Пусть $k \geq 5$, $\tau \geq 1$, R — произвольное отношение из семейства $I_1(k, \tau)$. Тогда $S(P_k^\tau(1)) \subset S(U(R))$.

Доказательство. Пусть для некоторого t , $1 \leq t \leq \tau$, $R \subset E_k^t \times E_k^t$. Пусть (a_1, a_2) — произвольный набор из R и $f(x)$ — произвольная S -функция из P_k^τ . Пусть $f(a_1) = a'_1$, $f(a_2) = a'_2$. Из определения семейства отношений $I_1(k, \tau)$ следует, что $a_1(t) \neq a_2(t)$, и если $\tau \geq 2$, $t \geq 2$, то $a_2(1) = a_1(1), \dots, a_2(t-1) = a_1(t-1)$. Очевидно, тому же свойству будет удовлетворять и набор (a'_1, a'_2) . Таким образом, набор (a'_1, a'_2) также принадлежит R . Поэтому $f(x) \in S(U(R))$ и $S(P_k^\tau(1)) \subset S(U(R))$.

Нетрудно видеть, что из справедливости предложений 1–11 следует справедливость теоремы 6.

Пусть $k \geq 2$, $\tau \geq 1$, $W_1(k, \tau)$ — объединение семейств $N(2, \tau)$, $L_2(2, \tau)$, $L_3(3, \tau)$, $L_4(4, \tau)$, $I_1(k, \tau)$.

Непосредственным следствием теорем 5 и 6 является следующее утверждение.

Теорема 7. Пусть $k \geq 2$, $\tau \geq 1$. Произвольное S -множество $\mathfrak{M}$, принадлежащее совокупности S -множеств M_k^τ , является полным в P_k^τ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}$ не сохраняет ни одного отношения из $W_1(k, \tau)$.

Определение 9. Пусть $k \geq 2$, $n \geq 2$. S -функция $f(x_1, \dots, x_n)$ из P_k^1 (или из P_k) называется существенной, если она существенно зависит не менее чем от двух переменных.

Предложение 12. Пусть $k \geq 3$, $n \geq 2$, $f(x_1, \dots, x_n)$ — произвольная существенная S -функция из P_k . Существуют наборы $A_1 = (a_1^1, \dots, a_n^1)$, $A_2 = (a_1^2, \dots, a_n^2)$ и S -функции $f_1(x), \dots, f_n(x)$ такие, что $a_1^1 \neq a_1^2, \dots, a_n^1 \neq a_n^2$ и

$$f(f_1(a_1^1), \dots, f_n(a_n^1)) = f(f_1(a_1^2), \dots, f_n(a_n^2)).$$

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что S -функция $f(x_1, \dots, x_n)$ существенно зависит от переменных x_1, x_2 . Тогда, согласно известной лемме С. В. Яблонского [4], существуют 3 набора $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$, $(a_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3, \dots, \tilde{a}_n)$, $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3, \dots, \tilde{a}_n)$ такие, что $a_1 \neq \tilde{a}_1$, $a_2 \neq \tilde{a}_2$ и значения функции $f(x_1, \dots, x_n)$ на этих наборах попарно различны. Пусть S -функции $f_1(x), \dots, f_n(x)$ и числа $b_3, \dots, b_n$ из E_2 таковы, что $f_1(0) = a_1$, $f_2(0) = a_2, \dots, f_n(0) = a_n$, $f_1(1) = \tilde{a}_1$, $f_2(1) = \tilde{a}_2$ и для любого i ,

$3 \leq i \leq n$, $b_i = 0$, если $\tilde{a}_i = a_i$; $b_i = 1$ и $f_i(1) = \tilde{a}_i$, если $\tilde{a}_i \neq a_i$. Рассмотрим функцию $\tilde{f}(x_1, \dots, x_n) = f(f_1(x_1), \dots, f_n(x_n))$. Нетрудно видеть, что $\tilde{f}(x_1, \dots, x_n)$ является S -функцией, причем на наборах $(0, \dots, 0)$, $(0, 1, b_3, \dots, b_n)$, $(1, 1, b_3, \dots, b_n)$ эта функция принимает три разных значения.

Пусть существуют $a_1^1, a_1^2 \in E_k$ такие, что $a_1^1 \neq a_1^2$, но $\tilde{f}(a_1^1, \dots, a_1^1) = \tilde{f}(a_1^2, \dots, a_1^2)$, где $\tilde{f}$ — функция от n переменных. Очевидно, что тогда в качестве наборов A_1 и A_2 можно взять наборы $(a_1^1, \dots, a_1^1)$ и $(a_1^2, \dots, a_1^2)$. Пусть для любых a и a' из E_k таких, что $a \neq a'$, $\tilde{f}(a, \dots, a) \neq \tilde{f}(a', \dots, a')$. Так как значения $\tilde{f}(0, 0, 0, \dots, 0)$, $\tilde{f}(0, 1, b_3, \dots, b_n)$, $\tilde{f}(1, 1, b_3, \dots, b_n)$ попарно различны, как легко видеть, найдется такое $a_1^2 \in \{2, \dots, k-1\}$, что либо $\tilde{f}(0, 1, b_3, \dots, b_n) = \tilde{f}(a_1^2, \dots, a_1^2)$, либо $\tilde{f}(1, 1, b_3, \dots, b_n) = \tilde{f}(a_1^2, \dots, a_1^2)$. Отсюда следует, что в этом случае в качестве набора A_2 можно взять набор $(a_1^2, \dots, a_1^2)$, а в качестве A_1 — либо набор $(0, 1, b_3, \dots, b_n)$, либо набор $(1, 1, b_3, \dots, b_n)$.

Предложение 13. Пусть $k \geq 5$, $\mathfrak{M}$ — произвольное S -множество из P_k^1 . Пусть R — единственное отношение, принадлежащее семейству $I_1(k, \tau)$. Тогда

- (а) если $\mathfrak{M}$ состоит только из S -функций, которые не являются существенными, то $\mathfrak{M} \subseteq S(U(R))$;
- (б) если $\mathfrak{M}$ содержит существенную S -функцию, то $\mathfrak{M} \not\subseteq S(U(R))$.

Заметим, что никакая функция из $S(P_k^1)$ не является существенной.

С задачей о полноте S -множеств в P_k^τ тесно связана задача об A -полноте систем, состоящих из S -ограниченно-детерминированных функций. Пусть $k \geq 2$ и P_{bd}^k — множество всех ограничено-детерминированных функций (о.-д. функций), определенных на наборах бесконечных последовательностей, составленных из букв алфавита E_k . Учитывая детерминированность функций из P_{bd}^k , можно, очевидно, полагать, что для всякого $t \geq 1$ эти функции определены также на всех наборах слов длины t , принадлежащих множеству E_k^t . Будем считать, что на множестве P_{bd}^k заданы операции суперпозиции и обратной связи. Известно, однако, что при изучении задачи об A -полноте операция “обратная связь” оказывается несущественной и выражима через операцию суперпозиции [2]. Так же как и при исследовании задачи о полноте в P_k^τ , введем понятия замыкания, замкнутого множества и т. п.

Определение 10. Пусть $k \geq 2$, $\tau \geq 1$. Ограниченно-детерминированную функцию $g(x_1, \dots, x_n)$ и функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ из P_k^τ назовем τ -эквивалентными, если $g(a_1, \dots, a_n) = f(a_1, \dots, a_n)$ для любого набора $(a_1, \dots, a_n)$ слов из E_k^τ .

Определение 11. Пусть $k \geq 2$, $\tau \geq 1$, $\mathfrak{N} \subseteq P_{bd}^k$, $\mathfrak{M} \subseteq P_k^\tau$. Множества $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$ назовем τ -эквивалентными, если для любой ограничено-детерминированной функции g из $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{M}$ существует τ -эквивалентная ей ограничено-детерминированная функция f и наоборот: для любой функции f' из $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{N}$ существует ограничено-детерминированная функция g' , которая τ -эквивалентна функции f' .

Заметим, что для всякого $\tau \geq 1$ любое множество ограничено-детерминированных функций $\mathfrak{N}$ τ -эквивалентно некоторому множеству $\mathfrak{M} \subseteq P_k^\tau$; при этом, если $\mathfrak{M}$ сохраняет некоторое отношение R , то и $\mathfrak{N}$ сохраняет это отношение.

Определение 12. Пусть $k \geq 2$, $\mathfrak{N} \subseteq P_{bd}^k$. Множество $\mathfrak{N}$ называется A -полным, если для любого $\tau \geq 1$ замыкание множества $\mathfrak{N}$ τ -эквивалентно множеству P_k^τ .

Известно [2], что в общем случае не существует алгоритма для распознавания A -полноты конечных множеств из P_{bd}^k . С этой точки зрения представляет интерес поиск такого алгоритма для систем ограниченно-детерминированных функций, обладающих некоторыми наперед заданными свойствами.

Определение 13. Пусть $k \geq 2$. Пусть $g(x_1, \dots, x_n) \in P_{bd}^k$. Ограниченно-детерминированную функцию $g(x_1, \dots, x_n)$ назовем S -ограниченно-детерминированной функцией, если в каждом ее состоянии реализуется функция k -значной логики, не выпускающая ни одного значения из множества E_k .

Определение 14. Пусть $k \geq 2$, $\mathfrak{N} \subset P_{bd}^k$. Множество ограниченно-детерминированных функций $\mathfrak{N}$ назовем S -множеством, если любая ограниченно-детерминированная функция из $\mathfrak{N}$ является S -ограниченно-детерминированной функцией.

Пусть $k \geq 2$, $\mathfrak{N} \subset P_{bd}^k$. Через $S(\mathfrak{N})$ обозначим подмножество $\mathfrak{N}$, состоящее из всех S -ограниченно-детерминированных функций, принадлежащих $\mathfrak{N}$. Множество всех одно-местных S -ограниченно-детерминированных функций обозначим $S(P_{bd}^k(1))$.

Пусть M_{bd}^k — совокупность всех S -множеств ограниченно-детерминированных функций $\mathfrak{N}$ таких, что $S(P_{bd}^k(1)) \subseteq \mathfrak{N}$ и $|\mathfrak{N} \setminus S(P_{bd}^k(1))| < \infty$.

Возникает вопрос, при каких условиях произвольное S -множество из M_{bd}^k является A -полным и существует ли алгоритм для распознавания A -полноты систем, принадлежащих совокупности M_{bd}^k .

Непосредственным следствием теоремы 7 является следующее утверждение.

Теорема 8. Пусть $k \geq 2$. Произвольное множество ограниченно-детерминированных функций $\mathfrak{N}$, принадлежащее совокупности S -множеств M_{bd}^k , является A -полным тогда и только тогда, когда $\mathfrak{N}$ не сохраняет ни одного отношения из $W_1(k, \tau)$ для любого $\tau \geq 1$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{N}$ является A -полным. Это означает, что для любого $\tau \geq 1$ замыкание $\mathfrak{N}$ τ -эквивалентно P_k^τ и, таким образом, не сохраняет ни одного отношения из $W_1(k, \tau)$.

Пусть множество $\mathfrak{N}$ не является A -полным. Тогда существует $\tau \geq 1$ такое, что замыкание $\mathfrak{N}$ не является τ -эквивалентным P_k^τ . Вместе с тем, S -множество ограниченно-детерминированных функций $\mathfrak{N}$ τ -эквивалентно некоторому S -множеству $\mathfrak{M}$, принадлежащему совокупности множеств M_k^τ и не являющемуся полным в P_k^τ . Но тогда множество $\mathfrak{M}$, и следовательно, множество $\mathfrak{N}$ согласно теореме 7 сохраняет некоторое отношение, принадлежащее $W_1(k, \tau)$.

Пусть $k \geq 2$, $f(x_1, \dots, x_n)$ — произвольная ограниченно-детерминированная функция из P_{bd}^k . Через Q_f , q_0^f , $\varphi_f(q, x_1, \dots, x_n)$ обозначим соответственно множество состояний, начальное состояние и функцию переходов ограниченно-детерминированной функции $f(x_1, \dots, x_n)$, причем функция $\varphi_f(q, x_1, \dots, x_n)$ определена на множестве всех наборов слов одной и той же длины, составленных из букв алфавита E_k .

Определение 15. Пусть $k \geq 2$, $t \geq 1$, $f(x_1, \dots, x_n) \in P_{bd}^k$. Состояние $q \in Q_f$ ограниченно-детерминированной функции $f(x_1, \dots, x_n)$ называется t -достижимым, если существует набор слов $(a_1, \dots, a_n)$ из $E_k^t, \dots, E_k^t$ (длины n) такой, что

$$\varphi_f(q_0^f, a_1, \dots, a_n) = q.$$

Будем считать при этом, что 0-достижимым состоянием ограниченно-детерминированной функции $f(x_1, \dots, x_n)$ является ее начальное состояние.

С использованием понятия t -достижимости дадим несколько иную формулировку теоремы 8.

Теорема 9. Пусть $k \geq 2$, $\mathfrak{N} \in M_{bd}^k$, $\mathfrak{N} \setminus S(P_{bd}^{k(1)}) = \{f_1(x_1, \dots, x_{n_1}), \dots, f_m(x_1, \dots, x_{n_m})\}$. S -множество ограниченно-детерминированных функций $\mathfrak{N}$ является A -полным в P_{bd}^k тогда и только тогда, когда для любого $t \geq 0$ имеют место следующие утверждения.

- (1) Если $k = 2$, то существуют l и l' , $1 \leq l, l' \leq m$, и t -достижимые состояния $q \in Q_{f_l}$, $q' \in Q_{f_{l'}}$ такие, что в состоянии q реализуется нелинейная, а в состоянии q' самодвойственная S -функции алгебры логики (предложения 4 и 8);
- (2) Если $k = 3$, $k = 4$, то существуют l , $1 \leq l \leq m$, и t -достижимое состояние $q \in Q_{f_l}$ такие, что в состоянии q реализуется S -функция k -значной логики (или S -функция из P_k^1), не сохраняющая единственного отношения, принадлежащего семействам $L_3(3, 1)$ ($L_4(4, 1)$ соответственно) (предложение 8);
- (3) Если $k \geq 5$, то существуют l , $1 \leq l \leq m$, и t -достижимое состояние $q \in Q_{f_l}$ такие, что в состоянии q реализуется существенная S -функция k -значной логики (или существенная S -функция из P_k^1) (предложения 13 и 14).

Заметим, что для любых $k \geq 2$, $\tau \geq 1$ теорема, аналогичная теореме 9, справедлива и при исследовании задачи о полноте в P_k^τ - S -множествах, принадлежащих совокупности M_k^τ . Для этого в формулировке теоремы 9 достаточно рассматривать t такие, которые не превосходят числа $\tau - 1$.

Теорема 10. Пусть $k \geq 2$. Существует алгоритм для распознавания A -полноты произвольных множеств ограниченно-детерминированных функций, принадлежащих совокупности S -множеств M_{bd}^k .

Очевидно, справедливо следующее утверждение.

Предложение 14. Пусть $k \geq 2$. Существует алгоритм, для любой S -функции из P_k (или из P_k^1) устанавливающий, является ли эта функция линейной или самодвойственной при $k = 2$, сохраняет ли эта функция отношения из семейств $L_3(3, 1)$, $L_4(4, 1)$ при $k = 3$, $k = 4$, является ли эта функция существенной при $k \geq 5$.

Пусть $k \geq 2$, f — произвольная ограниченно-детерминированная функция из P_{bd}^k . Пусть $t \geq 0$. Через $Q_f(t)$ обозначим подмножество Q_f , содержащее все t -достижимые состояния ограниченно детерминированной функции f .

Предложение 15. Пусть $k \geq 2$, $\mathfrak{N}$ — произвольное S -множество ограниченно-детерминированных функций, принадлежащее совокупности S -множеств M_{bd}^k . Пусть $\mathfrak{N} \setminus P_{bd}^k(1) = \{f_1, \dots, f_n\}$ и p_i — число состояний ограниченно-детерминированной функции f_i для i , $1 \leq i \leq n$. Пусть $\tau = 2^{p_1 + \dots + p_n}$. S -множество $\mathfrak{N}$ является A -полным в P_{bd}^k тогда и только тогда, когда S -множество $\mathfrak{M} \subset P_k^\tau$, τ -эквивалентное $\mathfrak{N}$, является полным в P_k^τ .

Пусть $Q_{f_1}, \dots, Q_{f_n}$ — множества состояний ограниченно-детерминированных функций $f_1, \dots, f_n$ соответственно. Для любого $t \geq 0$ рассмотрим $Q(t) = (Q_{f_1}(t), \dots, Q_{f_n}(t))$. Ясно, что если $Q(\tau_1) = Q(\tau_2)$ для некоторых $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$, то $Q(\tau_1 + t) = Q(\tau_2 + t)$ для любого $t \geq 0$. Вместе с тем, как нетрудно видеть, число различных наборов при разных

t не превосходит τ . Поэтому, если условия теоремы 9 выполнены для всех $t \leq \tau$, то эти условия имеют место и для любого $t \geq 0$.

Из справедливости предложений 14, 15 следует справедливость теоремы 10.

Заметим, что аналогичный результат в общем случае, когда рассматриваются произвольные множества (а не только S -множества), содержащие все одноместные ограниченно-детерминированные функции, получен в [6]. Однако критерий A -полноты таких множеств формулируется значительно сложнее, чем в данной работе.

Список литературы

1. Бувеч В. А., Подколзина М. А., Критерий полноты S -множеств детерминированных функций. *Матем. вопросы кибернетики* (2007) **16**, 191–238.
2. Бувеч В. А., Об алгоритмической неразрешимости распознавания A -полноты для ограниченно-детерминированных функций. *Матем. заметки* (1972) **6**, 687–697.
3. Кудрявцев В. Б., О свойствах S -систем функций k -значной логики. *Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik* (1973) **9**, №1–2, 81–105.
4. Яблонский С. В., Функциональные построения в k -значных логиках. *Труды Математического Института им. В. А. Стеклова* (1958) **51**, 5–142.
5. Бувеч В. А., О τ -полноте систем, содержащих все одноместные детерминированные функции. *Матем. вопросы кибернетики* (1999) **8**, 231–254.
6. Бувеч В. А., Клиндукова Т. Э., О существовании алгоритма для распознавания A -полноты систем, содержащих все одноместные ограниченно-детерминированные функции. *Матем. вопросы кибернетики* (1999) **8**, 289–297.
7. Slupecki J., Kryterium pelnosci wielowartosciowych systemów logiki zdan. *Comptes Rendus des Séances de la Société des Lettres de Varsovie, Classe III, 32 Année* (1939) 102–109.
8. Salomaa A., On basis groups for the set of functions over a finite domain. *Ann. Acad. Sci. Fennicae* (1963) **338**, 1–15.
9. Rosenberg I., Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken. *Rozpr. Česk. Akad. Věd, Řada Mat. Přír. Věd* (1970) **80**, №4, 3–93.

Статья поступила 17.09.2008.