Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. К. Шаранхаев, О неповторных булевых функциях в предэлементарных монотонных базисах, *Дискрет. матем.*, 2009, том 21, выпуск 2, 88–93

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1048>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 16:18:02

О неповторных булевых функциях в предэлементарных монотонных базисах

© 2009 г. И. К. Шаранхаев

Изучается представление булевых функций формулами. Описаны в терминах остаточных функций булевы функции, реализуемые неповторными формулами в предэлементарных базисах $\{\vee, \cdot, -, 0, 1, x_1(x_2 \vee \dots \vee x_n) \vee x_2 \cdot \dots \cdot x_n\}$, где $n \geq 4$.

Работа выполнена при поддержке грантом Бурятского государственного университета.

1. Введение

Под базисами понимаем конечные полные множества булевых функций, содержащие константы.

Формула Φ над базисом B называется неповторной, если каждая переменная входит в нее не более одного раза. Булева функция f называется неповторной в базисе B , если существует неповторная формула Φ над B , представляющая функцию f . В противном случае f называют повторной в B .

Настоящая работа посвящена нахождению условий, равносильных неповторности булевых функций в базисах $\{\vee, \cdot, -, 0, 1, x_1(x_2 \vee \dots \vee x_n) \vee x_2 \cdot \dots \cdot x_n\}$, где $n \geq 4$. Дадим необходимые определения и обозначения, все неопределяемые здесь понятия можно найти, например, в [1]. Будут использоваться следующие обозначения: переменные обозначаются символами x, y, z, u, v , возможно с индексами; $\sigma, \sigma_1, \dots, \sigma_n$ — булевы константы; символом $\tilde{x}$ обозначается набор $(x_1, \dots, x_n)$; $|\tilde{x}|$ — длина набора $\tilde{x}$; P_B — множество всех неповторных функций в базисе B ;

$$x^\sigma = \begin{cases} x, & \text{если } \sigma = 1, \\ \bar{x}, & \text{если } \sigma = 0. \end{cases}$$

Функция, получаемая из $f(x_1, \dots, x_n)$ подстановкой вместо некоторой переменной x_i константы σ , называется остаточной и обозначается $f_{x_i}^\sigma$. Индуктивно это определение распространяется на подмножество переменных.

Назовем переменную x_i функции f фиктивной, если $f_{x_i}^0 = f_{x_i}^1$, и существенной в противном случае. Множество всех существенных переменных функции f обозначим через $\rho(f)$, а множество всех фиктивных переменных функции f — через $\delta(f)$.

Рангом $\text{rank } f$ функции f называется число ее существенных переменных. Под рангом базиса понимаем наибольший из рангов, входящих в него функций.

Функцией f называется слабоповторной в базисе B , если любая остаточная функция от функции f является неповторной, а сама f повторна в базисе B . Через S_B обозначим множество всех слабоповторных функций в базисе B . Базис $B_0 = \{\vee, \cdot, -, 0, 1\}$ называется элементарным, а базис $B_0 \cup \{f\}$, где f слабоповторна в B_0 , называется предэлементарным.

В работе [2] на множестве всех базисов вводится частичный порядок следующим образом: базис B p -меньше базиса C (в этом случае пишем $B \leq_p C$), если $P_B \subseteq P_C$. Если $B \leq_p C$ и $C \leq_p B$, то базисы B и C называются p -эквивалентными ($B \sim_p C$). Если $B \leq_p C$ и $B \not\sim_p C$, то базис B строго p -меньше базиса C (пишем $B <_p C$). Базис B непосредственно p -меньше базиса C (пишем $B \triangleleft_p C$), если $B <_p C$ и не существует базиса D такого, что $B <_p D <_p C$. Там же доказано, что для любого базиса B верно соотношение $B_0 \leq_p B$, а соотношение $C \triangleleft_p D$ выполняется тогда и только тогда, когда $D \sim_p C \cup \{f\}$, где $f \in S_C$.

Отметим, что частично упорядоченное множество базисов с введенным порядком дуально изоморфно частично упорядоченному множеству базисов, рассматриваемому в [3], где базисы сравниваются по сложности формульных представлений.

Описание всех предэлементарных базисов (с точностью до эквивалентности $\sim_p$) следует из [4]. Введем обозначения для таких базисов:

$$B_{1,n} = B_0 \cup \{g_{1,n}\}, \quad g_{1,n} = x_1 \cdot \dots \cdot x_n \vee \bar{x}_1 \cdot \dots \cdot \bar{x}_n, \quad n \geq 2;$$

$$B_{2,n} = B_0 \cup \{g_{2,n}\}, \quad g_{2,n} = x_1(x_2 \vee \dots \vee x_n) \vee x_2 \cdot \dots \cdot x_n, \quad n \geq 3;$$

$$B_{3,n} = B_0 \cup \{g_{3,n}\}, \quad g_{3,n} = x_1(x_2 \vee x_3 \cdot \dots \cdot x_n) \vee x_2 \bar{x}_3 \cdot \dots \cdot \bar{x}_n, \quad n \geq 3;$$

$$B_4 = B_0 \cup \{g_4\}, \quad g_4 = x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_3 x_4;$$

$$B_5 = B_0 \cup \{g_5\}, \quad g_5 = x_1(x_2 \vee x_3 x_4) \vee x_5(x_3 \vee x_2 x_4).$$

Впервые критерий неповторности булевых функций был получен Б. А. Субботовской для элементарного базиса B_0 . В [2, 5–10] можно найти все известные критерии неповторности булевых функций, найденные для базисов B_0 , $B_{2,3}$, $B_{3,3}$ и $B_{1,n}$, где n — нечетное число, большее 1. В данной статье результат для базиса $B_{2,3}$ (см. теорему 4 в [2]) обобщен для всей последовательности базисов $B_{2,n}$.

Базис $B_{2,n}$ будем называть предэлементарным монотонным базисом ранга n .

Будем говорить, что функции f и g связаны отношением $\leq$, и писать $f \leq g$, если для любого набора $\tilde{\sigma}$ выполняется неравенство $f(\tilde{\sigma}) \leq g(\tilde{\sigma})$.

Функция f называется обобщенно монотонной по переменной x , если выполняется либо $f_x^0 \leq f_x^1$, либо $f_x^0 \geq f_x^1$. Если функция f является обобщенно монотонной по переменной x , то для краткости будем писать $f \in M_x$.

Функция f называется монотонной, если для любой переменной x выполняется соотношение $f_x^0 \leq f_x^1$.

Функции f и g называются обобщенно однотипными, если выполняется соотношение $f(x_1, \dots, x_n) = g^\sigma(x_{i_1}^{\sigma_1}, \dots, x_{i_n}^{\sigma_n})$, где $(i_1, \dots, i_n)$ — некоторая перестановка чисел от 1 до n . Очевидно, что на множестве всех булевых функций отношение обобщенной однотипности является отношением эквивалентности.

Производной функции $f(x_1, \dots, x_n)$ по переменной x_i называется функция $f'_{x_i} = f_{x_i}^0 \oplus f_{x_i}^1$.

Понятие производной функции по переменной распространяется индуктивно на множество переменных следующим образом:

$$\frac{\partial f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_s}} = \frac{\partial(\partial f / (\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{s-1}}))}{\partial x_{i_s}}.$$

Функция называется нечетной, если число наборов, на которых функция равна 1, является нечетным, и четной в противном случае.

Множество булевых функций P , содержащее тождественную функцию, называется наследственным, если для любой функции $f \in P$ любая остаточная функция $f_x^\sigma \in P$.

Множество булевых функций P называется инвариантным, если для любых функций $f(\tilde{y}, y), g(\tilde{v}) \in P$, где $\tilde{y} \cap \tilde{v} = \emptyset$, справедливо включение $f(\tilde{y}, g(\tilde{v})) \in P$.

2. Вспомогательные утверждения

При доказательстве основного результата будут использоваться следующие утверждения.

Предложение 1 ([9]). *Множество булевых функций P является наследственным и инвариантным тогда и только тогда, когда P есть множество всех бесповторных функций над некоторым базисом B .*

Следствие 1. *Если для наследственного, инвариантного множества булевых функций P и базиса B верно, что $B \subseteq P$ и $S_B \cap P = \emptyset$, то $P_B = P$.*

Таким образом, для доказательства того, что некоторое множество булевых функций P совпадает с множеством всех бесповторных функций над некоторым базисом B , достаточно показать, что P обладает свойствами наследственности и инвариантности, и проверить, что все слабоповторные в B функции не входят в P .

Предложение 2 ([11]). *Следующая система булевых функций является полной системой представителей классов эквивалентности по отношению обобщенной однотипности для булевых функций, слабоповторных в предэлементарном базисе $B_{2,n}$, где $n \geq 4$:*

$$\begin{aligned}
 & x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_3x_4, \\
 & x_1(x_2 \vee x_3x_4) \vee x_5(x_3 \vee x_2x_4), \\
 & x_1(x_2 \vee \dots \vee x_k) \vee x_2 \cdot \dots \cdot x_k, & k \geq 3, \quad k \neq n, \\
 & x_1(x_2 \vee x_3 \cdot \dots \cdot x_k) \vee x_2\bar{x}_3 \cdot \dots \cdot \bar{x}_k, & k \geq 3, \\
 & x_1 \cdot \dots \cdot x_k \vee \bar{x}_1 \cdot \dots \cdot \bar{x}_k, & k \geq 2, \\
 & \bar{x}_1g(x_2, \dots, x_{n+1}) \vee x_1x_2(x_3 \vee \dots x_{n+1}), \\
 & \bar{x}_1g(x_2, \dots, x_{n+1}) \vee x_1 \cdot \dots \cdot x_{n+1}, \\
 & \bar{x}_1g(x_2, \dots, x_{n+1}) \vee x_1x_2.
 \end{aligned}$$

3. Основной результат

В этом разделе будут получены критерии бесповторности булевых функций для предэлементарных монотонных базисов.

Функцию f будем называть n -нежесткой, где $n \geq 2$, если либо $\text{rank } f < 2$, либо для любого $x \in \rho(f)$ справедливо включение $f \in M_x$ и выполняется одно из условий:

- (1) $\delta(f) = \delta(f_x^0)$ и $\delta(f) \subsetneq \delta(f_x^1)$;
- (2) $\delta(f) = \delta(f_x^1)$ и $\delta(f) \subsetneq \delta(f_x^0)$;

(3) существуют $y_1, \dots, y_{n-1} \in \rho(f'_x)$ такие, что справедливо строгое включение

$$\delta(f'_x) \subsetneq \delta\left(\frac{\partial f'_x}{\partial y_1 \dots \partial y_{n-1}}\right)$$

и при $n = 4$ для любых i и j справедливо соотношение $\partial f'_x / \partial y_i \notin M_{y_j}$, где $1 \leq i, j \leq 3$ и $i \neq j$.

Функцию f будем называть наследственно n -нежесткой, если сама f и все ее остаточные функции являются n -нежесткими.

Теорема 1. Функция f бесповторна в базисе $B_{2,n}$ тогда и только тогда, когда она является наследственно $(n - 1)$ -нежесткой.

Доказательство. Для доказательства теоремы воспользуемся методом, основанным на предложении 1. Так как случай $n = 3$ рассмотрен в [2], будем считать, что $n \geq 4$.

Обозначим через P_{n-1} множество всех наследственно $(n - 1)$ -нежестких функций. Множество P_{n-1} является наследственным по определению, покажем его инвариантность.

Пусть $f(\tilde{u}, \tilde{v}) = g(\tilde{u}, h(\tilde{v}))$, где $g(\tilde{u}, y), h(\tilde{v}) \in P_{n-1}$. Если $\tilde{u} = \emptyset$ или $|\tilde{v}| = 1$, то функция f обобщенно однотипна с функцией g или h , поэтому является наследственно $(n - 1)$ -нежесткой. Далее считаем, что $\tilde{u} \neq \emptyset$ и $|\tilde{v}| > 1$.

1. Пусть $x \in \tilde{v}$. Если выполняется одно из строгих включений $\delta(h) \subsetneq \delta(h_x^0)$ или $\delta(h) \subsetneq \delta(h_x^1)$, то соответственно либо $\delta(f) \subsetneq \delta(f_x^0)$, либо $\delta(f) \subsetneq \delta(f_x^1)$. В противном случае найдутся переменные $x_1, \dots, x_{n-2} \in \rho(h'_x)$ такие, что

$$\delta(h'_x) \subsetneq \delta\left(\frac{\partial h'_x}{\partial x_1 \dots \partial x_{n-2}}\right).$$

Так как $f'_x = g'_y(\tilde{u}, y)h'_x(\tilde{v})$ и

$$\frac{\partial f'_x}{\partial x_1 \dots \partial x_{n-2}} = g'_y(\tilde{u}, y) \frac{\partial h'_x}{\partial x_1 \dots \partial x_{n-2}},$$

справедливо строгое включение

$$\delta(f'_x) \subsetneq \delta\left(\frac{\partial f'_x}{\partial x_1 \dots \partial x_{n-2}}\right).$$

2. Пусть $x \in \tilde{u}$. Если справедливо одно из строгих включений $\delta(g) \subsetneq \delta(g_x^0)$ или $\delta(g) \subsetneq \delta(g_x^1)$, то справедливость ровно одного из строгих включений $\delta(f) \subsetneq \delta(f_x^0)$ или $\delta(f) \subsetneq \delta(f_x^1)$ очевидна. В противном случае рассмотрим $f'_x = g'_x(\tilde{u}, h(\tilde{v}))$. Если для функции $g'_x(\tilde{u}, y)$ существуют переменные $x_1, \dots, x_{n-2} \in \rho(g'_x(\tilde{u}, y))$, отличные от y такие, что

$$\delta(g'_x) \subsetneq \delta\left(\frac{\partial g'_x}{\partial x_1 \dots \partial x_{n-2}}\right),$$

то справедливо строгое включение

$$\delta(f'_x) \subsetneq \delta\left(\frac{\partial f'_x}{\partial x_1 \dots \partial x_{n-2}}\right).$$

В противном случае существуют $y_1, \dots, y_{n-3} \in \rho(g'_x(\tilde{u}, y))$, отличные от y такие, что справедливо строгое включение

$$\delta(g'_x) \subsetneq \delta\left(\frac{\partial g'_x}{\partial y_1 \dots \partial y_{n-3} \partial y}\right).$$

Далее выберем произвольным образом существенную переменную $z \in \tilde{v}$ и рассмотрим равенство

$$\frac{\partial f'_x}{\partial y_1 \dots \partial y_{n-3} \partial z} = \frac{\partial g'_x}{\partial y_1 \dots \partial y_{n-3} \partial y} h'_z(\tilde{v}).$$

В силу того, что

$$\delta(g'_x) \subsetneq \delta\left(\frac{\partial g'_x}{\partial y_1 \dots \partial y_{n-3} \partial y}\right),$$

справедливо строгое включение

$$\delta(f'_x) \subsetneq \delta\left(\frac{\partial f'_x}{\partial y_1 \dots \partial y_{n-3} \partial z}\right).$$

Таким образом, доказано, что если для некоторой переменной $x \in \rho(f'_x)$ не выполняются условия

$$(1) \delta(f) = \delta(f_x^0) \text{ и } \delta(f) \subsetneq \delta(f_x^1),$$

$$(2) \delta(f) = \delta(f_x^1) \text{ и } \delta(f) \subsetneq \delta(f_x^0),$$

тогда существуют переменные $z_1, \dots, z_{n-2} \in \rho(f'_x)$ такие, что

$$\delta(f'_x) \subsetneq \delta\left(\frac{\partial f'_x}{\partial z_1 \dots \partial z_{n-3}}\right).$$

По ходу доказательства нетрудно заметить, что $\partial f'_x / \partial z_i \notin M_{z_j}$ при $n = 5$ для любых i и j , где $1 \leq i, j \leq 3$ и $i \neq j$.

Доказательство того, что $f \in M_x$ для любого x проводится аналогично случаю $n = 3$, рассмотренному в [2]. Таким образом, доказана инвариантность P_{n-1} .

Теперь для наследственного инвариантного множества P_{n-1} найдется порождающий его базис. Очевидно, что $B_{2,n} \subseteq P_{n-1}$. Проверим, что все слабоповторные функции в базисе $B_{2,n}$ не принадлежат P_{n-1} . Достаточно ограничиться проверкой функций из предложения 2, так как если свойство $(n-1)$ -нежесткости не выполняется для некоторой функции, то оно не выполняется и для всех обобщенно однотипных с ней функций.

(а) Пусть $f = x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_3x_4$. Тогда $f_{x_2}^0 = x_3(x_1 \vee x_4)$, $f_{x_2}^1 = x_1 \vee x_3x_4$, $f'_{x_2} = x_1\bar{x}_3$.

Множество $\rho(f'_{x_2}) = \{x_1, x_3\}$ и $\delta(f'_{x_2}) = \delta(\partial f'_{x_2} / \partial x_1)$, $\delta(f'_{x_2}) = \delta(\partial f'_{x_2} / \partial x_3)$, $\delta(f'_{x_2}) = \delta(\partial f'_{x_2} / \partial x_1 \partial x_3)$, поэтому $f \notin P_{n-1}$.

(б) Пусть $f = x_1(x_2 \vee x_3x_4) \vee x_5(x_3 \vee x_2x_4)$. Тогда $f_{x_1}^0 = x_5(x_3 \vee x_2x_4)$, $f_{x_1}^1 = x_2 \vee x_3(x_4 \vee x_5)$, $f'_{x_1} = x_2(\bar{x}_5 \vee \bar{x}_3\bar{x}_4) \vee \bar{x}_5x_3x_4$.

Легко видеть, что справедливы включения $f'_{x_1} \in M_{x_2}$ и $f'_{x_1} \in M_{x_5}$. Прямая проверка показывает, что существуют ровно три переменные $z_1, z_2, z_3 \in \rho(f'_{x_1})$ такие, что $\delta(f'_{x_1}) \subsetneq \delta(\partial f'_{x_1} / (\partial z_1 \partial z_2 \partial z_3))$, то есть одной из переменных является либо x_2 , либо x_5 . Но $f'_{x_1} \in M_{x_2}$ и $f'_{x_1} \in M_{x_5}$, поэтому $f \notin P_{n-1}$.

(в) Пусть $f = x_1 \dots x_k \vee \bar{x}_1 \dots \bar{x}_k$, где $k \geq 2$. Функция $f \notin P_{n-1}$, так как $f \notin M_{x_1}$.

(г) Пусть $f = x_1(x_2 \vee x_3 \dots x_k) \vee x_2\bar{x}_3 \dots \bar{x}_k$, где $k \geq 3$. Ситуация аналогична (в).

(д) Пусть $f = x_1(x_2 \vee \dots x_k) \vee x_2 \dots x_k$, где $k \geq 3$ и $k \neq n$. Тогда $f_{x_1}^0 = x_2 \dots x_k$, $f_{x_1}^1 = x_2 \vee \dots \vee x_k$, $f'_{x_1} = x_2 \dots x_k \vee \bar{x}_2 \dots \bar{x}_k$.

Легко заметить, что существуют ровно $k-2$ переменные $z_1, \dots, z_{k-2}$ такие, что $\delta(f'_{x_1}) \subsetneq \delta(\partial f'_{x_1} / \partial z_1 \dots \partial z_{k-2})$. Так как $k \neq n$, функция $f \notin P_{n-1}$.

(е) Пусть $f = \bar{x}_1 g(x_2, \dots, x_{n+1}) \vee x_1 x_2$. Так как $f_{x_1}^0 \not\subseteq f_{x_1}^1$ и $f_{x_1}^0 \not\subseteq_{x_1}^1$, то $f \notin M_{x_1}$, поэтому $f \notin P_{n-1}$.

(ж) Пусть $f = \bar{x}_1 g(x_2, \dots, x_{n+1}) \vee x_1 \dots x_{n+1}$. Тогда $f_{x_1}^0 = g(x_2, \dots, x_{n+1})$, $f_{x_1}^1 = x_2 \dots x_{n+1}$, $f'_{x_1} = g(x_2, \dots, x_{n+1}) \oplus x_2 \dots x_{n+1}$.

Функция $g(x_2, \dots, x_{n+1})$ является четной, причем в ее совершенной дизъюнктивной нормальной форме есть конъюнкция $x_2 \dots x_{n+1}$, поэтому функция f'_{x_1} нечетна, то есть существенна. Очевидно, что производная нечетной функции по любой переменной есть нечетная функция, поэтому $f \notin P_{n-1}$.

(з) Пусть $f = \bar{x}_1 g(x_2, \dots, x_{n+1}) \vee x_1 x_2 (x_3 \vee \dots \vee x_{n+1})$. Тогда $f_{x_1}^0 = g(x_2, \dots, x_{n+1})$, $f_{x_1}^1 = x_2 (x_3 \vee \dots \vee x_{n+1})$, $f'_{x_1} = g(x_2, \dots, x_{n+1}) \oplus x_2 (x_3 \vee \dots \vee x_{n+1}) = \bar{x}_2 x_3 \dots x_{n+1}$.

Функция f'_{x_1} является нечетной. Ситуация аналогична случаю (е).

Таким образом, $S_{B_{2,n}} \cap P_{n-1} = \emptyset$, $B_{2,n} \subseteq P_{n-1}$. Теорема доказана.

Список литературы

1. Винокуров С. Ф., Перязев Н. А., *Избранные вопросы теории булевых функций*. Физматлит, Москва, 2001.
2. Перязев Н. А., Шаранхаев И. К., Критерии неповторности булевых функций в предэлементарных базисах ранга 3. *Дискретная математика* (2005) **17**, №2, 127–138.
3. Черухин Д. Ю., Алгоритмический критерий сравнения булевых базисов. *Матем. вопр. киберн.* (1999) **8**, 77–122.
4. Стеценко В. А., О предплохих базисах в P_2 . *Матем. вопр. киберн.* (1992) **4**, 139–177.
5. Субботовская Б. А., О сравнении базисов при реализации функций алгебры логики формулами. *Докл. АН СССР* (1963) **149**, №4, 784–787.
6. Гуревич В. А., Критерии неповторности функций алгебры логики. *Докл. АН СССР* (1991) **318**, №3, 532–537.
7. Перязев Н. А., Реализация булевых функций неповторными формулами в некоторых базисах. В сб.: *Алгебра, логика и приложения*, Иркутск, 1994, с. 134–154.
8. Перязев Н. А., Реализация булевых функций неповторными формулами. *Дискретная математика* (1995) **7**, №3, 61–68.
9. Кириченко К. Д., О критериях неповторности булевых функций в различных базисах. *Оптимизация, управление, интеллект* (2000) **4**, 83–101.
10. Шаранхаев И. К., О представлении булевых функций неповторными формулами в некоторых симметрических базисах. *Вестник Бурятского гос. ун-в. Сер. матем., информ., физ., техн.* (2007) **6**, 53–56.
11. Кириченко К. Д., Слабовповторные булевы функции в некоторых предэлементарных базисах. В сб.: *Дискретная математика и информатика*, **13**. Изд-во Иркутского ун-в., Иркутск, 2000.

Статья поступила 19.09.2006.

Переработанный вариант поступил 15.10.2007.