Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. П. Горшков, А. В. Тарасов, О максимальных группах инвариантных преобразований мультиаффинных, биюнктивных, слабо положительных и слабо отрицательных булевых функций, *Дискрет. матем.*, 2009, том 21, выпуск 2, 94–101

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1049>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 15:28:59

О максимальных группах инвариантных преобразований мультиаффинных, биюнктивных, слабо положительных и слабо отрицательных булевых функций

© 2009 г. С. П. Горшков, А. В. Тарасов

В работе изучаются некоторые свойства мультиаффинных, биюнктивных, слабо положительных и слабо отрицательных булевых функций. Доказаны следующие результаты: для любого целого $k \geq 1$ максимальной группой преобразований области определения функций от k переменных, относительно которых множество мультиаффинных булевых функций инвариантно, является полная аффинная группа $AGL(k, 2)$; для биюнктивных функций при $k \geq 3$ — группа преобразований, каждое из которых есть комбинация перестановки и инверсии переменных функций; а для слабо положительных (слабо отрицательных) функций при $k \geq 2$ — группа преобразований, каждое из которых есть перестановка переменных функций.

1. Введение

Булева функция $f(x_1, \dots, x_k)$ называется

- (1) мультиаффинной, если существует представление f в виде

$$f(x_1, \dots, x_k) \equiv \bigwedge_{i=1}^t (a_{i1}x_1 \oplus \dots \oplus a_{ik}x_k \oplus a_{i0}), \quad (1)$$

где $a_{ij} \in \{0, 1\}$, $i = 1, \dots, t$, $j = 0, 1, \dots, k$, $1 \leq t \leq k$;

- (2) биюнктивной, если $f \equiv 1$ или существует представление функции f в виде конъюнктивной нормальной формы (КНФ)

$$f(x_1, \dots, x_k) \equiv \left(\bigwedge_{i=1}^t x_{s_i}^{\alpha_i} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j=1}^q \left(x_{r_{j1}}^{\beta_{j1}} \vee x_{r_{j2}}^{\beta_{j2}} \right) \right), \quad (2)$$

где $\alpha_i, \beta_{j1}, \beta_{j2} \in \{0, 1\}$, $s_i, r_{j1}, r_{j2} \in \{1, \dots, k\}$, $i = 1, \dots, t$, $j = 1, \dots, q$;

- (3) слабо положительной, если $f \equiv 1$ или существует представление f в виде КНФ

$$f(x_1, \dots, x_k) \equiv \bigwedge_{i=1}^t (x_{r_{i1}}^{\alpha_i} \vee x_{r_{i2}} \vee \dots \vee x_{r_{ik_i}}), \quad (3)$$

где $\alpha_i \in \{0, 1\}$, $k_i \leq k$, $r_{ij} \in \{1, \dots, k\}$, $i = 1, \dots, t$, $j = 1, \dots, k_i$;

(4) слабо отрицательной, если $f \equiv 1$ или существует представление f в виде КНФ

$$f(x_1, \dots, x_k) \equiv \bigwedge_{i=1}^t (x_{r_{i1}}^{\alpha_i} \vee \bar{x}_{r_{i2}} \vee \dots \vee \bar{x}_{r_{ik_i}}), \quad (4)$$

где $\alpha_i \in \{0, 1\}$, $k_i \leq k$, $r_{ij} \in \{1, \dots, k\}$, $i = 1, \dots, t$, $j = 1, \dots, k_i$.

Множества всех мультиаффинных, бионктивных, слабо положительных, слабо отрицательных функций обозначим, соответственно, A , Bi , WP , WN . Функции из классов (1)–(4), зависящие от k переменных, обозначим A_k , Bi_k , WP_k , WN_k .

В [1, 2] показано, что мультиаффинные, бионктивные, слабо положительные и слабо отрицательные функции порождают полиномиально решаемые классы систем булевых уравнений без ограничений на выбор неизвестных (такие классы также называют классами систем с ограничениями на выбор функций и без ограничений на выбор неизвестных). В работах [1–5] исследованы некоторые свойства указанных функций. В данной статье изучаются максимальные группы инвариантных преобразований мультиаффинных, бионктивных, слабо положительных и слабо отрицательных булевых функций.

Пусть $\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел; $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$; B_k — множество двоичных k -мерных векторов; $B_k^{(i)} = \{\alpha \in B_k \mid \|\alpha\| = i\}$, где $i \in \{0, 1, \dots, k\}$ (слой векторов веса i); F_k — множество булевых функций от $k \in \mathbf{N}_0$ переменных; $\text{Sym}(n)$ — симметрическая группа степени n ; S_{2^k} — симметрическая группа перестановок на множестве B_k , изоморфная $\text{Sym}(2^k)$; $\tilde{S}_k$ — симметрическая группа перестановок координат векторов из B_k , подгруппа S_{2^k} , изоморфная $\text{Sym}(k)$; Σ_k — группа сдвигов, она является подгруппой $\text{Sym}(2^k)$, состоит из преобразований $\tau_\beta(x) = x \oplus \beta$, где $x, \beta \in B_k$; $\oplus$ — покомпонентное сложение по модулю 2; Q_k — группа Джевонса, являющаяся полупрямым произведением групп $\tilde{S}_k$ и Σ_k , она состоит из преобразований вида $s_{\pi\beta}(x) = \tau_\beta(\pi(x))$, где $\tau_\beta \in \Sigma_k$, $\pi \in \tilde{S}_k$; $AGL(k, 2)$ — полная аффинная группа преобразований пространства B_k , где каждый элемент $T \in AGL(k, 2)$ имеет вид $T = \tau_\beta(l(x))$, $\tau_\beta \in \Sigma_k$, а l — невырожденное линейное преобразование пространства B_k .

Двоичный вектор $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ назовем выполняющим вектором функции $f(x_1, \dots, x_k)$, если $f(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = 1$. Множество всех выполняющих векторов функции f обозначим E_f .

Для произвольной булевой функции $f \in F_k$ с множеством выполняющих векторов E_f и $s \in S_{2^k}$ пусть f^s — булева функция с множеством выполняющих векторов $s(E_f)$.

Если $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)$ — двоичные векторы, $f(x_1, \dots, x_k)$ — булева функция, то полагаем

$$\begin{aligned} \alpha \vee \beta &= (\alpha_1 \vee \beta_1, \dots, \alpha_k \vee \beta_k), \\ \alpha \wedge \beta &= (\alpha_1 \wedge \beta_1, \dots, \alpha_k \wedge \beta_k). \end{aligned}$$

Рассмотрим следующие свойства (см. [1, 3]).

Свойство 1 (критерий бионктивности). Функция $f(x_1, \dots, x_k)$ является бионктивной, если и только если для любых трех выполняющих векторов $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subseteq E_f$ этой функции справедливо включение $(\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma) \in E_f$.

Свойство 2 (критерий слабой положительности). Функция $f(x_1, \dots, x_k)$ является слабо положительной, если и только если для любых двух выполняющих векторов $\{\alpha, \beta\} \subseteq E_f$ этой функции справедливо включение $\alpha \vee \beta \in E_f$.

Свойство 3 (критерий слабой отрицательности). Функция $f(x_1, \dots, x_k)$ является слабо отрицательной, если и только если для любых двух выполняющих векторов $\{\alpha, \beta\} \subseteq E_f$ этой функции справедливо включение $\alpha \wedge \beta \in E_f$.

Пусть $M_k \subseteq F_k, k \in \mathbf{N}$. Максимальную группу преобразований области определения булевых функций от k переменных, относительно которых множество функций M_k инвариантно, обозначим символом G_{M_k} , то есть

$$G_{M_k} = \{s \in S_{2^k} : f^s \in M_k \text{ для всех } f \in M_k\}.$$

Булеву функцию $f \in F_k$ называем равновероятной, если ее вес равен 2^{k-1} .

Рассматривая подстановку $s \in S_{2^k}$ как вектор-функцию из B_k в B_k , обозначим ее координатные функции через $s_1, \dots, s_k$, то есть $s = (s_1, \dots, s_k)$. Поскольку s — подстановка на B_k , все координатные функции $s_1, \dots, s_k$ являются равновероятными.

2. Максимальная группа инвариантных преобразований множества мультиаффинных функций

Лемма 1. Для произвольной функции $f \in F_k$ и подстановки $s \in S_{2^k}$ верно равенство

$$f^s(x_1, \dots, x_k) = f(s^{-1}(x_1, \dots, x_k)).$$

Доказательство. В самом деле,

$$f^s(x) = 1 \iff x \in s(E_f).$$

С другой стороны,

$$f(s^{-1}(x)) = 1 \iff s^{-1}(x) \in E_f \iff x \in s(E_f).$$

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $M_k \subseteq F_k$ — класс булевых функций от k переменных, содержащий функции $f_i(x_1, \dots, x_k) = x_i, g_i(x_1, \dots, x_k) = \bar{x}_i, i \in \{1, \dots, k\}, s \in G_{M_k}$. Тогда координатные функции $s_1, \dots, s_k$ подстановки s удовлетворяют следующим условиям:

$$(1) \ s_1, \dots, s_k \in M_k.$$

$$(2) \ \bar{s}_1, \dots, \bar{s}_k \in M_k.$$

Доказательство. Для $i \in \{1, \dots, k\}$ рассмотрим функции f_i, g_i . Так как $s \in G_{M_k}$, справедливо включение $s^{-1} \in G_{M_k}$. В этом случае функции $f_i^{s^{-1}}, g_i^{s^{-1}} = \bar{f}_i^{s^{-1}}$ также лежат в M_k . По лемме 1, $f_i^{s^{-1}} = s_i, g_i^{s^{-1}} = \bar{s}_i$, откуда следует утверждение леммы.

Теорема 1. Справедливо соотношение $G_{A_k} = AGL(k, 2)$.

Доказательство. Включение $AGL(k, 2) \subseteq G_{A_k}$ очевидно. Пусть L_k — класс аффинных функций от k переменных и $s = (s_1, \dots, s_k) \in G_{A_k}$. Тогда, по лемме 2, $s_1, \dots, s_k \in A_k$ и $s_1, \dots, s_k$ равновероятны. Следовательно, $s_i \in L_k, i = 1, 2, \dots, k$. Таким образом, s — подстановка, все координатные функции которой являются аффинными. Следовательно, $s \in AGL(k, 2)$. Теорема доказана.

Замечание 1. Приведем другое доказательство теоремы 1, которое принадлежит А. В. Черемушкину. Справедливость включения $AGL(k, 2) < G_{A_k}$ очевидна. Если $k \leq 2$, то $G_{A_k} = AGL(k, 2) = S_{2^k}$. При $k \geq 3$ группа $AGL(k, 2)$ является максимальной подгруппой S_{2^k} [6]. Если бы $G_{A_k} = S_{2^k}$, то множество мультиаффинных функций от $k \geq 3$ переменных содержало все равновероятные функции, а это не так. Поэтому $G_{A_k} = AGL(k, 2)$.

3. Максимальная группа инвариантных преобразований множества биюнктивных функций

При $k \leq 2$ справедливо равенство $G_{Bi_k} = S_{2^k}$, поскольку все булевы функции от $k \leq 2$ переменных являются биюнктивными.

Функция $f \in Bi_k$ называется дважды биюнктивной, если $\bar{f} \in Bi_k$. В [2] рассмотрены дважды биюнктивные функции и показано, что они существенно зависят не более, чем от 4 переменных. При этом равновероятные дважды биюнктивные функции исчерпываются следующими классами геометрической эквивалентности (класс эквивалентности булевых функций относительно перестановки переменных, навешивания отрицания на переменные и инвертирования всей функции): $[x_1]$, $[x_1 \oplus x_2]$, $[(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3)(x_2 \vee x_3)]$, $[(x_1 \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee x_3)]$, $[(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3)(x_2 \vee x_4)]$.

Множество дважды биюнктивных функций от k переменных обозначим $2Bi_k$, а множество равновероятных функций из $2Bi_k$ обозначим $2Bi'_k$.

Лемма 3. Если $s \in G_{Bi_k}$, то функции $s_1, \dots, s_k$ являются равновероятными дважды биюнктивными функциями.

Доказательство. Легко видеть, что если $s \in G_{Bi_k}$, то $s \in G_{2Bi'_k}$, поэтому $G_{Bi_k} < G_{2Bi'_k}$. Тогда, согласно лемме 2, для $s = (s_1, \dots, s_k)$ справедливы включения $s_1, \dots, s_k \in 2Bi'_k$. Лемма доказана.

Ясно, что $Q_k < G_{Bi_k}$, поэтому для $s \in G_{Bi_k}$ включение $s \in Q_k$ выполняется тогда и только тогда, когда $s^{-1} \in Q_k$. При этом, если все координатные функции подстановки s существенно зависят ровно от одной переменной, то эта подстановка лежит в Q_k . Биективность отображения s влечет также следующий факт: для любых $1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq k$ вектор-функция $s_{i_1 \dots i_l}(x_1, \dots, x_k) = (s_{i_1}(x_1, \dots, x_k), \dots, s_{i_l}(x_1, \dots, x_k))$ существенно зависит не менее чем от l переменных. Пусть $I(f)$ — множество существенных переменных функции f .

Лемма 4. Пусть $k \geq 3, s \in G_{Bi_k}$, и все функции $s_1, \dots, s_k$ существенно зависят не более чем от двух переменных. Тогда функции $s_1, \dots, s_k$ существенно зависят от одной переменной и $s \in Q_k$.

Доказательство. Поскольку $s \in G_{Bi_k}$, справедливо включение $s^{-1} \in G_{Bi_k}$. Функции $s_1, \dots, s_k$ существенно зависят не более чем от двух переменных и в силу леммы 3 являются равновероятными дважды биюнктивными функциями, поэтому они являются аффинными функциями, существенно зависящими не более чем от двух переменных. Предположим, что среди k указанных функций l функций существенно зависят от одной переменной, а $k - l$ — от двух переменных. Без ограничения общности будем считать, что

$$s_1 = x_{i_1} \oplus a_1, \dots, s_l = x_{i_l} \oplus a_l, \\ s_{l+1} = x_{j_{1,1}} \oplus x_{j_{1,2}} \oplus a_{l+1}, \dots, s_k = x_{j_{k-l,1}} \oplus x_{j_{k-l,2}} \oplus a_k.$$

Поскольку s — подстановка, все координатные функции которой являются аффинными функциями, соответствующая матрица должна быть невырожденной.

Рассмотрим функции $s_m, s_n, 1 \leq m < n \leq k$. Пусть $|I(s_m) \cup I(s_n)| \geq 3$ для некоторых m, n . Если $I(s_m) \cap I(s_n) = \emptyset$, то, рассмотрев функции $f(x_1, \dots, x_k) = x_m \oplus x_n \in Bi_k$, $f^{s^{-1}} = s_m \oplus s_n$, легко показать, что $f^{s^{-1}} \notin Bi_k$. В самом деле, в указанном случае либо $f^{s^{-1}} = x_{p_1} \oplus x_{p_2} \oplus x_{p_3} \oplus b$, либо $f^{s^{-1}} = x_{p_1} \oplus x_{p_2} \oplus x_{p_3} \oplus x_{p_4} \oplus b$ для подходящих $1 \leq p_1, \dots, p_4 \leq k, b \in \{0, 1\}$. Указанные функции не являются бионктивными и лемма верна.

Если же $|I(s_m)| = |I(s_n)| = 2$ и $I(s_m) \cap I(s_n) \neq \emptyset$, то $|I(s_m) \cap I(s_n)| = 1$. Рассмотрим функцию $f = x_m \vee x_n$. Тогда $f^{s^{-1}} = (x_{p_1} \oplus x_{p_2} \oplus b_1) \vee (x_{p_2} \oplus x_{p_3} \oplus b_2)$ для некоторых $1 \leq p_1, p_2, p_3 \leq k, b_1, b_2 \in \{0, 1\}$. Без ограничения общности будем считать, что $p_1 = 1, p_2 = 2, p_3 = 3$. Тогда $f^{s^{-1}} = (x_1 \oplus x_2 \oplus b_1) \vee (x_2 \oplus x_3 \oplus b_2)$. Эта функция бионктивна тогда и только тогда, когда бионктивна функция $g = f^{s^{-1}}(x_1 \oplus b_1, x_2, x_3 \oplus b_2) = (x_1 \oplus x_2) \vee (x_2 \oplus x_3)$. Рассмотрим выполняющие векторы $a = (0010 \dots 0), b = (0100 \dots 0), c = (1000 \dots 0)$ функции g . Вектор $d = ab \vee ac \vee bc = (000 \dots 0) \notin E_g$. Следовательно, функция $f^{s^{-1}}$ также не является бионктивной. Таким образом, случай $|I(s_m) \cap I(s_n)| \geq 3$ невозможен.

Остался случай, когда для всех $m, n, 1 \leq m < n \leq k$,

$$|I(s_m) \cup I(s_n)| = 2, \quad |I(s_m)| + |I(s_n)| \leq 3. \quad (5)$$

Поэтому для всех $1 \leq m < n \leq k$ выполняется одно из условий $|I(s_m)| = |I(s_n)| = 1$ или $|I(s_m)| = 1, |I(s_n)| = 2, I(s_m) \subset I(s_n)$.

Пусть $|I(s_m)| = 1, |I(s_n)| = 2, I(s_m) \subset I(s_n)$ для некоторых m, n . Без ограничения общности считаем, что $m = 1, n = 2, I(s_1) = \{x_1\}, I(s_2) = \{x_1, x_2\}$. Тогда в силу того, что $k \geq 3$, существует функция s_j , существенно зависящая от переменной $x_i \notin \{x_1, x_2\}$. В этом случае $|I(s_2) \cup I(s_j)| \geq 3$, что противоречит условию (5).

Если же $|I(s_m)| = |I(s_n)| = 1$ для всех $1 \leq m, n \leq k$, то лемма верна, так как в этом случае $s \in Q_k$, а значит, $s^{-1} \in Q_k$. Лемма доказана.

Лемма 5. Для любых различных векторов $a, b, c, d \in B_k, k \geq 3$, таких, что $d \neq ab \vee ac \vee bc$, найдется такая функция $f \in Bi_k$, что $f(a) = f(b) = f(c) = 1$, но $f(d) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $f \in Bi_k$ такую, что множество E_f содержит все различные векторы из векторов $a, b, c, ab \vee ac \vee bc$. Тогда $3 \leq \|f\| \leq 4, d \notin E_f$. Следовательно, $f(a) = f(b) = f(c) = 1$ и $f(d) = 0$. Лемма доказана.

Лемма 6. Пусть в подстановке $s \in G_{Bi_k}$ координатная функция $s_i, i \in \{1, \dots, k\}$, существенно зависит от трех переменных. Тогда найдутся такие три вектора $a, b, c \in B_k$, что $ab \vee ac \vee bc \notin \{a, b, c\}, s(a)s(b) \vee s(a)s(c) \vee s(b)s(c) \neq s(ab \vee ac \vee bc)$.

Доказательство. Функция s_i является дважды бионктивной равновероятной, существенно зависящей от 3 переменных, поэтому $s_i \in [(x_1 \vee x_2)(x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_3)]$ или $s_i \in [(x_1 \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee x_3)]$. Без ограничения общности будем считать, что $i = 1$ и либо $s_1 = (x_1 \vee x_2)(x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_3)$, либо $s_1 = (x_1 \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee x_3)$. Следующие рассуждения верны в обоих случаях. Положим $a = (1010 \dots 0), b = (0110 \dots 0), c = (0000 \dots 0)$. Тогда $ab \vee ac \vee bc = (0010 \dots 0) \notin \{a, b, c\}$. Поэтому $(s(ab \vee ac \vee bc))_1 = s_1(ab \vee ac \vee bc) = 0$. С другой стороны, выполнены равенства $(s(a))_1 = 1, (s(b))_1 = 1, (s(c))_1 = 0$, откуда следует, что $(s(a)s(b) \vee s(a)s(c) \vee s(b)s(c))_1 = 1$. Следовательно, $s(a)s(b) \vee s(a)s(c) \vee s(b)s(c) \neq s(ab \vee ac \vee bc)$. Лемма доказана.

Лемма 7. Пусть в подстановке s координатная функция s_i , $i \in \{1, \dots, k\}$, существенно зависит от четырех переменных. Тогда найдутся такие три вектора $a, b, c \in B_k$, что $ab \vee ac \vee bc \notin \{a, b, c\}$, $s(a)s(b) \vee s(a)s(c) \vee s(b)s(c) \neq s(ab \vee ac \vee bc)$.

Доказательство. Доказательство данной леммы аналогично доказательству леммы 6. Поскольку s_i — дважды бионктивная равновероятная функция, существенно зависящая от 4 переменных, справедливо включение $s_i \in [(x_1 \vee x_2)(x_2 \vee x_3)(x_3 \vee x_4)]$. Без ограничения общности будем считать, что $i = 1$, $s_1 = (x_1 \vee x_2)(x_2 \vee x_3)(x_3 \vee x_4)$. Положим $a = (01010 \dots 0)$, $b = (10110 \dots 0)$, $c = (00000 \dots 0)$. Тогда $ab \vee ac \vee bc = (00010 \dots 0)$. Поэтому $(s(ab \vee ac \vee bc))_1 = 0$. С другой стороны, $(s(a))_1 = 1$, $(s(b))_1 = 1$, $(s(c))_1 = 0$, откуда следует, что $(s(a)s(b) \vee s(a)s(c) \vee s(b)s(c))_1 = 1$. Следовательно, $s(a)s(b) \vee s(a)s(c) \vee s(b)s(c) \neq s(ab \vee ac \vee bc)$. Лемма доказана.

После рассмотрения предварительных лемм, можно перейти к доказательству основной теоремы.

Теорема 2. При $k \geq 3$ выполнено равенство $G_{B_{i_k}} = Q_k$.

Доказательство. Включение $Q_k \subseteq G_{B_{i_k}}$ очевидно. Пусть теперь $s \in G_{B_{i_k}}$, но $s \notin Q_k$. Если $s = (s_1, \dots, s_k)$ — покоординатная запись подстановки s , то среди функций $s_1, \dots, s_k$ должны найтись функции, существенно зависящие более чем от одной переменной. Кроме того, по лемме 3 функции $s_1, \dots, s_k$ являются равновероятными дважды бионктивными функциями. Следовательно, каждая из функций $s_1, \dots, s_k$ существенно зависит не более чем от 4 переменных.

Если все функции $s_1, \dots, s_k$ существенно зависят не более чем от двух переменных, то $s^{-1} \in Q_k$ по лемме 4, следовательно, $s \in Q_k$, что противоречит исходному предположению. Пусть среди функций $s_1, \dots, s_k$ есть функции, существенно зависящие от 3 или 4 переменных. Для этого случая воспользуемся леммами 6 и 7. Пусть $a, b, c \in B_k$ — векторы такие, что $s(a)s(b) \vee s(a)s(c) \vee s(b)s(c) \neq s(ab \vee ac \vee bc)$. Пусть g — бионктивная функция такая, что $E_g = \{a, b, c, ab \vee ac \vee bc\}$. Тогда, по лемме 1, $E_{g^{s^{-1}}} = s(E_g) = \{s(a), s(b), s(c), s(ab \vee ac \vee bc)\}$. При этом $s(a)s(b) \vee s(a)s(c) \vee s(b)s(c) \neq s(ab \vee ac \vee bc)$. Если $s(a)s(b) \vee s(a)s(c) \vee s(b)s(c) \notin \{s(a), s(b), s(c)\}$, то функция $g^{s^{-1}}$ не бионктивна. Следовательно, $s(a)s(b) \vee s(a)s(c) \vee s(b)s(c) \in \{s(a), s(b), s(c)\}$. Но тогда функция $h: E_h = \{s(a), s(b), s(c)\}$ бионктивна. Следовательно, бионктивной будет и функция $h^s: E_{h^s} = \{a, b, c\}$, откуда следует включение $ab \vee ac \vee bc \in \{a, b, c\}$, противоречащее условиям использованных лемм 6 и 7. Полученные противоречия доказывают теорему.

4. Максимальная группа инвариантных преобразований множества слабо положительных (слабо отрицательных) функций

При $k = 1$ справедливо равенство $G_{WP_1} = S_{2^1}$, поскольку все булевы функции от одного переменного являются слабо положительными.

Всякой подстановке $r = \begin{pmatrix} 1 & \dots & k \\ r_1 & \dots & r_k \end{pmatrix} \in \text{Sym}(k)$ сопоставим подстановку $s_r \in S_{2^k}$ по следующему правилу: для любого вектора $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in B_k$

$$s_r(\alpha) = (\alpha_{r_1}, \dots, \alpha_{r_k}) \quad (6)$$

При этом

$$\tilde{S}_k = \{s_r \in S_{2^k} \mid r \in \text{Sym}(k)\}.$$

Теорема 3. При $k \geq 2$ выполняется равенство $G_{WP_k} = \tilde{S}_k$.

Доказательство. Для любой подстановки $s \in S_{2^k}$ и любой функции $f \in F_k$ выполняется равенство $\|f\| = \|f^s\|$, где $\|f\|$ — вес функции f .

Включение $G_{WP_k} \supseteq \tilde{S}_k$ очевидно. Докажем обратное включение $G_{WP_k} \subseteq \tilde{S}_k$.

Пусть $f \in WP_k$, $\|f\| = 2^k - 1$. Тогда функция f имеет вид

$$f \equiv x_1 \vee \dots \vee x_{j-1} \vee x_j^\beta \vee x_{j+1} \vee \dots \vee x_k, \quad (7)$$

где $j \in \{1, \dots, k\}$, $\beta \in \{0, 1\}$. Множество функций вида (7) обозначим F' . Поскольку при любом преобразовании $s \in G_{WP_k}$ сохраняется вес функции, $f^s \in F'$ для всякой функции $f \in F'$, то есть справедливо следующее свойство: для любой подстановки $s \in G_{WP_k}$, для любого элемента $\alpha \in B_k^{(0)} \cup B_k^{(1)}$ выполняется соотношение $s(\alpha) \in B_k^{(0)} \cup B_k^{(1)}$.

Покажем, что для любой подстановки $s \in G_{WP_k}$ верно равенство $s(0_k) = 0_k$, где $0_k = (0, \dots, 0) \in B_k$. Предположим противное, то есть предположим, что найдется $s \in G_{WP_k}$ такая, что $s(0_k) \in B_k^{(1)}$. Для простоты записи положим $s(0_k) = (1, 0, \dots, 0)$. Введем обозначение $\alpha^{(1)} = (1, 0, \dots, 0)$.

Из критерия слабой положительности следует, что функция f веса 2 такая, что $\|f\| = 2$, $E_f = \{\alpha', \alpha''\}$, является слабо положительной, если и только если

$$\alpha' < \alpha'' \quad \text{или} \quad \alpha'' < \alpha'. \quad (8)$$

Ясно, что функция f_1 веса 2, для которой $E_{f_1} = \{0_k, \alpha^{(1)}\}$, является слабо положительной. Рассмотрим функцию f_1^s , для которой $E_{f_1^s} = \{\alpha^{(1)}, s(\alpha^{(1)})\}$. Если $s(\alpha^{(1)}) \neq 0_k$, то $f_1^s \notin WP$. Далее считаем, что $s(\alpha^{(1)}) = 0_k$.

Так как $k \geq 2$, среди функций WP_k имеется слабо положительная функция веса 2 с множеством выполняющих векторов $\{(0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0)\}$. Эту функцию обозначим f_2 . Из приведенных выше свойств следует, что $s(0_k) = \alpha^{(1)} \in B_k^{(1)}$, $s(010 \dots 0) \in B_k^{(1)}$, поэтому $f_2^s \notin WP$. Пришли к противоречию с предположением, что $s(0_k) \in B_k^{(1)}$. Поэтому $s(0_k) = 0_k$ для любого $s \in G_{WP_k}$.

По доказанному выше для любого $s \in G_{WP_k}$ множество $s(B_k^{(1)})$ есть перестановка элементов $B_k^{(1)}$. Для всякого преобразования $s \in G_{WP_k}$ определим подстановку $r \in \text{Sym}(k)$ по правилу $r = \begin{pmatrix} 1 & \dots & k \\ r_1 & \dots & r_k \end{pmatrix} \in \text{Sym}(k)$, где $r_i, i \in \{1, \dots, k\}$, равно номеру единицы в векторе $s(0, \dots, 0, 1, \dots, 0)$. Докажем, что

$$s = s_i \quad (9)$$

(см. (6)). Предположим противное, то есть предположим, что $s \neq s_i$. Выберем вектор $\alpha^{(2)} \in B_k$ с минимальным весом такой, что

$$s(\alpha^{(2)}) \neq s_r(\alpha^{(2)}). \quad (10)$$

Ясно, что $\|\alpha^{(2)}\| \geq 2$. Если имеется несколько векторов с весом $\|\alpha^{(2)}\|$, для которых справедливо (10), то выберем любой их них.

Пусть $\|\alpha^{(2)}\| = t$. Рассмотрим слабо положительную функцию $f_3 \in WP_k$ веса $\|f_3\| = 2^t$, множество E_{f_3} выполняющих векторов которой равно

$$E_{f_3} = \{\alpha \in B_k \mid \alpha \leq \alpha^{(2)}\}.$$

Для функции f_3^s выполняются соотношения $s(\alpha) = s_r(\alpha) \in E_{f_3^s}$, если $\alpha < \alpha^{(2)}$, и $\|f_3^s\| = 2^t$. Поскольку $f_3 \in WP_k$, должны выполняться равенства

$$\left(\bigvee_{\alpha < \alpha^{(2)}} s(\alpha) \right) = \left(\bigvee_{\alpha < \alpha^{(2)}} s_r(\alpha) \right) = s_r(\alpha^{(2)}) \in E_{f_3^s},$$

ввиду (10) получаем, что $\|f_3^s\| \geq 2^t + 1$. Пришли к противоречию с тем, что $\|f_3^s\| = 2^t$, поэтому верны соотношения (9) и (7). Следовательно $G_{WP_k} = \tilde{S}_k$. Теорема доказана.

Введем обозначение

$$G_{WN_k} = \{s \in S_{2^k} : \forall f \in WN_k \ f^s \in WN_k\}.$$

Теорема 4. При $k \geq 2$ выполняется равенство $G_{WP_k} = \tilde{S}_k$.

Для доказательства теоремы достаточно воспользоваться теоремой 3 и тем, что функция $f(x_1, \dots, x_k)$ является слабо отрицательной, если и только если $f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k) \in WP$.

Список литературы

1. Schaefer T. J., Complexity of satisfiability problems. In: *Proc. 10th STOC Conf.* ACM Press, 1978, pp. 216–226.
2. Горшков С. П., Применение теории NP -полных задач для оценки сложности решения систем булевых уравнений. *Обзорение прикладной и промышленной математики* (1995) **2**, №3, 325–398.
3. Гизунов С. А., Носов В. А., О классификации всех булевых функций четырех переменных по классам Шефера. *Обзорение прикладной и промышленной математики* (1995) **2**, №3, 440–467.
4. Тарасов А. В., О свойствах функций, представимых в виде 2-КНФ. *Дискретная математика* (2001) **13**, №4, 99–115.
5. Горшков С. П., О сложности распознавания мультиаффинности, бионктивности, слабой положительности и слабой отрицательности булевых функций. *Обзорение прикладной и промышленной математики* (1997) **4**, №2, 216–237.
6. Погорелов Б. А., О максимальных подгруппах симметрических групп, заданных на проективных пространствах над конечным полем. *Матем. заметки* (1977) **16**, №1, 91–100.

Статья поступила 20.03.2007.