Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Вороненко, О длине проверяющего теста для бес-
повторных функций в базисе $\{0, 1, \&, \vee, \neg\}$, *Дискрет. ма-
тем.*, 2005, том 17, выпуск 2, 139–143

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm105>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подра-
зумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 17:39:11

О длине проверяющего теста для неповторных функций в базисе $\{0, 1, \&, \vee, \neg\}$

© 2005 г. А. А. Вороненко

Получены линейные верхняя и нижние оценки для функции Шеннона длины проверяющего теста для неповторных функций в базисе $\{0, 1, \&, \vee, \neg\}$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 04-01-00359 и 05-01-01000.

В настоящей работе рассматривается следующая задача: для заданной булевой функции, выразимой неповторной формулой в базисе $\{0, 1, \&, \vee, \neg\}$ и существенно зависящей от переменных $x_1, \dots, x_n$, требуется построить проверяющий тест на множестве всех неповторных в этом базисе функций, существенно зависящих от некоторых переменных из множества $\{x_1, \dots, x_n\}$. В [1] обоснован выбор именно такой постановки тестовой задачи и приведены достаточно простые доказательства вырожденности ряда других естественных постановок. В той же статье получена оценка функции Шеннона $T(n)$ для длины (количества наборов) проверяющего теста для неповторных функций в базисе $\{0, 1, \&, \vee, \neg, \oplus\}$ или что то же самое, в базисе всех функций, зависящих не более, чем от двух переменных:

$$\frac{n(n+1)}{2} + 1 \leq T(n) \leq 2n(n-1),$$

где $n \geq 2$. В настоящей работе мы покажем, что для любой неповторной функции в базисе $\{0, 1, \&, \vee, \neg\}$ существует проверяющий тест линейной длины. Нетрудно доказать следующий факт.

Предложение 1. Любая булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$ с $n \geq 1$, существенно зависящая от всех своих переменных и выразимая неповторной формулой в базисе $B_0 = \{0, 1, \&, \vee, \neg\}$ может быть представлена единственным образом корневым деревом (называемым каноническим), обладающим следующими свойствами.

- (1) Всем листьям дерева приписаны переменные из множества $\{x_1, \dots, x_n\}$ или их отрицания. При этом литерал, соответствующий каждой переменной приписан ровно одному листу.
- (2) Внутренним вершинам приписаны символы $\&$ и $\vee$.
- (3) Смежным внутренним вершинам приписаны различные символы.

Функционирование дерева определяется естественным образом от листьев к корню. Данное утверждение можно проверить непосредственно с использованием теоремы А. В. Кузнецова из [2]. Его можно также получить как частный случай соответствующей леммы для базиса $\{0, 1, \&, \vee, \neg, \oplus\}$, содержащейся в [1]. Мы будем часто использовать следующий факт.

Предложение 2. Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — бесповторная в B_0 функция. Тогда подфункция $\tilde{f}(x_{i_1}, \dots, x_{i_s})$, полученная из f подстановкой констант на место остальных переменных и существенно зависящая от переменных $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_s}\}$, не зависит от выбора таких констант.

Введем в рассмотрение функцию Шеннона

$$T_{B_0}(n) = \max_{f(x_1, \dots, x_n)} T_{B_0}(f),$$

где $T_{B_0}(f)$ — минимальная длина проверяющего теста для бесповторной в $B_0 = \{0, 1, \&, \vee, \neg\}$ функции $f(x_1, \dots, x_n)$. Мы применим следующий подход. Для того чтобы убедиться, что тестируемая функция совпадает с заданной функцией $f(x_1, \dots, x_n)$, достаточно показать, что ее дерево совпадает с деревом функции $f(x_1, \dots, x_n)$. Нетрудно видеть, что бесповторная в базисе $\{0, 1, \&, \vee, \neg\}$ функция монотонна или антимонотонна по любому из своих существенных аргументов. Поэтому наличие в тесте пары соседних по переменной x_i наборов, на которых функция принимает различные значения, позволяет установить, приписана ли некоторому листу дерева метка x_i или $\bar{x}_i$. Тест для функции $f(x_1^{\sigma_1}, \dots, x_n^{\sigma_n})$ может быть получен из теста для функции $f(x_1, \dots, x_n)$ инвертированием во всех наборах тех i -х компонент, для которых $\sigma_i = 0$, поэтому $T_{B_0}(f(x_1, \dots, x_n)) = T_{B_0}(f(x_1^{\sigma_1}, \dots, x_n^{\sigma_n}))$.

Лемма 1. Справедлива оценка

$$n + 1 \leq T_{B_0}(n).$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $x_1 \vee \dots \vee x_n$. Эта функция отличается от функций $x_1 \vee \dots \vee x_{i-1} \vee x_{i+1} \vee \dots \vee x_n$ и 1 ровно на одном наборе. Поэтому все эти $n + 1$ наборов должны войти в проверяющий тест для дизъюнкции. С другой стороны, бесповторная в B_0 функция, равная 0 на наборе из всех нулей и равная 1 на всех наборах с одной единицей, монотонна по всем переменным и, следовательно, совпадает с $x_1 \vee \dots \vee x_n$. Лемма доказана.

По любому каноническому дереву с листьями $x_1, \dots, x_n$ могут быть построены графы $G_{\&}$ и $G_{\vee}$ с множеством вершин $\{x_1, \dots, x_n\}$ и ребрами между теми вершинами x_i и x_j , для которых ближайшая к корню на пути между ними внутренняя вершина дерева помечена символом $\&$ ($\vee$). Графы $G_{\&}$ и $G_{\vee}$ являются дополнениями друг друга. Кроме этого, они обладают важными свойствами, которые используются при тестировании.

Предложение 3. Для любого множества вершин $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_s}\}$ один из подграфов, порожденных $G_{\&}$ и $G_{\vee}$, несвязен.

Предложение 4. Любой из графов $G_{\&}$ и $G_{\vee}$ определяет бесповторную в базисе B_0 функцию с точностью до инвертирования переменных.

Мы используем следующий способ тестирования функций. Во-первых, включим в тест наборы, показывающие монотонность (антимонотонность) функции по каждой из ее переменных. Во-вторых, добавим наборы, однозначно определяющие графы $G_{\&}$ и $G_{\vee}$. Построенное множество наборов однозначно определяет функцию.

В качестве теста для произвольной функции f будем рассматривать следующее множество наборов A . Каждая внутренняя вершина C канонического дерева функции f определяет некоторое подмножество наборов $A(C)$.

Пусть вершина C канонического дерева, в которой реализуется функция f' , дугами от корня соединена с s внутренними вершинами и n_0 висячими. Пусть во внутренних вершинах реализуются функции $f_1, \dots, f_s$ и из этих вершин от корня исходит соответственно $r_1, \dots, r_s$ дуг. Пусть для определенности функция f монотонна по всем переменным. Пусть вершина C помечена символом $\&$ ($\vee$). Тогда в $A(C)$ входит так называемый главный набор, на котором все переменные функции f' равны единице (нулю). Остальные же переменные равны единице (нулю), если первая общая вершина на путях из соответствующих им листьев и C в корень помечена $\&$ ($\vee$). В $A(C)$ входят также n_0 наборов, каждый из которых отличается от главного в одной позиции, соответствующей своей висячей вершине. Пусть теперь $s \geq 2$. Пусть $x_{11}, \dots, x_{1r_1}, \dots, x_{s1}, \dots, x_{sr_s}$ — произвольные переменные функции f' такие, что путь из C к листу, соответствующему x_{ij} , лежит через j -ю дугу поддеревья функции f_i . Фиксируем значения переменных, от которых f' не зависит, и переменных, соответствующих n_0 висячим вершинам так, как в главном наборе. Тогда можно фиксировать значения переменных, не входящих в множество $\{x_{11}, \dots, x_{1r_1}, \dots, x_{s1}, \dots, x_{sr_s}\}$, так, что в вершине C и в корне дерева будет реализовываться некоторая подфункция $\tilde{f}(x_{11}, \dots, x_{1r_1}, \dots, x_{s1}, \dots, x_{sr_s})$, где все x_{ij} — существенные переменные. Далее будем считать, что оставшиеся переменные фиксированы именно таким образом. Включим в множество $A(C)$ следующие наборы, имеющие ровно s единиц (нулей) среди переменных $x_{11}, \dots, x_{1r_1}, \dots, x_{s1}, \dots, x_{sr_s}$: набор $x_{11} = x_{21} = \dots = x_{s1} = 1$ (0) и наборы $x_{11} = x_{21} = \dots = x_{i-1,1} = x_{ij} = x_{i+1,1} = \dots = x_{s1} = 1$ (0) для всех $i = 1, \dots, s$ и $j = 2, \dots, r_i$. Положим $A = \bigcup_C A(C)$.

Лемма 2. Для произвольной бесповторной в B_0 функции $f(x_1, \dots, x_n)$ множество A содержит менее $7n/2$ наборов.

Доказательство. Внутренняя вершина C дает вклад

$$1 + n_0 + r_1 - 1 + \dots + r_s - 1 + 1 = n_0 + r_1 + \dots + r_s - s + 2$$

в число наборов при $s \geq 2$, при $s = 0$ вклад равен $n_0 + 1$ наборам и при $s = 1$ равен $n_0 + 1 = n_0 + 1 - r_1 + r_1$. Просуммируем количества наборов по всем внутренним вершинам C :

$$\sum_C n_0 = n, \quad \sum_C r_1 + \dots + r_s < 2n, \quad \sum_{C|s \geq 2} -s + 2 \leq 0, \quad \sum_{C|s=1} 1 - r_1 \leq 0, \quad \sum_{C|s=0} 1 \leq \frac{n}{2}.$$

Складывая все неравенства, получим утверждение леммы.

Нам осталось доказать, что множество A является тестом для f . При доказательстве этого факта мы будем восстанавливать полную информацию о графах $G_{\&}$ и $G_{\vee}$ по частичной при помощи одного простого приема, известного как правило пирамиды.

Предложение 5 ([3]). Если дополнение четырехвершинного графа G , имеющего цепочку из трех ребер, несвязно и граф G не содержит два из оставшихся трех ребер, то G содержит третье ребро.

Лемма 3. Для произвольной бесповторной в B_0 функции $f(x_1, \dots, x_n)$ множество A является тестом.

Доказательство. Индукцией по глубине t канонического дерева мы докажем следующее утверждение.

Только остаточная подфункция функции f , реализуемая в вершине C , принимает на поднаборах объединения множеств $A(C')$ по всем внутренним вершинам C' , лежащим на пути из C в листья, значения, совпадающие со значениями функции f .

Пусть $t = 1$. Вершина C соединена с n_0 висячими вершинами. Множество $A(C)$ содержит тест из $n_0 + 1$ набора для соответствующей конъюнкции (дизъюнкции).

Проведем шаг индукции. Пусть вершина C , в которой реализуется функция f' , дугами от корня соединена с s внутренними вершинами и n_0 висячими. Пусть во внутренних вершинах реализуются функции $f_1, \dots, f_s$ и из этих вершин от корня исходит соответственно $r_1, \dots, r_s$ дуг. Пусть для определенности функция f' монотонна по всем переменным. Пусть вершина C помечена символом $\& (\vee)$. По предположению индукции множество A содержит тесты подфункций $f_1, \dots, f_s$. Значения функции f на главном наборе множества $A(C)$, n_0 соседних наборах и наборах, демонстрирующих монотонность f по переменным функций $f_1, \dots, f_s$ показывают, что в вершине C реализуется подфункция $y_1 \& \dots \& y_{n_0} \& F(\mathbf{x})$ ($y_1 \vee \dots \vee y_{n_0} \vee F(\mathbf{x})$), где y_i — переменные, приписанные висячим вершинам, смежным с C , а $\mathbf{x}$ — оставшиеся переменные функции f' . Для $s = 1$ утверждение доказано. Рассмотрим случай $s \geq 2$.

Итак, пусть корень помечен $\& (\vee)$. Набор $x_{11} = x_{21} = \dots = x_{s1} = 1(0)$ и наборы $x_{11} = x_{21} = \dots = x_{i-1,1} = x_{ij} = x_{i+1,1} = \dots = x_{s1} = 1(0)$ для $i = 1, \dots, s$ и $j = 2, \dots, r_i$ являются нижними единицами (верхними нулями) подфункции $\tilde{f}(x_{11}, \dots, x_{1r_1}, \dots, x_{s1}, \dots, x_{sr_s})$. То, что тестируемая функция имеет эти нижние единицы (верхние нули) следует из того, что тесты для $f_1, \dots, f_s$ содержат наборы, показывающие монотонность этих подфункций по всем переменным, а на главных наборах

$$x_{11} = \dots = x_{1r_1} = 0(1), x_{21} = \dots = x_{2r_2} = 1(0), \dots, x_{s1} = \dots = x_{sr_s} = 1(0)$$

$$x_{11} = \dots = x_{1r_1} = 1(0), x_{21} = \dots = x_{2r_2} = 0(1), \dots, x_{s1} = \dots = x_{sr_s} = 1(0)$$

...

...

...

$$x_{11} = \dots = x_{1r_1} = 1(0), x_{21} = \dots = x_{2r_2} = 1(0), \dots, x_{s1} = \dots = x_{sr_s} = 0(1)$$

функция $\tilde{f}$ принимает значение 0(1). Таким образом, функция $\tilde{f}$ имеет остаточные подфункции $x_{11} \& x_{21} \& \dots \& x_{s1}$, $x_{11} \& x_{21} \& \dots \& x_{i-1,1} \& x_{ij} \& x_{i+1,1} \& \dots \& x_{s1}$ для $i = 1, \dots, s$ и $j = 2, \dots, r_i$ ($x_{11} \vee x_{21} \vee \dots \vee x_{s1}$, $x_{11} \vee x_{21} \vee \dots \vee x_{i-1,1} \vee x_{ij} \vee x_{i+1,1} \vee \dots \vee x_{s1}$ для $i = 1, \dots, s$ и $j = 2, \dots, r_i$).

Рассмотрим информацию о графе $G_\& (G_\vee)$ подфункции $\tilde{f}$. В силу наличия в A тестов для $f_1, \dots, f_s$ в $G_\& (G_\vee)$ отсутствуют ребра вида (x_{ip}, x_{iq}) . Кроме того, эти тесты дают полную информацию о ребрах вида (x_{ip}, z) , где z — произвольная переменная функции f_i .

Восстановим оставшуюся информацию. Покажем, что содержащаяся в тесте информация достаточна для доказательства наличия в $G_\& (G_\vee)$ ребер вида (x_{ip}, x_{jq}) для $i \neq j$. При $p = 1$ или $q = 1$ наличие ребра доказывается существованием соответствующей остаточной подфункции. Пусть $p \neq 1, q \neq 1$. Тогда ребра (x_{i1}, x_{ip}) и (x_{j1}, x_{jq}) отсутствуют в графе $G_\& (G_\vee)$. Наличие остаточной подфункции $x_{11} \& x_{21} \& \dots \& x_{s1}$

$(x_{11} \vee x_{21} \vee \dots \vee x_{s1})$ доказывает наличие в $G_{\&}$ ($G_{\vee}$) ребра (x_{i1}, x_{j1}) . Наличие остаточной подфункции $x_{11} \& x_{21} \& \dots \& x_{i-1,1} \& x_{ip} \& x_{i+1,1} \& \dots \& x_{s1}$ ($x_{11} \vee x_{21} \vee \dots \vee x_{i-1,1} \vee x_{ip} \vee x_{i+1,1} \vee \dots \vee x_{s1}$) доказывает наличие в $G_{\&}$ ($G_{\vee}$) ребра (x_{ip}, x_{j1}) . Наличие остаточной подфункции $x_{11} \& x_{21} \& \dots \& x_{j-1,1} \& x_{jq} \& x_{j+1,1} \& \dots \& x_{s1}$ ($x_{11} \vee x_{21} \vee \dots \vee x_{j-1,1} \vee x_{jq} \vee x_{j+1,1} \vee \dots \vee x_{s1}$) доказывает наличие в $G_{\&}$ ($G_{\vee}$) ребра (x_{i1}, x_{jq}) . По правилу пирамиды, ребро (x_{ip}, x_{jq}) принадлежит множеству ребер графа $G_{\&}$ ($G_{\vee}$).

Для завершения доказательства леммы осталось показать, что содержащейся в тесте информации достаточно для того, чтобы утверждать, что для произвольной переменной z подфункции f_i , путь к которой из корня лежит через p -ю дугу при $i \neq j$ ребро (z, x_{jq}) принадлежит множеству ребер графа $G_{\&}$ ($G_{\vee}$). Подграф $G_{\&}$ ($G_{\vee}$), порожденный переменными подфункции f_i , путь к которым из корня лежит через p -ю дугу, связан, и полная информация о нем может быть получена из теста для f_i . В силу этого обстоятельства достаточно рассмотреть случай, когда ребро (z, x_{ip}) принадлежит множеству ребер графа $G_{\&}$ ($G_{\vee}$). Возьмем произвольное $t \neq p$. Тогда ребра (x_{it}, x_{ip}) и (x_{it}, z) не принадлежат множеству ребер графа $G_{\&}$ ($G_{\vee}$), что обосновывается тестом для f_i . Ребра (x_{it}, x_{jq}) и (x_{ip}, x_{jq}) принадлежат множеству ребер графа $G_{\&}$ ($G_{\vee}$). По правилу пирамиды, ребро (z, x_{jq}) принадлежит множеству ребер графа $G_{\&}$ ($G_{\vee}$).

Лемма доказана.

Из лемм 1, 2, 3 следует основное утверждение.

Теорема 1. *Справедлива оценка*

$$n + 1 \leq T_{B_0}(n) < 7n/2.$$

Список литературы

1. Вороненко А. А., О проверяющих тестах для бесповторных функций. *Матем. вопросы кибернетики* (2002) **11**, 163–176.
2. Кузнецов А. В., О бесповторных контактных схемах и бесповторных суперпозициях функций алгебры логики. *Труды Матем. ин-та АН СССР*. (1958) **51**, 186–225.
3. Вороненко А. А., Об оценке длины проверяющего теста для некоторых бесповторных функций. *Прикл. матем. и информатика*. (2003) **15**, 85–97.

Статья поступила 29.01.2005.