Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Алехина, О надежности схем в базисах $\{\sim, \&, \oplus\}$, $\{\sim, \&, 0\}$, $\{\oplus, \&, 1\}$, $\{\oplus, \vee, 1\}$ при неисправностях типа 0 на выходах элементов, *Дискрет. матем.*, 2009, том 21, выпуск 2, 102–111

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1050>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 12:38:04

О надежности схем в базисах $\{\sim, \&, \oplus\}$, $\{\sim, \&, 0\}$, $\{\oplus, \&, 1\}$, $\{\oplus, \vee, 1\}$ при неисправностях типа 0 на выходах элементов

© 2009 г. М. А. Алехина

Показано, что при неисправностях типа 0 на выходах элементов почти все булевы функции можно реализовать асимптотически наилучшими по надежности схемами, функционирующими с ненадежностью, асимптотически равной вероятности γ неисправности элемента в базисах $\{\sim, \&, \oplus\}$, $\{\sim, \&, 0\}$, $\{\oplus, \&, 1\}$, $\{\oplus, \vee, 1\}$ при $\gamma \rightarrow 0$.

1. Впервые задачу синтеза надежных схем из ненадежных элементов рассматривал Дж. фон Нейман [1]. Он предполагал, что все элементы схемы независимо друг от друга с вероятностью $\varepsilon < 1/2$ подвержены инверсным неисправностям, когда функциональный элемент с приписанной ему булевой функцией $e(\tilde{x})$ в неисправном состоянии реализует функцию $\bar{e}(\tilde{x})$. С помощью итерационного метода Дж. фон Нейман установил, что при $\varepsilon < 1/6$ произвольную булеву функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можно реализовать схемой, вероятность ошибки на выходе которой при любом входном наборе значений переменных не превосходит $c\varepsilon$, где c — некоторая абсолютная константа, то есть ненадежность схемы сравнима с ненадежностью одного элемента (такие схемы в теории надежности управляющих систем принято называть надежными).

В этой статье рассматриваются однотипные константные неисправности на выходах элементов и решается задача синтеза асимптотически наилучших по надежности схем из функциональных элементов в базисах $\{\sim, \&, \oplus\}$, $\{\sim, \&, 0\}$, $\{\oplus, \&, 1\}$, $\{\oplus, \vee, 1\}$, где $x \sim y = x \& y \vee \bar{x} \& \bar{y}$, $x \oplus y = x \& \bar{y} \vee \bar{x} \& y$. Заметим, что схемы D_1 , D_2 , D_3 (рис. 2) и D_4 (рис. 3), необходимые для доказательства теорем 3, 5, 7 и 9, предложены Р. В. Хелемендиком.

Введем необходимые понятия и определения.

Считаем, что схема из ненадежных элементов [2] реализует булеву функцию f , если она реализует ее при отсутствии неисправностей в схеме. Все элементы схемы независимо друг от друга с вероятностью $\gamma < 1/2$ могут переходить в неисправные состояния типа 0 на выходах элементов. Эти неисправности характеризуются тем, что в исправном состоянии каждый из элементов реализует приписанную ему булеву функцию, а в неисправном — константу 0.

Далее будем считать, что базисные элементы подвержены неисправностям типа 0 на выходах. Вероятности P_0 и P_1 — вероятности появления 0 и 1 на выходах базисных элементов с функциями $x \sim y$, $x \& y$, $x \oplus y$, $x \vee y$ приведены в табл. 1. Функциональный элемент с константой 1 является ненадежным, вероятность ошибки на выходе

Рис. 1

Рис. 2

Рис. 3

этого элемента равна γ . Функциональный элемент, которому приписана константа 0, при исследуемых неисправностях является абсолютно надежным.

Пусть $P_{\bar{f}(\tilde{a})}(S, \tilde{a})$ — вероятность появления значения $\bar{f}(\tilde{a})$ на выходе схемы S , реализующей булеву функцию $f(\tilde{x})$ при входном наборе $\tilde{a}$. Ненадежность $P(S)$ схемы S определяется как максимальное из чисел $P_{\bar{f}(\tilde{a})}(S, \tilde{a})$ при всевозможных входных наборах $\tilde{a}$. Надежность схемы S равна $1 - P(S)$.

Замечание 1. Очевидно, что ненадежности приведенных в табл. 1 базисных элементов, а также элемента с константой 1 равны γ .

Замечание 2. Из табл. 1 и работы [3] следует, что невозможно реализовать произвольную функцию схемой S , работающей сколь угодно надежно.

Таблица 1.

x	y	$x \sim y$	P_0	P_1
0	0	1	γ	$1 - \gamma$
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
1	1	1	γ	$1 - \gamma$

x	y	$x \oplus y$	P_0	P_1
0	0	0	1	0
0	1	1	γ	$1 - \gamma$
1	0	1	γ	$1 - \gamma$
1	1	0	1	0

x	y	$x \& y$	P_0	P_1
0	0	0	1	0
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
1	1	1	γ	$1 - \gamma$

x	y	$x \vee y$	P_0	P_1
0	0	0	1	0
0	1	1	γ	$1 - \gamma$
1	0	1	γ	$1 - \gamma$
1	1	1	γ	$1 - \gamma$

Введем обозначение

$$P_\gamma(f) = \inf P(S),$$

где S — схема из ненадежных элементов, реализующая булеву функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Схему A (из ненадежных элементов), реализующую булеву функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, назовем асимптотически наилучшей (асимптотически оптимальной) по надежности, если $P(A) \sim P_\gamma(f)$ при $\gamma \rightarrow 0$.

Пусть схема S_h реализует функцию штрих Шеффера $x/y = \bar{x} \vee \bar{y}$ с вероятностями ошибок на выходе

$$P_0(00) = \alpha, \quad P_0(01) = \beta, \quad P_0(10) = \delta, \quad P_1(11) = \tau.$$

Введем обозначение

$$\mu = \max\{\alpha, \beta, \delta, \tau\}.$$

Теорема 1 ([4]). Если $\mu \leq 1/80$, то любую функцию f можно реализовать такой схемой S , что

$$P(S) \leq 4\mu.$$

Теорема 2 ([5]). Пусть f — произвольная функция, S — схема ее реализующая с ненадежностью $P(S)$. Тогда схема $\varphi(S)$ (рис. 1) реализует функцию f с ненадежностью

$$P(\varphi(S)) \leq \max\{2\alpha + \tau + 2(\beta + \delta)P(S) + 2P^2(S), \alpha + (\beta + \delta)(\tau + 2P(S)) + (\tau + 2P(S))^2\}. \quad (1)$$

Применение операции φ (возможно, неоднократное) к некоторым схемам S (при некоторых условиях на $P(S)$) приводит к схемам, имеющим более высокую надежность, чем исходная схема S . Результат n -кратного применения операции φ к схеме S будем обозначать $\varphi^n(S)$, $n \in \mathbb{N}$.

2. Предположим, что элементы базиса $\{\sim, \&, \oplus\}$ подвержены неисправностям типа 0 на выходах, причем вероятность неисправности каждого выхода элемента равна γ .

Известно [6], что при $\gamma \leq 1/150$ любую булеву функцию f можно реализовать такой схемой S , что

$$P(S) \leq 3\gamma + 15\gamma^2 + 910\gamma^3.$$

Этот результат можно улучшить.

Теорема 3. При $\gamma \leq 1/160$ любую булеву функцию можно реализовать такой схемой A , что

$$P(A) \leq \gamma + 7\gamma^2.$$

Доказательство. Построим схему D_1 из трех функциональных элементов, реализующую стрелку Пирса $x \downarrow y$, где $x \downarrow y = \bar{x} \& \bar{y}$, промоделировав формулу

$$(x \& (x \oplus y)) \sim y.$$

Вычислим вероятности ошибок на выходе этой схемы:

$$P_0(00) = \gamma, \quad P_1(01) = 0, \quad P_1(10) = \gamma(1 - \gamma)(2 - \gamma), \quad P_1(11) = 0.$$

Поскольку ненадежности двойственных схем равны [7], можно воспользоваться результатами теорем 1 и 2, полагая

$$\alpha = 0, \quad \beta = \gamma(1 - \gamma)(2 - \gamma), \quad \delta = 0, \quad \tau = \gamma.$$

Тогда $\mu \leq 2\gamma$, а соотношение (1) для ненадежностей $P(S)$ и $P(\varphi(S))$ схем S и $\varphi(S)$ (см. теорему 2) принимает вид

$$P(\varphi(S)) \leq \max\{\gamma + 4\gamma P(S) + 2P^2(S), 3\gamma^2 + 8\gamma P(S) + 4P^2(S)\}. \quad (2)$$

Пусть f — произвольная булева функция. По теореме 1 ее можно реализовать схемой S , ненадежность которой $P(S) \leq 8\gamma$. По схеме S построим схемы $\varphi(S)$, $\varphi^2(S)$ и $\varphi^3(S)$ с использованием операции φ . Из соотношения (2) при $\gamma \leq 1/160$ получаем, что

$$P(\varphi(S)) \leq \max\{\gamma + 160\gamma^2, 323\gamma^2\} \leq 2,02\gamma,$$

$$P(\varphi^2(S)) \leq \max\{\gamma + 16,25\gamma^2, 35,5\gamma^2\} = \gamma + 16,25\gamma^2 \leq 1,102\gamma,$$

$$P(\varphi^3(S)) \leq \max\{\gamma + 6,84\gamma^2, 16,7\gamma^2\} \leq \gamma + 7\gamma^2.$$

Схема $\varphi^3(S)$ — искомая схема. Теорема 3 доказана.

Обозначим $K_1(n)$ множество булевых функций $f(x_1, \dots, x_n)$, отличных от функций $x_1, \dots, x_n$ и константы 0.

Очевидно, что функции $x_1, \dots, x_n$ можно реализовать абсолютно надежно.

Пример 1. Моделируя формулу $x \oplus x$, построим схему из одного элемента, реализующую константу 0 с ненадежностью, равной нулю.

Теорема 4. Для любой схемы S , реализующей функцию $f \in K_1(n)$, при $\gamma < 1/2$ верно неравенство

$$P(S) \geq \gamma.$$

Доказательство. Пусть f — произвольная функция из класса $K_1(n)$, а S — любая схема, ее реализующая. Выделим в этой схеме выходной элемент φ_E такой, что элемент E является выходным элементом схемы S . Обозначим через B подсхему $S \setminus E$ схемы S . Поскольку функция f не равна константе 0, найдется входной двоичный набор $\tilde{a}$ схемы S такой, что $f(\tilde{a}) = 1$. Вероятность ошибки на выходе схемы S в этом случае равна

$$P_0(S, \tilde{a}) = (1 - p)\gamma + p = \gamma + (1 - \gamma)p,$$

где p — вероятность появления набора $\tilde{b}$ на выходах схемы B , на котором элемент E при отсутствии в нем неисправности выдает значение 0. Следовательно, $P(S) \geq \gamma$. Теорема 4 доказана.

Из теоремы 4 следует, что функции из класса $K_1(n)$ нельзя реализовать схемами, ненадежность которых меньше γ . Поэтому любая схема, удовлетворяющая условиям теоремы 3 и реализующая булеву функцию $f \in K_1(n)$, является асимптотически наилучшей по надежности и функционирует с ненадежностью, асимптотически равной γ , ненадежности одного базисного элемента, при $\gamma \rightarrow 0$.

Таким образом, при неисправностях типа 0 на выходах элементов в базисе $\{\sim, \&, \oplus\}$ все булевы функции можно реализовать схемами, ненадежность которых асимптотически не больше γ при $\gamma \rightarrow 0$, и для почти всех функций эти схемы являются асимптотически наилучшими по надежности.

Поскольку ненадежности двойственных схем равны (см. [7]), полученные результаты справедливы для двойственных функций в базисе $\{\sim, \vee, \oplus\}$ при неисправностях типа 1 на выходах элементов. Эти неисправности характеризуются тем, что в исправном состоянии каждый из элементов реализует приписанную ему булеву функцию, а в неисправном — константу 1.

3. Предположим, что элементы базиса $\{\sim, \&, 0\}$ подвержены неисправностям типа 0 на выходах, причем вероятность неисправности каждого выхода элемента равна γ .

Известно [6], что при $\gamma \leq 1/150$ любую булеву функцию f можно реализовать такой схемой S , что

$$P(S) \leq 3\gamma + 15\gamma^2 + 910\gamma^3.$$

Этот результат можно улучшить.

Теорема 5. При $\gamma \leq 1/160$ любую булеву функцию можно реализовать такой схемой A , что

$$P(A) \leq \gamma + 7\gamma^2.$$

Доказательство. Для доказательства этой теоремы построим схему D_2 , реализующую функцию $x \downarrow y$, моделируя формулу

$$x \sim ((x \sim 0) \& y).$$

Вычислим вероятности ошибок на выходе этой схемы:

$$P_0(00) = \gamma, \quad P_1(01) = \gamma(1 - \gamma)(2 - \gamma), \quad P_1(10) = 0, \quad P_1(11) = 0.$$

Поскольку ненадежности двойственных схем равны (см. [6]), полагая

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \delta = \gamma(1 - \gamma)(2 - \gamma), \quad \tau = \gamma, \quad \mu = \gamma(1 - \gamma)(2 - \gamma),$$

воспользуемся теоремами 1 и 2. Соотношение (1) для ненадежностей $P(S)$ и $P(\varphi(S))$ схем S и $\varphi(S)$ принимает вид

$$P(\varphi(S)) \leq \max\{\gamma + 4\gamma P(S) + 2P^2(S), 3\gamma^2 + 8\gamma P(S) + 4P^2(S)\},$$

то есть в точности совпадает с соотношением (2). Повторяя далее доказательство теоремы 3, убеждаемся в справедливости теоремы 5.

Очевидно, что функции $x_1, x_2, \dots, x_n$ и константу 0 можно реализовать абсолютно надежно.

Теорема 6. Для любой схемы S , реализующей функцию $f \in K_1(n)$, при $\gamma < 1/2$ верно неравенство

$$P(S) \geq \gamma.$$

Доказательство такое же, как и доказательство теоремы 4. Класс $K_1(n)$ описан выше.

Из теоремы 6 следует, что функции класса $K_1(n)$ нельзя реализовать схемами, ненадежность которых меньше γ . Поэтому любая схема, удовлетворяющая условиям теоремы 5 и реализующая булеву функцию $f \in K_1(n)$, является асимптотически наилучшей по надежности и функционирует с ненадежностью, асимптотически равной γ при $\gamma \rightarrow 0$.

Таким образом, при неисправностях типа 0 на выходах элементов в базисе $\{\sim, \&, 0\}$ все булевы функции можно реализовать схемами, ненадежность которых асимптотически не больше γ при $\gamma \rightarrow 0$, и для почти всех функций эти схемы являются асимптотически наилучшими по надежности.

Поскольку ненадежности двойственных схем одинаковы, полученные результаты справедливы для двойственных функций в базисе $\{\oplus, \vee, 1\}$ при неисправностях типа 1 на выходах элементов.

4. Предположим, что элементы базиса $\{\oplus, \&, 1\}$ подвержены неисправностям типа 0 на выходах, причем вероятность неисправности каждого выхода элемента равна γ .

Известно [4], что при $\gamma \leq 1/480$ любую булеву функцию f можно реализовать такой схемой S , что

$$P(S) \leq 3\gamma + 43\gamma^2.$$

Этот результат можно улучшить.

Теорема 7. При $\gamma \leq 1/240$ любую булеву функцию можно реализовать такой схемой A , что

$$P(A) \leq \gamma + 10\gamma^2.$$

Доказательство. Моделируя формулу $x \& y \oplus 1$, построим схему S_h из трех элементов, реализующую функцию штрих Шеффера x/y . Очевидно, что ненадежность этой схемы $\mu \leq 3\gamma$.

Пусть f — произвольная булева функция. По теореме 1 при $\gamma \leq 1/240$ ее можно реализовать схемой S с ненадежностью $P(S) \leq 12\gamma$. Для повышения надежности схемы S будем использовать схему D_3 , реализующую функцию голосования

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$$

(см. рис. 2). Вероятности ошибок на выходе этой схемы таковы:

$$\begin{aligned} P_1(000) &= 0, & P_1(001) &= 0, & P_1(010) &\leq 2\gamma, & P_0(011) &\leq 3\gamma, \\ P_1(100) &\leq 2\gamma, & P_0(101) &\leq 3\gamma, & P_0(110) &= \gamma, & P_0(111) &= \gamma. \end{aligned}$$

Возьмем три экземпляра схемы S и соединим их выходы со входами схемы D_3 . Построенную таким образом схему обозначим $\psi(S)$. Вычислим вероятности ошибок на выходе этой схемы.

Пусть входной набор $\tilde{a}$ схемы $\psi(S)$ является нулевым для функции f , то есть $f(\tilde{a}) = 0$. Вероятность ошибки $P_1(\psi(S), \tilde{a})$ на выходе схемы $\psi(S)$ в этом случае удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} P_1(\psi(S), \tilde{a}) &\leq (1 - P_1(S, \tilde{a}))^3 \cdot 0 + (1 - P_1(S, \tilde{a}))^2 P_1(S, \tilde{a}) \cdot 0 \\ &\quad + (1 - P_1(S, \tilde{a})) P_1(S, \tilde{a}) (1 - P_1(S, \tilde{a})) \cdot 2\gamma \\ &\quad + (1 - P_1(S, \tilde{a})) P_1^2(S, \tilde{a}) + P_1(S, \tilde{a}) (1 - P_1(S, \tilde{a}))^2 \cdot 2\gamma \\ &\quad + P_1(S, \tilde{a}) (1 - P_1(S, \tilde{a})) P_1(S, \tilde{a}) \\ &\quad + P_1^2(S, \tilde{a}) (1 - P_1(S, \tilde{a})) + P_1^3(S, \tilde{a}). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$P_1(\psi(S), \tilde{a}) \leq 4\gamma P_1(S, \tilde{a}) + 3P_1^2(S, \tilde{a}). \quad (3)$$

Пусть входной набор $\tilde{a}$ схемы $\psi(S)$ является единичным для функции f , то есть $f(\tilde{a}) = 1$. Вероятность ошибки $P_0(\psi(S), \tilde{a})$ на выходе схемы $\psi(S)$ в этом случае удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} P_0(\psi(S), \tilde{a}) &\leq (1 - P_0(S, \tilde{a}))^3 \gamma + (1 - P_0(S, \tilde{a}))^2 P_0(S, \tilde{a}) \gamma \\ &\quad + (1 - P_0(S, \tilde{a})) P_0(S, \tilde{a}) (1 - P_0(S, \tilde{a})) \cdot 3\gamma \\ &\quad + (1 - P_0(S, \tilde{a})) P_0^2(S, \tilde{a}) + P_0(S, \tilde{a}) (1 - P_0(S, \tilde{a}))^2 \cdot 3\gamma \\ &\quad + P_0(S, \tilde{a}) (1 - P_0(S, \tilde{a})) P_0(S, \tilde{a}) \\ &\quad + P_0^2(S, \tilde{a}) (1 - P_0(S, \tilde{a})) + P_0^3(S, \tilde{a}). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$P_0(\psi(S), \tilde{a}) \leq \gamma + 6\gamma P_0(S, \tilde{a}) + 3P_0^2(S, \tilde{a}). \quad (4)$$

Таким образом, из (3) и (4) получаем оценку

$$P(\psi(S)) \leq \gamma + 6\gamma P(S) + 3P^2(S). \quad (5)$$

Поскольку $P(S) \leq 12\gamma$, применяя (5), получаем, что

$$P(\psi(S)) \leq \gamma + 504\gamma^2 \leq 3,1\gamma.$$

По схеме $\psi(S)$ построим схемы $\psi^2(S)$, $\psi^3(S)$ и $\psi^4(S)$. Используя соотношение (5), получаем, что при $\gamma \leq 1/240$

$$P(\psi^2(S)) \leq \gamma + 48\gamma^2 \leq 1,2\gamma,$$

$$P(\psi^3(S)) \leq \gamma + 12\gamma^2 \leq 1,05\gamma,$$

$$P(\psi^4(S)) \leq \gamma + 10\gamma^2.$$

Схема $\psi^4(S)$ — искомая схема. Теорема 7 доказана.

Очевидно, что функции $x_1, \dots, x_n$ и константу 0 можно реализовать абсолютно надежно.

Теорема 8. Для любой схемы S , реализующей функцию $f \in K_1(n)$, при $\gamma < 1/2$ верно неравенство $P(S) \geq \gamma$.

Доказательство такое же, как доказательство теоремы 4. Класс $K_1(n)$ описан выше.

Из теоремы 8 следует, что функции из класса $K_1(n)$ при $\gamma < 1/2$ нельзя реализовать схемами с ненадежностью, меньшей γ . Поэтому любая схема, удовлетворяющая условиям теоремы 7 и реализующая булеву функцию $f \in K_1(n)$, является асимптотически наилучшей по надежности и функционирует с ненадежностью, асимптотически равной γ при $\gamma \rightarrow 0$.

Следовательно, при неисправностях типа 0 на выходах элементов в базисе $\{\oplus, \&, 1\}$ почти все булевы функции можно реализовать асимптотически наилучшими по надежности схемами, функционирующими с ненадежностью, асимптотически равной γ при $\gamma \rightarrow 0$.

Поскольку ненадежности двойственных схем одинаковы, полученные результаты справедливы для двойственных функций в базисе $\{\sim, \vee, 0\}$ при неисправностях типа 1 на выходах элементов.

5. Предположим, что элементы базиса $\{\oplus, \vee, 1\}$ подвержены неисправностям типа 0 на выходах, причем вероятность неисправности каждого выхода элемента равна γ .

Известно [4], что при $\gamma \leq 1/480$ любую булеву функцию f можно реализовать такой схемой S , что

$$P(S) \leq 4\gamma + 111\gamma^2.$$

Этот результат можно улучшить.

Теорема 9. При $\gamma \leq 1/240$ любую булеву функцию можно реализовать такой схемой A , что

$$P(A) \leq \gamma + 14\gamma^2.$$

Доказательство. Моделируя формулу $(x \vee y) \oplus 1$, построим схему из трех элементов, реализующую функцию $x \downarrow y$. Ненадежность этой схемы не больше 3γ . Так как ненадежности двойственных схем равны, применима теорема 1, из которой следует, что произвольную булеву функцию f при $\gamma \leq 1/240$ можно реализовать схемой S с ненадежностью $P(S) \leq 12\gamma$. Для повышения надежности схемы S используем схему D_4 , реализующую функцию голосования

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$$

(см. рис. 3). Вероятности ошибок на выходе схемы таковы:

$$\begin{aligned} P_1(000) &= 0, & P_1(001) &\leq 3\gamma, & P_1(010) &\leq 2\gamma, & P_0(011) &\leq 2\gamma, \\ P_1(100) &\leq \gamma, & P_0(101) &\leq 3\gamma, & P_0(110) &\leq 4\gamma, & P_0(111) &= \gamma. \end{aligned}$$

Возьмем три экземпляра схемы S и соединим их выходы с входами схемы D_4 . Построенную таким образом схему обозначим $\psi(S)$. Вычислим вероятности ошибок на выходе этой схемы.

Пусть входной набор $\tilde{a}$ схемы $\psi(S)$ является нулевым для функции f , то есть $f(\tilde{a}) = 0$. Вероятность ошибки $P_1(\psi(S), \tilde{a})$ на выходе схемы $\psi(S)$ в этом случае удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} P_1(\psi(S), \tilde{a}) \leq & (1 - P_1(S, \tilde{a}))^3 \cdot 0 + (1 - P_1(S, \tilde{a}))^2 P_1(S, \tilde{a}) \cdot 3\gamma \\ & + (1 - P_1(S, \tilde{a})) P_1(S, \tilde{a}) (1 - P_1(S, \tilde{a})) \cdot 2\gamma \\ & + (1 - P_1(S, \tilde{a})) P_1^2(S, \tilde{a}) + P_1(S, \tilde{a}) (1 - P_1(S, \tilde{a}))^2 \gamma \\ & + P_1(S, \tilde{a}) (1 - P_1(S, \tilde{a})) P_1(S, \tilde{a}) \\ & + P_1^2(S, \tilde{a}) (1 - P_1(S, \tilde{a})) + P_1^3(S, \tilde{a}). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$P_1(\psi(S), \tilde{a}) \leq 6\gamma P_1(S, \tilde{a}) + 3P_1^2(S, \tilde{a}). \quad (6)$$

Пусть входной набор $\tilde{a}$ схемы $\psi(S)$ является единичным для функции f , то есть $f(\tilde{a}) = 1$. Вероятность ошибки $P_0(\psi(S), \tilde{a})$ на выходе схемы $\psi(S)$ в этом случае удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} P_0(\psi(S), \tilde{a}) \leq & (1 - P_0(S, \tilde{a}))^3 \gamma + (1 - P_0(S, \tilde{a}))^2 P_0(S, \tilde{a}) \cdot 4\gamma \\ & + (1 - P_0(S, \tilde{a})) P_0(S, \tilde{a}) (1 - P_0(S, \tilde{a})) \cdot 3\gamma \\ & + (1 - P_0(S, \tilde{a})) P_0^2(S, \tilde{a}) + P_0(S, \tilde{a}) (1 - P_0(S, \tilde{a}))^2 \cdot 2\gamma \\ & + P_0(S, \tilde{a}) (1 - P_0(S, \tilde{a})) P_0(S, \tilde{a}) \\ & + P_0^2(S, \tilde{a}) (1 - P_0(S, \tilde{a})) + P_0^3(S, \tilde{a}). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$P_0(\psi(S), \tilde{a}) \leq \gamma + 9\gamma P_0(S, \tilde{a}) + 3P_0^2(S, \tilde{a}). \quad (7)$$

Таким образом, из (6) и (7) получаем оценку

$$P(\psi(S)) \leq \gamma + 9\gamma P(S) + 3P^2(S). \quad (8)$$

Поскольку $P(S) \leq 12\gamma$, применяя (8), получаем оценку

$$P(\psi(S)) \leq \gamma + 540\gamma^2 \leq 3,25\gamma.$$

По схеме $\psi(S)$ построим схемы $\psi^2(S)$, $\psi^3(S)$ и $\psi^4(S)$. Используя соотношение (8), получаем, что при $\gamma \leq 1/240$

$$\begin{aligned} P(\psi^2(S)) & \leq \gamma + 61\gamma^2 \leq 1,26\gamma, \\ P(\psi^3(S)) & \leq \gamma + 16,1\gamma^2 \leq 1,07\gamma, \\ P(\psi^4(S)) & \leq \gamma + 14\gamma^2. \end{aligned}$$

Схема $\psi^4(S)$ — искомая схема. Теорема 9 доказана.

Очевидно, что функции $x_1, \dots, x_n$ и константу 0 можно реализовать абсолютно надежно.

Теорема 10. Для любой схемы S , реализующей функцию $f \in K_1(n)$, при $\gamma < 1/2$ верно неравенство

$$P(S) \geq \gamma.$$

Доказательство такое же, как и доказательство теоремы 4. Класс $K_1(n)$ описан выше.

Из теоремы 10 следует, что функции из класса $K_1(n)$ при $\gamma < 1/2$ нельзя реализовать схемами с ненадежностью, меньшей γ . Поэтому любая схема, удовлетворяющая условиям теоремы 9 и реализующая булеву функцию $f \in K_1(n)$, является асимптотически наилучшей по надежности и функционирует с ненадежностью, асимптотически равной γ при $\gamma \rightarrow 0$.

Таким образом, при неисправностях типа 0 на выходах элементов в базисе $\{\oplus, \vee, 1\}$ почти все булевы функции можно реализовать асимптотически наилучшими по надежности схемами, функционирующими с ненадежностью, асимптотически равной γ при $\gamma \rightarrow 0$.

Поскольку ненадежности двойственных схем одинаковы, полученные результаты справедливы для двойственных функций в базисе $\{\sim, \&, 0\}$ при неисправностях типа 1 на выходах элементов.

Список литературы

1. Фон Нейман Дж., Вероятностная логика и синтез надежных организмов из ненадежных компонент. В сб.: *Автоматы*. ИЛ, Москва, 1956, с. 68–139.
2. Редькин Н. П., *Надежность и диагностика схем*. Изд-во МГУ, Москва, 1992.
3. Тарасов В. В., К синтезу надежных схем из ненадежных элементов. *Матем. заметки* (1976) **20**, №3, 391–400.
4. Алехина М. А., *Синтез, надежность и сложность схем из ненадежных функциональных элементов*, Диссертация на соискание степени доктора физ.-мат. наук, Пенза, 2004.
5. Алехина М. А., О надежности схем из ненадежных элементов x/y . В сб.: *Материалы XI Межгосударственной школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем»*, **1**. Изд-во Центра прикл. исслед. при мех.-мат. ф-те МГУ, Москва, 2001, с. 9–14.
6. Алехина М. А., Верхние оценки ненадежности схем в базисах из двухвходовых функциональных элементов при однотипных константных неисправностях на выходах элементов. В сб.: *Материалы IV Молодежной научной школы по дискретной математике и ее приложениям*. Изд-во Центра прикл. исслед. при мех.-мат. ф-те МГУ, Москва, 2000, с. 12–20.
7. Алехина М. А., О надежности двойственных схем. В сб.: *Материалы XI Межгосударственной школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем»*, **1**. Изд-во Центра прикл. исслед. при мех.-мат. ф-те МГУ, Москва, 2001, с. 6–8.

Статья поступила 26.12.2005.

Переработанный вариант поступил 27.04.2007.