Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Тихомирова, Асимптотическая нормальность числа
непоявившихся несплошных цепочек исходов независимых
испытаний, *Дискрет. матем.*, 2009, том 21, выпуск 2, 112–
125

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1051>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 13:28:41

Асимптотическая нормальность числа непоявившихся несплошных цепочек исходов независимых испытаний

© 2009 г. М. И. Тихомирова

Доказана асимптотическая нормальность числа непоявившихся несплошных цепочек исходов независимых испытаний. Асимптотическая нормальность числа непоявившихся цепочек одинаковых исходов, известная для равновероятных исходов, установлена в неравновероятном случае.

1. Введение

Обозначим через $\mu_0(\mathcal{B}_N)$ число непоявившихся v -цепочек из некоторого множества $\mathcal{B}_N$ в n независимых испытаниях с N исходами в каждом. Если $\mathcal{B}_N$ является множеством всех возможных значений v -цепочек, то его мощность $|\mathcal{B}_N| = N^v$. Асимптотическая нормальность $\mu_0(\mathcal{B}_N)$ для сплошных цепочек при $n, N \rightarrow \infty, 0 < \alpha_1 \leq n/N^v \leq \alpha_2 < \infty$ была установлена в работах [1–3]. Доказательство основано на результатах работы [4] о разделимых статистиках, построенных по частотам сплошных цепочек исходов. По условиям теорем работы [4] требуется, чтобы дисперсия $\mathbf{D}\mu_0(\mathcal{B}_N)$ имела порядок n . При достаточно общих условиях $\mathbf{D}\mu_0(\mathcal{B}_N)$ имеет порядок $|\mathcal{B}_N|$. Таким образом, когда $|\mathcal{B}_N|$ имеет порядок, меньший n , асимптотическая нормальность $\mu_0(\mathcal{B}_N)$ из результатов работы [4] не следует.

В данной работе получены достаточные условия асимптотической нормальности $\mu_0(\mathcal{B}_N)$ в более общем случае несплошных цепочек исходов; результаты работы [5], относящиеся к сплошным цепочкам исходов в равновероятных испытаниях, перенесены на испытания с неравновероятными исходами.

2. Постановка задачи

Пусть

$$x_1, x_2, \dots, x_t, \dots \quad (1)$$

— независимые случайные величины с распределением вероятностей

$$\mathbf{P}\{x_t = k\} = p_k, \quad k = 1, \dots, N, \quad t = 1, 2, \dots$$

По последовательности (1) образуется последовательность v -цепочек

$$\bar{x}(t) = (x_{t+r_1-1}, x_{t+r_2-1}, \dots, x_{t+r_v-1}), \quad t = 1, 2, \dots, \quad 1 = r_1 < r_2 < \dots < r_v = s. \quad (2)$$

При $v = s$ последовательность (2) есть последовательность сплошных s -цепочек.

Пусть $\mathcal{B}_N$ обозначает произвольное множество v -цепочек $I = (i_1, \dots, i_v)$, где $i_1, \dots, i_v \in \{1, \dots, N\}$. Число v -цепочек из множества $\mathcal{B}_N$, не появившихся в n первых членах последовательности (2), обозначим через $\mu_0(\mathcal{B}_N)$. Предельные распределения $\mu_0(\mathcal{B}_N)$ будем рассматривать в предположении, что при $N \rightarrow \infty$

$$Np_k \leq A, \quad k = 1, \dots, N, \quad 0 < \underline{\alpha} \leq \alpha_n = \frac{n}{N^v} \leq \bar{\alpha} < \infty, \quad (3)$$

где $A > 0$, $\underline{\alpha}$, $\bar{\alpha}$ — некоторые постоянные.

Случайную величину $\mu_0(\mathcal{B}_N)$, используя известные формулы для комбинаций событий (см. [6]), можно представить в виде суммы зависимых случайных величин. Методы исследования сумм зависимых случайных величин, предложенные С. Н. Бернштейном (см. [7]), успешно использовались, когда зависимость слагаемых удобно было связать с разностью номеров слагаемых. Более сложные виды зависимостей оказалось удобнее описывать при помощи специально подобранных графов (см. [8]). Условия теоремы Янсона об асимптотической нормальности [8] легко проверяются. В. Г. Михайлов (см. [9]), допустив усложнение условий теоремы Янсона, получил более общее утверждение без существенного изменения доказательства.

В данной работе используется представление $\mu_0(\mathcal{B}_N)$ в виде суммы зависимых величин. В разделе 2 показано, что в этой сумме можно пренебречь частью слагаемых, а оставшуюся часть рассматривать как аппроксимирующую сумму, предельное распределение которой совпадает с предельным распределением $\mu_0(\mathcal{B}_N)$. В разделе 3 получены достаточные условия асимптотической нормальности $\mu_0(\mathcal{B}_N)$ (см. теорему 2). Применение этой теоремы иллюстрируется доказательством асимптотической нормальности $\mu_0(\mathcal{B}_N)$ в двух важных частных случаях:

$$(1) \quad v = s, \quad \mathcal{B}_N = \{I: i_1 = \dots = i_N = i, i = 1, \dots, N\},$$

$$(2) \quad v = 3, \quad r_2 = r, \quad r_3 = s, \quad \mathcal{B}_N = \{I = (i_1, i_2, i_3): i_k = 1, \dots, N, k = 1, 2, 3\}.$$

Для доказательства асимптотической нормальности аппроксимирующих сумм используем утверждение, непосредственно вытекающее из результатов работ [8, 9]. Приведем это утверждение в удобном для дальнейшего использования виде.

Введем сначала несколько обозначений. Вектор номеров членов последовательности (1), соответствующих координатам вектора $\bar{x}(t)$, обозначим через $\tau(t)$,

$$\tau(t) = (t + r_1 - 1, t + r_2 - 1, \dots, t + r_v - 1). \quad (4)$$

Иногда удобно вектор $\tau(t)$ рассматривать как множество его координат. Будем говорить, что векторы $\bar{x}(t_1)$ и $\bar{x}(t_2)$ или $\tau(t_1)$ и $\tau(t_2)$ пересекаются или сцеплены, если $\tau(t_1) \cap \tau(t_2) \neq \emptyset$.

Рассмотрим множество пар $\gamma = (u; (t_1, \dots, t_u))$. Определим множества $\mathcal{D}_N(l)$, $\Gamma_N(L_N)$, полагая

$$\mathcal{D}_N(l) \subseteq \{\gamma: u = l, 1 \leq t_1 < \dots < t_l \leq n\}, \quad \Gamma_N(L_N) = \bigcup_{l=1}^{L_N} \mathcal{D}_N(l).$$

Приведем условия асимптотической нормальности сумм

$$S_N = \sum_{\gamma \in \Gamma_N(L_N)} \eta_\gamma,$$

где $\eta_\gamma = g_l(\bar{x}(t_1), \dots, \bar{x}(t_l))$, $|g_l(\bar{x}(t_1), \dots, \bar{x}(t_l))| \leq 1$ при любых значениях $\bar{x}(t_k)$, $k = 1, \dots, l$; векторы $\bar{x}(t)$ определены равенствами (1) и (2). Положим

$$V \subset \Gamma_N(L_N), \quad G(\gamma) = \bigcup_{k=1}^u \tau(t_k), \quad G_V = \bigcup_{\gamma \in V} G(\gamma).$$

Определим множество F_V , полагая

$$F_V = \{\gamma: \text{найдется } \gamma' \in V \text{ такое, что } G(\gamma) \cap G(\gamma') \neq \emptyset\}. \quad (5)$$

Отметим, что x_t с $t \notin F_V$ не зависят от $\{x_t: t \in V\}$.

Будем предполагать, что при любом натуральном m найдется такая величина Q_m , не зависящая от V , что при любом V с $|V| \leq m$

$$H_V = \sum_{\gamma \in F_V} \mathbf{E}(|\eta_\gamma| \mid x_t, t \in G_V) \leq Q_m \quad (6)$$

при любых значениях $x_t, t \in G_V$.

Теорема 1. Если при $N \rightarrow \infty$ выполняются условия (3), (6) и при некотором β , $0 < \beta \leq 2/3$, выполняются условия

$$|\Gamma_N(L_N)| \rightarrow \infty, \quad \frac{M_N^\beta Q_m^{2-\beta}}{\mathbf{D}S_N} \rightarrow 0, \quad (7)$$

где

$$M_N = \sum_{\gamma \in \Gamma_n(L_N)} \mathbf{E}|\eta_\gamma|,$$

то распределение величины $(S_N - \mathbf{E}S_N)/\sqrt{\mathbf{D}S_N}$ сходится к стандартному нормальному распределению.

Эта теорема непосредственно следует из результатов работ [8, 9].

3. Аппроксимирующие суммы

Число $\mu_0(\mathcal{B}_N)$ непоявившихся v -цепочек в n первых членах последовательности (2) можно представить в виде

$$\mu_0(\mathcal{B}_N) = \sum_{I \in \mathcal{B}_N} \chi(\bar{x}(t) \neq I, 1 \leq t \leq n), \quad I = (i_1, \dots, i_v), \quad (8)$$

где $\chi(A)$ — индикатор события A .

Для любых событий $A_1, \dots, A_n$ и любого распределения вероятностей (см. [6])

$$\mathbf{P}(\bar{A}_1 \dots \bar{A}_n) = \sum_{l=0}^n (-1)^l \sum_{\bar{i}(l) \in T(l)} \mathbf{P}(A_{t_1} \dots A_{t_l}), \quad (9)$$

где $\bar{l}(l) = (t_1, \dots, t_l)$, $T(l) = \{\bar{l}(l): 1 \leq t_1 < \dots < t_l \leq n\}$. Для величины Δ_φ^* , равной

$$\Delta_\varphi^* = \mathbf{P}(\bar{A}_1 \dots \bar{A}_n) - \sum_{l=0}^{\varphi-1} (-1)^l \sum_{\bar{l}(l) \in T(l)} \mathbf{P}(A_{t_1} \dots A_{t_l}),$$

при любом φ выполняется неравенство

$$|\Delta_\varphi^*| \leq \sum_{\bar{l}(\varphi) \in T(\varphi)} \mathbf{P}(A_{t_1} \dots A_{t_\varphi}). \quad (10)$$

Положим $A_t = \{\bar{x}(t) = I\}$. Если заданы $n + s - 1$ первых членов последовательности (1), $w = (x_1, \dots, x_{n+s-1})$, то условные вероятности событий, входящих в (9) и (10), можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\bar{A}_1 \dots \bar{A}_n \mid w) &= \chi(\bar{x}(t) \neq I, t = 1, \dots, n), \\ \mathbf{P}(A_{t_1} \dots A_{t_l} \mid w) &= \chi(\bar{x}(t_1) = \dots = \bar{x}(t_l) = I). \end{aligned}$$

Отсюда и из равенств (8), (9) и (10) получаем, что

$$\mu_0(\mathcal{B}_N) = \sum_{l=0}^{\varphi-1} \sum_{\bar{l}(l) \in T(l)} \xi_l(\bar{l}(l)) + \Delta_\varphi, \quad (11)$$

где

$$\xi_l(\bar{l}(l)) = (-1)^l \sum_{I \in \mathcal{B}_N} \chi(\bar{x}(t_1) = \dots = \bar{x}(t_l) = I), \quad (12)$$

$$\Delta_\varphi = \sum_{l=\varphi}^n \sum_{\bar{l}(l) \in T(l)} \xi_l(t_1, \dots, t_l), \quad |\Delta_\varphi| \leq \sum_{\bar{l}(\varphi) \in T(\varphi)} |\xi_\varphi(\bar{l}(\varphi))|. \quad (13)$$

В сумме (11) выделим слагаемые, которыми можно пренебречь. Представим множество $T(l)$ в виде объединения непересекающихся множеств

$$T(l) = T_1(l) \cup T_2(l) \cup T_3(l), \quad (14)$$

где

$$T_1(l) = \{(t_1, \dots, t_l): \tau(t_i) \cap \tau(t_j) = \emptyset \text{ при любых } i \neq j\};$$

множество $T_2(l)$ включает такие $(t_1, \dots, t_l)$, для которых среди множеств $\tau(t_1), \dots, \tau(t_l)$ найдется ровно одна пара пересекающихся множеств, а множество $T_3(l)$ включает остальные $(t_1, \dots, t_l)$. Аналогичное представление $T(l)$ использовалось в [2] для сплошных цепочек.

Представим теперь $\mu_0(\mathcal{B}_N)$ в виде

$$\mu_0(\mathcal{B}_N) = \mu_1(N) + \mu_2(N) + \mu_3(N) + \Delta_\varphi, \quad (15)$$

где Δ_φ определено равенством (13),

$$\mu_u(N) = \sum_{l=0}^{\varphi-1} \sum_{\bar{l}(l) \in T_u(l)} \xi_l(t_1, \dots, t_l), \quad u = 1, 2, 3, \quad (16)$$

$$\varphi = [v(1 + \delta) \ln N / \ln \ln N], \quad \delta > 0. \quad (17)$$

Из неравенства (10) и равенств (11)–(13) следует, что с вероятностью, равной единице,

$$|\Delta_\varphi| \leq \sum_{\bar{t}(\varphi) \in T(\varphi)} |\xi_\varphi(t_1, \dots, t_\varphi)| = \sum_{u=1}^3 \bar{\Delta}_u, \quad \bar{\Delta}_u = \Delta_u(\varphi), \quad (18)$$

где

$$\Delta_u(l) = \sum_{\bar{t}(l) \in T_u(l)} |\xi_l(t_1, \dots, t_l)|. \quad (19)$$

Следующие леммы 1 и 2, содержащие оценки $\mathbf{E}\Delta_l(u)$, $u = 1, 2, 3$, доказываются аналогично леммам 1–3 работы [2].

Лемма 1. При любом множестве $\mathcal{B}_N$ в условиях (3) выполняются неравенства

$$\mathbf{E}\Delta_1(l) \leq \frac{(\alpha_N A^v)^l}{l!} |\mathcal{B}_N|, \quad \mathbf{E}\Delta_2(l) \leq C l(l-1) \frac{(\alpha_N A^v)^l}{l!}, \quad \mathbf{E}\Delta_3(l) \leq C \frac{c_0^l}{N},$$

где $C > 0$, $c_0 > 0$ — некоторые постоянные, величина A входит в условия (3).

Доказательство. Доказательство первого неравенства совпадает с соответствующей частью доказательства леммы 1 работы [2]. Доказательство третье неравенства с незначительными изменениями повторяет доказательства лемм 1 и 3 работы [2]. Эти изменения относятся к поправкам оценок числа слагаемых, содержащих сцепленные несплошные цепочки и влияют только на величину постоянных c_0 и C . Остановимся подробнее на втором неравенстве.

Отметим, что при сплошных цепочках две сцепленные несовпадающие цепочки имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= (x_t, \dots, x_{t+s-1}), \\ \bar{x}(t+s-u) &= (x_{t+s-u}, \dots, x_{t+2s-u-1}), \quad u = 1, 2, \dots, s-1. \end{aligned}$$

У этих цепочек ровно u общих членов. У несплошных цепочек

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= (x_{t+r_1-1}, \dots, x_{t+r_v-1}), \\ \bar{x}(t+r_v-a) &= (x_{t+r_v-a+r_1-1}, \dots, x_{t+2r_v-a-1}) \end{aligned}$$

число u общих членов существенно зависит от чисел $(r_1, \dots, r_v)$. Цепочки не пересекаются при $a \geq r_v = s$, но могут не пересекаться и при $a < r_v$.

Так же, как и при доказательстве леммы 2 работы [2], оценим сначала вероятность $\mathbf{P}\{\bar{x}(t_1) = \dots = \bar{x}(t_l) = I\}$, когда сцеплены цепочки $\bar{x}(t_1)$, $\bar{x}(t_2)$ и число общих членов последовательности (1) в этих цепочках равно u . Из условий (3) при $(t_1, \dots, t_l) \in T_2(l)$ следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\bar{x}(t_1) = \dots = \bar{x}(t_l) = I\} &= \mathbf{P}\{\bar{x}(t_1) = \bar{x}(t_2) = I\} \\ &= \mathbf{P}\{\bar{x}(t_3) = \dots = \bar{x}(t_l) = I\} \leq \left(\frac{A}{N}\right)^{2v-u} \left(\frac{A^v}{N^v}\right)^{l-2}. \end{aligned} \quad (20)$$

В этом случае число наборов I , при которых эти вероятности отличны от 0 (пересечение цепочек не приводит к противоречию), при любом $\mathcal{B}_N$ не превосходит N^{v-u} ; число различных значений u не превосходит $s-1$ и каждое может встретиться в данной паре

цепочек не более v раз. Число слагаемых в сумме, определяющей $\Delta_l(2)$ с фиксированной разностью $t_2 - t_1$, не превосходит $\binom{n}{l-1} \leq n^{l-1}/(l-1)!$; число способов выбора сцепленной пары не превосходит $(l-1)s$. Из этих замечаний и условий (3) следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \Delta_2(l) &\leq s^2 v(v-1) \frac{n^{l-1}}{(l-1)!} \left(\frac{A}{N}\right)^{2v-u} \left(\frac{A^v}{N^v}\right)^{l-2} N^{v-u} \\ &= s^2 v(l-1) \left(\frac{A^v n}{N^v}\right)^{l-1} \frac{1}{(l-1)!}. \end{aligned}$$

Отсюда следует второе неравенство леммы 1.

Лемма 2. Если выполнены условия (3) и φ определено равенством (17), то при любом $\mathcal{B}_N$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \Delta_1(\varphi) &\leq C_1 N^{-v\Delta(1+\gamma_1(N))}, \\ \mathbf{E} \Delta_2(\varphi) &\leq C_2 N^{-v(1+\Delta)(1+\gamma_2(N))}, \\ \mathbf{E} \Delta_3(\varphi) &\leq C_3 N^{-(1+\gamma_3(N))}, \end{aligned}$$

где $\gamma_k(N) = O(h_N)$, $k = 1, 2, 3$, $h_N = \ln \ln \ln N / \ln \ln N$, C_1, C_2, C_3 — некоторые положительные постоянные.

Доказательство. Неравенства леммы 2 следуют из неравенств леммы 1, неравенства $|\mathcal{B}_N| \leq N^v$, равенства (21) и равенств

$$\begin{aligned} \ln \varphi &= \ln \ln N + O(\ln \ln \ln N), \\ \varphi \ln \varphi &= v(1 + \delta) \ln N(1 + O(h_N)). \end{aligned} \quad (21)$$

Оценим теперь величины

$$\underline{\Delta}_u = \sum_{l=0}^{\varphi-1} \Delta_u(l), \quad u = 2, 3,$$

где $\Delta_u(l)$ определены равенством (19).

Лемма 3. Если выполнены условия (3) и φ определено равенством (17), то при любых $\mathcal{B}_N$ и N

$$\mathbf{E} \underline{\Delta}_2 \leq C, \quad \mathbf{E} \underline{\Delta}_3 \leq C N^{-(1+O(1/\ln \ln N))},$$

где C — некоторая положительная постоянная.

Утверждение этой леммы следует из леммы 1 и неравенств

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \underline{\Delta}_2 &= \sum_{l=0}^{\varphi-1} \mathbf{E} \Delta_2(l) \leq C \sum_{l=0}^{\varphi-1} l(l-1) \frac{(\alpha_N A^v)^l}{l!} \leq C, \\ \mathbf{E} \underline{\Delta}_3 &= \sum_{l=0}^{\varphi-1} \mathbf{E} \Delta_3(l) \leq \frac{C}{N} \sum_{l=0}^{\varphi-1} c_0^l \leq \frac{C}{N} c_0^\varphi \leq C \left(\frac{1}{N}\right)^{1+O(\ln \ln N / \ln N)}. \end{aligned}$$

Следствие 1. При $N \rightarrow \infty$ в схеме серий (3) при любой функции $f(N) \rightarrow \infty$ случайные величины

$$\frac{\underline{\Delta}_2}{f(N)}, \quad \frac{\underline{\Delta}_3}{f(N)}, \quad \frac{\Delta_\varphi}{f(N)}, \quad \frac{\mu_0(\mathcal{B}_N) - \mu_1(N)}{f(N)}$$

сходятся по вероятности к 0.

Это утверждение следует из леммы 3, леммы 2, неравенства (18) и неравенств

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \frac{\underline{\Delta}_u}{f(N)} > \varepsilon \right\} &\leq \frac{\mathbf{E} \underline{\Delta}_u}{\varepsilon f(N)}, & u = 2, 3; \\ \mathbf{P} \left\{ \frac{\Delta_u(\varphi)}{f(N)} > \varepsilon \right\} &\leq \frac{\mathbf{E} \Delta_u(\varphi)}{\varepsilon f(N)}, & u = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Используя следствие 1, неравенства $|\mu_u(N)| \leq \underline{\Delta}(u)$, $u = 2, 3$, и неравенство (15), получаем следующее утверждение.

Следствие 2. Если в схеме серий (3) $\mathbf{D}\mu_1(N) \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$, то

$$\frac{\mu_0(\mathcal{B}_N) - \mu_1(\mathcal{B}_N)}{\sqrt{\mathbf{D}\mu_1(N)}} \rightarrow 0$$

по вероятности.

Сумма $\mu_1(N)$ оказалась аппроксимирующей для $\mu_0(\mathcal{B}_N)$. Положим

$$\mu_0^*(\mathcal{B}_N) = \mu_1(N). \quad (22)$$

Таким образом, для доказательства асимптотической нормальности $\mu_0(\mathcal{B}_N)$ нужно доказать асимптотическую нормальность $\mu_1(N)$ и то, что $\mathbf{D}\mu_1(N) \rightarrow \infty$.

4. Достаточные условия асимптотической нормальности

Будем предполагать, что в схеме серий (3) при $N \rightarrow \infty$

$$0 < b_1 \leq \frac{\mathbf{D}\mu_0^*(\mathcal{B}_N)}{|\mathcal{B}_N|} \leq b_2 < \infty, \quad |\mathcal{B}_N| \geq \varepsilon N, \quad 0 < \varepsilon < 1. \quad (23)$$

Теорема 2. В схеме серий (3) распределение случайной величины

$$\frac{\mu_1(\mathcal{B}_N) - \mathbf{E}\mu_1(N)}{\sqrt{\mathbf{D}\mu_1(N)}}$$

при $N \rightarrow \infty$ сходится к стандартному нормальному распределению, если выполнены условия (23).

Доказательство. В силу следствия 2, достаточно доказать асимптотическую нормальность величины $(\mu_0^*(\mathcal{B}_N) - \mathbf{E}\mu_0^*(\mathcal{B}_N)) / \sqrt{\mathbf{D}\mu_0^*(\mathcal{B}_N)}$.

Проверим выполнение условий теоремы 1 для сумм $S_N = \mu_1(N)$ с $L_N = \varphi - 1$, $\gamma = (1, (t_1, \dots, t_l))$, $\eta_\gamma = \xi_\gamma(t_1, \dots, t_l)$:

$$S_N = \sum_{l=0}^{\varphi-1} \sum_{\bar{t}(l) \in T_1(l)} \xi_l(t_1, \dots, t_l).$$

Из несовместности событий $(\bar{x}(t_1) = \dots = \bar{x}(t_l) = I)$, $I \in \mathcal{B}_N$, следует, что

$$|\xi_I(t_1, \dots, t_l)| = \sum_{I \in \mathcal{B}_N} \chi(\bar{x}(t_1) = \dots = \bar{x}(t_l) = I) \leq 1. \quad (24)$$

Оценим величину

$$M_N = \sum_{l=0}^{\varphi-1} \sum_{\bar{l}(l) \in T_1(l)} \sum_{I \in \mathcal{B}_N} \mathbf{E} \chi(\bar{x}(t_1) = \dots = \bar{x}(t_l) = I).$$

Из независимости векторов $\bar{x}(t_1), \dots, \bar{x}(t_l)$ следует, что

$$\sum_{I \in \mathcal{B}_N} \mathbf{E} \chi(\bar{x}(t_1) = \dots = \bar{x}(t_l) = I) = \sum_{I \in \mathcal{B}_N} \prod_{k=1}^l \mathbf{P}(\bar{x}(t_k) = I) \leq \left(\frac{A^v}{N^v} \right)^l |\mathcal{B}_N|. \quad (25)$$

Мощность $|T_1(l)|$ множества $T_1(l)$ не превосходит $\binom{n}{l} \leq n^l / l!$. Отсюда и из оценки (25) получаем, что

$$M_N \leq |\mathcal{B}_N| \sum_{l=0}^{\varphi-1} \frac{n^l}{l!} \left(\frac{A^v}{N^v} \right)^l \leq |\mathcal{B}_N| \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\bar{\alpha} A^v)^l}{l!} \leq C |\mathcal{B}_N|, \quad (26)$$

где C — некоторая положительная постоянная.

Проверим условие (6). Выберем множество V следующим образом:

$$V = \{(l_k, (t_1^{(k)}, \dots, t_{l_k}^{(k)})), k = 1, \dots, m_0\},$$

где $l_1 = \dots = l_{m_0} = \varphi - 1$, $m_0 = m$. Полученные ниже оценки левой части (6) сохраняются, если все или часть l_k будут меньше $\varphi - 1$ и $m_0 < m$. Множество F_V определяется равенством (5). Оценим сначала слагаемые в левой части (6),

$$E_l(k) = \mathbf{E}(|\xi_l(t_1, \dots, t_l)| : x_t \in G_V) = \sum_{I \in \mathcal{B}_N} \mathbf{E} \chi(\bar{x}(t_1) = \dots = \bar{x}(t_l) = I \mid x_t \in G_V),$$

у которых среди l цепочек с началами $t_1, \dots, t_l$ ровно k цепочек, например, цепочки $t_1, \dots, t_k$, содержат x_t с $t \in G_V$. Зацепившиеся с G_V цепочки независимы между собой и не зависят от $x_t, t \in G_V$. Таким образом,

$$E_l(k) \leq \left(\frac{A}{N^v} \right)^{l-k} \sum_{I \in \mathcal{B}_N} \mathbf{P}\{\bar{x}(t_1) = \dots = \bar{x}(t_k) = I \mid x_t \in G_V\} \leq \left(\frac{A}{N^v} \right)^{l-k}. \quad (27)$$

Число способов выбора цепочек $\bar{x}(t)$, у которых одной из координат является x_{t_0} , не превосходит $2s - 1$. Множество G_V содержит не более $m(\varphi - 1)v$ точек. Таким образом, число способов выбора начал $t_1, \dots, t_k$ цепочек, каждая из которых среди координат имеет координату x_t с $t \in G_V$, не превосходит $\binom{L}{k}$, $L = (2s - 1)(\varphi - 1)vm$; число способов выбора начал $t_{k+1}, \dots, t_l$ цепочек, у которых нет координаты x_t с $t \in G_V$, не превосходит $n^{l-k} / (l - k)!$; число способов выбора k сцепленных цепочек из l цепочек равно $\binom{l}{k}$. Из сделанных замечаний и оценки (27) следует оценка левой части (6):

$$H_V \leq \sum_{l=1}^{\varphi-1} \sum_{k=1}^l \binom{l}{k} \binom{L}{k} \frac{n^{l-k}}{(l-k)!} \left(\frac{\bar{\alpha} A^v}{N^v} \right)^{l-k} = \sum_{l=1}^{\varphi-1} \sum_{k=1}^l \binom{l}{k} \binom{L}{k} \frac{(\bar{\alpha} A^v)^{l-k}}{(l-k)!}.$$

Отсюда, меняя порядок суммирования по l и k , получим оценку

$$H_V \leq \sum_{k=1}^{\varphi-1} \binom{L}{k} R_k, \quad (28)$$

где

$$R_k = \sum_{l=k}^{\varphi-1} \binom{l}{k} \frac{(\bar{\alpha} A^v)^{l-k}}{(l-k)!} = \sum_{l=0}^{\varphi-k-1} \binom{l+k}{k} \frac{(\bar{\alpha}_N A^v)^l}{l!}.$$

Используя неравенства

$$\binom{l+k}{k} < \binom{\varphi}{k} < \varphi^k / k!, \quad l \leq \varphi - k - 1,$$

$$R_k < C_2 \frac{\varphi^k}{k!} \sum_{l=0}^{\varphi-k-1} \frac{(\bar{\alpha} A^v)^l}{l!} \leq C_3 \varphi^k / k!,$$

где C_2, C_3 — некоторые положительные постоянные, получим, что

$$H_V \leq C_3 \sum_{k=1}^{\varphi-1} \binom{L}{k} \frac{\varphi^k}{k!} \leq C_3 \sum_{k=0}^{\varphi-1} \frac{(\varphi^2 C_1^2)^k}{(k!)^2} \leq C_3 \frac{(\varphi^2 C_1^2)^\varphi}{(\varphi!)^2}.$$

Отсюда следует, что

$$H_V \leq c_m^\varphi = Q_m, \quad (29)$$

где c_m — некоторая положительная постоянная при заданном m . Проверим условия (7). Используя формулы (23), (26), (28) и (17), при $N \rightarrow \infty$ получим, что

$$\frac{M_N^\beta Q_m^{2-\beta}}{|\mathcal{B}_N|} \leq C \frac{|\mathcal{B}_N|^\beta c_m^{\varphi(2-\beta)}}{|\mathcal{B}_N|} \leq \frac{N^{(2-\beta)/(\ln \ln N) \ln c_0}}{|\mathcal{B}_N|^{1-\beta}} \rightarrow 0,$$

где C — некоторая положительная постоянная. Теорема доказана.

5. Асимптотические формулы для моментов

Приведем асимптотические формулы для среднего и дисперсии $\mu_0(\mathcal{B}_N)$ в случаях 1 и 2, указанных в разделе 1. Множества $\mathcal{B}_N$ в этих двух частных случаях обозначим через D_1 и D_2 соответственно:

$$D_1 = \{I = (i_1, \dots, i_s): i_1 = \dots = i_s = i, i = 1, \dots, N\},$$

$$D_2 = \{I = (i_1, i_2, i_3): i_k = 1, \dots, N, k = 1, 2, 3\}.$$

Случайные величины $\mu_0(\mathcal{B}_N)$ и $\mu_0^*(\mathcal{B}_N)$ в этих двух случаях обозначим через $\mu_0(D_1)$, $\mu_0(D_2)$ и $\mu_0^*(D_1)$, $\mu_0^*(D_2)$. Для сплошных цепочек асимптотические формулы получены в [2]. В рассматриваемом случае при $N \rightarrow \infty$, когда выполнены условия (3), эти формулы имеют следующий вид:

$$\mathbf{E} \mu_0(D_1) = N A_1(1) + \alpha_N \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (N p_i)^{s+1} e^{-\alpha_N^* (N p_i)^s} \right) + O \left(\frac{1}{N^{1-\delta}} \right),$$

$$\mathbf{D} \mu_0(D_1) = N \sigma_N^2(D_1) + O(1), \quad 0 < \delta < 1, \quad (30)$$

где

$$\sigma_N^2(D_1) = A_1(1) - A_2(1), \quad A_u(1) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{-u\alpha_N^*(Np_i)^s}, \quad u = 1, 2.$$

В равновероятном случае, когда $p_k = 1/N, k = 1, \dots, N$,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\mu_0(D_1) &= Ne^{-\alpha_N} + \alpha_N e^{-\alpha_N} + O\left(\frac{1}{N^{1-\delta}}\right), \\ \mathbf{D}\mu_0(D_1) &= Ne^{-\alpha_N}(1 - e^{-\alpha_N}) + O(1). \end{aligned} \quad (31)$$

Для несплошных 3-цепочек ($v = 3, r_2 = r, r_3 = s, 2r \neq s + 1$) с множеством

$$\mathcal{B}_N = D_2 \quad (32)$$

можно повторить вывод асимптотических формул, приведенный в [2] для сплошных цепочек. При этом существенно используются вероятности $\mathbf{P}(\bar{x}(t) = I, \bar{x}(t+u) = J)$.

Для несплошных цепочек вида (32) цепочки $\bar{x}(t) = (x_t, x_{t+r-1}, x_{t+s-1})$ и $\bar{x}(t+u) = (x_{t+u}, x_{t+u+r-1}, x_{t+u+s-1})$ сцеплены, если $u \in d = \{r-1, s-r, s-1\}$ и при этом они сцеплены ровно по одной координате. При выводе формул в [2] существенно также использовались множества $B_1(u), B_2(u)$ значений пар (I, I) и (I, J) , при которых вероятности событий $\{\bar{x}(t) = I, \bar{x}(t+u) = J\}$ положительны. Определим аналогичные множества в рассматриваемом случае, полагая

$$\begin{aligned} B_1(r-1) &= \{I: i_2 = i_1, I \in D_2\}, & B_1(s-r) &= \{I: i_3 = i_2, I \in D_2\}, \\ B_1(s-1) &= \{I: i_3 = i_1\}, & B_2(r-1) &= \{(I, J): I \neq J, i_2 = j_1\}, \\ B_2(s-r) &= \{(I, J): I \neq J, i_3 = j_2\}, & B_2(s-1) &= \{(I, J): I \neq J, i_3 = j_1\}. \end{aligned} \quad (33)$$

При любом $u \in d$

$$|B_1(u)| = N^2, \quad |B_2(u)| \leq N^5. \quad (34)$$

Отметим также, что в рассматриваемом случае

$$|T_1(l)| = \frac{n^l}{l!} - \frac{7}{2} \frac{n^{l-1}}{(l-2)!} + O\left(l^3 \frac{n^{l-2}}{(l-2)!}\right).$$

Используя эти замечания, можно повторить вывод асимптотических формул, приведенный в [2], для нашего случая.

Для несплошных 3-цепочек вида (32) при $N \rightarrow \infty$ в схеме серий (3)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\mu_0(D_2) &= N^3 A_1^*(1) - \frac{7}{2} \alpha_N A_1^*(a^2(I)) \\ &\quad + \alpha_N \left(\frac{1}{N^2} \sum_{h \in d} \sum_{I \in D_2} a_h(I, I) e^{-\alpha_N a(I)} \right) \\ &\quad + O\left(\frac{1}{N^{1-\delta}}\right), \end{aligned} \quad 0 < \delta < 1, \quad (35)$$

$$\mathbf{D}\mu_0(D_2) = N^3 \sigma_N^2(D_2) + O(N^{1+\delta}), \quad 0 < \delta < 1, \quad (36)$$

где

$$\sigma_N^2(D_2) = A_1^*(1) - A_2^*(1) - 7\alpha_N(A_1^*(a(I)))^2 + \frac{2\alpha_N}{N^5} \sum_{h \in d} \sum_{I, J \in D_2} a_h(I, J) e^{-\alpha_N(a(I)+a(J))},$$

$$a(I) = a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3}, \quad a_i = N p_i,$$

$$A_h^*(b(I)) = \frac{1}{N^3} \sum_{I \in D_2} b(I) e^{-h\alpha_N a(I)}, \quad h = 1, 2, \quad (37)$$

$$a_{r-1}(I, J) = a(I) a_{j_2} a_{j_3} \delta_{i_2 j_1}, \quad a_{s-r}(I, J) = a(I) a_{j_1} a_{j_3} \delta_{i_3 j_2}, \quad a_{s-1}(I, J) = a(I) a_{j_2} a_{j_3} \delta_{i_3 j_1}.$$

Формулы (35) и (36) при $p_k = 1/N, k = 1, \dots, N$, имеют вид

$$\mathbf{E}\mu_0(D_2) = N^3 e^{-\alpha_N} - \frac{\alpha_N}{2} e^{-\alpha_N} + O\left(\frac{1}{N^{1-\delta}}\right),$$

$$\mathbf{D}\mu_0(D_2) = N^3 e^{-\alpha_N} (1 - (1 + \alpha_N) e^{-\alpha_N}) + O(N^{1+\delta}), \quad 0 < \delta < 1. \quad (38)$$

Отметим, что в [2] приведены условия, при которых

$$\frac{1}{|\mathcal{B}_N|} \mathbf{D}\mu_0(\mathcal{B}_N) \geq \sigma_0^2 > 0.$$

При этих условиях $\sigma_N^2(D_1)$ и $\sigma_N^2(D_2)$ также отделены от 0. Будем предполагать, что

$$0 < C_1 \leq N p_k \leq C_2 < \infty, \quad k = 1, \dots, N. \quad (39)$$

Из этого ограничительного условия следует условие (39) работы [2].

Получим теперь асимптотические формулы для $\mathbf{D}\mu_0^*(D_k), k = 1, 2$. Положим

$$\underline{\Delta}_u = \sum_{l=0}^{\varphi-1} \Delta_u(l), \quad u = 2, 3, \quad (40)$$

где $\Delta_u(l)$ определено равенством (19).

Лемма 4. Если выполнены условия (39), то в схеме серий (3) при $N \rightarrow \infty$ для $\mathcal{B}_N = D_2$ или $\mathcal{B}_N = D_3$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{E}\underline{\Delta}_k^2}{\mathbf{D}\mu_0(\mathcal{B}_N)} = 0, \quad k = 2, 3; \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{E}\bar{\Delta}_k^2}{\mathbf{D}\mu_0(\mathcal{B}_N)} = 0, \quad k = 1, 2, 3,$$

где $\underline{\Delta}_k, \bar{\Delta}_k$ определены равенствами (18), (40).

Доказательство. Доказательство, так же, как и доказательство предыдущей леммы, сводится к оценке числа слагаемых с различного вида пересечениями v -цепочек. Докажем утверждение леммы для $\underline{\Delta}_2$ в случае $\mathcal{B}_N = D_1$. Представим $\underline{\Delta}_2$ в виде

$$\underline{\Delta}_2 = \sum_{i=1}^N \sum_{l=2}^{\varphi-1} \sum_{\tilde{i}(l) \in T_2(l)} \chi_i(t_1) \dots \chi_i(t_l), \quad \chi_i(t) = \chi(x_t = \dots = x_{t+s-1} = i).$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{E}(\underline{\Delta}_2)^2 = E_1 + E_2, \quad (41)$$

где

$$E_1 = \sum_{i \neq j} E(I, J), \quad E_2 = \sum_{i=1}^N E(I, I), \quad I = (i, \dots, i), \quad J = (j, \dots, j),$$

$$E(I, J) = \sum_{l=4}^{2\varphi-2} F_l(I, J), \quad F_l(I, J) = \sum_{u=0}^l \sum_l \sum_{l-u} \mathbf{E} \chi_i(t'_1) \dots \chi_i(t'_u) \chi_j(t''_1) \dots \chi_j(t''_{l-u}),$$

в суммах $\sum_l$ и $\sum_{l-u}$ суммирование проводится по $\bar{l}'(u) = (t'_1, \dots, t'_u) \in T_2(u)$ и $\bar{l}''(l-u) = (t''_1, \dots, t''_{l-u}) \in T_2(l-u)$. Цепочки с началами из $\bar{l}'(u)$ могут пересекаться с цепочками, начала которых принадлежат $\bar{l}''(l-u)$. Если пересечение есть, то при $I \neq J$ соответствующие слагаемые равны 0 и, таким образом, остаются только слагаемые с непересекающимися цепочками с началами в $\bar{l}'(u)$ и $\bar{l}''(l-u)$. Следовательно, для этих слагаемых

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \chi_i(t'_1) \dots \chi_i(t'_u) \chi_j(t''_1) \dots \chi_j(t''_{l-u}) &= \mathbf{E} \chi_i(t'_1) \dots \mathbf{E} \chi_i(t'_u) \mathbf{E} \chi_j(t''_1) \dots \mathbf{E} \chi_j(t''_{l-u}) \\ &\leq \frac{A^{s(u-2)}}{N^{s(u-2)}} \frac{A^{s+1}}{N^{s+1}} \frac{A^{s(l-u-2)}}{N^{s(l-u-2)}} \frac{A^{s+1}}{N^{s+1}} = \left(\frac{A}{N}\right)^{s(l-2)} \left(\frac{A}{N}\right)^2, \end{aligned}$$

так как сцепленные цепочки полностью не совпадают и наименьшая длина сцепленных цепочек из $T_2(u)$, $T_2(l-u)$ не меньше $s+1$. Отсюда следует, что

$$E_1 \leq N(N-1) \sum_{l=4}^{\infty} \frac{n^{l-2}}{(l-2)!} s^2 \frac{A^{s(l-2)}}{N^{s(l-2)}} \frac{A^2}{N^2} \leq A^2 \sum_{l=4}^{\infty} \frac{(\alpha_n A)^{l-2}}{(l-2)!} < \infty. \quad (42)$$

Слагаемые в суммах E_2 , образованные сцепленными цепочками, положительны. Множество s -цепочек каждого слагаемого, входящего в сумму $F_l(I, J)$, разобьем на изолированные группы сцепленных цепочек. Пусть m_k — число изолированных групп, состоящих из k цепочек, $k = 1, \dots, l$. Тогда

$$m_1 + 2m_2 + \dots + lm_l = l, \quad m_2 + \dots + m_l \geq 1. \quad (43)$$

Число способов выбора l начал s -цепочек, входящих в $F_l(I, J)$ с заданными $m_1, \dots, m_l$, не превосходит

$$\frac{n^{m_1}}{m_1!} \frac{n^{m_2} s}{m_2!} \dots \frac{n^{m_l} s^{l-1}}{m_l!}.$$

Каждое слагаемое при заданных $m_1, \dots, m_l$ не превосходит

$$C \left(\frac{1}{N^s}\right)^{m_1 + \dots + m_l} \frac{1}{N},$$

где C — положительная постоянная. Из этих оценок следует, что

$$E_2 \leq N \sum_{l=4}^{2\varphi-2} s^l \sum^* \frac{(\alpha_n A)^{m_1}}{m_1!} \dots \frac{(\alpha_n A)^{m_l}}{m_l!} \frac{1}{N},$$

где суммирование в $\sum^*$ проводится по всем $m_1, \dots, m_l$, удовлетворяющим ограничениям (43). Заменяв суммирование с ограничениями на суммирование по всем натуральным

$m_1, \dots, m_l$, получим, что

$$E_2 \leq \sum_{0=0}^{2\varphi-2} s^l \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha_N A)^m}{m!} \right)^l \leq C_1 (se^{\alpha_N A})^{2\varphi} \leq C_2 N^{\varepsilon_N}, \quad (44)$$

где C_1, C_2 — некоторые положительные постоянные, $\varepsilon_N \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Из оценок (42) и (44) следует, что при $N \rightarrow \infty$

$$\mathbf{E}\underline{\Delta}_2^2 = O(N^{\varepsilon_N}), \quad \mathbf{E}\underline{\Delta}_2^2 / \mathbf{D}\mu_0(N) \rightarrow 0.$$

Остальные утверждения леммы доказываются аналогично.

Лемма 5. Если выполнены условия (39), то в схеме серий (3) с множеством $\mathcal{B}_N = D_1$ или $\mathcal{B}_N = D_2$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{D}\Delta_\varphi}{\mathbf{D}\mu_0(\mathcal{B}_N)} = 0.$$

Доказательство. Из неравенства (18) и неравенств

$$\mathbf{D}\Delta_\varphi \leq \mathbf{E}\Delta_\varphi^2 + (\mathbf{E}\Delta_\varphi)^2 \leq 2\mathbf{E}\Delta_\varphi^2, \quad \mathbf{E}(\bar{\Delta}_{u_1}, \bar{\Delta}_{u_2}) \leq \sqrt{\mathbf{E}\bar{\Delta}_{u_1}^2 \mathbf{E}\bar{\Delta}_{u_2}^2}$$

следует, что

$$\mathbf{D}\Delta_\varphi \leq 2 \sum_{u_1, u_2=1}^3 \sqrt{\mathbf{E}\bar{\Delta}_{u_1}^2 \mathbf{E}\bar{\Delta}_{u_2}^2} = 2 \left(\sum_{u=1}^3 \sqrt{\mathbf{E}\bar{\Delta}_u^2} \right)^2.$$

Отсюда и из леммы 4 получаем, что

$$\frac{\mathbf{D}\Delta_\varphi}{\mathbf{D}\mu_0(\mathcal{B}_N)} \leq 2 \left(\sum_{u=1}^3 \sqrt{\frac{\mathbf{E}\bar{\Delta}_u^2}{\mathbf{D}\mu_0(\mathcal{B}_N)}} \right) \rightarrow 0$$

при $N \rightarrow \infty$.

Теорема 3. Если выполнены условия (39), то в схеме серий (3) при $N \rightarrow \infty$ с $\mathcal{B}_N = D_1$ или $\mathcal{B}_N = D_2$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{D}\mu_0^*(\mathcal{B}_N)}{\mathbf{D}\mu_0(\mathcal{B}_N)} = 1.$$

Доказательство. Поделим на $\mathbf{D}\mu_0(N)$ обе части равенства

$$\mathbf{D}\mu_0(\mathcal{B}_N) = \sum_{u_1, u_2=1}^4 \text{cov}(\mu_{u_1}(N), \mu_{u_2}(N)),$$

где $\mu_1(N) = \mu_0^*(\mathcal{B}_N)$, $\mu_4(N) = \Delta_\varphi$. Из получившегося равенства, используя неравенства

$$\begin{aligned} \text{cov}(\mu_{u_1}(N), \mu_{u_2}(N)) &\leq \sqrt{\mathbf{D}\mu_{u_1}(N) \mathbf{D}\mu_{u_2}(N)}, \\ \mathbf{D}\mu_u(N) &\leq 2\mathbf{E}\underline{\Delta}_u^2 \end{aligned}$$

и леммы 4 и 5, получим, что

$$1 = \frac{\mathbf{D}\mu_1(N)}{\mathbf{D}\mu_0(\mathcal{B}_N)} + \gamma_1(N) \sqrt{\frac{\mathbf{D}\mu_1(N)}{\mathbf{D}\mu_0(\mathcal{B}_N)}} + \gamma_2(N),$$

где $\gamma_1(N) \rightarrow 0$, $\gamma_2(N) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Отсюда следует утверждение теоремы.

Приведем две теоремы об асимптотической нормальности $\mu_0(\mathcal{B}_N)$.

Теорема 4. Пусть случайная величина $\mu_0(\mathcal{B}_N)$ определена по сплошным v -цепочкам (2) с $v = s$ и

$$\mathcal{B}_N = D_1 = \{(i_1, \dots, i_s): i_1 = \dots = i_s = i, i = 1, \dots, N\},$$

и пусть выполнены условия (39). Тогда в схеме серий (3) распределение случайных величин

$$\frac{\mu_0(\mathcal{B}_N) - NA_1(1)}{\sigma_N(D_1)\sqrt{N}}$$

при $N \rightarrow \infty$ сходится к стандартному нормальному распределению, $A_1(1)$, $\sigma_N^2(D_1)$ определены равенствами (30).

Теорема 5. Пусть случайная величина $\mu_0(\mathcal{B}_N)$ определена по несплошным v -цепочкам (2) с $v = 3$, $r_2 = r$, $r_3 = s$, $r \neq 2s - 1$ и

$$\mathcal{B}_N = D_2 = \{(i_1, i_2, i_3): i_k = 1, \dots, N, k = 1, 2, 3\}$$

и выполнены условия (39). Тогда в схеме серий (3) распределение случайных величин

$$\frac{\mu_0(\mathcal{B}_N) - N^3 A_1^*(1)}{\sigma_N(D_2)\sqrt{N}}$$

при $N \rightarrow \infty$ сходится к стандартному нормальному распределению, $A_1^*(1)$, $\sigma_N^*(D_2)$ определены равенством (37).

Утверждения этих теорем следуют из теоремы 2, условия которой в рассматриваемых случаях проверяются при помощи теоремы 3, асимптотических формул для $\mathbf{E}\mu_0(\mathcal{B}_N)$, $\mathbf{D}\mu_0(\mathcal{B}_N)$, лемм 1–3 и равенства

$$\mathbf{E}\mu_0(\mathcal{B}_N) - \mathbf{E}\mu_1(N) = \mathbf{E}\mu_2(N) + \mathbf{E}\mu_3(N) + \mathbf{E}\Delta_\varphi.$$

Список литературы

1. Тихомирова М. И., Об асимптотической нормальности числа непоявившихся s -цепочек. *Дискретная математика* (1992) **4**, №2, 122–129.
2. Тихомирова М. И., Чистяков В. П., Об асимптотике моментов числа непоявившихся s -цепочек. *Дискретная математика* (1997) **9**, №1, 11–21.
3. Тихомирова М. И., *Предельные теоремы для числа непоявившихся s -цепочек*, Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. МИЭМ, Москва, 1998.
4. Михайлов В. Г., Асимптотическая нормальность разделимых статистик от частот m -цепочек. *Дискретная математика* (1989) **1**, №4, 92–103.
5. Тихомирова М. И., Предельные распределения числа непоявившихся цепочек одинаковых исходов. *Дискретная математика* (2008) **20**, №3, 40–46.
6. Феллер В., *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, **1**. Мир, Москва, 1984.
7. Бернштейн С. Н., *Собрание сочинений*, **4**. Наука, Москва, 1964.
8. Janson S., Normal convergence by higher semiinvariants with application to sums of dependent random variables and random graphs. *Ann. Probab.* (1988) **16**, №1, 305–312.
9. Михайлов В. Г., Об одной теореме Янсона. *Теория вероятностей и ее применения* (1991) **36**, 168–170.

Статья поступила 12.02.2009.