Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. И. Селиванов, Об одном классе статистик полиномиальных выборок, *Дискрет. матем.*, 2009, том 21, выпуск 2, 126–137

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1052>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 12:46:17

Об одном классе статистик полиномиальных выборок

© 2009 г. Б. И. Селиванов

Рассматриваются $M \geq 1$ независимых выборок, каждая из которых есть реализация некоторой полиномиальной схемы. Число исходов N и число выборок M фиксированы, объемы выборок неограниченно растут. Изучаются асимптотические свойства статистик вида $g(\tilde{\xi})$, где $g(\bar{x})$ — дифференцируемая функция MN вещественных переменных, $\tilde{\xi}$ — вектор относительных частот исходов в выборках. Статистики такого рода играют важную роль в прикладном статистическом анализе.

В работе расширены возможности известного δ -метода (метода линеаризации) в случае полиномиальных выборок. Доказана асимптотическая нормальность и сходимость по распределению статистик $g(\tilde{\xi})$ к квадратичным формам от нормальных случайных величин (как для фиксированных вероятностей исходов в случае основной гипотезы, так и в случае континуальных альтернатив к ней). Указаны условия обоих типов сходимости.

Работа выполнена при поддержке программой РАН «Современные проблемы теоретической математики» и гранта НШ 4129.2006.1 Совета по грантам при Президенте РФ для поддержки ведущих научных школ.

1. Введение

Рассмотрим $M \geq 1$ выборки $S_1, \dots, S_M$, каждая из которых есть последовательность независимых испытаний с одним и тем же конечным множеством исходов $\{1, \dots, N\}$. Если $M \geq 2$, то предполагаем, что выборки независимы друг от друга. Объемы выборок равны $n_1, \dots, n_M$ соответственно. Будем использовать обозначения

$$\bar{n} = (n_1, \dots, n_M), \quad n = \sum_{k=1}^M n_k, \quad n_0 = \min\{n_1, \dots, n_M\}.$$

Предположение, согласно которому вероятности появления исхода i в каждом испытании выборки S_k равны

$$p_{i,k} \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad \sum_{i=1}^N p_{i,k} = 1, \quad k = 1, \dots, M, \quad (1)$$

назовем гипотезой H . Следовательно, в случае справедливости гипотезы H k -я из рассматриваемых выборок, $k = 1, \dots, M$, представляет собой реализацию полиномиальной

схемы с вероятностями исходов, определяемыми вектором $\bar{p}_k = (p_{1,k}, \dots, p_{N,k})$. Введем обозначение

$$\bar{p} = (\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_M) = (p_{1,1}, \dots, p_{N,1}, \dots, p_{1,M}, \dots, p_{N,M}).$$

Определим множество возможных альтернатив гипотезе H . Рассмотрим M последовательностей полиномиальных схем

$$\bar{\pi}_k = (\bar{p}_k(1), \dots, \bar{p}_k(n_k)), \quad k = 1, \dots, M,$$

где для $t = 1, 2, \dots, n_k$ и $k = 1, \dots, M$

$$\bar{p}_k(t) = (p_{1,k}(t), \dots, p_{N,k}(t)), \quad p_{i,k}(t) \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad \sum_{i=1}^N p_{i,k}(t) = 1, \quad (2)$$

и компоненты вектора $\bar{p}_k(t)$ могут зависеть от n_k (в этом случае имеет место схема серий). Будем говорить, что в выборке S_k выполняется (простая) гипотеза $H(\bar{\pi}_k)$, если в ее t -м испытании реализуется полиномиальная схема, вероятности исходов которой задаются вектором (2). В случае, если выполняются равенства

$$\bar{p}_k(1) = \bar{p}_k(2) = \dots = \bar{p}_k(n_k) = \bar{p}_k, \quad \bar{p}_k = (p_{1,k}, \dots, p_{N,k}), \quad k = 1, \dots, M,$$

справедлива гипотеза H . В противном случае будем говорить об альтернативе основной гипотезе H , определяемой последовательностями $\bar{\pi}_k$. Эту альтернативу будем обозначать $H(\bar{\pi})$. В настоящей работе в качестве альтернатив гипотезе H будут рассматриваться лишь те, которые контигуальны к H в смысле Ле Кама [1] (см. (6)).

Пусть $v_{i,k}$ — частота и $\xi_{i,k} = v_{i,k}/n_k$ — относительная частота исхода i в выборке S_k , $i = 1, \dots, N$, $k = 1, \dots, M$. Вектор, компонентами которого являются величины $\xi_{i,k}$, запишем в виде

$$\bar{\xi} = (\xi_{1,1}, \dots, \xi_{N,1}, \dots, \xi_{1,M}, \dots, \xi_{N,M}).$$

В работе в предположении, что объемы всех выборок неограниченно растут (и, следовательно, $n_0 \rightarrow \infty$), а N и M фиксированы, рассматриваются некоторые асимптотические свойства M -выборочных статистик вида $g(\bar{\xi})$, где $g(\bar{x})$ — вещественнозначная дифференцируемая функция MN вещественных переменных, которая определена в MN -мерном вещественном единичном кубе

$$K_{M,N} = \{\bar{x}: \bar{x} = (x_{1,1}, \dots, x_{N,1}, \dots, x_{1,M}, \dots, x_{N,M})\}$$

где $0 \leq x_{i,k} \leq 1$, $i = 1, \dots, N$, $k = 1, \dots, M$. Точки $(x_{1,1}, \dots, x_{N,M})$ куба $K_{M,N}$ будем обозначать $\bar{x}$. Класс указанных функций обозначим $C_{M,N}$.

Статистики такого рода играют важную роль в прикладном статистическом анализе. В частности, статистиками указанного вида в случае $M = 1$ является известная статистика χ^2 К. Пирсона (см. [2], §30.1) и статистика χ^2 , используемая для проверки независимости признаков в таблицах сопряженности признаков ([2], §30.5). В случае $M > 1$ в этот класс (с некоторыми оговорками) можно включить статистику χ^2 , применяемую для проверки статистической однородности выборок. О статистике χ^2 как критерии однородности см. [2], §30.6. В случае одной выборки к рассматриваемому классу статистик принадлежит семейство статистик, рассматриваемое в [3] и [4].

Цель настоящей работы — расширить возможности так называемого δ -метода (см., например, [5], §6а.2), восходящего к Р. Мизесу, в случае статистик $g(\bar{\xi})$ полиномиальных

выборок. Сообщение о предварительных результатах настоящей работы опубликовано в [6].

Работа состоит из трех параграфов. В параграфе 2 приведено несколько лемм, включая важную лемму 4, в которой указаны условия равенства нулю или положительности некоторой суммы. Эта лемма играет существенную роль при доказательстве четырех предельных теорем, приведенных в параграфе 3. Все эти теоремы доказываются с использованием δ -метода. Теорема 1, в которой идет речь об асимптотической нормальности статистик $g(\bar{\xi})$ в случае справедливости гипотезы H , является, по существу, простым примером использования δ -метода. Доказательства теорем 2–4 иллюстрируют новые возможности δ -метода применительно к статистикам полиномиальных выборок. В теореме 2 доказывается асимптотическая нормальность $g(\bar{\xi})$ в случае континуальных альтернатив к гипотезе H . В теоремах 3 и 4 рассматривается сходимость по распределению статистик $g(\bar{\xi})$ к квадратичным формам от нормальных случайных величин. Эти случайные величины имеют нулевые средние значения, если выполняется гипотеза H (теорема 3), а в общем случае ненулевые средние значения в случае близких альтернатив к гипотезе H (теорема 4). Условия, при которых имеет место первый или второй тип сходимости статистик $g(\bar{\xi})$, находятся с помощью леммы 4 из параграфа 2.

2. Вспомогательные результаты

Лемма 1. *Если верна гипотеза H , то случайный вектор*

$$\bar{\xi}_0 = (\xi_{1,1}^{(0)}, \dots, \xi_{N,1}^{(0)}, \dots, \xi_{M,1}^{(0)}, \dots, \xi_{N,M}^{(0)})$$

с компонентами

$$\xi_{i,k}^{(0)} = \sqrt{n_k}(\xi_{i,k} - p_{i,k}), \quad i = 1, \dots, N, \quad k = 1, \dots, M, \quad (3)$$

имеет нулевой вектор средних значений и ковариационную матрицу Σ блочно-диагонального вида

$$\Sigma = \text{diag}(\Sigma_1, \dots, \Sigma_M), \quad (4)$$

где

$$\Sigma_k = \|\sigma_{i,j}^{(k)}\|_{i,j=1}^N, \quad \sigma_{i,j}^{(k)} = p_{i,k}(\delta_{i,j} - p_{j,k}), \quad i, j = 1, \dots, N, \quad k = 1, \dots, M, \quad (5)$$

$\delta_{i,j}$ — символ Кронекера, при $n_0 \rightarrow \infty$ вектор $\bar{\xi}_0$ сходится по распределению к нормальному случайному вектору $\bar{\eta} = (\eta_{1,1}, \dots, \eta_{N,1}, \dots, \eta_{1,M}, \dots, \eta_{N,M})$, который, как и $\bar{\xi}_0$, имеет нулевой вектор средних значений и ковариационную матрицу Σ , определяемую формулами (4) и (5).

Утверждение леммы следует из независимости выборок $S_1, \dots, S_M$ и многомерной центральной предельной теоремы с учетом известных фактов, связанных с полиномиальным распределением.

Лемма 2. *Пусть верна альтернатива $H(\bar{\pi})$, все вероятности (1) положительны и выполняются условия*

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^{n_k} \sum_{i=1}^N (p_{i,k}(t) - p_i)^2 / p_i < \infty, \quad k = 1, \dots, M. \quad (6)$$

Тогда случайный вектор

$$\bar{\xi}_1 = (\xi_{1,1}^{(1)}, \dots, \xi_{N,1}^{(1)}, \dots, \xi_{1,M}^{(1)}, \dots, \xi_{N,M}^{(1)})$$

с компонентами

$$\xi_{i,k}^{(1)} = (1/\sqrt{n_k}) \left(v_{i,k} - \sum_{t=1}^{n_k} p_{i,k}(t) \right), \quad i = 1, \dots, N, \quad k = 1, \dots, M, \quad (7)$$

при $n_0 \rightarrow \infty$ сходится по распределению к MN -мерному нормальному случайному вектору $\bar{\eta}$, определенному в формулировке леммы 1.

Доказательство леммы 2 аналогично доказательству теоремы 7.2 в [9] или леммы 3 в [10].

Замечание 1. Смысл условий (6) состоит в том, что в случае их выполнения альтернатива $H(\bar{\pi})$ будет контигуальна к H (см. [9], §7).

Сформулируем также в виде отдельной леммы следующее простое утверждение. Положим

$$\lambda_{i,k}(n_k) = (1/\sqrt{n_k}) \sum_{t=1}^{n_k} (p_{i,k}(t) - p_{i,k}), \quad i = 1, \dots, N, \quad k = 1, \dots, M. \quad (8)$$

Лемма 3. Для величин (8) в схеме серий выполняются соотношения

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} \lambda_{i,k}(n_k) = \lambda_{i,k}, \quad i = 1, \dots, N, \quad k = 1, \dots, M, \quad (9)$$

тогда и только тогда, когда вероятности $p_{i,k}(t)$ имеют вид

$$p_{i,k}(t) = p_{i,k} + \frac{\lambda_{i,k}}{\sqrt{n_k}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n_k}}\right), \quad t = 1, \dots, n_k, \quad i = 1, \dots, N, \quad k = 1, \dots, M, \quad (10)$$

где $\lambda_{i,k}$ — константы, не зависящие от n_k .

Доказательство. Если в схеме серий существуют пределы (9), то при $n_k \rightarrow \infty$ для $k = 1, \dots, M$ выполняются равенства

$$\sqrt{n_k}(p_{i,k}(t) - p_{i,k}) = \lambda_{i,k} + o(1), \quad i = 1, \dots, N,$$

откуда следует (10). Верно и обратное.

Замечание 2. Вероятности (10) определяют так называемые гипотезы, близкие к H .

Докажем, наконец, следующее утверждение.

Лемма 4. Пусть

$$a = \sum_{k=1}^M b_k \left(\sum_{i=1}^N p_{i,k} g_{i,k}^2 - \left(\sum_{i=1}^N p_{i,k} g_{i,k} \right)^2 \right), \quad (11)$$

где b_k — положительные числа, а $g_{i,k}$ — произвольные вещественные числа, $p_{i,k}$ — вероятности (1), $i = 1, \dots, N$, $k = 1, \dots, M$. Пусть

$$U_k = \{i: p_{i,k} > 0, i = 1, \dots, N\}, \quad k = 1, \dots, M. \quad (12)$$

Тогда выполняется неравенство $a \geq 0$, равенство $a = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$g_{i,k} = \gamma_k, \quad i \in U_k, \quad k = 1, \dots, M, \quad (13)$$

γ_k — константа, не зависящая от i .

Доказательство. Запишем формулу (11) в виде

$$a = \sum_{k=1}^M b_k a_k, \quad (14)$$

где

$$a_k = \sum_{i=1}^N p_{i,k} g_{i,k}^2 - \left(\sum_{i=1}^N p_{i,k} g_{i,k} \right)^2, \quad k = 1, \dots, M. \quad (15)$$

Используя неравенство Коши–Буняковского, находим, что для $k = 1, \dots, M$

$$\left(\sum_{i=1}^N p_{i,k} g_{i,k} \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^N \sqrt{p_{i,k}} \sqrt{p_{i,k} g_{i,k}} \right)^2 \leq \sum_{i=1}^N p_{i,k} \sum_{i=1}^N p_{i,k} g_{i,k}^2 = \sum_{i=1}^N p_{i,k} g_{i,k}^2.$$

Это ввиду (1) доказывает неотрицательность величин (15). Теперь из (14) и положительности величин b_k , $k = 1, \dots, M$, следует неравенство $a \geq 0$.

Далее, рассмотрим k -ю, $k = 1, \dots, M$, из величин (15) и заметим, что согласно условию равенства в неравенстве Коши–Буняковского (см., например, [7], с. 80) соотношение $a = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда найдутся такие числа λ и μ , не зависящие от i и не равные одновременно нулю, что

$$\lambda g_{i,k} \sqrt{p_{i,k}} + \mu \sqrt{p_{i,k}} = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (16)$$

Число λ нулю равняться не может. В противном случае $\mu \neq 0$ и для рассматриваемого k вероятности $p_{i,k}$, $i = 1, \dots, N$, равны нулю, что ввиду (1) невозможно. Отсюда вытекает, что условие (16) равносильно условию

$$g_{i,k} \sqrt{p_{i,k}} = -\frac{\mu}{\lambda} \sqrt{p_{i,k}}, \quad i = 1, \dots, N,$$

которое, в свою очередь, равносильно утверждению леммы.

3. Пределные теоремы для статистик $g(\bar{\xi})$

Вспомнив обозначения, введенные в параграфе 1, положим

$$\alpha_k(n) = n_k/n, \quad k = 1, \dots, M. \quad (17)$$

В дальнейшем будем предполагать существование пределов

$$\lim_{n_0 \rightarrow \infty} \alpha_k(n) = \alpha_k > 0, \quad k = 1, \dots, M, \quad \sum_{k=1}^M \alpha_k = 1. \quad (18)$$

Следующее предложение служит отправной точкой наших дальнейших рассуждений.

Теорема 1. Если вероятности исходов в выборках $S_1, \dots, S_M$ определяются гипотезой H , существуют пределы (18), $g(\bar{x}) \in C_{M,N}$ и положительна величина

$$\sigma = \sum_{k=1}^M (1/\alpha_k) \left(\sum_{i=1}^N p_{i,k} g_{i,k}^2 - \left(\sum_{i=1}^N p_{i,k} g_{i,k} \right)^2 \right), \quad \sigma > 0, \quad (19)$$

где

$$g_{i,k} = \left. \frac{\partial}{\partial x_{i,k}} g(\bar{x}) \right|_{\bar{x}=\bar{p}}, \quad (20)$$

то при $n_0 \rightarrow \infty$ случайная величина

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\sigma}} (g(\bar{\xi}) - g(\bar{p})) \quad (21)$$

сходится по распределению к стандартной нормальной случайной величине, где векторы $\bar{\xi}$ и $\bar{p}$ определены в параграфе 1.

Доказательство. Разложим функцию $g(\bar{x})$ в многомерный ряд Тейлора в точке $\bar{x} = \bar{p}$ и, как при доказательстве теоремы 6а.2 (II) в книге [5], с учетом обозначений (17) и леммы 1 получим равенство

$$\sqrt{n} (g(\bar{\xi}) - g(\bar{p})) = \sum_{k=1}^M \frac{1}{\sqrt{\alpha_k(n)}} \sum_{i=1}^N g_{i,k} \sqrt{n_k} (\xi_{i,k} - p_{i,k}) + o_P(1), \quad (22)$$

где вектор $\bar{\xi}$ определен в параграфе 1, $g_{i,k}$ — производные (20) и $o_P(1)$ — случайная величина, которая при $n_0 \rightarrow \infty$ сходится по вероятности к нулю. Согласно лемме 1, сумма из правой части (22) является линейной комбинацией компонент асимптотически нормального случайного вектора $\bar{\xi}_0$ с компонентами (3). Отсюда с учетом (18) и вида ковариационной матрицы вектора $\bar{\xi}_0$, определяемой равенствами (4) и (5), следует, что эта сумма при $n_0 \rightarrow \infty$ также асимптотически нормальна с параметрами $(0, \sigma)$. Для завершения доказательства теоремы 1 теперь достаточно воспользоваться предложением (Xb) в [5] на с. 118.

Замечание 3. Если $M = 1$, то ввиду асимптотической нормальности случайного вектора $(\sqrt{n_1}(\xi_{1,1} - p_{1,1}), \dots, \sqrt{n_1}(\xi_{N,1} - p_{N,1}))$ теорема 1 есть просто следствие леммы 1 и упомянутой теоремы ба.2 (II) из [5]. В случае $M > 1$ это уже не так. Однако теореме ба.2 (II) можно без труда обобщить и сформулировать так, чтобы она была непосредственно применима к нескольким асимптотически нормальным векторным статистикам, относящимся к независимым выборкам.

Замечание 4. Для дисперсии суммы из правой части (22) ввиду (5) справедливо равенство

$$\begin{aligned} \mathbf{D} \left(\sum_{k=1}^M (1/\sqrt{\alpha_k}(n)) \sum_{i=1}^N g_{i,k} \sqrt{n_k} (\xi_{i,k} - p_{i,k}) \right) \\ = \sum_{k=1}^M (1/\sqrt{\alpha_k}(n)) \left(\sum_{i=1}^N g_{i,k}^2 p_{i,k} (1 - p_{i,k}) - \sum_{i,j=1, i \neq j}^N g_{i,k} g_{j,k} p_{i,k} p_{j,k} \right). \end{aligned}$$

Отсюда и из (18) следует, что величина (19) есть предел при $n_0 \rightarrow \infty$ дисперсии случайной величины, представляющей собой сумму из правой части (22). Для $M = 1$ сумма (19) представляет собой частный случай выражения (ба.2.6) в [5] на с. 337 для произвольных асимптотически нормальных случайных величин. Условие равенства величины (19) нулю определяется леммой 4 и заключается в том, что производные (20) постоянны на множествах (12). Условие $\sigma = 0$ в случае $M = 1$ для статистики χ^2 К. Пирсона исследовано автором в [8]. В общем случае подобное условие неизвестно.

Прежде, чем двигаться дальше, поясним смысл условия $n_0 \rightarrow \infty$, которое присутствует во всех предельных теоремах, рассматриваемых в работе. Оно означает, что сходимость по распределению случайных величин, о которых идет речь, имеет место для произвольных последовательностей $\{\bar{n}\}$ таких, что $n_0 \rightarrow \infty$. Напомним, что $\{\bar{n}\}$ есть вектор, компонентами которого являются объемы соответствующих выборок, а n_0 — минимальный из этих объемов.

Теперь рассмотрим асимптотическое поведение статистики (21) при альтернативах $H(\bar{\pi})$, контигуальных к гипотезе H .

Теорема 2. Пусть $g(\bar{x}) \in C_{M,N}$, все вероятности (1) положительны, для выборок $S_1, \dots, S_M$ справедлива альтернатива $H(\bar{\pi})$ гипотезе H , определяемая последовательностями $\bar{\pi}_k$ векторов (2), причем для векторов (2) выполняются соотношения (6), существует предел

$$\lim_{n_0 \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^M (1/\alpha_k(n_k)) \sum_{i=1}^N \lambda_{i,k}(n_k) g_{i,k} = m, \quad (23)$$

где $g_{i,k}$ — производные (20) и величины $\lambda_{i,k}(n_k)$ определены равенствами (8), сумма (19) положительна и, наконец, существуют пределы (18).

Тогда при $n_0 \rightarrow \infty$ случайная величина (21) асимптотически нормальна с параметрами $(m, 1)$.

Доказательство. Зафиксируем произвольную последовательность $\{\bar{n}\}$, для которой соответствующая последовательность $\{n_0\}$ стремится к бесконечности. Заметим, что это условие будет выполняться и для бесконечных подпоследовательностей $\{\bar{n}\}$. В дальнейшем указанное условие на $\{\bar{n}\}$ для краткости будем опускать.

Компоненты (3) и (7) случайных векторов $\bar{\xi}_0$ и $\bar{\xi}_1$, соответственно, связаны равенствами

$$\xi_{i,k}^{(0)} = \xi_{i,k}^{(1)} + \lambda_{i,k}(n_k), \quad i = 1, \dots, N, \quad k = 1, \dots, M. \quad (24)$$

Используя неравенство Коши–Буняковского и условие (6), находим, что существует константа $K > 0$ такая, что для всех членов последовательности $\{\bar{n}\}$ выполняются неравенства $\lambda_{i,k}(n_k) \leq K, i = 1, \dots, N, k = 1, \dots, M$. Следовательно, из любой бесконечной последовательности $\{\bar{n}'\}$, извлеченной из исходной последовательности $\{\bar{n}\}$, можно выбрать бесконечную подпоследовательность $\{\bar{n}''\}$, для которой существуют пределы

$$\lim_{n''_0 \rightarrow \infty} \lambda_{i,k}(n''_k) = \lambda_{i,k} < \infty, \quad i = 1, \dots, N, \quad k = 1, \dots, M, \quad (25)$$

где n''_k — k -я компонента вектора $\bar{n}''$. При этом из (18), (23) и (25) получаем равенство

$$\sum_{k=1}^M \frac{1}{\alpha_k} \sum_{i=1}^N \lambda_{i,k} g_{i,k} = m. \quad (26)$$

Для каждого $\bar{n} \in \{\bar{n}''\}$ выполняется альтернатива $H(\bar{\pi})$ гипотезе H , определяемая последовательностями $\bar{\pi}_k$ векторов (2). Когда $\bar{n}$ пробегает подпоследовательность $\{\bar{n}''\}$ (при этом $n''_0 \rightarrow \infty$), то, согласно лемме 2, ввиду выполнения условий теоремы 2 и справедливости альтернативы $H(\bar{\pi})$, случайный вектор $\bar{\xi}_1$ с компонентами (7) сходится по распределению к MN -мерному нормальному случайному вектору с нулевым вектором средних значений и ковариационной матрицей (4). При этом, ввиду равенств (24), имеет место сходимость по распределению

$$\bar{\xi}_0 \Rightarrow \bar{\eta}_0 = (\eta_{1,1}^{(0)}, \dots, \eta_{N,1}^{(0)}, \dots, \eta_{1,M}^{(0)}, \dots, \eta_{N,M}^{(0)}), \quad (27)$$

где $\bar{\eta}_0$ — MN -мерный нормальный случайный вектор с ковариационной матрицей (4) и средними значениями компонент

$$\mathbf{E} \bar{\eta}_{i,k}^{(0)} = \lambda_{i,k}, \quad i = 1, \dots, N, \quad k = 1, \dots, M. \quad (28)$$

Теперь, разлагая $g(\bar{x})$ в многомерный ряд Тейлора в точке $\bar{x} = \bar{p}$, получим, что

$$g(\bar{x}) - g(\bar{p}) = \sum_{k=1}^M \sum_{i=1}^N g_{i,k}(x_{i,k} - p_{i,k}) + (1/2) \Theta \|\bar{x} - \bar{p}\|, \quad (29)$$

где

$$\|\bar{x} - \bar{p}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^M \sum_{i=1}^N (x_{i,k} - p_{i,k})^2}$$

и $\Theta \rightarrow 0$, когда $\bar{x} \rightarrow \bar{p}$. Заменяем в (29) переменные $x_{i,k}$ на соответствующие случайные величины $\xi_{i,k}$, определенные в параграфе 1, и умножив обе части полученного равенства на $\sqrt{n''}$, с учетом (3), найдем, что

$$\sqrt{n''}(g(\bar{\xi}) - g(\bar{p})) = \sum_{k=1}^M (1/\alpha_k(n'')) \sum_{i=1}^N g_{i,k} \xi_{i,k}^{(0)} + \frac{1}{2} \Theta^* \sqrt{\sum_{k=1}^M (n''/n''_k) \sum_{i=1}^N (\xi_{i,k}^{(0)})^2}. \quad (30)$$

С помощью стандартных рассуждений (см. [5], с. 336) можно убедиться, что при $n_0'' \rightarrow \infty$ случайная величина Θ^* сходится по вероятности к нулю. Учитывая указанную выше асимптотическую нормальность случайного вектора $\tilde{\xi}_0$ и существование пределов (18), приходим к выводу, что случайная величина

$$\sqrt{\sum_{k=1}^M (n''/n_k'') \sum_{i=1}^N (\xi_{i,k}^{(0)})^2}$$

при $n_0'' \rightarrow \infty$ имеет некоторое предельное распределение. Поэтому второе выражение в правой части (30) сходится по вероятности к нулю. Принимая во внимание этот факт и соотношения (18) и (27), получаем сходимость по распределению

$$\sqrt{n''}(g(\tilde{\xi}) - g(\bar{p})) \Rightarrow \sum_{k=1}^M (1/\alpha_k) \sum_{i=1}^N g_{i,k} \eta_{i,k}^{(0)}. \quad (31)$$

Ввиду (26) и (28), математическое ожидание суммы из правой части (31) равно m , а дисперсия этой суммы есть σ , поскольку ковариационной матрицей вектора $\tilde{\eta}_0$ является матрица (4).

Итак, когда $\tilde{n}$ пробегает $\{\tilde{n}''\}$, при $n_0'' \rightarrow \infty$ случайная величина $\sqrt{n''}(g(\tilde{\xi}) - g(\bar{p}))$ асимптотически нормальна с параметрами (m, σ) , и это верно для любой подпоследовательности $\{\tilde{n}''\}$. Поэтому мы можем применить теорему о сходимости вероятностных мер (см., например, [11], с. 27) и, как в случае теоремы 1, используя предложение (Xb) из [5] на с. 118, завершить доказательство теоремы.

Замечание 5. Теорема 2 содержит в качестве частного случая асимптотическую нормальность статистики (21) в случае близких альтернатив, определяемых вероятностями вида (10).

Во второй части параграфа 3 будет рассмотрено асимптотическое поведение распределения $g(\tilde{\xi})$ в случае, когда величина (19) равна нулю. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть:

- (1) функция $g(\bar{x}) \in C_{M,N}$ имеет непрерывные частные производные второго порядка в окрестности точки $\bar{x} = \bar{p}$;
- (2) вероятности исходов в каждой из выборок $S_1, \dots, S_M$ определяются гипотезой H ;
- (3) сумма (19) равна нулю, $\sigma = 0$;
- (4) существуют пределы (18).

Тогда при $n_0 \rightarrow \infty$ статистика

$$n(g(\tilde{\xi}) - g(\bar{p})) \quad (32)$$

сходится по распределению к случайной величине

$$\sum_{k,l=1}^M \sum_{i,j=1}^N \frac{1}{\sqrt{\alpha_k \alpha_l}} g_{i,k,j,l} \eta_{i,k} \eta_{j,l} \quad (33)$$

— квадратичной форме от компонент нормального случайного вектора $\bar{\eta}$, который определен в формулировке леммы 1. Величины $g_{i,k,j,l}$ в (33) задаются равенством

$$g_{i,k,j,l} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_{i,k} \partial x_{j,l}} g(\bar{x}) \Big|_{\bar{x}=\bar{p}}. \quad (34)$$

Доказательство. Воспользуемся формулой Тейлора для функций многих переменных и разложим функцию $g(\bar{x})$ в точке $\bar{x} = \bar{p}$, выписав, кроме линейных, члены второго порядка. Получим, что

$$g(\bar{x}) = g(\bar{p}) + \sum_{k=1}^M \sum_{i=1}^N g_{i,k}(x_{i,k} - p_{i,k}) + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^M \sum_{i,j=1}^N g_{i,k,j,l}(x_{i,k} - p_{i,k})(x_{j,l} - p_{j,l}) + \Theta_1 \|\bar{x} - \bar{p}\|^2, \quad (35)$$

где $\Theta_1 \rightarrow 0$ при $\bar{x} = \bar{p}$ и величина $\|\bar{x} - \bar{p}\|$ имеет тот же смысл, что и в формуле (29). (Относительно используемой в настоящей работе формы остаточного члена в многомерном разложении Тейлора см. [12], §39). Далее, умножим обе части равенства (35) на n и вместо переменных $x_{i,k}$ подставим в него случайные величины $\xi_{i,k}$, $i = 1, \dots, N$, $k = 1, \dots, M$. В результате, учитывая обозначения (3) и (17), получаем, что

$$n(g(\bar{\xi}) - g(\bar{p})) = n \sum_{k=1}^M \sum_{i=1}^N g_{i,k}(\xi_{i,k} - p_{i,k}) + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^M \sum_{i,j=1}^N \frac{1}{\sqrt{\alpha_k(n)\alpha_l(n)}} g_{i,k,j,l} \xi_{i,k}^{(0)} \xi_{j,l}^{(0)} + \Theta_1^*(\sqrt{n}\|\bar{\xi} - \bar{p}\|)^2. \quad (36)$$

Рассмотрим в правой части равенства (36) сумму

$$\sum_{k=1}^M \sum_{i=1}^N g_{i,k}(\xi_{i,k} - p_{i,k}). \quad (37)$$

Ввиду третьего предположения теоремы 3, величина σ , определяемая формулой (19), равна нулю. Отсюда и из леммы 4 следует, что для каждого $k = 1, \dots, M$ все величины $g_{i,k}$, соответствующие положительным $p_{i,k}$, $i = 1, \dots, N$, равны одному и тому же числу γ_k . Если же некоторое $p_{i,k}$ равно нулю, то с вероятностью 1 имеет место равенство $\xi_{i,k} = 0$, и слагаемое $g_{i,k}(\xi_{i,k} - p_{i,k})$ в сумме (37) также равно нулю. Поэтому для таких слагаемых, не боясь совершить ошибку, можно положить $g_{i,k} = \gamma_k$. Отсюда получаем, что

$$\sum_{k=1}^M \sum_{i=1}^N g_{i,k}(\xi_{i,k} - p_{i,k}) = \sum_{k=1}^M \gamma_k \sum_{i=1}^N (\xi_{i,k} - p_{i,k}) = 0,$$

и формула (36) с учетом определения нормы $\|\bar{\xi} - \bar{p}\|$ принимает вид

$$n(g(\bar{\xi}) - g(\bar{p})) = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^M \sum_{i,j=1}^N \frac{1}{\sqrt{\alpha_k(n)\alpha_l(n)}} g_{i,k,j,l} \xi_{i,k}^{(0)} \xi_{j,l}^{(0)} + \Theta_1^* \left(\sum_{k=1}^M \sum_{i=1}^N (\xi_{i,k}^{(0)})^2 \right). \quad (38)$$

Заметим, что при $n_0 \rightarrow \infty$ случайная величина Θ_1^* сходится по вероятности к нулю, а случайный вектор $\bar{\xi}_0$ по лемме 1 имеет предельное распределение (точнее, он асимптотически нормален). Поэтому второе выражение в (38) при $n_0 \rightarrow \infty$ сходится по

вероятности к нулю. Согласно лемме 1 и четвертому предположению теоремы, первое выражение в (38) при $n_0 \rightarrow \infty$ сходится по распределению к случайной величине (33). Наконец, используя, как и при доказательстве теоремы 1, предложение (Xb) из [5] на с. 118, убеждаемся в справедливости теоремы 3.

В заключение сформулируем следующее обобщение теоремы 3, которое докажем, сочетая приемы, использованные ранее.

Теорема 4. Пусть выполнены первое, третье и четвертое условия теоремы 3, вероятности исходов в каждой из выборок S_k , $k = 1, \dots, M$, при $n_k \rightarrow \infty$ имеют вид (10), где числа $\lambda_{i,k}$, $i = 1, \dots, N$, — константы, не зависящие от n_k и $p_{i,k}$, $i = 1, \dots, N$, $k = 1, \dots, M$, — вероятности (1), которые предполагаются положительными.

Тогда при $n_0 \rightarrow \infty$ статистика (32) сходится по распределению к квадратичной форме

$$\sum_{k,l=1}^M \sum_{i,j=1}^N \frac{1}{\sqrt{\alpha_k \alpha_l}} g_{i,k,j,l} \eta_{i,k}^{(0)} \eta_{j,l}^{(0)}$$

от компонент нормального случайного вектора $\tilde{\eta}_0$, который определен в ходе доказательства теоремы 2 и имеет ковариационную матрицу (4) и средние значения компонент (28).

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 3, напомним разложение

$$n(g(\tilde{\xi}) - g(\bar{p})) = Q_1 + Q_2 + Q_3, \quad (39)$$

где Q_1 , Q_2 и Q_3 — первое, второе и третье выражения в правой части равенства (36). Первое из них — Q_1 — с вероятностью единица равно нулю. Последнее утверждение следует из того, что, ввиду предположения теоремы относительно вероятностей $p_{i,k}$, из леммы 4 вытекают равенства $g_{1,k} = \dots = g_{N,k}$, $k = 1, \dots, M$. Далее, согласно (36),

$$Q_2 = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^M \sum_{i,j=1}^N \frac{1}{\sqrt{\alpha_k(n) \alpha_l(n)}} g_{i,k,j,l} \xi_{i,k}^{(0)} \xi_{j,l}^{(0)},$$

$$Q_3 = \Theta_1^* \sum_{k=1}^M \sum_{i=1}^N (\xi_{i,k}^{(0)})^2.$$

Нетрудно проверить, что если вероятности исходов в выборках $S_1, \dots, S_M$ имеют вид (10), то выполняются условия (6). Воспользуемся леммой 2 и примем во внимание равенства (24), в которых, согласно лемме 3, существуют пределы величин $\lambda_{i,k}(n_k)$. В результате мы приходим к выводу, что при выполнении условий теоремы 4 случайный вектор $\tilde{\xi}_0$ с компонентами $\xi_{i,k}^{(0)}$ сходится по распределению (см. (27)) к MN -мерному нормальному случайному вектору $\tilde{\eta}_0$. Его ковариационная матрица определяется формулами (4) и (5), а средние значения компонент $\eta_{i,k}^{(0)}$ вектора $\tilde{\eta}_0$ задаются равенствами (28). Наконец, воспользуемся векторной версией предложения (XII) и предложением (Xb) из [5] на с. 118–119 и увидим, что при $n_0 \rightarrow \infty$ в сумме (39) слагаемое Q_3 сходится по вероятности к 0, а слагаемое Q_2 сходится по распределению к квадратичной форме, указанной в формулировке теоремы. Это позволяет обычным путем завершить доказательство теоремы 4.

В заключение заметим, что задачи, связанные с распределением квадратичных форм от нормальных случайных величин, обсуждаются во многих работах (см., например, [13–16]), и здесь рассматриваться не будут.

Список литературы

1. Гак Я., Шидак З., *Теория ранговых критериев*. Наука, Москва, 1971.
2. Крамер Г., *Математические методы статистики*. ГИИЛ, Москва, 1948.
3. Cressie N., Read T. R. C., Multinomial goodness-of-fit tests. *J. Royal Statist. Soc.* (1984) **B46**, 440–464.
4. Cressie N., Read T. R. C., *Goodness-of-fit statistics for discrete multivariate data*. Springer, Berlin, 1988.
5. Рао С. Р., *Линейные статистические методы и их применения*. Наука, Москва, 1968.
6. Селиванов Б. И., О статистиках-дифференцируемых функциях частот исходов M полиномиальных выборок. *Обозрение прикладной и промышленной математики* (2005) **12**, №4, 872–873.
7. Поля Г., Сеге Г., *Задачи и теоремы из анализа*, **1**. ГИТТЛ, Москва, 1956.
8. Селиванов Б. И., О предельных распределениях статистики χ^2 . *Теория вероятностей и ее применения* (1984) **29**, №1, 132–134.
9. Селиванов Б. И., Об одном классе статистик типа хи-квадрат. *Обозрение прикладной и промышленной математики* (1995) **2**, №6, 926–966.
10. Селиванов Б. И., Семейство многомерных статистик хи-квадрат. *Дискретная математика* (2002) **14**, №3, 130–142.
11. Биллингсли П., *Сходимость вероятностных мер*. Наука, Москва, 1974.
12. Кудрявцев Л. Д., *Курс математического анализа*, **2**. Высшая школа, Москва, 1981.
13. Chernoff H., Lehman E. L., The use of maximum likelihood estimates in χ^2 tests for goodness of fit. *Ann. Math. Statist.* (1954) **25**, №3, 579–586.
14. Good I. J., Condition for a quadratic form to have a chi-squared distribution. *Biometrika* (1969) **56**, №1, 215–216.
15. Good I. J., Condition for a quadratic form to have a chi-squared distribution. Correction. *Biometrika* (1970) **57**, №1, 225.
16. Dik J. J., Gunst M. C. M., The distribution of general quadratic form in normal variables. *Statistica Neerlandica* (14–26) **39**, №1,.

Статья поступила 30.11.2007.