Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Максименко, Диаметр ридж-графа циклического многогранника, *Дискрет. матем.*, 2009, том 21, выпуск 2, 146–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1054>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 11:23:30

Диаметр ридж-графа циклического многогранника

© 2009 г. А. Н. Максименко

Показано, что диаметр ридж-графа, то есть графа многогранника $C^*(d, n)$, двойственного к данному циклическому многограннику, где d — размерность, а n — число фасет, равен $n - d - \max\{0, \lceil (n - 2d)/(\lfloor d/2 \rfloor + 1) \rceil\}$.

Следуя общепринятой терминологии [1, 2, 10], d -мерный многогранник будем называть d -многогранником, а его k -мерные грани — k -гранями. Соответственно, 0-грани называются вершинами, 1-грани — ребрами, $(d - 1)$ -грани d -многогранника называются фасетами (или гипергранями), $(d - 2)$ -грани называются субфасетами (или риджами). Две вершины многогранника называются смежными, если они соединены ребром многогранника. Граф многогранника есть совокупность вершин и ребер многогранника. Множество вершин ридж-графа многогранника совпадает с множеством фасет и две фасеты смежны, если они имеют общий ридж. Таким образом, ридж-граф многогранника является, по существу, графом двойственного к данному многогранника [1, 2].

Путь в графе есть последовательность вершин $(v_0, v_1, \dots, v_l)$, где каждые две соседние вершины v_{i-1} и v_i , $i \in \{1, \dots, l\}$, смежны и число l есть длина пути. Расстоянием между двумя вершинами в графе называется длина кратчайшего соединяющего их пути. Диаметр графа — это расстояние между двумя его наиболее удаленными друг от друга вершинами.

Обозначим через $\Delta(d, n)$ наибольший диаметр графа многогранника в классе всех d -многогранников с n фасетами. В 1957 г. В. М. Хирш предположил [5], что $\Delta(d, n) \leq n - d$ (точнее, предположение было высказано для всех полиэдров). Вопрос о справедливости этой гипотезы в общем случае до сих пор остается открытым. Известные верхние оценки для $\Delta(d, n)$ не являются даже полиномиальными [12]. Из работ [7, 11] известно, что для $n > d \geq 8$ справедливо неравенство $\Delta(d, n) \geq n - d$. Известно [2, 10], что гипотезу достаточно доказать для простых многогранников (каждая вершина таких d -многогранников принадлежит ровно d фасетам). Кроме того, имеется ряд частных результатов, связанных с вычислением диаметров многогранников из некоторых специальных классов [2, 12]. Одними из наиболее известных и важных классов многогранников являются циклические [4, 8] и двойственные к ним многогранники.

Циклическим многогранником $C(d, n)$ называется многогранник с n вершинами $x^i = x(\tau_i)$, $i \in \{1, \dots, n\}$, лежащими на кривой $x(\tau) = (\tau, \tau^2, \dots, \tau^d)$ в пространстве $\mathbf{R}^d$. Уникальность циклических многогранников определяется рядом свойств [2]. Они симплицальны, $\lfloor d/2 \rfloor$ -смежностны и имеют максимальное число граней всех размерностей в классе d -многогранников с фиксированным числом вершин [17]. Соответственно, двойственные к циклическим многогранники $C^*(d, n)$ являются простыми и имеют

максимальное число вершин в классе d -многогранников с фиксированным числом n фасет. Эти обстоятельства вселяли надежду на то, что, кроме всего прочего, $C^*(d, n)$ станут примером многогранников с наибольшим диаметром графа. К сожалению, уже для $d = 4$ и $n = 9$ их диаметр равен 4, в то время как в работе [15] приводится пример 4-многогранника с тем же числом фасет и диаметром графа равным 5 (позднее было показано [3], что это единственный, с точностью до комбинаторной эквивалентности, для данных $d = 4$ и $n = 9$ пример многогранника с диаметром 5). Введем обозначение

$$\Delta_c(d, n) = \text{diam } C^*(d, n).$$

В 1964 году В. Кли показал [13], что гипотеза Хирша справедлива для $C^*(d, n)$:

$$\Delta_c(d, n) \leq n - d, \quad (1)$$

а при $d < n \leq 2d$ в (1) выполняется равенство. Там же было высказано предположение о том, что для $n > 2d$ выполнено равенство $\Delta_c(d, n) = \lfloor n/2 \rfloor$ (чуть позже было показано [15], что оно неверно). Но даже эти результаты, ввиду малой доступности работы [13], настолько плохо известны, что по прошествии более 30 лет делаются попытки нахождения величины $\Delta_c(d, n)$ для $n = 2d$ с помощью вычислительной техники [6], а в работе [16] при упоминании факта (1) приводится ссылка на работу [14], не содержащую этого результата.

Для того чтобы поставить точку в этом вопросе, ниже приводится точное значение для $\Delta_c(d, n)$.

Теорема 1. Диаметр $\Delta_c(d, n)$ ридж-графа циклического многогранника $C(d, n)$ вычисляется по формуле

$$\Delta_c(d, n) = \begin{cases} n - d & \text{при } d < n \leq 2d, \\ n - d - \lceil (n - 2d)/(\lfloor d/2 \rfloor + 1) \rceil & \text{при } n > 2d. \end{cases}$$

Доказательство. Справедливость теоремы для $d < n \leq 2d$ доказана в [13], поэтому далее будем предполагать, что $n > 2d$.

Обозначим множество вершин многогранника $C(d, n)$ через $X = \{x^1, \dots, x^n\}$, предполагая, что вершины пронумерованы в порядке возрастания параметра τ , то есть $\tau_1 < \dots < \tau_n$.

Справедлив следующий критерий Гейла [9]. Все грани многогранника $C(d, n)$ являются симплексами и подмножество $Y \subset X$, состоящее из d вершин, определяет некоторую фасету тогда и только тогда, когда для любых двух $x^i, x^j \in X \setminus Y$, $i < j$, число вершин $x^k \in Y$, для которых $i < k < j$, четно.

В частности, из симплициальности циклического многогранника следует, что две его фасеты смежны, если они имеют ровно $d - 1$ общих вершин.

Проведем доказательство теоремы для случая четной размерности. Пусть $d = 2k$, покажем, что

$$\Delta_c(d, n) \leq n - d - (n - 2d)/(k + 1), \quad (2)$$

и приведем пример двух фасет циклического многогранника, расстояние между которыми равно целой части от верхней границы (2).

Из критерия Гейла следует, что вершины каждой фасеты можно единственным образом разбить на k непересекающихся пар вида $\{x^i, x^{i+1}\}$, где $i \in \{1, \dots, n\}$ и сложение

Рис. 1. Две смежные фасеты многогранника $C(10, 18)$

$i + 1$ проводится по модулю n (если $i = n$, то $i + 1 = 1$). И, наоборот, любое подмножество $Y \subset X$ вида $Y = \{x^{i_1}, x^{i_1+1}, x^{i_2}, x^{i_2+1}, \dots, x^{i_k}, x^{i_k+1}\}$ есть множество вершин некоторой фасеты.

Для наглядности дальнейшего изложения каждой вершине x^i поставим в соответствие точку v_i на окружности единичного радиуса

$$v_i = (\cos(2\pi i/n), \sin(2\pi i/n)).$$

Две точки v_i и v_{i+1} будем называть парой и обозначать p_i , множество всех таких пар для $i \in \{1, \dots, n\}$ обозначим P .

Предположим, что вершины некоторой фасеты заданы набором непересекающихся пар. Тогда переход к смежной фасете означает сдвиг одной или нескольких примыкающих друг к другу пар на одну точку вдоль окружности (см. рис. 1). Иными словами, чтобы перейти к любой смежной фасете, достаточно выбрать одну из k пар и направление смещения (по часовой или против часовой стрелки), при этом, если на пути смещения пары находится другая пара, то она смещается в том же направлении, что и первая, и т. д.

Далее будем пользоваться следующим правилом смещения: при смещении пара может одновременно продвигать и несколько примыкающих соседей, лежащих у нее на пути, но не может пересекаться с другой парой.

Итак, задача вычисления расстояния между фасетами в ридж-графе циклического многогранника сводится к следующей. На окружности с n точками выбраны k пар точек, определяющих вершины первой фасеты, далее называем их фишками, и отмечены k пар, соответствующих вершинам второй фасеты, далее называем их ячейками (см. рис. 2). Требуется найти наименьшее число правильных смещений фишек, достаточное для того, чтобы все ячейки были заняты фишками. Обозначим это число $l(F_1, F_2)$, здесь F_1 — множество фишек, а F_2 — множество ячеек, $F_1, F_2 \subset P$.

Каждой паре из множества $P \setminus (F_1 \cup F_2)$ поставим в соответствие дугу окружности между точками v_i и v_{i+1} , не содержащую самих этих точек. Назовем такую дугу промежутком (см. рис. 2) и будем обозначать a_i . Множество всех промежутков обозначим через A . Очевидно, что $|A| > 0$. Подмножество $W \subseteq A$ назовем пустотой, если найдутся $i, j \in \{1, \dots, n\}$ такие, что $W = \{a_i, a_{i+1}, \dots, a_j\}$, причем a_{i-1} и a_{j+1} не принадлежат A . Здесь, как и ранее, при вычислении индексов сложение проводится по модулю n . Ясно, что A представимо единственным образом в форме

$$A = W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_s, \quad 0 < s \leq d, \quad (3)$$

Рис. 2. Пример фасет $F_1 = \{1, 2, 3, 5, 6, 11, 12, 16, 17, 18\}$ (фишки) и $F_2 = \{3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$ (ячейки) многогранника $C(10, 18)$

где $W_i, i = 1, \dots, s$, — пустоты.

Определим длину $l(W)$ пустоты W как число точек $v_i, 1 \leq i \leq n$, содержащихся внутри нее, то есть $l(W) = |W| - 1$. Тогда суммарная длина пустот равна числу вершин, не принадлежащих ни одной из двух выбранных фасет, и

$$\sum_{i=1}^s l(W_i) \geq n - 2d.$$

Лемма 1. Предположим, что из окружности вырезана пустота W вместе с содержащимися внутри нее точками и фишками из F_1 запрещено передвигаться через эту пустоту. Тогда

$$l(F_1, F_2) \leq n - d - l(W).$$

Доказательство. При каждом правильном смещении от фишек освобождается ровно одна точка, и ровно одна точка становится занятой. Заметим, что при оптимальном передвижении фишек однажды освободившаяся точка не может быть занята вновь. Чтобы убедиться в этом, предположим противное. Тогда возможны два варианта:

- (1) Фишка, освободившая точку, заняла ее вновь. Но тогда неоптимальность перемещений очевидна.
- (2) Фишка, занявшая точку, сместилась в том же направлении, что и фишка, освободившая эту точку. Но тогда эти два смещения (освобождение и занятие данной точки) можно было бы сделать за один шаг.

Таким образом, число шагов не может превышать числа всех точек, не занятых фишками.

Непосредственно из леммы 1 следует неравенство

$$l(F_1, F_2) \leq n - d - \max_{1 \leq i \leq s} l(W_i).$$

В частности, с его помощью легко доказать теорему для $d < n \leq 2d$. Достаточно привести пример двух фасет, имеющих $2d - n$ общих вершин. Очевидно, что число сближающих смещений для них будет равно $n - d$.

Рис. 3. Три разреза для рис. 2: $l(S_1) = 1$, $l(S_2) = 0$, $l(S_3) = 2$

Под фразой “между пустотами W_i и W_j ” будем понимать тот участок окружности, который будет пройден при движении против часовой стрелки от пустоты W_i к W_j . Введем вспомогательную функцию $f(i, j)$, равную числу фишек, расположенных между W_i и W_j , минус число ячеек на этом же участке. Легко заметить, что эта функция обладает следующими свойствами.

Свойство 1. Справедливо равенство $f(i, j) = -f(j, i)$.

Свойство 2. Справедливо равенство $f(i, j) = f(i, m) + f(m, j)$.

Свойство 3 (непрерывность). Если $f(i, j) > 1$, то между W_i и W_j найдется такое W_m , что $f(i, m) = 1$.

Если для некоторых i и j справедливо равенство $f(i, j) = 0$, то пустоты W_i и W_j назовем смежными.

Свойство 4 (транзитивность). Если W_i и W_j смежны и W_j и W_m смежны, то W_i и W_m тоже смежны.

Пусть W_i и W_j смежны. Тогда, вырезав их из окружности и применив лемму 1 для каждой из двух образовавшихся дуг, получаем неравенство

$$l(F_1, F_2) \leq n - d - l(W_i) - l(W_j).$$

Аналогично мы можем поступить и с несколькими попарно смежными пустотами.

Используя эту возможность, разобьем множество всех пустот на подмножества S_i , $1 \leq i \leq t \leq s$, так, чтобы все пустоты, принадлежащие одному подмножеству, были попарно смежны и в то же время любые две пустоты из разных подмножеств были бы несмежны. Подмножества S_i будем называть разрезами (см. рис. 3). Под длиной $l(S)$ разреза S будем понимать суммарную длину входящих в него пустот. Тогда, очевидно,

$$l(F_1, F_2) \leq n - d - \max_{1 \leq i \leq t} l(S_i),$$

где t — число всех разрезов. Так как

$$\sum_{j=1}^t l(S_j) = \sum_{i=1}^s l(W_i) \geq n - 2d,$$

Рис. 4. Примеры диаметрально противоположных фасет

справедливо неравенство

$$l(F_1, F_2) \leq n - d - \frac{n - 2d}{t}.$$

Остается доказать, что

$$t \leq k + 1, \quad (4)$$

где $k = d/2$. Согласно (3), число всех пустот $s \leq d$. Поэтому, чтобы установить справедливость неравенства (4), достаточно показать, что среди всех разрезов найдется не более двух, содержащих ровно по одной пустоте.

Пусть разрез S' содержит единственную пустоту $W_{i'}$. Это означает, что для любого $j \neq i'$

$$f(i', j) \neq 0. \quad (5)$$

И тогда, в силу свойства 3 (непрерывность), для любого $m \neq i' \ f(i', j)f(i', m) > 0$, то есть функция $g'(j) = f(i', j)$ для всех j принимает значения одного знака.

Рассмотрим еще один разрез S'' , содержащий лишь одну пустоту $W_{i''}$, $i'' \neq i'$. Покажем, что $f(i', j)f(i'', m) < 0$ для любых $j \neq i'$ и $m \neq i''$.

Действуя от противного, предположим, что $f(i', j)f(i'', m) > 0$ для некоторых j и m ; равенство здесь исключается в силу формулы (5) и аналогичного утверждения для i'' . Но тогда это неравенство справедливо при $j = i''$ и $m = i'$, что невозможно в силу свойства 1. Итак, среди всех разрезов найдется не более двух, содержащих ровно по одной пустоте, и неравенство (4), а вместе с ним и неравенство (2), доказаны.

На рис. 4 приводятся примеры фасет, расстояния между которыми равно наибольшему целому, не превосходящему правой части (2). В [15] тоже содержится один пример такого рода для $d = 6$ и $n = 23$. Алгоритм построения таких примеров для произвольных d и n ясен из рисунка. Таким образом, для случая четной размерности теорема доказана.

Разберем теперь случай, когда $d = 2k + 1$.

Из критерия Гейла следует, что в случае нечетной размерности каждая фасета должна содержать хотя бы одну из двух точек v_1 или v_n .

Пусть F_1 и F_2 — некоторые фасеты. Возможны два случая.

В первом случае F_1 и F_2 содержат одновременно хотя бы одну из точек v_1 , v_n . Тогда эту точку можно выбросить из рассмотрения и тем самым перейти к случаю четной

размерности. Следовательно,

$$l(F_1, F_2) \leq (n-1) - (d-1) - \frac{(n-1) - 2(d-1)}{k+1} < n - d - \frac{n-2d}{k+1}.$$

Во втором случае F_1 и F_2 не имеют общих точек в множестве $\{v_1, v_n\}$. Не уменьшая общности, предположим, что F_1 содержит v_1 , но не содержит v_n , а F_2 содержит v_n , но не содержит v_1 . Из критерия Гейла следует, что если мы при очередном смещении освободим v_1 , то обязательно должны занять v_n , то есть пустота, состоящая из промежутка a_n , не может входить в какой-бы то ни было разрез. Кроме того, если двигаться против часовой стрелки, то пустота, расположенная правее v_1 будет смежна пустоте, расположенной левее v_n . Таким образом, наибольшее число разрезов, как и в случае четной размерности, будет равно $k+1$.

Пример наиболее удаленных друг от друга фасет строится аналогично случаю четной размерности.

Список литературы

1. Бренстед А., *Введение в теорию выпуклых многогранников*. Мир, Москва, 1988.
2. Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К., *Многогранники, графы, оптимизация*. Наука, Москва, 1981.
3. Altshuler A., Bokowski J., Steinberg L., The classification of simplicial 3-spheres with nine vertices into polytopes and non-polytopes. *Discrete Math.* (1980) **31**, 115–124.
4. Carathéodory C., Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen. *Math. Ann.* (1907) **64**, 95–115.
5. Dantzig G. B., *Linear programming and extensions*. Princeton Univ. Press, Princeton, 1963.
6. Ferrez J.-A., Fukuda K., Liebling T. M., Parallel implementation of graph diameter algorithms. *EPFL Supercomputing Review* (1998), № 10 3–6.
7. Fritzsche K., Holt F. B., More polytopes meeting the conjectured Hirsch bound. *Discrete Math.* (1999) **205**, 77–84.
8. Gale D., Neighboring vertices on a convex polyhedron. *Ann. Math. Stud.* (1956) **38**, 255–264.
9. Gale D., Neighborly and cyclic polytopes. *Proc. Symp. Pure Math.* (1963) **7**, 225–232.
10. Grünbaum B., *Convex polytopes*. Wiley, New York, 1967.
11. Holt F. B., Klee V., Many polytopes meeting the conjectured Hirsch bound. *Discrete Comput. Geom.* (1998) **20**, 1–17.
12. Kalai G., Polytope skeletons and paths. In: *Handbook of discrete and computational geometry* (Goodman J. E. et al., eds.). CRC Press, Boca Raton, FL, 1997, pp. 331–344.
13. Klee V., Diameters of polyhedral graphs. *Canad. J. Math.* (1964) **16**, 602–614.
14. Klee V., Paths on polyhedra. II. *Pacific J. Math.* (1966) **17**, 249–262.
15. Klee V., Walkup D. W., The d -step conjecture for polyhedra of dimension $d < 6$. *Acta Math.* (1967) **133**, 53–78.
16. Lagarias J. C., Prabhu N., Counting d -step paths in extremal Dantzig figures. *Discrete Comput. Geom.* (1998) **19**, 19–31.
17. McMullen P., The maximum numbers of faces of a convex polytope. *Mathematika, Lond.* (1970) **17**, 179–184.

Статья поступила 30.11.2007.