Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Магомедов, К вопросу о реберной раскраске двудольного графа, *Дискрет. матем.*, 2009, том 21, выпуск 2, 153–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1055>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 17:43:52

К вопросу о реберной раскраске двудольного графа

© 2009 г. А. М. Магомедов

Для двудольных графов $G(X, Y, E)$, в которых степени вершин $y \in Y$ не превосходят q , а степени вершин $x \in X$ равны $2q$, рассматривается задача существования реберной 2-раскраски такой, что любой вершине $x \in X$ инцидентны q ребер каждого цвета, а цвета ребер, инцидентных вершине $y \in Y$, одинаковы.

1. Определения и обозначения

Класс двудольных графов $G(X, Y, E)$, в котором степени вершин $x \in X$ равны $2q$, $q \in \mathbf{Z}^+$, а степени вершин $y \in Y$ не превосходят q (равны q), обозначим через C_q (соответственно, через C_q^0). Будем обозначать 2-раскраску ребер графа $G(X, Y, E)$ из класса C_q в цвета $+1$ и -1 разбивающей, если среди ребер, инцидентных вершине $x \in X$, имеется по q ребер каждого цвета, а цвета всех инцидентных вершине $y \in Y$ ребер равны одному и тому же значению $c(y)$. При этом $c(y)$ будем называть цветом вершины y , а цвет ребра (x, y) будем обозначать через $c(x, y)$. Будем говорить, что цвет i представлен k раз в раскраске в вершине u , если в точности k ребрам, инцидентным вершине u , присвоен цвет i . Граф будем называть раскрашиваемым или нераскрашиваемым в зависимости от существования разбивающей раскраски.

Теорема 1. *Любой граф класса C_2 является раскрашиваемым.*

Доказательство. Заметим, что число висячих вершин в графе $G(X, Y, E) \in C_2$ четно. Пусть $y'_1, y''_1, \dots, y'_k, y''_k$ — множество таких вершин. Для каждого i , $1 \leq i \leq k$, выполним следующие действия:

- (1) обозначим $e'_i = (v'_i, y'_i)$ и $e''_i = (v''_i, y''_i)$ ребра, инцидентные вершинам y'_i и y''_i соответственно;
- (2) введем новую вершину u_i и заменим набор e'_i, y'_i, y''_i, e''_i на набор, состоящий из вершины u_i и двух инцидентных ей ребер $(v'_i, u_i), u_i, (v''_i, u_i)$.

В каждой связной компоненте полученного графа $G'(X, Y', E) \in C_2^0$ рассмотрим ориентированный эйлеров цикл. В качестве начальной дуги выберем произвольную дугу (y_0, x) цикла с началом в вершине $y_0 \in Y'$ и положим $c(y_0, x) = -1$. Присвоим цвета последовательным дугам цикла $\dots, (v_i, v_j), (v_j, v_k), \dots$, следуя правилу

$$c(v_j, v_k) = \begin{cases} c(v_i, v_j), & \text{если } v_j \in Y', \\ -c(v_i, v_j), & \text{если } v_j \in X. \end{cases}$$

В результате такой раскраски в любой вершине $x \in X$ каждый из цветов представлен два раза, а цвета ребер, инцидентных произвольной вершине $y \in Y$, $y \neq y_0$, одинаковы. Если пронумеровать дуги цикла в порядке их обхода цифрами $0, 1, 2, 3, 4, \dots$, цвета дуг с номерами, кратными четырем, равны -1 . Поскольку число ребер равно $4|X|$ и процесс присвоения цветов завершается в дуге, инцидентной вершине y_0 , то цвета ребер, инцидентных вершине y_0 , также одинаковы. Следовательно, полученная 2-раскраска является разбивающей. Теорема доказана.

Всюду в дальнейшем предполагается, что L и n — целые положительные числа и выбран алфавит $A = \{1, 2, \dots, n\}$.

Следствие 1. Пусть W — набор двухбуквенных слов над алфавитом A . Если число вхождений любой буквы из A в слова набора W не превосходит 4, то W допускает разбиение на два поднабора, в каждом из которых число вхождений любой буквы из A не превосходит 2.

Определение 1. Дефрагментацией матрицы называется преобразование ее к такому виду, в котором наборы элементов в каждой строке и в каждом столбце матрицы сохранены, при этом в каждой строке ненулевые элементы размещены рядом, в последовательных ячейках.

Следствие 2. Если $L \geq n$ и каждый столбец $L \times 4$ матрицы M содержит $L - n$ нулей и все буквы алфавита A , а число ненулевых элементов в каждой строке равно двум, то матрица M допускает дефрагментацию.

Как известно, в некоторых случаях свойство планарности может упростить исследование вопросов раскрашиваемости графа [1].

Теорема 2. Простой граф $G(X, Y, E)$ класса C_3^0 непланарен.

Доказательство. Обозначим φ_k число k -угольных граней в графе $G(X, Y, E) \in C_3^0$. В графе отсутствуют кратные ребра и грани с нечетным числом вершин, поэтому

$$\varphi_2 = 0, \quad \varphi_{2i-1} = 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Предположим, что G является планарным графом. Если v , e и p — соответственно число вершин, ребер и граней в G , то по формуле Эйлера

$$v - e + p = 2. \quad (2)$$

Перепишем тождество $p = \sum_{i=1,2,\dots} \varphi_i$ с учетом (1) в виде

$$p = \sum_{i=2,3,\dots} \varphi_{2i}. \quad (3)$$

Так как каждое ребро планарного графа входит ровно в две грани, $2e = \sum_{i=1,2,\dots} i\varphi_i$, откуда, согласно (1),

$$e = \sum_{i=2,3,\dots} i\varphi_{2i}. \quad (4)$$

Поскольку $G(X, Y, E) \in C_3^0$, справедливо равенство

$$6|X| = 3|Y| = e.$$

Рис. 1. При любой разбивающей раскраске $c(y_1) = -c(y_2)$, $c(y_3) = -c(y_4)$

Отсюда и из тождества $v = |X| + |Y|$ следует, что $v - e = -e/2$, или в соответствии с (4)

$$v - e = -\frac{1}{2} \sum_{i=2,3,\dots} i \varphi_{2i}. \quad (5)$$

Подставляя правые части (3) и (5) в (2), получим равенство

$$\sum_{i=3,4,\dots} \left(1 - \frac{i}{2}\right) \varphi_{2i} = 2,$$

где все слагаемые в левой части неположительны. Таким образом, предположение о планарности графа G привело к противоречию. Теорема доказана.

Легко видеть, что не всякий граф класса C_3^0 является раскрашиваемым. Например, нераскрашиваем следующий двудольный мультиграф $G(X, Y, E)$, заданный списками смежных вершин: $y_1(x_1, x_1, x_1)$, $y_2(x_1, x_2, x_2)$, $y_3(x_1, x_2, x_2)$, $y_4(x_1, x_2, x_2)$.

В самом деле, пусть граф G раскрашиваем и выбрана некоторая разбивающая раскраска. Тогда для каждой из трех пар вершин (y_i, y_j) множества (y_2, y_3, y_4) выполняется неравенство $c(y_i) \neq c(y_j)$; в противном случае четыре ребра (y_i, x_2) , (y_i, x_2) , (y_j, x_2) , (y_j, x_2) из шести, инцидентных вершине x_2 , были бы одинакового цвета, что противоречит определению разбивающей раскраски. Но три значения $c(y_2)$, $c(y_3)$ и $c(y_4)$, принадлежащие двухэлементному множеству $\{+1, -1\}$, не могут быть попарно различными. Следовательно, рассмотренный граф нераскрашиваем.

Приведенное обоснование нераскрашиваемости опирается на наличие кратных ребер. В приложениях же задача о раскрашиваемости нередко возникает для простых графов. Так, если в следствии 2 теоремы 1 матрица M представляет расписание учебных занятий, требование неповторности ненулевых элементов в строке является естественным. Поэтому вопрос существования простых нераскрашиваемых графов класса C_3^0 представляет самостоятельный интерес. Выяснить существование подобных графов было предложено О. Б. Лупановым.

Лемма 1. При любой разбивающей раскраске графа G_0 , изображенного на рис. 1,

$$c(y_1) = -c(y_2), \quad c(y_3) = -c(y_4).$$

При любой разбивающей раскраске графа G^0 , изображенного на рис. 2, выполняется хотя бы одно из равенств

$$c(a_1) = c(a_2), \quad c(b_1) = c(b_2).$$

Рис. 2. Граф G^0 . При любой разбивающей раскраске $c(a_1) = c(a_2)$ или $c(b_1) = c(b_2)$

Доказательство. Докажем первое утверждение. Пусть задана разбивающая раскраска графа G_0 и, для определенности, $c(y_3) = +1$. Рассмотрим последствия равенства $c(y_4)$ значениям $+1$ и -1 соответственно. Если $c(y_4) = +1$ ($c(y_4) = -1$), то $c(x_2, y_4) = +1$ ($c(x_2, y_4) = -1$), и среди цветов четырех ребер $c(x_2, y_7), c(x_2, y_8), c(x_2, y_9), c(x_2, y_{10})$, инцидентных вершине x_2 наряду с ребрами (x_2, y_3) и (x_2, y_4) , окрашенными в цвет $+1$ (в цвета $+1$ и -1 соответственно), соотношение цветов $+1$ и -1 составляет $1 : 3$ ($2 : 2$). Так как вершины y_7, y_8, y_9, y_{10} , концевые для этих ребер, входят и в список вершин, смежных x_3 , соотношение цветов $+1$ и -1 для вершин y_5 и y_6 , также входящих в этот список, равно $2 : 0$ ($1 : 1$).

Таким образом, из условия $c(y_3) = c(y_4) = +1$ следует равенство цветов четырех вершин y_3, y_4, y_5, y_6 , смежных вершине x_1 , что противоречит определению разбивающей раскраски графа класса C_3 . При $c(y_3) = +1, c(y_4) = -1$ вершины y_5 и y_6 имеют цвета разных знаков, а поскольку каждый из цветов $+1$ и -1 представлен в вершине x_1 три раза, разные знаки имеют тогда и цвета вершин y_1 и y_2 , смежных вершине x_1 наряду с вершинами y_3, y_4, y_5, y_6 . Первое утверждение доказано.

Докажем второе утверждение. Пусть задана разбивающая раскраска графа G^0 , $c(a_1) = -1, c(a_2) = +1$. Докажем, что тогда $c(b_1) = c(b_2)$. Предположим противное, пусть $c(b_1) = -t, c(b_2) = t, t \in \{-1, +1\}$. Так как цвета ребер $(a_1, B), (a_2, B)$ и (b_1, B) , инцидентных вершине B , равны соответственно $-1, +1$ и $+t$, то цвет оставшегося ребра (d_2, B) равен $-t, c(d_2, B) = c(d_2) = -t$. Цвета ребер $(a_1, D), (b_2, D), (d_2, D)$, инцидентных вершине D , равны соответственно $-1, -t$ и $-t$; следовательно, $t = -1$, а цвет ребра (c_2, D) , инцидентного D , равен -1 .

Вершине A инцидентны два ребра цвета $+1$, ребра $(a_2, A), (b_2, A)$, следовательно, оставшиеся два ребра, инцидентные A , имеют цвет $-1, c(c_1, A) = c(d_1, A) = -1$; $c(c_1) = c(d_1) = -1$. Но тогда все четыре ребра, инцидентные вершине C , оказываются одного цвета, $c(b_1, C) = c(c_1, C) = c(c_2, C) = c(d_1, C) = -1$, что противоречит определению разбивающей раскраски. Таким образом, если $c(a_1) \neq c(a_2)$, то $c(b_1) = c(b_2)$. Лемма доказана.

Используем ее для доказательства нераскрашиваемости простого графа $G \in C_3^0$, изображенного на рис. 3.

Рис. 3. Нераскрашиваемый простой граф класса G_3^0

Опишем структуру графа G . Выбраны четыре экземпляра $(G_i, 1 \leq i \leq 4)$ графа G_0 , висячие вершины первого из них обозначены a_1, a_2 , второго — b_1, b_2 , третьего — c_1, c_2 , четвертого — d_1, d_2 . Затем добавлены четыре вершины A, B, C, D : вершина A соединена ребрами с вершинами a_1 и a_2 , локальные степени которых в G_1 равны двум (в графе G_0 соответствующие вершины обозначены y_1, y_2 и разноцветны при любой разбивающей раскраске G_0), аналогичным образом проведены ребра от вершин B, C и D к соответствующим вершинам, локальные степени которых равны двум в G_2, G_3 и G_4 соответственно (на рисунке эти восемь ребер показаны пунктиром). В завершение построения графа проведены ребра $(A, a_2), (A, b_2), (A, c_1), (A, d_1); (B, a_1), (B, a_2), (B, b_1), (B, d_2); (C, b_1), (C, c_1), (C, c_2), (C, d_1); (D, a_1), (D, b_2), (D, c_2), (D, d_2)$; соответствующий реберно-порожденный подграф изоморфен графу G^0 (рис. 2).

Предположим, что граф G раскрашиваем и выбрана некоторая разбивающая раскраска. Индуцированная раскраска является разбивающей раскраской для каждого из подграфов G_i ; поэтому, в соответствии с первым пунктом леммы, две вершины подграфа G_i , $1 \leq i \leq 4$, концевые для пунктирных ребер, имеют разные цвета. Отсюда следует, что индуцированная раскраска является разбивающей раскраской и для подграфа G^0 , полученного удалением пунктирных ребер из реберно-порожденного подграфа (класса G_3) на множестве ребер, инцидентных вершинам A, B, C, D . Из первого пункта леммы, последовательно примененного к каждому из G_i , $1 \leq i \leq 4$, следует, что $c(a_1) \neq c(a_2)$, $c(b_1) \neq c(b_2)$, $c(c_1) \neq c(c_2)$, $c(d_1) \neq c(d_2)$. Но это противоречит второму пункту леммы, согласно которому $c(a_1) = c(a_2)$ либо $c(b_1) = c(b_2)$. Следовательно, граф G нераскрашиваем. В рассмотренном двудольном графе $G(V, W, E)$ пусть $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ и $W = \{w_1, \dots, w_L\}$ — множества вершин степени 6 и 3 соответственно; $n = 20, L = 40$. Построим набор W' трехсимвольных слов w'_i , $1 \leq i \leq L$, над алфавитом $A = \{1, \dots, n\}$,

включая в i -е слово w'_i символ j , если $(w_i, v_j) \in E$; число вхождений каждого символа алфавита в слова набора W' равно шести. Из нераскрашиваемости графа G вытекает следующее утверждение.

Предложение 1. *Не существует разбиения W' на два поднабора, в слова каждого из которых любой символ алфавита A входит в точности три раза.*

Реберное хроматическое число двудольного графа равно максимальной степени вершины [2], в данном случае — шести. Рассмотрим правильную реберную раскраску графа G в шесть цветов, $1, \dots, 6$, и разместим слова набора W' в $L \times 6$ матрице M по правилу: если j — символ слова w'_i и цвет ребра (w_i, v_j) в правильной реберной раскраске равен k , то $M_{ik} = j$. В результате каждый символ алфавита представлен в любом столбце матрицы M в точности один раз, а в каждой строке все три ненулевых элемента попарно различны.

Предложение 2. *Дефрагментации матрицы M не существует.*

Доказательство. В самом деле, пусть дефрагментация матрицы M существует, и ее результат обозначен через M' . Как в первом, так и в последнем столбцах матрицы M' каждый символ алфавита представлен в точности один раз. Последнее, ввиду сплошного размещения символов алфавита в строке, означает, что n слов набора W' размещены в первых трех столбцах (поднабор W'_1), а n слов — в последних трех столбцах матрицы M' (поднабор W'_2). Так как при этом в любом столбце M' каждый символ алфавита представлен в точности один раз, получено разбиение, противоречащее предложению 1. Предложение 2 доказано.

Список литературы

1. Гэри М., Джонсон Д., *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи*. Мир, Москва, 1982.
2. Свами М., Тхуласираман К., *Графы, сети и алгоритмы*. Мир, Москва, 1984.

Статья поступила 22.01.2008.