Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Е. Гуревский, В. А. Емеличев, О пяти типах устойчивости лексикографического варианта комбинаторной задачи на узкие места, *Дискрет. матем.*, 2009, том 21, выпуск 3, 3–13

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1056>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 12:33:43

О пяти типах устойчивости лексикографического варианта комбинаторной задачи на узкие места

© 2009 г. Е. Е. Гуревский, В. А. Емеличев

Рассматривается векторная комбинаторная минимаксная задача с упорядоченными критериями. Формулируются и доказываются необходимые и достаточные условия пяти известных типов устойчивости задачи, по-разному описывающих поведение лексикографического множества относительно возмущений исходных данных векторного критерия.

1. Введение

Один из известных подходов к исследованию проблем устойчивости векторных задач дискретной оптимизации ориентирован на получение результатов «качественного» характера, а именно, на выявление условий, при которых множество оптимальных (в определенном смысле) решений задачи обладает некоторым наперед заданным свойством инвариантности по отношению к внешним воздействиям на исходные данные задачи. Большинство результатов в этом направлении связано с получением необходимых и достаточных условий пяти известных типов устойчивости векторных целочисленных задач линейного и квадратичного программирования, состоящих в отыскании решений, оптимальных по Парето, Слейтеру, или Смейлу (см., например, [1–6]), а также булевых задач последовательной минимизации модулей линейных функций [7].

В настоящей работе проведен анализ пяти типов устойчивости (по векторному критерию) многокритериальной комбинаторной задачи по последовательно применяемым минимаксным критериям. В результате найдены необходимые и одновременно достаточные условия каждого типа устойчивости. Отметим, что аналогичные условия для векторной комбинаторной задачи на узкие места с паретовским принципом оптимальности были получены в [8].

2. Определения, обозначения и свойства

Рассмотрим векторный вариант известной комбинаторной задачи на узкие места. Пусть на множестве $N_m = \{1, 2, \dots, m\}$, $m \geq 2$, задана некоторая система непустых подмножеств $T \subseteq 2^{N_m} \setminus \{\emptyset\}$, $|T| \geq 2$. Элементы множества T принято называть траекториями. Пусть компонентами вектор-функции $f(t, A) = (f_1(t, A), f_2(t, A), \dots, f_n(t, A))$, $n \geq 1$, заданной

на T , являются минимаксные критерии

$$f_i(t, A) = \max_{j \in t} a_{ij} \xrightarrow{t \in T} \min, \quad i \in N_n,$$

где $A = [a_{ij}]$ — матрица размера $n \times m$ с элементами из $\mathbf{R}$.

Под векторной (n -критериальной) комбинаторной задачей $Z^n(A)$, $n \geq 1$, будем понимать задачу поиска лексикографического множества (множества лексикографических оптимумов)

$$L^n(A) = \{t \in T: \forall t' \in T (t \not\stackrel{A}{\succ} t')\},$$

где $\stackrel{A}{\succ}$ — отрицание бинарного лексикографического отношения $\stackrel{A}{\succ}$, задаваемого на множестве траекторий T формулой

$$t \stackrel{A}{\succ} t' \iff \exists k \in N_n (f_k(t, A) > f_k(t', A) \& k = \min\{i \in N_n: f_i(t, A) \neq f_i(t', A)\}).$$

Отметим, что в схему скалярных (однокритериальных) комбинаторных задач (с линейными, минимаксными и другими критериями) вкладываются многие классические экстремальные задачи на графах (о коммивояжере, паросочетаниях, остовах и др.), разнообразные задачи теории расписаний и задачи булева программирования [1, 9–11].

Будем использовать обозначение

$$\overline{L^n}(A) = T \setminus L^n(A).$$

Свойство 1. Если $t \stackrel{A}{\succ} t'$, то $t \in \overline{L^n}(A)$.

Свойство 2. Если $t \stackrel{A}{\succ} t'$, то $t' \not\stackrel{A}{\succ} t$.

Известно (см., например, [12]), что задачу $Z^n(A)$ можно трактовать как задачу оптимизации по последовательно применяемым критериям, то есть лексикографическое множество $L^n(A)$ может быть определено как результат решения последовательности n скалярных задач

$$L_i^n(A) = \text{Arg min}\{f_i(t, A): t \in L_{i-1}^n(A)\}, \quad i \in N_n,$$

где $L_0^n(A) = T$, $\text{Arg min}\{\cdot\}$ — множество всех оптимальных траекторий соответствующей задачи минимизации. Отсюда вытекает справедливость соотношений

$$T \supseteq L_1^n(A) \supseteq L_2^n(A) \supseteq \dots \supseteq L_n^n(A) = L^n(A).$$

Очевидно, что при любой матрице $A \in \mathbf{R}^{n \times m}$ множество $L^n(A)$ непусто.

Понятно, что $t \stackrel{A}{\succ} t'$, если $t \notin L_k^n(A)$ и $t' \in L_k^n(A)$ при некотором индексе $k \in N_n$.

Поэтому имеет место следующее свойство.

Свойство 3. Пусть индекс $k \in N_n$ таков, что $f_k(t, A) > f_k(t', A)$ и $t' \in L_k^n(A)$. Тогда $t \stackrel{A}{\succ} t'$.

Очевидно, что для любой траектории t и всякой $n \times m$ матрицы B с неотрицательными элементами ($B \in \mathbf{R}_+^{n \times m}$) верны неравенства

$$f_i(t, A) \leq f_i(t, A + B), \quad i \in N_n.$$

Поэтому справедливо следующее свойство.

Свойство 4. Пусть $k \in N_n$. Если траектория $t \in L_k^n(A)$ и матрица $B^0 \in \mathbf{R}_+^{n \times m}$ таковы, что верны равенства $f_i(t, A) = f_i(t, A + B^0)$, $i \in N_k$, то $t \in L_k^n(A + B^0)$.

Приведем определения пяти наиболее распространенных в литературе типов устойчивости (см., например, [1–8, 13–16]).

Задача $Z^n(A)$, $n \geq 1$, называется устойчивой (к возмущениям элементов матрицы A), если

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall B \in \Xi(\varepsilon) \quad (L^n(A + B) \subseteq L^n(A)).$$

Здесь

$$\Xi(\varepsilon) = \{B \in \mathbf{R}^{n \times m} : \|B\| < \varepsilon\}$$

— множество возмущающих матриц,

$$\|B\| = \max\{|b_{ij}| : (i, j) \in N_n \times N_m\},$$

$B = [b_{ij}]$. Задачу $Z^n(A + B)$ будем в дальнейшем называть возмущенной.

Тем самым, задача устойчива, когда любые достаточно малые изменения исходных данных задачи не приводят к появлению новых лексикографических оптимумов. Поэтому устойчивость можно трактовать как дискретный аналог свойства полунепрерывности сверху по Хаусдорфу в точке A многозначного (точечно-множественного) оптимального отображения

$$L^n : \mathbf{R}^{n \times m} \rightarrow 2^T, \quad (1)$$

которое каждой матрице из $\mathbf{R}^{n \times m}$ ставит в соответствие лексикографическое множество задачи.

Отметим, что количественная оценка допустимых изменений исходных данных (так называемый радиус устойчивости) скалярной задачи на узкие места исследовалась в ряде работ (см., например, [10, 18, 19]).

Ослабляя требование непоявления новых лексикографических оптимумов, приходим к понятию сильной устойчивости задачи. Задача $Z^n(A)$ называется сильно устойчивой, если

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall B \in \Xi(\varepsilon) \quad (L^n(A) \cap L^n(A + B) \neq \emptyset).$$

Тем самым, этот тип устойчивости описывает ситуацию, при которой лексикографическое множество задачи имеет непустое пересечение с аналогичным множеством любой из возмущенных задач. Легко видеть, что задача $Z^n(A)$ сильно устойчива, если она устойчива. Ниже будет показано (см. теорему 1), что верно и обратное утверждение.

Задача $Z^n(A)$ называется квазиустойчивой, если

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall B \in \Xi(\varepsilon) \quad (L^n(A) \subseteq L^n(A + B)).$$

Иначе говоря, квазиустойчивость характеризует случай, когда все траектории лексикографического множества не теряют свойства оптимальности при достаточно малых возмущениях исходных данных задачи. Тем самым, квазиустойчивость задачи $Z^n(A)$ является дискретным аналогом свойства полунепрерывности снизу по Хаусдорфу в точке A многозначного оптимального отображения (1).

Ослабляя требование сохранения всего лексикографического множества задачи, приходим к понятию сильной квазиустойчивости. Этот тип устойчивости связан с наличием хотя бы одной траектории, принадлежащей лексикографическим множествам всех

возмущенных задач при небольших изменениях исходных данных. Итак, задача $Z^n(A)$ называется сильно квазиустойчивой, если

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \exists t^0 \in L^n(A) \quad \forall B \in \Xi(\varepsilon) \quad (t^0 \in L^n(A + B)).$$

Очевидно, что всякая квазиустойчивая задача сильно квазиустойчива, а любая сильно квазиустойчивая задача является сильно устойчивой.

Наконец, задачу $Z^n(A)$ назовем стабильной, если

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall B \in \Xi(\varepsilon) \quad (L^n(A) = L^n(A + B)).$$

Тем самым, свойство стабильности задачи $Z^n(A)$ является дискретным аналогом свойства непрерывности по Хаусдорфу в точке A многозначного оптимального отображения (1). Очевидно, что задача $Z^n(A)$ стабильна в том и только том случае, когда она одновременно устойчива и квазиустойчива.

Отметим, что перечисленные выше типы устойчивости в работах [2–6] имеют другую терминологию (T_1 – T_5 -устойчивость).

Для любого непустого подмножества $I \subseteq N_n$ на множестве траекторий T задачи $Z^n(A)$ введем бинарные отношения:

$$\begin{aligned} t &\geq_{I,A} t' \iff \forall i \in I \quad (f_i(t, A) \geq f_i(t', A)), \\ t &>_{I,A} t' &\iff \forall i \in I \quad (f_i(t, A) > f_i(t', A)), \\ t &\vdash_{I,A} t' &\iff \forall i \in I \quad (N_i(t, A) \supseteq N_i(t', A)), \end{aligned}$$

где

$$N_i(t, A) = \{j \in t : a_{ij} = f_i(t, A)\}.$$

Очевидны следующие свойства.

Свойство 5. Если $t \vdash_{I,A} t'$, то существует такое число $\varepsilon > 0$, что для любой возмущающей матрицы $B \in \Xi(\varepsilon)$ выполняется отношение $t \geq_{I,A+B} t'$.

Свойство 6. Если $t \geq_{N_n,A} t'$, то $t' \overset{A}{\succ} t$.

Учитывая свойства 5 и 6, а также непрерывность функции $f(t, A)$ на множестве параметров $\mathbf{R}^{n \times m}$, убеждаемся в справедливости следующих двух свойств.

Свойство 7. Если $t \vdash_{N_n,A} t'$, то

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall B \in \Xi(\varepsilon) \quad (t' \overset{A+B}{\succ} t).$$

Свойство 8. Если для траекторий t и t' выполняется любое из условий:

- (i) $t >_{1,A} t'$,
- (ii) $\exists k \in N_{n-1} \quad (t \vdash_{N_k,A} t' \ \& \ t >_{k+1,A} t')$,

то справедлива формула

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall B \in \Xi(\varepsilon) \quad (t \overset{A+B}{\succ} t'). \quad (2)$$

Далее положим

$$\begin{aligned} M(t) &= \{i \in N_n : t \in L_i^n(A)\}, \\ \sigma(t) &= |M(t)|, \\ V^n(A) &= \{t \in L_1^n(A) : \exists t' \in L^n(A) (t \underset{M(t), A}{\vdash} t')\}, \\ U^n(A) &= \{t \in L^n(A) : \forall i \in N_n \forall t' \in L_i^n(A) (t' \underset{i, A}{\vdash} t)\}. \end{aligned}$$

Очевидно, что множество $U^n(A)$ может быть любым (в том числе и пустым) подмножеством лексикографического множества $L^n(A)$.

В силу рефлексивности отношения $\underset{i, A}{\vdash}$, справедливо включение $L^n(A) \subseteq V^n(A)$, и поэтому $L^n(A) = V^n(A)$, если $L^n(A) = L_1^n(A)$. Также легко видеть, что при $t \in L_1^n(A)$ множество $M(t)$ совпадает с множеством $N_{\sigma(t)}$, где $1 \leq \sigma(t) \leq n$. Причем $\sigma(t) = n$ лишь в случае, когда $t \in L^n(A)$. Поэтому имеет место следующее свойство.

Свойство 9. Пусть $t \in L_1^n(A) \setminus L^n(A)$ и $t' \in L^n(A)$. Тогда $1 \leq \sigma(t) < n$ и $t \underset{\sigma(t)+1, A}{\vdash} t'$.

Легко также видеть, что справедливы следующие свойства.

Свойство 10. Если $t \in L_1^n(A) \setminus V^n(A)$, то $N_m \setminus t \neq \emptyset$.

Свойство 11. Если $t \in L^n(A)$ и $t' \in U^n(A)$, то $t \underset{N_n, A}{\vdash} t'$.

3. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. Если $t \in L_1^n(A) \setminus V^n(A)$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B^0 \in \Xi(\varepsilon) \quad \forall t' \in L^n(A) \quad (t' \underset{A+B^0}{\succ} t). \quad (3)$$

Доказательство. Пусть $t \in L_1^n(A) \setminus V^n(A)$. Тогда для любой траектории $t' \in L^n(A)$ существует такой индекс $k = k(t') \in M(t) = N_{\sigma(t)}$, что $N_k(t, A) \not\subseteq N_k(t', A)$ и $t \in L_k^n(A)$. Тогда $t' \setminus t \neq \emptyset$. Пусть $p \in N_k(t', A) \setminus N_k(t, A)$. Тогда

$$f_k(t, A) = f_k(t', A) = a_{kp}. \quad (4)$$

Далее, положив $\varepsilon > 0$ и учитывая свойство 10, построим возмущающую матрицу $B^0 = [b_{ij}^0] \in \mathbf{R}^{n \times m}$ по правилу

$$b_{ij}^0 = \begin{cases} \delta, & \text{если } i \in M(t), j \in N_m \setminus t, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $0 < \delta < \varepsilon$. Тогда очевидны равенства

$$f_i(t, A) = f_i(t, A + B^0), \quad i \in M(t).$$

Поэтому справедливо включение $t \in L_k^n(A + B^0)$ в силу свойства 4 и включения $t \in L_k^n(A)$. Кроме того, используя равенства (4), получаем, что

$$\begin{aligned} f_k(t', A + B^0) &= \max\{a_{kj} + b_{kj}^0 : j \in t'\} = \max\{a_{kj} + b_{kj}^0 : j \in t' \setminus t\} \\ &= a_{kp} + \delta > a_{kp} = f_k(t', A) = f_k(t, A) = f_k(t, A + B^0). \end{aligned}$$

Из свойства 3 получаем формулу (3). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Если $L_1^n(A) = V^n(A)$ и $t \in \overline{L^n(A)}$, то найдется такая траектория $t^0 \in L^n(A)$, что

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall B \in \Xi(\varepsilon) \quad (t \underset{A+B}{>} t^0). \quad (5)$$

Доказательство. Для траектории $t \in \overline{L^n(A)}$ рассмотрим два возможных случая.

Случай 1: $t \in L_1^n(A)$. Тогда $t \in V^n(A)$ и потому существует такая траектория $t^0 \in L^n(A)$, что выполняется отношение $t \underset{M(t), A}{\vdash} t^0$. Кроме того, с учетом включения $t \in \overline{L^n(A)} \cap L_1^n(A) = L_1^n(A) \setminus L^n(A)$ и свойства 9 заключаем, что $t \underset{\sigma(t)+1, A}{>} t^0$. Отсюда и из свойства 8 получаем, что

$$\exists \varepsilon_1 > 0 \quad \forall B \in \Xi(\varepsilon_1) \quad (t \underset{A+B}{>} t^0).$$

Случай 2: $t \in T \setminus L_1^n(A)$. Тогда для любой траектории $t^0 \in L^n(A)$ выполняется отношение $t \underset{1, A}{>} t^0$. Поэтому из свойства 8 вытекает, что

$$\exists \varepsilon_2 > 0 \quad \forall B \in \Xi(\varepsilon_2) \quad (t \underset{A+B}{>} t^0).$$

Учитывая оба случая, убеждаемся в справедливости формулы (5). Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Если $t \in U^n(A)$ и $t' \in T$, то

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall B \in \Xi(\varepsilon) \quad (t \underset{A+B}{\succ} t'). \quad (6)$$

Доказательство. Пусть $t \in U^n(A)$. Для траектории t' рассмотрим два возможных случая.

Случай 1: $t' \in L_1^n(A)$. Пусть сначала $t' \in L^n(A)$. Тогда в силу свойства 11 справедливо отношение $t' \underset{N_n, A}{\vdash} t$. Отсюда, используя свойство 7, получаем (6).

Пусть $t' \in L_1^n(A) \setminus L^n(A)$. Тогда существует такой индекс $k = k(t') \in N_n \setminus \{1\}$, что $t' \notin L_k^n(A)$, а $t' \in L_i^n(A)$ при $i \in N_{k-1}$. Поэтому имеют место отношения $t' \underset{N_{k-1}, A}{\vdash} t$ и $t' \underset{k, A}{>} t$. Пользуясь этими фактами и свойством 8, заключаем, что верна формула

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall B \in \Xi(\varepsilon) \quad (t' \underset{A+B}{\succ} t),$$

которая, ввиду свойства 2, дает (6).

Случай 2: $t' \in T \setminus L_1^n(A)$. Тогда имеет место отношение $t' \underset{1, A}{>} t$. Отсюда и из свойств 2 и 8 вытекает формула (6).

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Если $t \in L^n(A) \setminus U^n(A)$, то верна формула

$$\exists t^0 \in T \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists B^0 \in \Xi(\varepsilon) \quad (t \underset{A+B^0}{>} t^0). \quad (7)$$

Доказательство. Поскольку $t \notin U^n(A)$, существуют $k \in N_n$ и $t^0 \in L_k^n(A)$ такие, что $N_k(t^0, A) \not\subseteq N_k(t, A)$ и $t \in L_k^n(A)$. Пусть $p \in N_k(t, A) \setminus N_k(t^0, A)$. Тогда

$$f_k(t, A) = f_k(t^0, A) = a_{kp}.$$

Поэтому, положив $\varepsilon > 0$ и построив элементы возмущающей матрицы $B^0 = [b_{ij}^0] \in \mathbf{R}^{n \times m}$ по правилу

$$b_{ij}^0 = \begin{cases} \delta, & \text{если } i = k, j = p, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $0 < \delta < \varepsilon$, убеждаемся в справедливости соотношений

$$\begin{aligned} f_i(t^0, A) &= f_i(t^0, A + B^0), \quad i \in N_k, \\ f_k(t, A + B^0) &= \max\{a_{kj} + b_{kj}^0 : j \in t\} = a_{kp} + \delta > a_{kp} = f_k(t, A) = f_k(t^0, A) \\ &= f_k(t^0, A + B^0). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $t^0 \in L_k^n(A + B^0)$ согласно свойству 4 и $t \succ_{A+B^0} t^0$ согласно свойству 3. Следовательно, верна формула (7). Лемма 4 доказана.

4. Анализ пяти типов устойчивости

Теорема 1. Для векторной задачи $Z^n(A)$, $n \geq 1$, следующие утверждения эквивалентны:

- (1) задача $Z^n(A)$ устойчива,
- (2) задача $Z^n(A)$ сильно устойчива,
- (3) $L_1^n(A) = V^n(A)$.

Доказательство. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) очевидна.

Докажем, что (2) $\Rightarrow$ (3). Допустим противное, то есть задача $Z^n(A)$ сильно устойчива, но $L_1^n(A) \neq V^n(A)$. Пусть $t \in L_1^n(A) \setminus V^n(A)$. Тогда по лемме 1, ввиду свойства 1,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B^0 \in \Xi(\varepsilon) \quad \forall t' \in L^n(A) \quad (t' \in \overline{L^n(A + B^0)}).$$

Отсюда получаем, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B^0 \in \Xi(\varepsilon) \quad (L^n(A) \cap L^n(A + B^0) = \emptyset),$$

что противоречит сильной устойчивости задачи $Z^n(A)$.

Докажем, что (3) $\Rightarrow$ (1). Очевидно, что при выполнении равенства $L^n(A) = T$ задача $Z^n(A)$ устойчива. Пусть $\overline{L^n(A)} \neq \emptyset$. Тогда, в силу леммы 2 и свойства 1, для всякой траектории $t \in \overline{L^n(A)}$ находим, что

$$\exists \varepsilon = \varepsilon(t) > 0 \quad \forall B \in \Xi(\varepsilon) \quad (t \in \overline{L^n(A + B)}).$$

Поэтому при

$$\varepsilon^* = \min\{\varepsilon(t) : t \in \overline{L^n(A)}\}$$

легко видеть, что

$$\exists \varepsilon^* > 0 \quad \forall B \in \Xi(\varepsilon^*) \quad (\overline{L^n(A)} \subseteq \overline{L^n(A + B)}).$$

Следовательно, задача $Z^n(A)$ устойчива. Теорема 1 доказана.

Отметим, что установленная теоремой 1 эквивалентность понятий устойчивости и сильной устойчивости задачи $Z^n(A)$ не всегда присуща векторной задаче дискретной оптимизации. Например, в [17] показано, что всякая векторная задача целочисленного линейного программирования с паретовским принципом оптимальности сильно устойчива, хотя давно известно (см., например, [1, 2]), что такая задача устойчива тогда и только тогда, когда совпадают множества Парето и Слейтера.

Теорема 1 имеет следующую эквивалентную формулировку.

Теорема 2. *Задача $Z^n(A)$ устойчива (сильно устойчива) тогда и только тогда, когда справедлива импликация*

$$L^n(A) \neq L_1^n(A) \implies \forall t \in L_1^n(A) \setminus L^n(A) \quad \exists t^0 \in L^n(A) \quad (t \not\vdash_{M(t),A} t^0).$$

Отсюда вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *При выполнении любого из условий*

- (1) $L^n(A) = L_1^n(A)$,
- (2) $|\{y \in \mathbb{R}^n : y = f(t, A), t \in L_1^n(A)\}| = 1$,
- (3) $\forall t \in \overline{L^n(A)} \quad \forall t' \in L^n(A) \quad (t \not>_{1,A} t')$,
- (4) $\forall t \in \overline{L^n(A)} \quad \exists t' \in T \quad (t \not>_{1,A} t')$

задача $Z^n(A)$ устойчива и сильно устойчива.

Следующий пример показывает, что равенство $L^n(A) = L_1^n(A)$ не является необходимым условием устойчивости (сильной устойчивости).

Пример 1. Пусть

$$n = 2, \quad m = 2, \quad T = \{t_1, t_2\}, \quad t_1 = \{1\}, \quad t_2 = \{1, 2\}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$f(t_1, A) = (1, 1), \quad f(t_2, A) = (1, 2), \quad L^2(A) = \{t_1\}, \quad L_1^2(A) = T.$$

Легко видеть, что

$$M(t_1) = \{1, 2\}, \quad M(t_2) = \{1\}, \quad t_1 \not\vdash_{M(t_1),A} t_1, \quad t_2 \not\vdash_{M(t_2),A} t_1.$$

Поэтому

$$V^2(A) = L_1^2(A).$$

Следовательно, согласно теореме 1, задача $Z^2(A)$ устойчива, хотя $L^2(A) \neq L_1^2(A)$.

Отметим, что в работах [13–15] показано, что приведенные в следствии 1 условия являются не только достаточными, но и необходимыми для устойчивости и сильной устойчивости векторной комбинаторной задачи, если критерии являются линейными.

В скалярном случае ($n = 1$) теорема 1 превращается в следующее утверждение.

Следствие 2. Скалярная задача $Z^1(A)$ устойчива и сильно устойчива при любом векторе $A \in \mathbf{R}^m$.

Теорема 3. Векторная задача $Z^n(A)$, $n \geq 1$, квазиустойчива тогда и только тогда, когда $L^n(A) = U^n(A)$.

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть, напротив, задача $Z^n(A)$ квазиустойчива, но $L^n(A) \neq U^n(A)$. Тогда существует траектория $t \in L^n(A) \setminus U^n(A)$, для которой, в силу леммы 4 и свойства 1, справедлива формула

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B^0 \in \Xi(\varepsilon) \quad (t \in \overline{L^n(A + B^0)}).$$

Отсюда выводим, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B^0 \in \Xi(\varepsilon) \quad (L^n(A) \not\subseteq L^n(A + B^0)),$$

что противоречит квазиустойчивости задачи $Z^n(A)$.

Докажем достаточность. Пусть $L^n(A) = U^n(A)$, и пусть $t \in U^n(A)$. Тогда для любой траектории $t' \in T$, в силу леммы 3, справедлива формула

$$\exists \varepsilon(t') > 0 \quad \forall B \in \Xi(\varepsilon(t')) \quad (t \stackrel{A+B}{\succ} t').$$

Таким образом, для всякой траектории $t \in L^n(A)$ существует такое $\varepsilon = \varepsilon(t) > 0$, что при всякой возмущающей матрице $B \in \Xi(\varepsilon)$ выполнено включение $t \in L^n(A + B)$. Поэтому, полагая

$$\varepsilon^* = \min\{\varepsilon(t) : t \in L^n(A)\},$$

получаем, что

$$\exists \varepsilon^* > 0 \quad \forall B \in \Xi(\varepsilon^*) \quad (L^n(A) \subseteq L^n(A + B)).$$

Следовательно, задача $Z^n(A)$ квазиустойчива. Теорема 2 доказана.

Очевидна следующая эквивалентная формулировка теоремы 3.

Теорема 4. Для того чтобы векторная задача $Z^n(A)$ была квазиустойчива, необходимо и достаточно, чтобы выполнялась формула

$$\forall t \in L^n(A) \quad \forall i \in N_n \quad \forall t' \in L_i^n(A) \quad (t' \vdash_{i,A} t).$$

Следствие 3. Скалярная задача $Z^1(A)$, $A \in \mathbf{R}^m$, квазиустойчива тогда и только тогда, когда

$$\forall t, t' \in L^1(A) \quad (N_1(t, A) = N_1(t', A)).$$

Здесь $L^1(A)$ — множество оптимальных траекторий скалярной задачи $Z^1(A)$.

Теорема 5. Векторная задача $Z^n(A)$, $n \geq 1$, сильно квазиустойчива тогда и только тогда, когда $U^n(A) \neq \emptyset$.

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $U^n(A) = \emptyset$. Тогда для любой траектории $t \in L^n(A)$, согласно лемме 4 и свойству 1,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B^0 \in \Xi(\varepsilon) \quad (t \in \overline{L^n(A + B^0)}).$$

Поэтому задача $Z^n(A)$ не является сильно квазиустойчивой.

Докажем достаточность. Пусть $t \in U^n(A)$. Тогда, по лемме 3, для любой траектории $t' \in T$ верна формула

$$\exists \varepsilon = \varepsilon(t') > 0 \quad \forall B \in \Xi(\varepsilon) \quad (t \stackrel{\sim}{\succ}_{A+B} t').$$

Отсюда, согласно определению лексикографического множества,

$$\exists \varepsilon^* > 0 \quad \forall B \in \Xi(\varepsilon^*) \quad (t \in L^n(A + B)),$$

где

$$\varepsilon^* = \min\{\varepsilon(t') : t' \in T\}.$$

Следовательно, задача $Z^n(A)$ сильно квазиустойчива. Теорема 5 доказана.

Следствие 4. *Скалярная задача $Z^1(A)$ сильно квазиустойчива тогда и только тогда, когда*

$$\exists t^0 \in L^1(A) \quad \forall t \in L^1(A) \quad (t \underset{1,A}{\vdash} t^0).$$

Непосредственно из теорем 1 и 3 вытекает следующее утверждение.

Теорема 6. *Задача $Z^n(A)$, $n \geq 1$, стабильна тогда и только тогда, когда*

$$V^n(A) = L_1^n(A), \quad U^n(A) = L^n(A).$$

Из теорем 1–6 вытекает следующее утверждение.

Следствие 5. *Если $|L_1^n(A)| = 1$, то задача $Z^n(A)$ является одновременно устойчивой, сильно устойчивой, квазиустойчивой, сильно квазиустойчивой и стабильной.*

Список литературы

1. Сергиенко И. В., Козерацкая Л. Н., Лебедева Т. Т., *Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач*. Наукова думка, Киев, 1995.
2. Сергиенко И. В., Шило В. П., *Задачи дискретной оптимизации. Проблемы, методы решения, исследования*. Наукова думка, Киев, 2003.
3. Лебедева Т. Т., Сергиенко Т. И., Сравнительный анализ различных типов устойчивости по ограничениям векторной задачи целочисленной оптимизации. *Кибернетика и системный анализ* (2004), № 1, 63–70.
4. Лебедева Т. Т., Семенова Н. В., Сергиенко Т. И., Устойчивость векторных задач целочисленной оптимизации: взаимосвязь с устойчивостью множеств оптимальных и неоптимальных решений. *Кибернетика и системный анализ* (2005), № 4, 90–100.
5. Лебедева Т. Т., Сергиенко Т. И., Устойчивость по векторному критерию и ограничениям векторной целочисленной задачи квадратичного программирования. *Кибернетика и системный анализ* (2006), № 5, 63–72.
6. Лебедева Т. Т., Сергиенко Т. И., Разные типы устойчивости векторной задачи целочисленной оптимизации: общий подход. *Кибернетика и системный анализ* (2008), № 3, 142–148.
7. Емеличев В. А., Гуревский Е. Е., Булева задача последовательной минимизации модулей линейных функций и теоремы устойчивости. *Кибернетика и системный анализ* (2007), № 5, 178–187.

8. Емеличев В. А., Кузьмин К. Г., Критерии устойчивости векторных комбинаторных задач “на узкие места” в терминах бинарных отношений. *Кибернетика и системный анализ* (2008), № 3, 103–111.
9. Емеличев В. А., Кравцов М. К., О комбинаторных задачах векторной оптимизации. *Дискретная математика* (1995) 7, №1, 3–18.
10. Sotskov Yu. N., Leontev V. K., Gordeev E. N., Some concepts of stability analysis in combinatorial optimization. *Discrete Appl. Math.* (1995) 58, №2, 169–190.
11. Сотсков Ю. Н., Сотскова Н. Ю., *Теория расписаний. Системы с неопределенными числовыми параметрами*. ОИПИ НАН Беларуси, Минск, 2004.
12. Подиновский В. В., Гаврилов В. М., *Оптимизация по последовательно применяемым критериям*. Советское радио, Москва, 1975.
13. Емеличев В. А., Бердышева Р. А., О радиусах устойчивости, квазиустойчивости и стабильности векторной траекторной задачи лексикографической оптимизации. *Дискретная математика* (1998) 10, №1, 20–27.
14. Емеличев В. А., Бердышева Р. А., О сильной устойчивости векторной траекторной задачи лексикографической оптимизации. *Дискретная математика* (1998) 10, №3, 3–9.
15. Бердышева Р. А., Емеличев В. А., Некоторые виды устойчивости комбинаторной задачи лексикографической оптимизации. *Известия вузов. Математика* (1998), № 12, 11–21.
16. Emelichev V. A., Girlich E., Nikulin Yu. V., Podkopaev D. P., Stability and regularization of vector problems of integer linear programming. *Optimization* (2002) 51, №4, 645–676.
17. Emelichev V. A., Nikulin Y. V., Numerical measure of strong stability and strong quasi-stability in the vector problem of integer linear programming. *Comput. Sci. J. Mold.* (1999) 7, №1, 105–117.
18. Гордеев Э. Н., Об устойчивости задач на узкие места. *Журнал вычисл. матем. и матем. физики* (1993) 33, №9, 1391–1402.
19. Гордеев Э. Н., Леонтьев В. К., Общий подход к исследованию устойчивости решений в задачах дискретной оптимизации. *Журнал вычисл. матем. и матем. физики* (1996) 36, №1, 66–72.

Статья поступила 28.08.2008.