Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Тихомирова, В. П. Чистяков, Об оценке периодов зашумленных двоичных периодических последовательностей, *Дискрет. матем.*, 2009, том 21, выпуск 3, 24–32

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1058>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 13:22:13

Об оценке периодов зашумленных двоичных периодических последовательностей

© 2009 г. М. И. Тихомирова, В. П. Чистяков

Для оценки длин периодов зашумленных двоичных последовательностей предлагаются и исследуются статистики, равные логарифму функции правдоподобия, и близкие к ним.

1. Введение

При проверке качества последовательностей псевдослучайных чисел $\{x_t^*\}$ за основную гипотезу H_0 принимается предположение, по которому исследуемая последовательность $\{x_t^*\}$ является реализацией последовательности независимых равномерно распределенных случайных величин $\{x_t\}$. Во множество предполагаемых конкурирующих гипотез включается обычно предположение о периодичности (в том или ином смысле) последовательности $\{x_t\}$.

Одним из возможных подходов к проверке предполагаемой периодичности является подход, основанный на использовании дискретного преобразования Фурье (см. [1, 2]). Пусть

$$x_1, x_2, \dots, x_t, \dots \quad (1)$$

— случайные величины, принимающие значения 0 и 1. Положим

$$Y_j = \frac{T}{2} |X(\omega_j)|^2, \quad j = 1, \dots, L, \quad L = [T/2], \quad (2)$$

где

$$X(\omega) = \frac{2}{T} \sum_{t=1}^T (2x_t - 1) e^{i\omega t}, \quad \omega_j = \frac{2\pi j}{T}.$$

По гипотезе H_0 случайные величины (1) независимы и вероятности каждого из знаков 0 и 1 равны $1/2$. Для проверки гипотезы H_0 используем статистику $Y_{j_0} = \max_j Y_j$. Если гипотеза H_0 неверна, то в качестве оценок частоты ω_0 и соответствующего ей истинного периода n_0 принимаются $\hat{\omega} = \omega_{j_0}$ и $\hat{n}_0 = T/j_0$.

В нашей работе исследуются двоичные последовательности (1), которые по конкурирующей гипотезе H_1 являются зашумленными случайными периодическими последовательностями, определяемыми следующим образом. Пусть $\{z_t\}$, $\{y_t\}$, $\{\varepsilon_t\}$ — случайные двоичные последовательности и

$$\mathbf{P}\{z_t = 1\} = \mathbf{P}\{y_t = 1\} = 1/2, \quad \mathbf{P}\{\varepsilon_t = 1\} = p, \quad 0 < p < 1, \quad t = 1, 2, \dots$$

Случайные величины $y_1, \dots, y_{n_0}, z_t, \varepsilon_t, t = 1, 2, \dots$, независимы. Последовательность $\{y_t\}$ является периодической:

$$\mathbf{P}\{y_{n_0l+m} = y_m, l = 0, 1, \dots, m = 1, 2, \dots, n_0\} = 1. \quad (3)$$

Зашумленная периодическая последовательность $\{x_t\}$ определяется следующим образом:

$$x_t = \varepsilon_t y_t + (1 - \varepsilon_t) z_t, \quad t = 1, 2, \dots \quad (4)$$

В работе получено явное выражение для функции правдоподобия выборки, состоящей из T первых членов последовательности (1), предложены статистики, которые могут быть использованы для оценки периода последовательности, исследуются свойства этих статистик.

2. Функция правдоподобия

Напомним, что n_0 — период последовательности $\{y_t\}$. Найдем распределение первых $T = n_0 L_0$, $L_0 > 1$, членов последовательности $\{x_t\}$. Положим $x(T) = (x_1, \dots, x_T)$, $y(n_0) = (y_1, \dots, y_{n_0})$. Возможные значения этих векторов обозначим через $g(T)$ и $h(n_0)$:

$$g(T) = (g_1, \dots, g_T), \quad h(n_0) = (h_1, \dots, h_{n_0}), \quad g_t, h_t \in \{0, 1\}.$$

Теорема 1. Совместное распределение $T = n_0 L_0$ первых членов последовательности $\{x_t\}$, определенной равенством (4), имеет следующий вид:

$$\mathbf{P}\{x(T) = g(T)\} = \frac{1}{2} \left(\frac{1-p}{2} \right)^{n_0 L_0} e^{G_{n_0}(g(T))}, \quad (5)$$

где

$$G_{n_0}(T) = \sum_{m=1}^{n_0} \ln(A^{\chi_m(n_0)} + A^{L_0 - \chi_m(n_0)}), \quad A = \frac{1+p}{1-p},$$

$$\chi_m(n_0) = \sum_{l=0}^{L_0-1} \chi(g_{n_0l+m} = 1), \quad m = 1, \dots, n_0,$$

$\chi(C)$ — индикатор события C .

Доказательство. Используя равенство (4) при $t = n_0 l + m$, получим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{x(T) = g(T) \mid y(n_0) = h(n_0)\} &= \prod_{l=0}^{L_0-1} \prod_{m=1}^{n_0} \mathbf{P}\{\varepsilon_{n_0l+m} h_m + (1 - \varepsilon_{n_0l+m}) z_{n_0l+m} = g_{n_0l+m}\} \\ &= \prod_{l=0}^{L_0-1} \prod_{m=1}^{n_0} (p \chi(h_m = g_{n_0l+m}) + (1-p)/2). \end{aligned}$$

Отсюда и из равенств

$$1 + \frac{2p}{1-p} \chi(h_m = g_{n_0l+m}) = \left(1 + \frac{2p}{1-p} \right)^{\chi(h_m = g_{n_0l+m})}, \quad \mathbf{P}\{y(n_0) = h(n_0)\} = \frac{1}{2^{n_0}}$$

следует, что

$$\mathbf{P}\{x(T) = g(T), y(n_0) = h(n_0)\} = \frac{(1-p)^{n_0 L_0}}{2^{n_0(L_0+1)}} A^{\sum_{m=1}^{n_0} \sum_{l=0}^{L_0-1} \chi(h_m = g_{n_0 l + m})}. \quad (6)$$

Суммируя обе стороны равенства (6) по всем значениям $h(n_0)$, получим, что

$$\mathbf{P}\{x(T) = g(T)\} = \frac{(1-p)^{n_0 L_0}}{2^{n_0(L_0+1)}} \sum_{h_1, \dots, h_{n_0}} A^{\sum_{m=1}^{n_0} \sum_{l=0}^{L_0-1} \chi(h_m = g_{n_0 l + m})}.$$

Отсюда следует утверждение теоремы.

Если период n_0 неизвестен, то для оценки периода последовательности $\{y_t\}$ по последовательности $\{x_t\}$ можно использовать статистики

$$\xi_n(T) = \sum_{m=1}^n \ln(A^{v_m^{(T)}(n)} + A^{L_n - v_m^{(T)}(n)}), \quad n = 2, 3, \dots, \quad (7)$$

где $L = [T/n]$, а частоты $v_m^{(T)}(n)$ определяются равенствами

$$v_m^{(T)}(n) = \sum_{l=0}^{L_n-1} x_{nl+m}. \quad (8)$$

Будет показано, что при больших T распределение статистики $\xi_{n_0}(T)$ заметно отличается от распределений статистики $\xi_n(T)$ с n , не кратным n_0 .

3. Моменты и распределения частот

Будем считать, что неизвестный период n_0 последовательность $\{y_t\}$ является одним из $r+1$ натуральных чисел заданного множества. Числа этого множества, отличные от n_0 , обозначим через $n_1, \dots, n_r$. Частоты (8) удобно записать в виде

$$v_m^{(T)}(n_i) = \sum_{t \in Z_m(n_i)} x_t, \quad i = 0, 1, \dots, r, \quad (9)$$

где

$$Z_m(n_i) = \{t: t = n_i l + m, l = 0, 1, \dots, [T/n_i] - 1\}, \quad m = 1, 2, \dots, n_i. \quad (10)$$

Множества (10), соответствующие истинному периоду, обозначим $M_m = Z_m(n_0)$. Для упрощения формул ковариаций частот (9) ограничимся рассмотрением случая, когда

$$T = n_0 n_1 \dots n_r L, \quad (11)$$

где L — целое число, $L \geq 1$, числа n_i , $i = 0, 1, \dots, r$, являются попарно взаимно простыми. Число элементов множества C будем обозначать через $|C|$.

При условии (11)

$$|Z_m(n_i)| = \frac{T}{n_i}, \quad |Z_{m_1}(n_i) \cap Z_{m_2}(n_j)| = \frac{T}{n_i n_j}, \quad i \neq j. \quad (12)$$

Математические ожидания, дисперсии, ковариации и распределения вероятностей при гипотезах H_0 и H_1 будем обозначать $\mathbf{E}_l, \mathbf{D}_l, \text{cov}_l, \mathbf{P}_l, l = 0, 1$, соответственно.

При гипотезе H_0

$$\mathbf{E}_0 x_t = 1/2, \quad \mathbf{D}_0 x_t = 1/4.$$

Отсюда, учитывая независимость слагаемых в сумме (9), получаем, что

$$\mathbf{E}_0 v_m^{(T)}(n_i) = \frac{T}{2n_i}, \quad \mathbf{D}_0 v_m^{(T)}(n_i) = \frac{T}{4n_i}. \quad (13)$$

Для вычисления ковариаций частот (9) воспользуемся равенством

$$\text{cov}_0(v_{m_1}^{(T)}(n_i), v_{m_2}^{(T)}(n_j)) = \sum_{t_1 \in Z_{m_1}(n_i)} \sum_{t_2 \in Z_{m_2}(n_j)} \text{cov}_0(x_{t_1}, x_{t_2}) = \sum_{t \in Z_{m_1}(n_i) \cap Z_{m_2}(n_j)} \mathbf{D}_0 x_t.$$

Отсюда и из равенств (12) и (13) получаем, что

$$\begin{aligned} \text{cov}_0(v_{m_1}^{(T)}(n_i), v_{m_2}^{(T)}(n_j)) &= \frac{T}{4n_i n_j}, \quad i \neq j, \\ \text{cov}_0(v_{m_1}^{(T)}(n_i), v_{m_2}^{(T)}(n_j)) &= 0, \quad i = j, \quad m_1 \neq m_2. \end{aligned} \quad (14)$$

Используя многомерную центральную предельную теорему и формулы (13) и (14), получим следующее утверждение.

Теорема 2. Если $n_0, n_1, \dots, n_r$ постоянны, взаимно просты, и $L \rightarrow \infty$, то при гипотезе H_0 совместное распределение величин

$$\theta_m^{(T)}(n_i) = \frac{v_m^{(T)}(n_i) - T/(2n_i)}{\sqrt{T/n_i}/2}, \quad m = 1, \dots, n_i, \quad i = 0, 1, \dots, r,$$

сходится к распределению случайного вектора $\{\theta_m^*(n_i)\}$, имеющего нормальное распределение с нулевым вектором математических ожиданий и ковариационной матрицей $(\text{cov}_0(v_{m_1}^*(n_i), v_{m_2}^*(n_j)))$, где

$$\begin{aligned} \text{cov}_0(v_{m_1}^*(n_i), v_{m_2}^*(n_j)) &= 1, \quad i = j, \quad m_1 = m_2, \\ \text{cov}_0(v_{m_1}^*(n_i), v_{m_2}^*(n_j)) &= 0, \quad i = j, \quad m_1 \neq m_2, \\ \text{cov}_0(v_{m_1}^*(n_i), v_{m_2}^*(n_j)) &= \sqrt{n_i n_j}, \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (15)$$

При гипотезе H_1 для моментов величин x_t , определенных равенством (4), нетрудно получить следующие выражения:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 x_t &= 1/2, & \mathbf{D}_1 x_t &= 1/4, \\ \text{cov}_1(x_{t_1}, x_{t_2}) &= 0, & t_1 \in M_u, \quad t_2 \in M_v, \quad u \neq v, \\ \text{cov}_1(x_{t_1}, x_{t_2}) &= p^2/4, & t_1, t_2 \in M_u, & \quad t_1 \neq t_2. \end{aligned} \quad (16)$$

Отсюда следует, что математическое ожидание частоты $v_m^{(T)}(n_i)$ при гипотезе H_1 совпадает с соответствующим математическим ожиданием при гипотезе H_0 , то есть

$$\mathbf{E}_1 v_m^{(T)}(n_i) = \frac{T}{2n_i}. \quad (17)$$

Частоты (9) представимы в виде

$$v_m^{(T)}(n_i) = \sum_{u=1}^{n_0} \left(\sum_{t \in Z_m(n_i) \cap M_u} x_t \right), \quad v_m^{(T)}(n_0) = \sum_{t \in M_m} x_t, \quad (18)$$

где суммы в круглых скобках независимы.

Используя представление частот в виде (18), нетрудно получить следующее утверждение.

Теорема 3. Если последовательность $\{x_t\}$ определяется равенствами (3) и (4) и T имеет вид (11), то

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_1 v_m^{(T)}(n_i) &= \frac{1}{4} \left((1-p^2) \frac{T}{n_0} + \frac{T^2}{n_0^2} p^2 \right), & i &= 0, \\ \mathbf{D}_1 v_m^{(T)}(n_i) &= \frac{1}{4} \left((1-p^2) \frac{T}{n_i} + \frac{T^2}{n_0 n_i^2} p^2 \right), & i &\neq 0, \\ \text{cov}_1(v_{m_1}^{(T)}(n_i), v_{m_2}^{(T)}(n_j)) &= \frac{1}{4} \left((1-p^2) \frac{T}{n_i n_j} + \frac{T^2}{n_i n_j n_0} p^2 \right), & i \neq j, \quad i \neq 0, \quad j \neq 0, \\ \text{cov}_1(v_{m_1}^{(T)}(n_i), v_{m_2}^{(T)}(n_j)) &= \frac{1}{4} \left((1-p^2) \frac{T}{n_0 n_j} + \frac{T^2}{n_0^2 n_j} p^2 \right), & i &= 0, \quad j \neq 0, \\ \text{cov}_1(v_{m_1}^{(T)}(n_i), v_{m_2}^{(T)}(n_j)) &= \frac{1}{4} \left(p^2 \frac{T^2}{n_i^2 n_0^2} \right), & i &= j \neq 0, \quad m_1 \neq m_2, \\ \text{cov}_1(v_{m_1}^{(T)}(n_i), v_{m_2}^{(T)}(n_j)) &= 0, & i &= j = 0, \quad m_1 \neq m_2. \end{aligned}$$

Докажем, например, формулу для случая $i \neq j, i \neq 0, j \neq 0$. Из представления $v_m^{(T)}(n_i)$ в виде (18), учитывая независимость сумм в круглых скобках, получаем равенство

$$\text{cov}_1(v_{m_1}(n_i), v_{m_2}(n_j)) = \sum_{u=1}^{n_0} \sum_{t_1 \in Z_{m_1}(n_i) \cap M_u} \sum_{t_2 \in Z_{m_2}(n_j) \cap M_u} \text{cov}_1(x_{t_1}, x_{t_2}). \quad (19)$$

Сумму по t_1, t_2 представим в виде суммы двух слагаемых

$$\Sigma_1(u) = \sum_{t \in Z^{(1)}} \mathbf{D}_1 x_t, \quad \Sigma_2(u) = \sum_{(t_1, t_2) \in Z^{(2)}} \text{cov}_1(x_{t_1}, x_{t_2}),$$

где $Z^{(1)} = Z_{m_1}(n_i) \cap Z_{m_2}(n_j) \cap M_u$, а $Z^{(2)}$ состоит из пар (t_1, t_2) с $t_1 \neq t_2$. Нетрудно проверить, что

$$|Z^{(1)}| = \frac{T}{n_i n_j n_0}, \quad |Z^{(2)}| = \frac{T}{n_i n_0} \frac{T}{n_j n_0} - \frac{T}{n_i n_j n_0}. \quad (20)$$

Из (16), (18) и (20) получаем первую формулу для ковариаций. Остальные формулы доказываются аналогично.

По гипотезе H_1 , дисперсии частот при $T \rightarrow \infty$ имеют порядок T^2 . Дисперсии частот по условному распределению при фиксированном векторе $y(n_0) = (y_1, y_2, \dots, y_{n_0})$ имеют обычный порядок T . При $t \in M_m$

$$\mathbf{P}_1\{x_t = 1 \mid y_m = 1\} = \frac{1+p}{2}, \quad \mathbf{P}_1\{x_t = 1 \mid y_m = 0\} = \frac{1-p}{2}. \quad (21)$$

При условии y_m величины $x_t, t \in M_m$ независимы и

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1(v_m^{(T)}(n_0) \mid y_m = 1) &= \frac{T(1+p)}{2n_0}, \\ \mathbf{E}_1(v_m^{(T)}(n_0) \mid y_m = 0) &= \frac{T(1-p)}{2n_0}, \\ \mathbf{D}_1(v_m^{(T)}(n_0) \mid y_m = 1) &= \mathbf{D}_1(v_m^{(T)}(n_0) \mid y_m = 0) = \frac{T(1-p^2)}{4n_0}. \end{aligned} \quad (22)$$

Таким образом, при $T \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 \left\{ \frac{v_m^{(T)}(n_0) - T(1+p)/(2n_0)}{(1/2)\sqrt{T(1-p^2)/n_0}} < x \mid y_m = 1 \right\} &\rightarrow \Phi(x), \\ \mathbf{P}_1 \left\{ \frac{v_m^{(T)}(n_0) - T(1-p)/(2n_0)}{(1/2)\sqrt{T(1-p^2)/n_0}} < x \mid y_m = 0 \right\} &\rightarrow \Phi(x), \end{aligned}$$

где $\Phi(x)$ — функция нормального распределения с параметрами $(0, 1)$. Таким образом, распределение $v_m^{(T)}(n_0)$ сосредоточено с равными вероятностями вокруг удаляющихся друг от друга точек $T(1+p)/(2n_0)$ и $T(1-p)/(2n_0)$. Распределение $v_m(n_i)$ при $i \neq 0$ является смесью $n_0 + 1$ распределений, зависящих от суммы $\mu_{n_0} = y_1 + \dots + y_{n_0}$.

4. Моменты и распределения статистик

Математические ожидания частот $v_m^{(T)}(n_i)$ при обеих гипотезах одинаковы. Статистики (7), зависящие от частот $v_m^{(T)}(n_i)$, можно заменить статистиками, зависящими от центрированных частот и отличающимися от частот (7) постоянными слагаемыми:

$$\xi_n^*(T) = \sum_{m=1}^n \ln(A^{\hat{\theta}_m^{(T)}(n)} + A^{-\hat{\theta}_m^{(T)}(n)}), \quad n = n_0, n_1, \dots, n_r, \quad (23)$$

где

$$\hat{\theta}_m^{(T)}(n) = v_m^{(T)}(n) - \frac{T}{2n}, \quad A = \frac{1+p}{1-p}. \quad (24)$$

Теорема 4. Если $n_0, n_1, \dots, n_r$ постоянны, взаимно просты, $T = n_0 n_1 \dots n_r L$ и $L \rightarrow \infty$, то при гипотезе H_0 распределение вектора $(2/\sqrt{A} \ln A)(\sqrt{n_0} \xi_{n_0}^*(T), \dots, \sqrt{n_r} \xi_{n_r}^*(T))$ сходится к совместному распределению величин $\sum_{m=1}^{n_i} |\theta_m^*(n_i)|$, $i = 0, 1, \dots, r$, где величины $\theta_m^*(n_i)$ определены в формулировке теоремы 2.

Доказательство. Представим статистики (23) в виде

$$\xi_n^*(T) = \sum_{m=1}^n (\ln A^{|\theta_m^{(T)}(n)|\sqrt{T/n}/2} + \Delta_m^{(T)}(n)), \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} \theta_m^{(T)}(n) &= 2\hat{\theta}_m^{(T)}(n)/\sqrt{T/n}, \\ \Delta_m^{(T)}(n) &= \ln(A^{(\hat{\theta}_m^{(T)}(n) - |\theta_m^{(T)}(n)|)\sqrt{T/n}/2} + A^{-(\hat{\theta}_m^{(T)}(n) - |\theta_m^{(T)}(n)|)\sqrt{T/n}/2}). \end{aligned} \quad (26)$$

Положим $\gamma_m = 1$, если $\theta_m^{(T)}(n) > 0$, и $\gamma_m = 0$, если $\theta_m^{(T)}(n) < 0$.

Второе равенство (26) можно записать в виде

$$\Delta_m^{(T)}(n) = \gamma_m \ln(1 + A^{-\theta_m^{(T)}(n)\sqrt{T/n}}) + (1 - \gamma_m) \ln(1 + A^{\theta_m^{(T)}(n)\sqrt{T/n}}).$$

Отсюда

$$\Delta_m^{(T)}(n) = \ln(1 + A^{-|\theta_m^{(T)}(n)|\sqrt{T/n}})$$

Из теоремы 2 следует, что величины $\Delta_m^{(T)}(n)$ при $L \rightarrow \infty$ сходятся по вероятности к нулю. Таким образом, предельные распределения $\xi_{n_i}^*(T)$ и $\sum_{m=1}^{n_i} \left(\frac{1}{2} \sqrt{T/n_i} \ln A \right) |\theta_m^{(T)}(n_i)|$, $i = 0, 1, \dots, r$, совпадают. Теорема доказана.

Рассмотрим более простые (по сравнению с (23)) статистики, для которых можно получать простые явные выражения для моментов. Разлагая слагаемые в (23) в ряд Тейлора по степеням $\hat{\theta}_n^{(T)}(n)$, получим, что

$$\ln(A^{\hat{\theta}_n^{(T)}(n)} + A^{-\hat{\theta}_n^{(T)}(n)}) = \ln 2 + \frac{1}{2}(\hat{\theta}_n^{(T)}(n))^2 (\ln A)^2 + \dots$$

Определим статистики $\eta_{n_i}(T)$ равенствами

$$\eta_n(T) = \sum_{m=1}^n (\hat{\theta}_m^{(T)}(n))^2, \quad n = n_0, n_1, \dots, n_r, \quad (27)$$

где $\hat{\theta}_m^{(T)}(n)$ определены равенствами (24).

При гипотезах H_0 и H_1 из формул (13), (17) и (27) следует, что

$$\mathbf{E}_l \eta_n(T) = \sum_{m=1}^n \mathbf{D}_l v_m(n), \quad l = 0, 1.$$

Отсюда, из формул (13) и теоремы 3 получаем следующие два утверждения.

Следствие 1. При гипотезе H_0 и $T = n_0 n_1 \dots n_r L$

$$\mathbf{E}_0 \eta_n(T) = T/4, \quad n = n_0 n_1 \dots n_r.$$

Следствие 2. Если числа $n_0, n_1, \dots, n_r$ взаимно просты, то при гипотезе H_1 и $T = n_0 n_1 \dots n_r L$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 \eta_{n_0}(T) &= \frac{1}{4}(p^2 T^2 / n_0 + (1 - p^2)T), \\ \mathbf{E}_1 \eta_{n_0}(T) &= \frac{1}{4}(p^2 T^2 / (n n_0) + (1 - p^2)T), \quad n = n_0, \dots, n_r. \end{aligned}$$

Из полученных формул следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{4n_0}{p^2 T^2} \mathbf{E}_1 \eta_n(T) &= 1, \quad n = n_0, \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{4n_0}{p^2 T^2} \mathbf{E}_1 \eta_n(T) &= \frac{1}{n_i}, \quad n = n_1, \dots, n_r, \end{aligned}$$

Если получить несколько реализаций T первых членов последовательности $\{x_t\}$, то можно оценить $\mathbf{E}_1 \eta_n(T)$ и найти n_0 . Возможность определения n_0 по одной реализации рассматривается в следующем параграфе.

5. Моменты статистик относительно условных распределений

При любом $T > n_0$ случайные величины x_t , определенные равенствами (4), зависят от одних и тех же величин $y(n_0) = (y_1, \dots, y_{n_0})$. Найдем моменты частот и статистик при заданных значениях $y(n_0)$.

Из формул (21) и (22) следует, что

$$\mathbf{P}_1\{x_t = 1 \mid y_m\} = \frac{1}{2}(1 - (1 - 2y_m)p), \quad t \in M_m. \quad (28)$$

Величины $\hat{\theta}_m^{(T)}(n)$ представим в виде

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_m^{(T)}(n_0) &= \sum_{t \in M_n} (x_t - 1/2), \\ \hat{\theta}_m^{(T)}(n) &= \sum_{u=1}^{n_0} \sum_{t \in Z_m(n) \cap M_u} (x_t - 1/2), \quad n = n_1, \dots, n_r. \end{aligned} \quad (29)$$

Из равенства (28) при $t \in M_u$ получаем, что $\mathbf{E}_1(x_t - 1/2 \mid y_m) = p(y_m - 1/2)$. Отсюда следует, что по условному распределению с фиксированным $y(n_0)$ средние арифметические одинаково распределенных случайных величин $(n_i n_0 / T) \sum_{t \in Z_m(n_i) \cap M_u} (x_t - 1/2)$, $(n_0 / T) \sum_{t \in M_m} (x_t - 1/2)$ при $T \rightarrow \infty$ сходятся по вероятности к величинам $p(y_u - 1/2)$ и $p(y_m - 1/2)$ соответственно. Используя (29), получаем, что величины $(1/T)\hat{\theta}_m^{(T)}(n_i)$, $(1/T)\hat{\theta}_m^{(T)}(n_0)$ сходятся по вероятности к $(p/(n_i n_0))(\mu_{n_0} - n_0/2)$, $(p/n_0)(y_m - 1/2)$, $\mu_{n_0} = y_1 + \dots + y_{n_0}$, а также сходятся случайные величины $\eta_{n_i}(T)/T^2$ и $\eta_{n_0}(T)/T^2$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 5. Совместное условное распределение случайных величин $\eta_{n_i}(T)/T^2$, $\eta_{n_0}(T)/T^2$, $i = 1, \dots, r$, с фиксированным $y(n_0) = (y_1, \dots, y_{n_0})$ при $T \rightarrow \infty$ слабо сходится к вырожденному распределению, сосредоточенному в точке

$$\frac{p^2}{4n_0}, \quad \frac{p^2}{n_i n_0^2} \left(\mu_{n_0} - \frac{n_0}{2} \right)^2, \quad i = 1, \dots, r. \quad (30)$$

6. Примеры

Рассмотрим статистики

$$\zeta_n^{(1)}(T) = \xi_n^*(T), \quad \zeta_n^{(2)}(T) = \eta_n(T), \quad \zeta_n^{(3)}(T) = Y_n^*(T), \quad (31)$$

где $\zeta_n^{(1)}(T)$, $\zeta_n^{(2)}(T)$ определены формулами (23), (24) и (27), а

$$Y_n^*(T) = \frac{T}{2} |X(2\pi/n)|^2, \quad X(\omega) = \frac{2}{T} \sum_{t=1}^T (2x_t - 1) \exp\{i\omega t\}. \quad (32)$$

Статистики (31) введены вместо статистик (2) для удобства сравнения со статистиками $\xi_n^{(k)}(T)$. Статистики (2) зависят от частот $\omega_j = 2\pi j/T$ и занумерованы числами j , а статистики (32) занумерованы периодами n , соответствующими частотам ω_j с $j = T/n$.

Таблица 1.

k	$\zeta_n^{(k)}(T)$	$\hat{E}_{12}(k)$	$\hat{E}_{13}(k)$	$\hat{E}_{14}(k)$	$\hat{p}_{12}(k)$	$\hat{p}_{13}(k)$	$\hat{p}_{14}(k)$
1	$\xi_n^*(T)$	22,1	46,1	23,5	0	0,993	0,002
2	$\eta_n(T)$	113	413	105	0	0,983	0
3	$Y_n^*(T)$	2,01	8,59	1,81	0,049	0,590	0,049

Таблица 2.

k	$\zeta_n^{(k)}(T)$	$\hat{E}_{12}(k)$	$\hat{E}_{13}(k)$	$\hat{E}_{14}(k)$	$\hat{p}_{12}(k)$	$\hat{p}_{13}(k)$	$\hat{p}_{14}(k)$
1	$\xi_n^*(T)$	12,6	16,1	14,0	0,002	0,484	0,054
2	$\eta_n(T)$	99,3	179	96,6	0,037	0,620	0,035
3	$Y_n^*(T)$	1,96	3,70	2,00	0,083	0,270	0,095

Пусть $n_0 = 13$ и возможное множество периодов $\{n_0, n_1, \dots, n_8\} = \{8, 9, \dots, 16\}$, $T = 390$. Оценку $\hat{n}_0(k)$ периода n , найденную по последовательности (1) с использованием статистики $\zeta_n^{(k)}(T)$, определим равенством

$$\zeta_{\hat{n}_0(k)}^{(k)}(T) = \max_{8 \leq n \leq 16} \zeta_n^{(k)}(T),$$

Для иллюстрации свойств статистик (31) было смоделировано по 1000 реализаций $T = 390$ первых членов последовательности (1) при гипотезе H_1 с $p = 1/3$ и $p = 1/6$. Получены оценки $\hat{E}_n(k)$, $\hat{p}_n(k)$ величин

$$\mathbf{E}\zeta_n^{(k)}(T) = E_n(k), \quad p_n(k) = \mathbf{P}\{\hat{n}_0(k) = n\}, \quad k = 1, 2, 3, \quad 12 \leq n \leq 14.$$

Эти оценки приведены в табл. 1 для $p = 1/3$ и табл. 2 для $p = 1/6$.

Список литературы

1. Бриллинджер Д., *Временные ряды*. Мир, Москва, 1980.
2. Харин Ю. С., Берник В. И., Матвеев Г. В., Агиевич С. В., *Математические и компьютерные основы криптографии*. Новое знание, Минск, 2003.

Статья поступила 14.09.2006.