Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Кроткин, О. В. Кузьмин, О конструктивном подходе к вычислению мощности классов Райзера, *Дискрет. матем.*, 2009, том 21, выпуск 3, 33–36

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1059>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 18:28:12

О конструктивном подходе к вычислению мощности классов Райзера

© 2009 г. В. С. Кроткин, О. В. Кузьмин

Рассматривается задача вычисления мощности классов квадратных матриц, состоящих из нулей и единиц, с заданными значениями строчных и столбцовых сумм. Получено рекуррентное соотношение, позволяющее вычислять мощности данных классов. Для доказательства используется конструктивный подход — построение комбинаторных объектов с заданными характеристиками и подсчет числа различных объектов. Приводится пример использования полученного соотношения.

1. Введение

Матрица, состоящая из нулей и единиц, называется $(0, 1)$ -матрицей. Пусть $A = (a_{ij})$ — $(0, 1)$ -матрица размера $m \times n$. Будем следовать обозначениям книги [1]. Пусть r_i — сумма единиц в строке i , s_j — сумма единиц в столбце j , где $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Пусть $R = (r_1, \dots, r_m)$ и $S = (s_1, \dots, s_n)$ — два вектора, состоящие из значений строчных и столбцовых сумм.

Классом Райзера $\mathcal{R}^{n,m}(R, S)$ называется совокупность $(0, 1)$ -матриц размера $m \times n$ с заданными векторами $R = (r_1, \dots, r_m)$ и $S = (s_1, \dots, s_n)$ строчных и столбцовых сумм соответственно. С классами Райзера связаны следующие два фундаментальных вопроса.

Когда класс $\mathcal{R}^{n,m}(R, S)$ непуст?

Чему равно точное число матриц в классе $\mathcal{R}^{n,m}(R, S)$?

Ответом на первый вопрос служат критерии непустоты класса $\mathcal{R}^{n,m}(R, S)$, например, теорема Гейла–Райзера [1]. Более сложным оказывается второй вопрос о вычислении мощности $|\mathcal{R}^{n,m}(R, S)|$ класса Райзера, так называемая проблема Райзера.

Целочисленные неотрицательные $(0, 1)$ -матрицы были рассмотрены в конце пятидесятих годов 20-го века в работах Райзера, Фалкерсона и Гейла [2, 3] и с тех пор интенсивно изучаются. За полвека изучения проблемы Райзера были получены различные оценки мощности классов $\mathcal{R}^{n,m}(R, S)$, а также несколько вычислительных формул для определения точного числа матриц в заданном классе [4].

В нашей работе рассмотрен случай, когда $R = S = (k, \dots, k)$, $k \in \mathbb{Z}$, $m = n$. В данном случае класс $\mathcal{R}^{n,m}(R, S)$ обозначается $\mathcal{R}^n(k)$. Получено рекуррентное соотношение для вычисления $|\mathcal{R}^n(k)|$. Для доказательства этого соотношения используется конструктивный подход, в соответствии с принципами которого (см. [5]) строится алгоритм построения $(0, 1)$ -матриц размера $n \times n$, в каждой строке и каждом столбце которых ровно k единиц и $n - k$ нулей и подсчитывается их число. В заключение приводится пример, иллюстрирующий использование предложенного подхода, и дается таблица с результатами вычисления мощностей классов рассматриваемых матриц.

2. Вычисление мощности классов Райзера

Следующая теорема дает способ вычисления $|\mathcal{A}^n(k)|$.

Теорема 1. Число различных квадратных $(0, 1)$ матриц порядка n , в каждой строке и каждом столбце которых ровно k единиц и $n - k$ нулей, определяется равенством

$$|\mathcal{A}^n(k)| = A_n(0, \dots, 0),$$

где

$$A_n(n_1, \dots, n_k) = \sum_{i_1 + \dots + i_k = k} \binom{n - n_1}{i_1} \binom{n_1 - n_2}{i_2} \dots \binom{n_{k-1} - n_k}{i_k} \times A_n(n_1 + i_1, i_2 + i_2, \dots, n_k + i_k),$$

суммирование ведется по всем разбиениям k на k целых неотрицательных слагаемых, а $A_n(n, \dots, n) = 1$.

Доказательство. Рассмотрим квадратную матрицу порядка n , состоящую только из нулей. Под размещением единицы в матрице будем понимать замену одного из элементов, равных нулю, на единицу. На каждом шаге будем размещать в одной строке данной матрицы по k единиц, учитывая, что в итоге всех размещений в каждом столбце должно оказаться тоже k единиц. Размещения проводим последовательно, начиная с первой строки. Будем нумеровать шаги размещения с 1 до n .

Введем следующее обозначение. Пусть i_j^t — число единиц, размещаемых на шаге t , в столбцах, которые уже содержат ровно $j - 1$ единиц (не более одной единицы в каждом столбце).

Рассмотрим множество $I = \{i_j^t\}$, $j \in \{2, \dots, k\}$, $t \in \{1, \dots, n\}$.

На первом шаге размещения все столбцы содержат 0 единиц, поэтому $i_1^1 = k$, $i_2^1 = \dots = i_k^1 = 0$.

На втором шаге размещения существуют только столбцы, которые или не содержат единиц, или содержат только одну единицу, размещенную на первом шаге, поэтому $i_1^2 + i_2^2 = k$, $i_3^2 = \dots = i_k^2 = 0$. На третьем шаге $i_1^3 + i_2^3 + i_3^3 = k$, $i_4^3 = \dots = i_k^3 = 0$ и так далее. Аналогично на последнем шаге размещения $i_1^{n-1} = \dots = i_{k-1}^{n-1} = 0$, $i_k^n = k$, и на предпоследнем $i_1^{n-1} = \dots = i_{k-2}^{n-1} = 0$, $i_{k-1}^{n-1} = \dots = i_k^{n-1}$ и так далее.

После каждого шага размещения в k столбцов добавляется по одной единице.

После первого шага размещения будем иметь $n - i_1^1 = n - k$ столбцов, содержащих 0 единиц, $i_1^1 - i_2^1 = k$ столбцов, содержащих 1 единицу, $i_2^1 - i_3^1 = 0$ столбцов, содержащих 2 единицы, и так далее, наконец, $i_{k-1}^1 - i_k^1 = 0$ столбцов, содержащих $k - 1$ единиц.

После второго шага размещения будем иметь $n - i_1^1 - i_2^1 = n - k - i_2^1$ столбцов, содержащих 0 единиц, $i_1^1 - i_2^1 - i_2^1 - i_3^1 = k + i_2^1 - i_3^1$ столбцов, содержащих 1 единицу, $i_2^1 + i_2^2 - i_3^1 = i_2^2$ столбцов, содержащих 2 единицы, и так далее, наконец, $i_{k-1}^1 + i_{k-1}^2 - i_k^1 - i_k^2 = 0$ столбцов, содержащих $k - 1$ единиц.

Таким образом, число столбцов, в которых после шага $t - 1$ размещено $j - 1$ единиц, будет равно $i_{j-1}^1 + \dots + i_{j-1}^{t-1} - i_l^1 - \dots - i_j^{t-1} = 0$, $j \in \{2, \dots, k\}$, $t \in \{2, \dots, n\}$.

Введем обозначение $i_j^1 - \dots - i_j^{t-1} = n_j^t$, $l \in \{1, \dots, k\}$, $t \in \{2, \dots, n\}$.

Определим множество $N = \{n_j^t\}$. Положим $n_1^1 = n_2^1 = \dots = n_k^1 = 0$ и найдем, какие значения могут принимать элементы n_j^t , $j \in \{1, \dots, k\}$, $t \in \{2, \dots, n\}$. Учитывая

структуру множества $I = \{t_j^t\}$ получаем, что $n_1^2 = k$, $n_2^2 = \dots = n + k^2 = 0$, $n_1^3 = k + i_1^2$, $n_2^3 = i_2^2$, $n_3^4 = \dots = n_k^3 = 0$, и так далее.

Подсчитаем число $A_n^t(n_1^t, \dots, n_k^t)$ способов, которыми мы можем разместить k единиц на шаге t :

$$A_n^t(n_1^t, \dots, n_k^t) = \sum_{i_1^t + \dots + i_k^t = k} \binom{n - n_1^t}{t_1^t} \binom{n_1^t - n_2^t}{t_2^t} \dots \binom{n_{k-1}^t - n_k^t}{t_k^t},$$

где суммирование ведется по всем разбиениям натурального k на k целых неотрицательных слагаемых.

Зная множество значений, которые могут принимать наборы $(n_1^t, \dots, n_k^t)$, рассмотрим подробнее процесс размещения единиц на каждом шаге:

$$A_n^1(n_1^1, n_2^1, \dots, n_k^1) = A_n^1(0, 0, \dots, 0) = \sum_{i_1^1 = k} \binom{n}{i_1^1} = \binom{n}{k},$$

$$A_n^2(n_1^2, n_2^2, \dots, n_k^2) = A_n^2(k, 0, \dots, 0) = \sum_{i_1^2 + i_2^2 = k} \binom{n - k}{i_1^2} = \binom{n - k}{i_1^2} \binom{k}{i_2^2},$$

$$A_n^3(n_1^3, n_2^3, \dots, n_k^3) = A_n^3(k + i_1^2, i_2^2, \dots, 0) = \sum_{i_1^3 + i_2^3 + i_3^3 = k} \binom{n - k - i_1^2}{i_1^3} k + i_1^2 - i_2^2 i_2^2 \binom{i_2^2}{i_3^3}$$

и так далее.

Очевидно, что

$$|\mathfrak{A}^n(k)| = \prod_{t=1}^n A_n^t(n_1^t, \dots, n_k^t),$$

Используя свойства биномиальных коэффициентов и ограничения на их индексы, избавимся от параметра t и запишем данное произведение в виде рекуррентного соотношения, которое соответствует описанному пошаговому процессу размещения и при заданных начальных и конечных условиях дает число всех $n \times n$ матриц, в каждой строке и каждом столбце которых ровно k единиц и $n - k$ нулей,

$$A_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \sum_{i_1 + \dots + i_k} \binom{n - n_1}{i_1} \binom{n_1 - n_2}{i_2} \dots \binom{n_{k-1} - n_k}{i_k} \\ \times A_n(n_1 = i_1, n_2 + i_2, \dots, n_k + i_k),$$

где суммирование ведется по всем разбиениям k на k целых неотрицательных слагаемых с начальными условиями $n_1 = n_2 = \dots = n + k = 0$ и конечными условиями $n_1 = n_2 = \dots = n + k = n$. Теорема доказана.

3. Примеры

Рассмотрим применение полученного соотношения для вычисления $|\mathfrak{A}^n(k)|$.

Таблица 1.

$n \backslash k$	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	2	1				
3	3!	3!	1			
4	4!	90	4!	1		
5	5!	2040	2040	5!	1	
6	6!	67950	29720	67950	6!	1

Пример 1. Найдем $|\mathfrak{U}^3(2)| = A_3(0, 0)$. Воспользовавшись теоремой 1, получаем, что

$$A_3(0, 0) = \sum_{i_1+i_2=2} \binom{3}{i_1} \binom{0}{i_2} A_3(0+i_1, 0+i_2) = \binom{3}{2} \binom{0}{0} A_3(2, 0),$$

$$A_3(2, 0) = \sum_{i_1+i_2=2} \binom{3-2}{i_1} \binom{2}{i_2} A_3(2+i_1, 0+i_2) = \binom{1}{0} \binom{2}{2} A_3(2, 2) + \binom{1}{1} \binom{2}{1} A_3(3, 1),$$

$$A_3(2, 2) = \sum_{i_1+i_2=2} \binom{1}{i_1} \binom{0}{i_2} A_3(2+i_1, 2+i_2) = 0,$$

$$A_3(3, 1) = \sum_{i_1+i_2=2} \binom{0}{i_1} \binom{2}{i_2} A_3(3+i_1, 1+i_2) = \binom{0}{0} \binom{2}{2} A_3(3, 3) = 1.$$

В итоге получаем, что $\mathfrak{U}^3(2) = A_3(0, 0) = 6$.

Таким же образом можно вычислить мощности классов Райзера $\mathfrak{U}^n(k)$ при $k, n \in 1, \dots, 6$, их значения представлены в табл. 1.

Список литературы

1. Сачков В. Н., Тараканов В. Е., *Комбинаторика неотрицательных матриц*. ТВП, Москва, 2000.
2. Gale D., A theorem on flows in networks. *Pacific J. Math.* (1957) **7**, 1073–1082.
3. Ryser H. J., Combinatorial properties of matrices of zeros and ones. *Canadian J. Math.* (1957) **9**, 371–377.
4. Wang B. Y., Zhang F., On the precise number of $(0, 1)$ -matrices in $U(R, S)$. *Discrete Math.* (1998) **187**, 211–220.
5. Марков А. А., *О логике конструктивной математики*. Знание, Москва, 1972.

Статья поступила 15.04.2009.