Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Марченков, Позитивно замкнутые классы трехзначной логики, порождаемые одноместными функциями, *Дискрет. матем.*, 2009, том 21, выпуск 3, 37–44

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1060>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 15:42:23

Позитивно замкнутые классы трехзначной логики, порождаемые одноместными функциями

© 2009 г. С. С. Марченков

На множестве P_3 функций трехзначной логики рассматривается оператор позитивного замыкания. Устанавливается, что в P_3 имеется ровно 51 позитивно замкнутый класс, позитивно порождаемый одноместными функциями. Из них 26 классов порождаются единственной одноместной функцией (включая один из позитивно предполных в P_3 классов), а 25 классов — двумя функциями (включая класс P_3 и остальные 9 позитивно предполных классов).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 06-01-00438.

1. Введение

Один из возможных способов классификации множества P_k функций k -значной логики состоит в задании на множестве P_k оператора замыкания Cl . Совокупность всех классов (как правило, пересекающихся), замкнутых относительно оператора Cl , образует Cl -классификацию множества P_k . Известно, что для оператора суперпозиции соответствующая классификация множества P_2 счетна [7, 8], а при $k \geq 3$ классификация множества P_k континуальна [6]. В связи с этим представляют интерес “сильные” операторы замыкания, которые при любом $k \geq 3$ приводят к конечным либо счетным классификациям.

В работе [2] автором введен оператор Pos позитивного замыкания и установлено, что при любом $k \geq 2$ число позитивно замкнутых классов в P_k конечно. Исследование оператора позитивного замыкания было продолжено в работах [3, 4]. В частности, в P_3 были найдены все (их оказалось 10) позитивно предполные классы [3], а также все (в количестве 17) дискриминаторные позитивно замкнутые классы [4]. При этом обнаружилось, что в P_3 многие довольно крупные позитивно замкнутые классы позитивно порождаются множествами одноместных функций. Это справедливо, например, для класса P_3 и всех предполных в нем классов [3]. Однако, предположение о том, что все позитивно замкнутые классы в P_3 имеют позитивные базисы, состоящие из одноместных функций, неверно — опровержением может служить часть из дискриминаторных классов [4].

Ряд фактов, найденных при исследовании позитивно замкнутых классов в P_3 , указывает на то, что, по-видимому, большинство позитивно замкнутых классов в P_3 все же позитивно порождаются множествами одноместных функций. В настоящей работе мы описываем все 51 позитивно замкнутых класса в P_3 , которые имеют позитивные базисы из одноместных функций. Большая часть из этих классов описывается впервые. При

доказательстве отделимости найденных замкнутых классов используются два приема: отделение с помощью пересечений позитивно предполных классов и отделение с помощью полугрупп эндоморфизмов.

2. Основные понятия

Пусть $E_3 = \{0, 1, 2\}$, P_3 — множество всех функций на E_3 (множество функций трехзначной логики). Если $Q \subseteq P_3$, то через $Q^{(1)}$ обозначаем множество всех одноместных функций из Q . Для функций $g \in P_3^{(1)}$ в дальнейшем используем обозначение $(g(0)g(1)g(2))$. Например, (210) есть функция из $P_3^{(1)}$, принимающая значения 2, 1, 0 соответственно при $x = 0, 1, 2$.

Пусть π — перестановка на E_3 и $g \in P_3$. Функция

$$g^\pi(x_1, \dots, x_n) = \pi^{-1}(g(\pi(x_1), \dots, \pi(x_n)))$$

называется двойственной к функции g относительно перестановки π . Если $g = g^\pi$, то функция g называется самодвойственной относительно перестановки π . Множества всех функций из P_3 , самодвойственных относительно перестановок $x + 1$, $2x$, $2x + 2$, $2x + 1$ (здесь и далее сложение и умножение рассматриваются по модулю 3), обозначим через S_{x+1} , S_{2x} , S_{2x+2} , S_{2x+1} соответственно.

Пусть T_0, T_1, T_2 обозначают множества всех функций из P_3 , сохраняющих соответственно 0, 1, 2. Положим

$$T_{01} = T_0 \cap T_1, \quad T_{02} = T_0 \cap T_2, \quad T_{12} = T_1 \cap T_2.$$

Напомним основные понятия, связанные с оператором позитивного замыкания [2]. Вначале определим язык Pos. Исходными символами языка Pos являются символы предметных переменных $x_1, x_2, \dots$ (с областью значений E_3), символы $f_i^{(n)}$ для обозначения n -местных функций из P_3 , знаки равенства $=$, конъюнкции $\&$, дизъюнкции $\vee$, квантор существования $\exists$, левая и правая скобки и запятая. Иногда вместо символов переменных $x_1, x_2, \dots$ будем использовать символы x, y, z .

Терм в языке Pos определим по индукции. Символ предметной переменной есть терм; если $x_{j_1}, \dots, x_{j_n}$ — символы предметных переменных (не обязательно различные), а $f_i^{(n)}$ — символ n -местной функции, то $f_i^{(n)}(x_{j_1}, \dots, x_{j_n})$ есть терм; если $t_1, \dots, t_m$ — термы, а $f_l^{(m)}$ — символ m -местной функции, то $f_l^{(m)}(t_1, \dots, t_m)$ есть терм. Других термов в языке Pos нет.

Всякий терм языка Pos очевидным образом определяет некоторую функцию класса P_3 (переменная определяет тождественную функцию).

Если t_1, t_2 — термы языка Pos, то выражение $(t_1 = t_2)$ называем элементарной формулой языка Pos. Далее, если Φ_1, Φ_2 — формулы языка Pos, а x_i — символ предметной переменной, то $(\Phi_1 \& \Phi_2)$, $(\Phi_1 \vee \Phi_2)$, $(\exists x_i)\Phi_1$ — также формулы языка Pos. Понятия свободной и связанной переменных предполагаем известными.

Всякая формула языка Pos с m свободными переменными определяет некоторое m -местное отношение на E_3 . Пусть $Q \subseteq P_3$, $\Phi(x_1, \dots, x_m)$ — формула языка Pos со свободными переменными $x_1, \dots, x_m$, все функциональные символы которой суть обозначения функций из Q , и формула $\Phi(x_1, \dots, x_m)$ определяет отношение $\rho(x_1, \dots, x_m)$ на E_3 . В этом случае говорим, что формула Φ позитивно выражает отношение ρ через функции множества Q . Понятие позитивной выразимости перенесем с отношений на функции.

Именно, если $g(x_1, \dots, x_m)$ — функция из P_3 , а формула $\Phi(x_1, \dots, x_m, y)$ языка Pos позитивно выражает отношение $g(x_1, \dots, x_m) = y$ (график функции g) через функции множества Q , то говорим, что формула Φ позитивно выражает функцию g через функции множества Q . Совокупность всех функций, позитивно выражимых через функции множества Q , называем позитивным замыканием множества Q и обозначаем $\text{Pos}[Q]$. Множества вида $\text{Pos}[Q]$ называем позитивно замкнутыми классами.

Известные для операции суперпозиции понятия полноты, порождающей системы и базиса [5] распространяем на оператор позитивного замыкания. Отметим [2], что любой позитивно замкнутый класс содержит тождественную функцию x и замкнут относительно операции суперпозиции. Кроме того, в [3] доказано, что для любой перестановки π и любого i классы T_i множества S_π позитивно замкнуты. Позитивно замкнутым будет и пересечение любого числа таких классов.

Определим классы $V_{01}, V_{02}, V_{10}, V_{12}, V_{20}, V_{21}$ как позитивные замыкания следующих множеств одноместных функций: $\{0, (002), (010), (220), 2\}$, $\{0, (002), (010), (101), 1\}$, $\{(011), 1, (112), (221), 2\}$, $\{0, (011), (100), 1, (112)\}$, $\{(022), 1, (121), (212), 2\}$, $\{0, (022), (200), (212), 2\}$. В [3] показано, что классы $V_{01}, V_{02}, V_{10}, V_{12}, V_{20}, V_{21}$ являются позитивно предполными в P_3 , а множества их одноместных функций состоят из функций представленных выше порождающих систем и тождественной функции x .

3. Предварительные результаты

В дальнейшем мы неоднократно пользуемся следующим принципом двойственности для позитивной выразимости, который установлен в работе [2] (его формулировку приводим для класса P_3).

Пусть π — перестановка на множестве $E_3, \{g_1, \dots, g_m\} \subset P_3$ и формула Φ языка Pos позитивно выражает функцию g через функции $g_1, \dots, g_m$. Тогда функция g^π позитивно выражима через функции $g_1^\pi, \dots, g_m^\pi$ формулой Φ^π , которая получается из формулы Φ заменой всех символов функций $g_1, \dots, g_m$ соответственно символами двойственных функций $g_1^\pi, \dots, g_m^\pi$.

Пусть $Q \subseteq P_3^{(1)}$. Если Q целиком не содержится ни в одном из десяти позитивно предполных в P_3 классов $S_{x+1}, T_0, T_1, T_2, V_{01}, V_{02}, V_{10}, V_{12}, V_{20}, V_{21}$, то, согласно критерию позитивной полноты [3], множество Q является позитивно полным в P_3 . Поэтому далее будем рассматривать лишь такие множества Q , которые целиком входят хотя бы в один из позитивно предполных классов.

Пусть $Q \subseteq S_{x+1}^{(1)}$. Поскольку $S_{x+1}^{(1)} = \{x, x+1, x+2\}$, множество Q либо включает одну из функций $x+1, x+2$ (на самом деле одновременно обе), либо состоит только из функции x . Однако каждая из функций $x+1, x+2$ позитивно порождает класс S_{x+1} (см. [3]). Таким образом, либо $\text{Pos}[Q] = S_{x+1}$, либо $\text{Pos}[Q] = \text{Pos}[x]$. Отметим, что $\text{Pos}[x]$ есть наименьший позитивно замкнутый класс в P_3 .

При рассмотрении случаев $Q \subseteq T_i^{(1)}, i = 0, 1, 2$, мы бы хотели сразу исключить из множеств Q функции $2x, 2x+2, 2x+1$. Это можно сделать на основе следующих соображений. Функции $2x, 2x+2, 2x+1$ образуют позитивные базисы соответственно классов $S_{2x}, S_{2x+2}, S_{2x+1}$ (см. [4]). Эти классы непосредственно содержатся соответственно только в позитивно предполных классах T_0, T_1, T_2 (см. [4]). Значит, множество Q , содержащее, например, функцию $2x$, позитивно порождает либо класс S_{2x} , либо класс T_0 , либо класс P_3 .

Итак, в дальнейшем будем предполагать, что ни одна из функций $2x, 2x+2, 2x+1$

не входит в множество Q .

Из трех двойственных друг другу классов T_0, T_1, T_2 рассмотрим только класс T_0 . Выпишем все функции множества $T_0^{(1)}$, отличные от функций $x, 2x$:

$$0, (001), (002), (010), (011), (020), (022). \quad (1)$$

Лемма 1. *Каждая из систем функций*

$$\begin{aligned} &\{(001), (002)\}, \{(001), (010)\}, \{(001), (011)\}, \{(001), (020)\}, \\ &\{(001), (022)\}, \{(002), (011)\}, \{(002), (020)\}, \{(010), (020)\}, \\ &\{(010), (022)\}, \{(011), (020)\}, \{(011), (022)\}, \{(020), (022)\} \end{aligned} \quad (2)$$

позитивно порождает класс T_0 .

Доказательство. Начнем с системы $\{(001), (002)\}$. Суперпозицией функции (001) получаем константу 0. Далее,

$$(y = 2x) \equiv (\exists z)((001)(z) = x) \& ((002)(z) = y) \vee ((002)(x) = x) \& (y = (001)(x)).$$

Таким образом, $S_{2x} \subset \text{Pos}[(001), (002)]$. Как отмечалось выше, класс S_{2x} непосредственно содержится только в позитивно предполном классе T_0 . Поскольку $(001) \notin S_{2x}$, получаем, что $\text{Pos}[(001), (002)] = T_0$.

В случае системы $\{(001), (010)\}$ получаем функцию (002):

$$(y = (002)(x)) \equiv ((001)(x) = 0) \& (y = 0) \vee ((010)(x) = 0) \& (y = x).$$

В случае системы $\{(001), (011)\}$ получаем функцию (010):

$$(y = (010)(x)) \equiv ((001)(x) = 0) \& (y = x) \vee ((001)(x) = (011)(x)) \& (y = 0).$$

В случае системы $\{(001), (020)\}$ получаем функцию (002):

$$(y = (002)(x)) \equiv ((001)(x) = 0) \& (y = 0) \vee ((020)(x) = 0) \& (y = x).$$

В случае системы $\{(001), (022)\}$ получаем функцию (020):

$$(y = (020)(x)) \equiv ((001)(x) = 0) \& (y = (022)(x)) \vee ((022)(x) = x) \& (y = 0).$$

В случае системы $\{(002), (011)\}$ получаем функцию (001):

$$(y = (001)(x)) \equiv ((002)(x) = 0) \& (y = 0) \vee ((002)(x) = x) \& (y = (011)(x)).$$

Остальные системы списка (2) двойственны рассмотренным системам относительно перестановки $2x$ (класс T_0 перестановкой $2x$ переводится в себя). Лемма доказана.

Список (2) содержит все пары ненулевых функций из (1) за исключением трех пар $\{(002), (010)\}, \{(002), (022)\}, \{(010), (011)\}$. Однако, как установлено в [4], система $\{(002), (022)\}$ позитивно порождает класс T_{02} , а система $\{(010), (011)\}$ — класс T_{01} . Кроме того, класс T_{02} непосредственно содержится только в позитивно предполных классах T_0 и T_2 , а класс T_{01} — в классах T_0 и T_1 . Следовательно, дальнейшие расширения систем $\{(002), (022)\}$ и $\{(010), (011)\}$ функциями из (1) приводят к позитивно полным множествам в классе T_0 .

Рассмотрим систему $\{(002), (010)\}$. Очевидно, что константа 0 получается суперпозицией функций (002) и (010) . Заметим далее, что 0, (002) , (010) суть все функции из множества $T_0^{(1)} \cap V_{01}^{(1)}$, отличные от x . Следовательно, множество всех одноместных функций позитивного замыкания системы $\{(002), (010)\}$ будет состоять в точности из функций 0, (002) , (010) , x . Дальнейшие расширения этого множества функциями из (1) в силу леммы 1 дают множества, позитивно полные в классе T_0 .

Обратимся теперь к системам $\{0, (002)\}$, $\{0, (010)\}$, $\{0, (011)\}$, $\{0, (022)\}$. Системы $\{0, (002)\}$, $\{0, (010)\}$ позитивно порождают тот же класс, что и система $\{(002), (010)\}$, поскольку

$$(y = (010)(x)) \equiv ((002)(x) = 0) \& (y = x) \vee ((002)(x) = x) \& (y = 0)$$

и система $\{0, (010)\}$ двойственна системе $\{0, (002)\}$ относительно перестановки $2x$.

Функции 0, (011) вместе с функцией x образуют множество $T_0^{(1)} \cap V_{12}^{(1)}$. Поэтому множество всех одноместных функций из $\text{Pos}[0, (011)]$ будет совпадать с множеством $T_0^{(1)} \cap V_{12}^{(1)}$. Данное свойство является характеристическим для позитивного замыкания $\text{Pos}[0, (011)]$. Дальнейшие расширения системы $\{0, (011)\}$ функциями из списка (1) исследованы выше.

Система $\{0, (022)\}$ двойственна системе $\{0, (011)\}$ относительно перестановки $2x$.

Оставшиеся две системы $\{0, (001)\}$, $\{0, (020)\}$ из двух функций будут исследованы в разделе 3. Отметим лишь, что с точки зрения позитивного замыкания в каждой из этих систем можно было бы оставить по одной ненулевой функции.

Завершая рассмотрение подмножеств множества (1), обратимся к одноэлементным системам $\{0\}$, $\{(002)\}$, $\{(010)\}$, $\{(011)\}$, $\{(022)\}$. Заметим, что множества

$$\{0, x\}, \quad \{(002), x\}, \quad \{(011), x\} \quad (3)$$

совпадают соответственно с множествами

$$V_{01}^{(1)} \cap V_{12}^{(1)}, \quad T_0^{(1)} \cap T_2^{(1)} \cap V_{01}^{(1)}, \quad T_0^{(1)} \cap V_{10}^{(1)}. \quad (4)$$

Поэтому, как и выше, множества (4) будут совпадать с множествами всех одноместных функций из позитивных замыканий систем (3). Это свойство является определяющим для позитивных замыканий систем $\{0\}$, $\{(002)\}$, $\{(011)\}$. О дальнейших расширениях данных систем функциями из (1) уже говорилось выше.

Остается отметить, что функции (010) , (022) двойственны функциям (002) , (011) относительно перестановки $2x$.

Итак, из всех подмножеств множества (1) остается рассмотреть одноэлементные множества $\{(001)\}$ и $\{(020)\}$.

Перейдем к случаю, когда Q есть подмножество одного из множеств $V_{01}^{(1)}$, $V_{02}^{(1)}$, $V_{10}^{(1)}$, $V_{12}^{(1)}$, $V_{20}^{(1)}$, $V_{21}^{(1)}$. Поскольку классы $V_{01}, \dots, V_{21}$ попарно двойственны, мы рассмотрим, например, класс V_{02} .

Лемма 2. Каждая из систем функций $\{0, (101)\}$, $\{(002), (101)\}$, $\{(002), 1\}$, $\{(101), 1\}$, $\{0, (010), 1\}$ позитивно порождает класс V_{02} .

Доказательство. Рассмотрим систему $\{0, (101)\}$. Функции (010) , 1 получаются из функций 0, (101) суперпозициями. Далее,

$$(y = (002)(x)) \equiv ((010)(x) = x) \& (y = 0) \vee ((010)(x) = 0) \& (y = x).$$

К системе $\{0, (101)\}$ сводится система $\{(002), (101)\}$, поскольку константа 0 получается в последней системе суперпозицией.

В случае системы $\{(002), 1\}$ сначала получаем константу 0, а затем образуем функцию (101):

$$(y = (101)(x)) \equiv ((002)(x) = x) \& (y = 1) \vee (x = 1) \& (y = 0).$$

В случае системы $\{(101), 1\}$ константа 0 получается очевидным образом. В случае системы $\{0, (010), 1\}$ образуем функцию (101):

$$(y = (101)(x)) \equiv ((010)(x) = 0) \& (y = 1) \vee (x = 1) \& (y = 0).$$

Лемма доказана.

Ввиду леммы 2, из подмножеств множества $V_{02}^{(1)}$, не содержащихся целиком в классе T_0 , подлежат исследованию лишь следующие множества (мы опускаем функцию x , которая присутствует в любом позитивно замкнутом классе): $\{(101)\}$, $\{1\}$, $\{0, 1\}$, $\{(010), 1\}$. Однако множества $\{1\}$ и $\{(010), 1\}$ двойственны множествам $\{0\}$ и $\{0, (011)\}$ относительно перестановки $2x + 1$. Далее, справедливо соотношение

$$\{0, 1, x\} = V_{02}^{(1)} \cap V_{12}^{(1)}.$$

Отсюда следует, что в позитивное замыкание системы $\{0, 1\}$ из числа одноместных функций входят лишь функции 0, 1, x . Это свойство можно считать характеристическим для замыкания $\text{Pos}[0, 1]$. В силу леммы 2, дальнейшие расширения системы $\{0, 1\}$ функциями из $V_{02}^{(1)}$, отличными от x , приводят к множествам, позитивно полным в классе V_{02} .

Система $\{(101)\}$ будет рассмотрена в следующем разделе.

4. Основной результат

Применительно к целям нашего исследования рассмотрим частный случай общего понятия эндоморфизма универсальной алгебры [1]. Пусть $Q = \{g_1, \dots, g_s\}$ — множество функций из P_3 , φ — отображение из E_3 в E_3 (не обязательно инъективное). Будем говорить, что φ — эндоморфизм множества Q , если для любого i , $1 \leq i \leq s$, и любых элементов $a_1, \dots, a_{n_i}$ из E_3 выполняется соотношение

$$g_i(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_{n_i})) = \varphi(g_i(a_1, \dots, a_{n_i})).$$

Из определения сразу следует, что эндоморфизм множества Q является эндоморфизмом тождественной функции x и любой суперпозиции функций из Q . Кроме того, композиция (суперпозиция) двух эндоморфизмов множества Q также есть эндоморфизм множества Q . Легко понять, что тождественное отображение всегда является эндоморфизмом множества Q .

Обозначим через $\text{End}(Q)$ совокупность всех эндоморфизмов множества Q . Из приведенные выше фактов следует, что $\text{End}(Q)$ вместе с бинарной операцией композиции образует полугруппу отображений множества E_3 в себя с единицей, которой является тождественное отображение.

Лемма 3. Пусть $Q \subset P_3$ и функция $g(x_1, \dots, x_n)$ определяется позитивной формулой над Q . Тогда $\text{End}(Q) \subseteq \text{End}(g)$.

Доказательство. Пусть позитивная формула $\Phi(x_1, \dots, x_n, y)$ над множеством Q определяет отношение $y = g(x_1, \dots, x_n)$. Возьмем произвольный набор $(a_1, \dots, a_n)$ из E_3^n и пусть $b = g(a_1, \dots, a_n)$. Тогда значение $\Phi(a_1, \dots, a_n, b)$ истинно. Покажем, что для любого эндоморфизма $\varphi \in \text{End}(Q)$ значение $\Phi(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n), \varphi(b))$ также истинно. Отсюда будет следовать, что

$$\varphi(b) = g(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)),$$

то есть φ — эндоморфизм функции g .

Предположим, что $z_1, \dots, z_m$ — все связанные переменные формулы Φ . Пусть

$$t_1(x_1, \dots, x_n, y, z_1, \dots, z_m) = t_2(x_1, \dots, x_n, y, z_1, \dots, z_m) \quad (5)$$

— равенство над Q , входящее в формулу Φ , и h_1, h_2 — функции, реализуемые термами t_1, t_2 . Будем далее предполагать, что при установлении истинности значения $\Phi(a_1, \dots, a_n, b)$ связанные переменные $z_1, \dots, z_m$ формулы Φ принимают значения $c_1, \dots, c_m$, а равенство (5) выполняется на наборе $(a_1, \dots, a_n, b, c_1, \dots, c_m)$. Следовательно, в этом случае

$$h_1(a_1, \dots, a_n, b, c_1, \dots, c_m) = h_2(a_1, \dots, a_n, b, c_1, \dots, c_m). \quad (6)$$

Поскольку функции h_1, h_2 реализуются суперпозициями функций из Q , либо совпадают с тождественной функцией и $\varphi \in \text{End}(Q)$, при $i = 1, 2$ будут справедливы равенства

$$h_i(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n), \varphi(b), \varphi(c_1), \dots, \varphi(c_m)) = \varphi(h_i(a_1, \dots, a_n, b, c_1, \dots, c_m)). \quad (7)$$

Из (6), (7) выводим, что

$$\begin{aligned} h_1(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n), \varphi(b), \varphi(c_1), \dots, \varphi(c_m)) \\ = h_2(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n), \varphi(b), \varphi(c_1), \dots, \varphi(c_m)). \end{aligned}$$

Таким образом, из выполнимости (5) на наборе $(a_1, \dots, a_n, b, c_1, \dots, c_m)$ вытекает выполнимость этого равенства на наборе $(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n), \varphi(b), \varphi(c_1), \dots, \varphi(c_m))$.

Это, в свою очередь, означает, что если при установлении истинности значения $\Phi(a_1, \dots, a_n, b)$ в качестве значений связанных переменных $z_1, \dots, z_m$ были выбраны значения $c_1, \dots, c_m$, то для установления истинности $\Phi(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n), \varphi(b))$ в качестве значений переменных $z_1, \dots, z_m$ следует выбрать значения $\varphi(c_1), \dots, \varphi(c_m)$. Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть g — одна из функций (001), (101). Тогда множество всех одноместных функций из позитивного замыкания функции g состоит из функций $x, g(x), g(g(x))$.

Доказательство. Нетрудно убедиться в том, что $\text{End}(\{(001)\})$ состоит только из функций 0, (001), x . Для любой одноместной функции h , отличной от функций 0, (001), x , находим такую функцию φ из множества $\{0, (001)\}$, которая не является эндоморфизмом функции h . Если функция h не сохраняет 0, то в качестве функции φ следует взять константу 0. В противном случае в качестве функции φ можно взять функцию (001). Далее применяем лемму 3.

Перейдем к функции (101). Проверяем, что $\text{End}(\{(101)\})$ состоит только из функций (010), (101), x . Если $h(x) \in \{0, (002), 1\}$, то эндоморфизмом функции h не является функция (101), во всех остальных случаях — функция (010). Лемма доказана.

Итогом проведенных выше исследований является следующая теорема.

Теорема 1. В P_3 существует ровно 51 позитивно замкнутый класс, позитивно порождаемый множеством одноместных функций. Это 26 классов, позитивно порождаемых единственной одноместной функцией (включая позитивно предполный класс S_{x+1} и классы S_{2x} , S_{2x+2} , S_{2x+1}), и 25 классов, позитивно порождаемых двумя одноместными функциями: класс P_3 , позитивно предполные классы T_0 , T_1 , T_2 , V_{01} , V_{02} , V_{10} , V_{12} , V_{20} , V_{21} , классы T_{01} , T_{02} , T_{12} , а также 12 классов, позитивно порождаемых системами функций $\{0, (002)\}$, $\{0, (011)\}$, $\{0, (022)\}$, $\{0, 1\}$, $\{0, 2\}$, $\{(002), 2\}$, $\{(010), 1\}$, $\{(011), 1\}$, $\{1, (212)\}$, $\{1, 2\}$, $\{(112), 2\}$, $\{(212), 2\}$.

Список литературы

1. Кон П., *Универсальная алгебра*. Мир, Москва, 1968.
2. Марченков С. С., О выразимости функций многозначной логики в некоторых логико-функциональных языках. *Дискретная математика* (1999) **11**, №4, 110–126.
3. Марченков С. С., Критерий позитивной полноты в трехзначной логике. *Дискретный анализ и исследование операций. Сер. I* (2006) **13**, №3, 27–39.
4. Марченков С. С., Дискриминаторные позитивно замкнутые классы трехзначной логики. *Дискретный анализ и исследование операций. Сер. I* (2007) **14**, №3, 53–66.
5. Яблонский С. В., *Введение в дискретную математику*. Наука, Москва, 1986.
6. Янов Ю. И., Мучник А. А., О существовании k -значных замкнутых классов, не имеющих базиса. *Доклады АН СССР* (1959) **127**, №1, 44–46.
7. Post E. L., Introduction to a general theory of elementary propositions. *Amer. J. Math.* (1921) **43**, 163–185.
8. Post E. L., *Two-valued iterative systems of mathematical logic*. Princeton Univ. Press, Princeton, 1941.

Статья поступила 9.10.2008.